

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

LAURENT GUILLOPÉ

Billards rationnels et espaces de Teichmüller

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 33-42

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__33_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BILLARDS RATIONNELS ET ESPACES DE TEICHMÜLLER

par *Laurent GUILLOPÉ*

Par billard rationnel, on entendra l'intérieur d'un polygone du plan euclidien dont les angles sont commensurables à π . Sur l'espace tangent (identifié au cotangent grâce à la métrique riemannienne), on a le système dynamique (singulier) d'hamiltonien p^2 , avec réflexions sur le bord de Q obéissant à la loi *angle d'incidence = angle de réflexion*. L'hamiltonien d'énergie p^2 étant une intégrale première, on réduit l'étude de ce système dynamique au fibré unitaire tangent $S^1Q = Q \times S^1$. Orientons le bord de Q positivement, notons par $S = \{s_j\}$ l'ensemble des sommets de Q , $A = \{a_i\}$ l'ensemble de ses arêtes, σ_i la symétrie (de partie linéaire $\tilde{\sigma}_i$) par rapport à a_i , Γ le groupe diédral engendré par les $\tilde{\sigma}_i$. On étudiera le système dynamique (singulier) sur l'espace des phases $P = (Q - S) \times S^1 / \sim$ où \sim est la relation d'identification de (x, θ) avec $(x, \tilde{\sigma}_i \theta)$, $((x, \theta) \in a_i \times S^1)$. On note par π_1 (π_2 resp.) l'application naturelle de P sur Q (S^1/Γ resp.).

Dans une série d'articles ([5,7,8]), Masur (*et alii*) étudie notamment les questions suivantes :

- ergodicité sur la surface $\pi_2^{-1}(\pi_2(p_0))$, $p_0 \in P$;
- existence de trajectoires périodiques, taille de la projection sur S^1/Γ de leur ensemble;
- fonction de comptage des classes d'homotopie de trajectoires périodiques primitives suivant leur longueur.

Dans le cas où Q est un rectangle (situation où on peut facilement désingulariser le système en un système intégrable au sens des systèmes hamiltoniens), le lecteur répondra lui-même à ces questions : les résultats de Masur donnent des réponses analogues dans le cas général (qualifié de pseudo-intégrable dans [2]):

- pour presque tout $\bar{\theta}$ dans S^1/Γ , le système restreint à $\pi_2^{-1}(\bar{\theta})$ est uniquement ergodique (*i.e.* il n'existe qu'une mesure de probabilité invariante sur $\pi_2^{-1}(\bar{\theta})$);
- il y a un ensemble dense de directions dans S^1/Γ qui correspondent à une

une trajectoire périodique;

- la fonction de comptage associée aux trajectoires périodiques est à croissance quadratique (on a l'existence, et la forme, d'un asymptotique seulement dans le cas du rectangle et les cas s'y ramenant).

On expose ici les différentes étapes de la preuve du résultat de densité de l'ensemble des directions à trajectoire périodique. On verra comment se ramener à un problème de différentielle quadratique sur une surface de Riemann et le rôle joué par l'espace de Teichmüller et son espace tangent muni de son flot canonique (dit géodésique ou de Teichmüller).

Pour les billards plans non rationnels, on renvoie à Katok ([4]).

1. Surfaces de Riemann et différentielles quadratiques

Soit S_Γ^1 l'ensemble des points réguliers (i.e. dont la stabilisateur dans Γ est trivial) de S^1 sous l'action de Γ .

La fibre $\pi_2^{-1}(\bar{\theta})$ est une surface compacte (avec bord si θ n'est pas régulier), à un ensemble de points fini près, se projetant via π_1 sur l'ensemble des sommets de Q .

Pour θ régulier, soit Σ_θ la surface construite à partir de $\|\Gamma$ exemplaires de Q (les faces de Σ_θ), où on a identifié γQ et $\sigma_i \gamma Q$ suivant l'arête a_i . La surface Σ_θ est identifiable à la fibre $\pi_2^{-1}(\bar{\theta})$, complétée au-dessus des sommets de Q . Les projections π_1, π_2 seront étendues naturellement à Σ_θ .

Si θ et φ sont dans la même composante connexe C de S_Γ^1 , Σ_θ et Σ_φ sont isomorphes (car ceci est localement vrai dans C). Par ailleurs, Σ_θ et $\Sigma_{\bar{\sigma}_i \theta}$ sont isomorphes : soit $p = (m, \theta)$ tel que le point singulier (dans $S^1 Q$) le plus proche de p sur la trajectoire T_p passant par p soit sur l'arête a_i et p' le point symétrique de p sur T_p par rapport à ce point singulier ; on identifiera $((\sigma_i Q)_{\Sigma_\theta}, p')$ et $(Q_{\Sigma_{\sigma_i \theta}}, p')$. Au mot m en les σ_i , trivial dans Γ , est associé un automorphisme de Σ_θ , qui est l'identité. On identifiera par la suite les surfaces Σ_θ à une même surface $\Sigma(Q)$. Au système dynamique sur $\Sigma = \Sigma(Q)$ correspond un feuilletage \mathcal{F}_θ de codimension 1 sur la surface Σ ; les orbites périodiques du système original correspondant aux feuilles fermées du feuilletage.

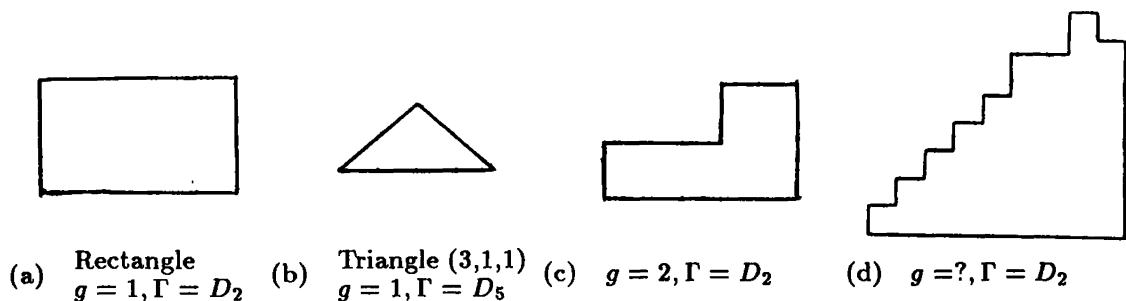


Fig. 1

Le calcul du genre g de Σ se fait suivant la formule d'Euler $g = F - E + V$ ou bien avec Gauß-Bonnet singulier $g = \sum_{p \in \pi_1^{-1}(S)} (1 - \alpha_p/2\pi)$ où α_p est l'angle total au point p se projetant sur le sommet $\pi(p)$ de S .

En annexe, on montre quelques figures illustrant la construction de la surface de Riemann, et d'un des ses feuilletages, pour le troisième cas de la figure 1.

LEMME 1.1. — *La surface Σ a une structure complexe, canoniquement induite par celle du polygone Q .*

On notera dans la suite par M la surface Σ munie de cette structure conforme.

Preuve. — En dehors de $\pi_1^{-1}(S)$, on met la structure complexe induite par la métrique euclidienne de Q : les identifications précédentes sont holomorphes, vu que les σ_i sont des transformations conformes. En un point p de $\pi_1^{-1}(S)$, π_1 est un revêtement ramifié de degré $n_p = \alpha_p/2\pi$, on prendra comme coordonnée locale holomorphe $z = \zeta^{1/n_p} (\zeta \in Q)$. □

Etant donnée une 1-forme holomorphe ω sur une surface de Riemann M_0 , on appelle feuilletage (vertical), avec singularités éventuellement, le feuilletage associé à la 1-forme réelle $\Re(\omega)$.

Soit q une différentielle quadratique holomorphe sur M_0 . En un point régulier de M_0 pour q (i.e. qui ne soit pas un zéro de q), il existe une coordonnée holomorphe z , unique à l'antipodie près, telle que $q = dz^2$; une telle carte sera dite rectangulaire. La différentielle quadratique détermine ainsi une structure euclidienne plate à singularités (les zéros de q : ce sont des points coniques pour cette métrique), les trajectoires, et leur longueur, de q sont les droites géodésiques pour cette structure riemannienne. Le feuilletage associé à q sera celui défini par les trajectoires verticales, i.e. celles le long desquelles q est réelle négative.

LEMME 1.2. — (a) *Il existe une 1-forme différentielle holomorphe ω (une différentielle quadratique holomorphe q resp.) sur $M(Q)$ telle que le feuilletage $\mathcal{F}_{\pi/2}$ coïncide avec celui de ω (celui de q resp.).*

(b) *Le feuilletage associé à la forme $e^{i\theta}\omega$ sur $M(Q)$ est $\mathcal{F}_{\theta+\pi/2}$*

Preuve. — Soit \tilde{M} le revêtement universel de $M \setminus \pi_1^{-1}(S)$. On pointe \tilde{M} en un point \tilde{p}_0 d'une face \tilde{Q}_0 (copie de Q). Soit $\tilde{\gamma}$ un chemin dans \tilde{M} , transverse aux arêtes de \tilde{M} , d'origine p_0 et d'extrémité dans l'intérieur d'une face (notée $\tilde{Q}_{\tilde{\gamma}(1)}$) de \tilde{M} . Soit $(\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n)$ la suite (de relevées) d'arêtes rencontrées par $\tilde{\gamma}$, $\sigma_{\tilde{\gamma}} = \sigma_{\tilde{a}_n} \dots \sigma_{\tilde{a}_1}$ et $\tilde{Q}_{\tilde{\gamma}} = \sigma_{\tilde{\gamma}} \cdot Q$. L'application $\tilde{Q}_{\tilde{\gamma}(1)} \rightarrow Q_{\tilde{\gamma}} \subset \mathbb{C}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de $\tilde{\gamma}$ dans \tilde{M} . On en déduit une isométrie de \tilde{M} dans \mathbb{C} . \tilde{M} est le revêtement d'holonomie de la variété euclidienne plate $M \setminus \pi_1^{-1}(S)$ et l'isométrie précédente l'application développante, au sens de la théorie des variétés

affines.

Pour γ dans le groupe fondamental $\pi_1(M \setminus \pi^{-1}(S), p_0)$, on a une isométrie $\sigma_{\tilde{\gamma}}$ de $\tilde{Q}_{\tilde{\gamma}(1)}$ dans \mathbf{C} dont la partie linéaire est triviale, i.e. $\sigma_{\tilde{\gamma}}$ est une translation. Si ζ est la coordonnée complexe standard de \mathbf{C} , la forme $d\zeta$ induit sur Q_0 le feuilletage par les trajectoires verticales. La forme $\pi^*d\zeta$ sur \tilde{M} passe au quotient sur $M \setminus \pi_1^{-1}(S)$, soit ω cette forme. Au voisinage d'un point de la fibre $\pi_1^{-1}(S)$ on a, avec la coordonnée locale $z = \zeta^{1/\alpha_p}$, $d\zeta = \alpha_p z^{\alpha_p-1} dz$ i.e. ω a un zéro d'ordre $\alpha_p - 1$ en p . On a ainsi démontré (a) (prendre $q = \omega^2$), ce qui entraîne clairement (b): on a supposé implicitement que $\pi/2$ était un point régulier de S^1 sous l'action de Γ ; si ce n'est pas le cas, il suffit de prendre une autre direction de référence. \square

On est donc ramené à démontrer le théorème suivant, qui implique la densité dans S^1 des directions périodiques d'un billard rationnel :

THÉORÈME 1.3. — *Soit q une différentielle quadratique holomorphe sur une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Il existe une partie dense F de S^1 telle que $e^{i\theta}q$ ($\theta \in F$) ait une feuille fermée.*

2. Espace de Teichmüller

DEFINITION 2.1[3]. — *Soit Σ_0 une surface (topologique) de genre g . L'espace de Teichmüller de genre g est l'espace des homéomorphismes h d'une surface de Riemann (i.e. avec structure complexe) M sur Σ_0 , modulo la relation d'équivalence : $(M_1, h_1) \sim (M_2, h_2)$ si $h_2^{-1}h_1$ est homotope à une application conforme de M_1 .*

Avec le théorème d'uniformisation, on montre facilement que tout homéomorphisme conforme de M , homotope à l'identité, est en fait l'identité. On établit par ailleurs que le groupe Mod_g des classes d'isotopie de difféomorphismes de la surface Σ_0 , dit groupe modulaire, opère discontinument sur T_g . On pose la définition :

DEFINITION 2.2. — *L'espace quotient $R_g = T_g/Mod_g$ est appelé espace modulaire.*

Avant d'énoncer les résultats de Teichmüller qu'on utilisera ici, rappelons quelques définitions et notations. Si M est une surface de Riemann, $Q(M)$ note l'espace (de dimension $6g - 6$) des différentielles quadratiques holomorphes sur M . D'après le théorème d'uniformisation, M admet une unique structure riemannienne à courbure constante -1 , dont la classe conforme induit la structure conforme de M . On en déduit des normes sur les fibrés géométriques naturels associés à M , on notera en particulier $|q|$ la norme d'une différentielle quadratique définie par $|q| = \int_M ||q(m)|| dv_M(m)$ et $B_1(Q(M))$ la boule unité correspondante.

La dilatation conforme d'une application f de classe C^1 (définie entre ouverts

de \mathbf{C}) en un point x quantifie l'appplatissage par f des cercles infinitésimaux en x : si C est l'ellipse image d'un cercle par la différentielle de f en x , $K(f, x)$ est le rapport du grand axe de C par son petit axe. Si $\mu = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial f}{\partial z}$, on a $K(f, x) = (1 + |\mu|)/(1 - |\mu|)$ et la dilatation globale de f est définie par $K(f) = \sup_{x \in M} K(f, x)$. En fait, la notion de dilatation conforme est une notion dans la catégorie des applications continues entre deux surfaces de Riemann, définie en termes de la variation du module des petits rectangles sous l'action de f ; on renvoie à Ahlfors [1] pour plus de précision.

THÉORÈMES 2.3 (TEICHMÜLLER)[3]. — Soit M une surface de genre g au moins égal à 2.

(a) T_g est homéomorphe à une boule de dimension $6g - 6$.

(b) Soit M un point de T_g . On a une application, dite exponentielle et notée Exp_M , de $B_1(Q(M))$ sur T_g , qui est un difféomorphisme global.

(c) Soient $q \in B_1(Q(M))$ et $t \in [0, 1[$ tels que $\text{th } t = |q|$. Il existe une différentielle quadratique q_t sur M_t , image de $\text{th } t q$ par l'application exponentielle Exp_M , et un homéomorphisme f_t de M sur M_t (dit application extrémale) tel que, pour un point régulier m de q , $f_t(m)$ est régulier pour q_t et, dans les cartes rectangulaires de ces points réguliers, f_t s'exprime suivant $f_t(\xi + i\eta) = e^t \xi + e^{-t} \eta$.

L'homéomorphisme f_t est quasi-conforme, avec pour dilatation complexe $\mu(f_t) = \text{th } t \bar{q}/|q|$ et extrémal (unique dans sa classe d'homotopie) au sens où il réalise le minimum e^{2t} de la dilatation conforme dans l'ensemble de tous les homéomorphismes de M sur M_t qui lui sont homotopes.

(d) Si on définit $d_T(M, M') = 1/2 \log K(f)$ où f est l'unique application extrémale (qui existe!) de M sur M' , on munit T_g d'une distance.

La question naturelle de savoir si la métrique sur T_g provient d'une structure riemannienne (à courbure négative, si on pense à l'application exponentielle de $Q(M)$ sur T_g et au théorème de Hadamard–Cartan en courbure négative) a une réponse négative pour $g \geq 2$, alors que T_1 s'identifie au demi-plan de Poincaré (Mod_1 à $SL_2(\mathbf{Z})$, R_1 à la surface modulaire). Néanmoins, on a une foule de plongements isométriques du disque de Poincaré avec sa métrique hyperbolique, comme l'explique la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. — Soit M une surface de Riemann avec q une différentielle quadratique de norme 1. Soit D le disque de Poincaré avec sa métrique à courbure constante -1 . L'application $\text{th } t e^{i\theta} \in D \rightarrow g_t(M, e^{i\theta} q) = \text{Exp}_M(q, \text{th } t e^{i\theta} q) \in T_g$ est un plongement isométrique.

Preuve. — Soit $M_{t,\theta}$ (avec sa différentielle quadratique $q_{t,\theta}$ et l'application extrémale $f_{t,\theta}$ de M sur $M_{t,\theta}$) l'image dans T_g de $(M, \text{th } t e^{i\theta} q)$ par l'application exponentielle Exp_M .

On vérifie que l'application Identité de (M, q) sur $(M, e^{i\theta}q)$ coïncide dans les cartes rectangulaires associées à q et $e^{i\theta}q$ à la rotation $K_{-\theta/2}$ d'angle $-\theta/2$, alors que l'application extrémale de (M, q) sur $(M_{t,0}, q_{t,0})$ s'écrit comme l'affinité $A_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Si $K_{\varphi/2}$ est une rotation de $SO(2)$, notons par K_{Φ} ($\Phi = \varphi$) sa projection dans $SO(2)/\{\pm 1\}$ et l'élément correspondant dans $PSL_2(\mathbf{R})$.

Définissons l'élément B de $PSL_2(\mathbf{R})$ par $BA_{t_1}K_{-\Theta_1} = A_{t_2}K_{-\Theta_2}$. Utilisant la décomposition KAK de $PSL_2(\mathbf{R})$, écrivons $B = K_{\Psi_2}A_uK_{-\Psi_1}$. On en déduit, d'après l'unicité des applications extrémales et leur écriture dans les cartes rectangulaires, que $d_T(M_{t_1, \theta_1}, M_{t_2, \theta_2}) = u$.

Le groupe $PSL_2(\mathbf{R})$ opère transitivement sans point fixe sur le fibré unitaire tangent S^1D du disque de Poincaré et si on pointe S^1D en \mathbf{v}_0 , vecteur tangent horizontal positif au centre O du disque, on a $\text{th } t e^{i\theta} = p(K_{\Theta}A_t\mathbf{v}_0)$, où p est la projection de S^1D sur D . En notant d_H la distance hyperbolique sur D , on a

$$\begin{aligned} d_H(\text{th } t_1 e^{i\theta_1}, \text{th } t_2 e^{i\theta_2}) &= d_H(p(K_{\Theta_1}A_{t_1}\mathbf{v}_0), p(K_{\Theta_2}A_{t_2}\mathbf{v}_0)) \\ &= d_H(p(A_{-t_2}K_{\Theta_1-\Theta_2}A_{t_1}\mathbf{v}_0), O) \\ &= d_H(p(A_{t_2}K_{\Theta_1-\Theta_2}A_{-t_1}\mathbf{v}_0), O) \quad (\text{via } A_t K_{\pi/2} = K_{\pi/2} A_{-t}) \\ &= d_H(p(K_{\Psi_2}A_uK_{\Psi_1}\mathbf{v}_0), O) \\ &= d_H(A_u p(\mathbf{v}_0), O) \\ &= u, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition. \square

3. Densité des directions périodiques

LEMME 3.1. — (M, q) a une trajectoire fermée si et seulement si (M_t, q_t) en a une.

Preuve. — Si γ une trajectoire fermée de (M, q) , $f_t(\gamma)$, où f_t est l'application extrémale de M sur M_t , en est aussi une. \square

LEMME 3.2. — Supposons que $g_{t_n}(M, qe^{i\theta_n})$ ($t_n \rightarrow +\infty$, $\theta_n \in I$) a une trajectoire fermée β_n de longueur uniformément bornée. Alors il existe une suite (θ'_n) , convergeant vers 0, telle que $f_{t_n}^{-1}(\beta_n)$ soit une feuille fermée pour la différentielle quadratique $e^{i(\theta'_n + \theta_n)}q$.

Preuve. — L'application f_{t_n} contracte la partie horizontale d'une trajectoire, avec un facteur e^{-t_n} , ainsi la longueur de la partie horizontale de $f_{t_n}^{-1}(\beta_n)$, de longueur totale uniformément bornée, converge vers zéro. Pour $n \gg 0$, la trajectoire fermée $f_{t_n}^{-1}(\beta_n)$ est quasiment verticale relativement à $e^{i\theta_n}q$: il existe θ'_n ($\theta'_n \rightarrow 0$) telle que $f_{t_n}^{-1}(\beta_n)$ soit une trajectoire verticale fermée (i.e. une feuille) relativement à $e^{i(\theta'_n + \theta_n)}q$. \square

Preuve du théorème (indications). — Soit D_I le secteur $\{re^{i\theta}, e^{i\theta} \in I, r \in [0, 1]\}$, identifié à une partie du disque de centre (M, q) dans T_g , de projection \tilde{D}_I dans l'espace des modules R_g . On montre dans la proposition 3.3 que \tilde{D}_I n'est pas compact dans R_g . L'espace des modules admet une compactification $\overline{R_g}$ où son bord stratifié ∂R_g s'identifie à une somme d'espaces de modules de surfaces non compactes d'aire finie (pour la métrique hyperbolique standard) de genre g' strictement inférieur à g : un point de ∂R_g est obtenu en pincant la surface Σ le long d'une famille finie de géodésiques simples.

Une telle surface est au voisinage d'un point de pincement conformément équivalente à l'union des disques pointés $D_{r_i} = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq |z| \leq r_i\} (i = 1, 2)$. Sur D_{r_i} , la différentielle quadratique $d\zeta^2/\zeta^2$ a comme feuilles compactes les cercles. Dans [6], Masur montre, étant donnée une suite d'éléments de \tilde{D}_I s'accumulant vers $M_\infty \in \partial R_g$, qu'il existe une sous-suite telle que la forme quadratique associée converge vers ce modèle standard, en un sens convenable de telle sorte qu'on puisse utiliser un résultat de stabilité des feuilles compactes au voisinage de la différentielle quadratique limite. On applique alors le lemme 3.2 à une suite $(g_{t_n}(M, qe^{i\theta_n}))$ convergeant vers un point du bord de R_g . \square

PROPOSITION 3.3. — \tilde{D}_I est non compact.

Preuve. — Soit d la fonction Mod_g -invariante définie sur $B_1(Q)$ par $d(M, q) = \inf l(\gamma)$ où l'infimum porte sur les trajectoires non triviales γ joignant deux zéros (éventuellement égaux) de q . La fonction d n'est pas continue sur $B_1(Q)$: les suites des deux zéros distincts d'une suite q_n , où (M_n, q_n) converge vers (M_∞, q_∞) , peuvent converger vers un même zéro de q_∞ .

Soit E la fermeture de \tilde{D}_I dans R_g et E_{\min} la partie des éléments de E avec un nombre minimum de zéros (Une différentielle quadratique sur une surface de Riemann de T_g a exactement $4g - 4$ zéros comptés avec multiplicité). On remarquera que d est continue sur E_{\min} .

LEMME 3.4. — Si E_{\min} a des points d'accumulation d'angle intérieur à I (au sens où il existe une suite $g_{t_n}(M, e^{i\theta_n}q)$ d'éléments de E_{\min} avec (θ_n) convergeant vers un point de $\overset{\circ}{I}$), alors E_{\min} n'est pas compact dans R_g .

Preuve. — *Ab absurdo*, si E_{\min} était compact, $d_0 = \inf_{E_{\min}} f(\gamma)$ serait non nul, vu la continuité de d sur E_{\min} . On va montrer que d_0 est nul.

Soit $(\widetilde{M_\infty, q_\infty}) = \lim (\widetilde{M_{t_n, \theta_n}, q_{t_n, \theta_n}})$ avec $\theta_n \rightarrow \theta_\infty \in \overset{\circ}{I}$ et $t_n \rightarrow +\infty$. Soit $d_\infty = d(M_\infty, q_\infty)$ et γ_∞ la trajectoire réalisant d_∞ .

Supposons d'abord que γ_∞ est une feuille de (M_∞, q_∞) . E_{\min} est stable par le flot de Teichmüller et toute trajectoire verticale a sa longueur contractée : $l(g_s(\gamma)) = e^{-s}l(\gamma)$, si g_s est l'application extrémale de (M, q) sur $g_s(M, q)$. Ainsi $d(g_s(M_\infty, q_\infty)) \leq e^{-s}d(M_\infty, q_\infty)$.

On a d'autre part

$$\begin{aligned} g_s(M_\infty, q_\infty) &= \lim g_s(g_{t_n}(M, e^{i\theta_n} q)) \\ &= \lim g_{s+t_n}(M, e^{i\theta_n} q_n) \end{aligned}$$

et $g_{s+t_n}(M, e^{i\theta_n} q_n)$ est dans $\tilde{D}_I \cap E_{\min}$ pour n assez grand. On en déduit la nullité de d_0 .

Si γ_∞ n'est pas verticale, il existe θ_∞ telle que γ_∞ le soit relativement à $e^{i\theta_\infty} q_\infty$. A s fixé, on a

$$g_s(M_\infty, e^{i\theta_\infty} q_\infty) = \lim g_s(M_{t_n, \theta_n}, e^{i\theta_\infty} q_{t_n, \theta_n}).$$

Dans $PSL_2(\mathbf{R})$, on a, suivant la décomposition KAK ,

$$A_s K_{\Theta_\infty} A_{t_n} K_{-\Theta_n} = K_{\Psi_n} A_{u_n} K_{-\Psi_n},$$

avec $u_n \rightarrow +\infty$, $\Psi_n - \Theta_n \rightarrow 0$, comme on le vérifie en projetant l'égalité précédente sur le disque de Poincaré. On conclut comme précédemment la nullité de d_0 , ce qui achève la preuve de la proposition. \square

Références

- [1] L. AHLFORS. — *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, Princeton New Jersey, 1966.
- [2] M. V. BERRY, P. J. RICHENS. — *Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics*, Physica, 2D (1981), 495.
- [3] L. BERS. — *Quasiconformal mappings and Teichmüller theory*, Analytic functions, Princeton University Press, Princeton, 89–119, 1960.
- [4] A. KATOK. — *The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard*, Commun. Math. Phys, 111 (1987), 151–160.
- [5] S. KERCKHOFF, H. MAZUR, J. SMILLIE. — *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, Ann. of Math., 124 (1986), 293.311.
- [6] H. MAZUR. — *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. of Math., 115 (1982), 168–200.
- [7] H. MAZUR. — *Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards*, Duke Math. J., 53 (116), 307–314.
- [8] H. MAZUR. — *The growth rate of trajectories of a quadratic differentials*, à paraître dans Ergodic Theory Dyn. Syst., 1987.

Annexe

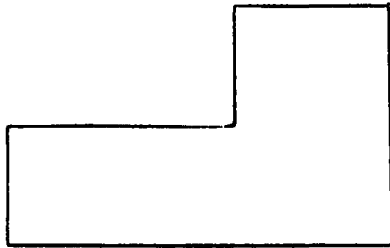


Fig. 1.c

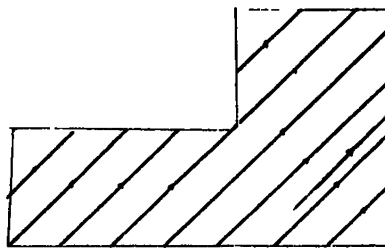


Fig. 2.a

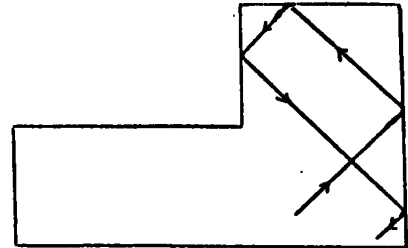


Fig. 2.b

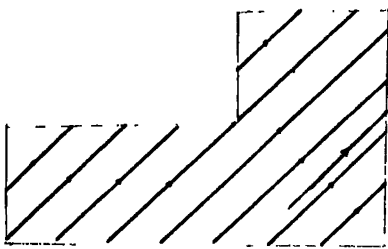
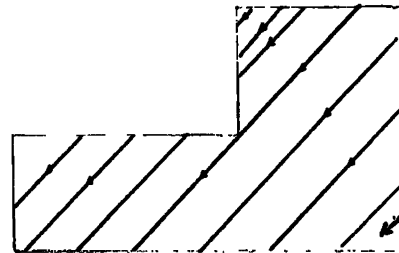
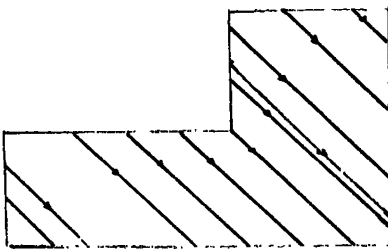
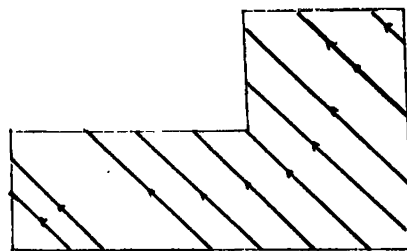
 Q_{id}  Q_s  Q_H  Q_V

Fig. 3

Le groupe Γ associé au polygone Q (Fig. 1.c) est d'ordre 4 et contient comme éléments non triviaux la symétrie H (resp. V) par rapport à l'horizontale (resp. la verticale) et la rotation S d'ordre 2. On choisit une direction θ (Fig. 2.a), avec une esquisse de trajectoire C (Fig. 2.b). La surface $\sum_{\bar{\theta}}$ est la réunion de 4 exemplaires $(Q_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de Q (Fig. 3).



Fig. 4.a
 Q_{1d}^a

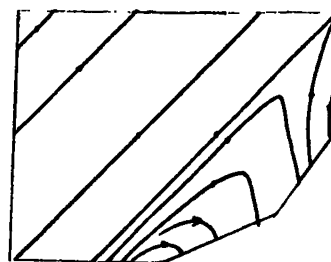


Fig. 4.b
 Q_{1d}^b

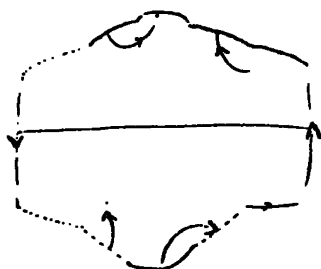


Fig. 6.a

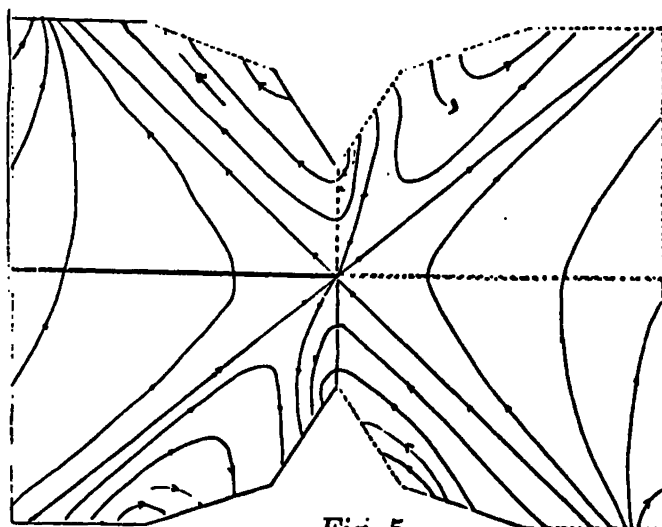


Fig. 5

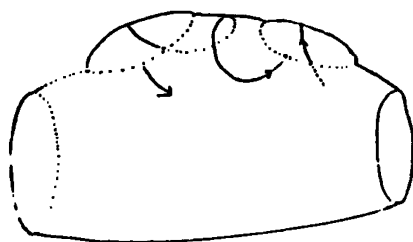


Fig. 6.b

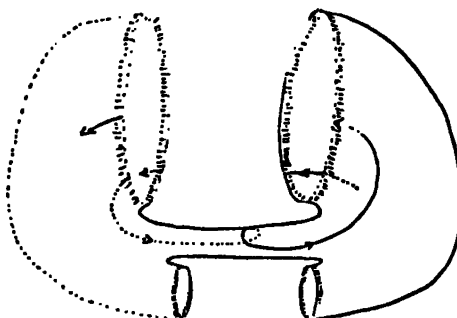


Fig. 6.c

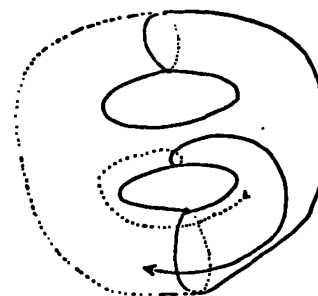


Fig. 6.d

Pour visualiser la surface $\Sigma_{\bar{\theta}}$, on déforme topologiquement le polygone feuilleté Q_{1d} en Q_{1d}^a , Q_{1d}^b successivement (Fig. 4). On obtient un domaine fondamental de $\Sigma_{\bar{\theta}}$ (Fig. 5) dont on identifie les côtés progressivement (Fig. 6). On a indiqué seulement l'esquisse de la trajectoire C sur cette dernière figure.