

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GILLES COURTOIS

## **Peut-on entendre les trous d'un tambour ?**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 5 (1986-1987), p. 19-24

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1986-1987\\_\\_5\\_\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__19_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PEUT-ON ENTENDRE LES TROUS D'UN TAMBOUR ?

par Gilles COURTOIS

On peut penser qu'un tambour est un disque  $M$  de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^2$ . Le son du tambour  $M$  est caractérisé par les valeurs propres  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  du problème

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta f = \lambda f \text{ sur } M \\ f/\partial M = 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial \nu/\partial M} = 0 \end{cases}$$

où  $\partial/\partial \nu$  est la dérivée suivant la normale à  $\partial M$ .

Le tambour troué,  $M \setminus A$ , où  $A$  est une partie de  $M$ , a un son caractérisé par les valeurs propres  $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$  du problème :

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta f = \lambda f \text{ sur } M \setminus A \\ f/\partial M = 0 \text{ ou } \partial f/\partial \nu = 0 \\ f/A = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où  $A$  est un ouvert à bord régulier, on aurait pu choisir la condition  $\frac{\partial f}{\partial n/A} = 0$  où  $\partial/\partial n$  est la dérivée suivant la normale à  $\partial A$ , cf. [Ae 1]. Une première question se pose : quelle est la bonne condition de petitesse sur  $A$  telle que :

$$(I) \quad A \text{ petit} \iff \lambda_k \approx \lambda_k(A) \text{ pour tout } k \geq 1.$$

*Exemple 1.* — Dans [R-T], J. Rauch et M. Taylor ont établi que si  $M$  est un domaine borné de  $\mathbf{R}^m$  à bord régulier et si  $A$  est compact, la bonne condition de petitesse sur  $A$  est que la capacité électrostatique de  $A$  soit proche de zéro; plus précisément,

$$(3) \quad \text{cap}_0 A \approx 0 \implies \lambda_k(A) \approx \lambda_k \text{ pour tout } k \geq 1$$

où la capacité électrostatique  $\text{cap}_0 A$  de  $A$  est définie par

$$(4) \quad \text{cap}_0 A = \inf \left[ \int_M |\nabla u|^2 / u/A = 1, u/\partial M = 0 \right]$$

*Exemple 2.* — Lorsque  $A$  est le voisinage tubulaire d'une sous-variété  $N$  de  $M$  de codimension  $p \geq 2$ , i.e.  $A = A_\varepsilon = T_\varepsilon N$ , on peut montrer, cf. [Cs 2] et [C-F4] que :

$$(5) \quad \lambda_k(T_\varepsilon N) - \lambda_k = \varphi_k = \varphi_p(\varepsilon) \int_N f_k^2 + o(\varphi_p(\varepsilon))$$

où  $\varphi_p(\varepsilon)$  désigne la capacité électrostatique de la boule euclidienne de rayon  $\varepsilon$  de  $\mathbf{R}^p$ , i.e.  $\varphi_p(\varepsilon) = (p-2)\text{vol } S^{p-1}\varepsilon^{p-2}$  si  $p \geq 3$  et  $\varphi_p(\varepsilon) = 2\pi|\log \varepsilon|^{-1}$  si  $p = 2$  et où chaque  $f_k$  est une fonction propre de  $L^2$ -norme 1 associée à la valeur propre  $\lambda_k$ . Lorsque  $\lambda_k$  est simple, le choix de  $f_k$  est évident; lorsque  $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+l}$  est multiple, on choisit  $f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+l}$  formant une base orthonormée de l'espace propre associé à  $\lambda_k$  qui diagonalise la forme quadratique  $f \rightarrow \int_N f^2$ .

On voit ainsi dans ces deux exemples que la proximité de  $\lambda_k(A)$  et  $\lambda_k$  pour tout  $k$  est liée à la notion de capacité.

*Nous nous plaçons dans la suite dans le cas où  $M$  est une variété riemannienne compacte sans bord.* Pour toute partie  $A$  de  $M$ , on définit la capacité de  $A$ , notée  $\text{cap } A$  par :

$$(6) \quad \text{cap } A = \inf \left[ \int_M |\nabla u|^2 / u \in H^1(M), u/A = 1, \int_M u = 0 \right]$$

*Remarque.* —  $u/A = 1$  signifie qu'il existe un ouvert contenant  $A$  (qui dépend de  $u$ ) sur lequel  $u \equiv 1$ , cf. [Cs 3] p.17.

En réponse à la question (I), nous avons le

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  une famille de parties de  $M$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\text{cap } A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$
- (ii)  $\lambda_1(A_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1 = 0$
- (iii)  $\lambda_k(A_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k$  pour tout  $k \geq 1$ .

*Schéma de preuve.* — Rappelons que  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  est le spectre de la forme quadratique  $q(g) = \int_M |\nabla g|^2$  définie sur  $H^1(M)$  et que  $\{\lambda_k(A_\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$  est le spectre de  $q$  définie sur  $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$  où  $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$  est le sous-espace de  $H^1(M)$  formé des fonctions "nulles sur  $A_\varepsilon$ ", i.e. le complété dans  $H^1(M)$  de l'espace des fonctions  $g$  telles que  $(1-g)/A = 1$  au sens de la remarque précédente.

En particulier, le principe du mini-max dit que :

$$(7) \quad \lambda_k [\text{resp. } \lambda_k(A_\varepsilon)] = \inf_{\substack{E \subset H^1(M) \\ \dim E = k}} \max_{g \in E \setminus \{0\}} \left( \int_M |\nabla g|^2 / \int_M g^2 \right).$$

Le théorème 1 se résume au fait que  $\text{cap } A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  équivaut à ce que le sous-espace  $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$  "remplit" de plus en plus  $H^1(M)$  [au sens où :  $\forall f \in H^1(M)$ ,  $\exists f_\varepsilon \in H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$ ,  $\lim_{H^1} f_\varepsilon = f$ ].

Par exemple, si  $u_{A_\varepsilon}$  désigne la fonction qui réalise la capacité de  $A_\varepsilon$ , [i.e.  $\text{cap } A_\varepsilon = \int_M |\nabla u_{A_\varepsilon}|^2$ ], on voit que lorsque  $\text{cap } A_\varepsilon$  tend vers 0, la fonction 1 de  $H^1(M)$  est limite de  $(1 - u_{A_\varepsilon}) \in H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$  puisque, d'après l'inégalité de Poincaré,  $\|u_{A_\varepsilon}\|_{H^1(M)}^2 \leq (1 + \lambda_2^{-1}) \text{cap } A_\varepsilon$ . [cf. [Cs 3] p.32]. ■

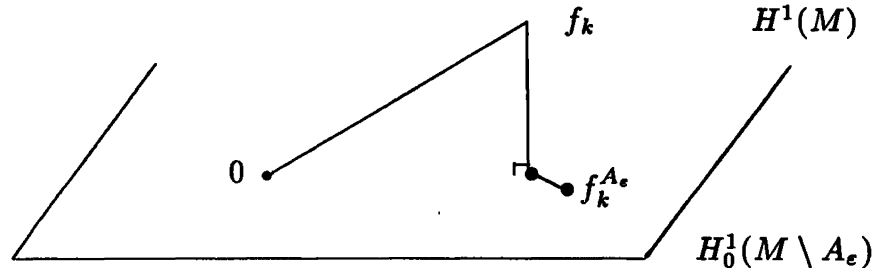
On peut se poser à présent la question suivante :

(II) Quel est le comportement asymptotique de  $(\lambda_k(A_\varepsilon) - \lambda_k)$  lorsque  $\text{cap } A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  ?

Nous allons discuter dans le cas où  $\lambda_k$  est simple, pour simplifier.

On a vu que la condition  $\text{cap } A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  assure le "remplissage" de  $H^1(M)$  par  $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$ . En particulier, la fonction propre  $f_k$  associée à  $\lambda_k$  peut être approximée par des éléments de  $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$ . Plus précisément, on peut montrer que la fonction propre  $f_k^{A_\varepsilon}$  associée à  $\lambda_k(A_\varepsilon)$  converge au sens de  $H^1$  vers  $f_k$  (lorsque  $\lambda_k$  est simple), cf. figure 1.

Fig. 1



De plus, nous avons le

THÉORÈME 2. — Soit  $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  une famille de parties de  $M$  telles que  $\text{cap } A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ . Alors

(i) 
$$\lambda_k(A_\varepsilon) - \lambda_k \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} d^2(f_k, H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)).$$

Si de plus,  $A_\varepsilon$  est un ouvert à bord lisse par morceaux,

(ii) 
$$d^2(f_k, H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)) = \text{cap } A_\varepsilon \cdot \mu_{\alpha_\varepsilon}(f_k^2) + o(\text{cap } A_\varepsilon)$$

où  $\mu_{A_\varepsilon}$  est la mesure capacitaire de  $A_\varepsilon$ .

Preuve. — cf. [Cs 3] p.53. ■

*Remarque.* — La mesure capacitaire de  $A_\varepsilon$  est une mesure positive, portée par  $\partial A_\varepsilon$ , telle que  $\mu_{A_\varepsilon}(\partial A_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$ , définie par  $\mu_{A_\varepsilon}(\varphi) = (\text{cap } A_\varepsilon)^{-1} \int_{\partial A_\varepsilon} \varphi \frac{\partial u_{A_\varepsilon}}{\partial \nu}$ .

*Remarque.* — L'hypothèse  $A_\varepsilon$  à bord lisse par morceaux est technique et le résultat (ii) devrait subsister sans cette hypothèse.

*Remarque.* — Lorsque  $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+l}$  est multiple, il faut choisir  $f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+l}$  dans (i) [resp. ii] formant une base orthonormée diagonalisant sur l'espace propre correspondant la forme quadratique

$$f \mapsto d^2(f, H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)) \text{ [resp. } f \mapsto \mu_{A_\varepsilon}(f^2)] .$$

*Exemple.* — Lorsque  $A_\varepsilon = T_\varepsilon N$  est le  $\varepsilon$ -voisinage tubulaire d'une sous-variété compacte  $N$  de codimension  $p \geq 2$  de  $M$ , on peut estimer  $\text{cap } T_\varepsilon N$  et  $\mu_{A_\varepsilon}$  :

$$(8) \quad \text{cap } T_\varepsilon N \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \text{vol } N \cdot \varphi_p(\varepsilon)$$

$$(9) \quad \mu_{A_\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{\delta N}{\text{vol } N} \text{ faiblement}$$

où  $\delta_N$  est définie par  $\delta_N(\varphi) = \int_N \varphi$ .

De (8) et (9) on déduit

$$(10) \quad \lambda_k(T_\varepsilon N) - \lambda_k = \varphi_p(\varepsilon) \cdot \int_N f_k^2 + r_{N,M}(\varepsilon) \cdot \varphi_p(\varepsilon)$$

où  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_{N,M}(\varepsilon) = 0$ .

En fait, le premier terme dans (10), i.e.  $\varphi_p(\varepsilon) \int_N f_k^2$ , "s'explique" par le fait que lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, le voisinage tubulaire  $T_\varepsilon N$  "ressemble" localement à  $N \times B_p(\varepsilon)$  où  $B_p(\varepsilon)$  est la boule de rayon  $\varepsilon$  de  $\mathbf{R}^p$ . On voit donc qu'au premier ordre,  $(\lambda_k(T_\varepsilon N) - \lambda_k)$  est "euclidien" et il est naturel que la géométrie de  $M$  et  $N$  apparaisse dans le reste  $r_{N,M}(\varepsilon) \cdot \varphi_p(\varepsilon)$ .

Soit  $\alpha = (K, \omega, D, \Lambda, p) \in \mathbf{R}^+ \times (\mathbf{R}_*^+)^3 \times \mathbf{N}$ . On dira qu'une variété  $M$  et une sous-variété  $N$  de codimension  $p$  vérifient les hypothèses  $H_\alpha$  si  $|\sigma(M)| \leq K$ ,  $\text{inj}(N, M) \geq \omega$ ,  $\text{diam}(M) \leq D$ ,  $\Lambda_k(M) \geq \Lambda$  où  $\sigma(M)$ ,  $d(M)$  désignent la courbure sectionnelle et le diamètre de  $M$ ,  $\text{inj}(N, M)$  désigne le rayon d'injectivité du plongement de  $N$  dans  $M$ , et où  $\Lambda_k(M)$  est l'écart entre  $\lambda_k$  et la valeur propre de  $M$  la plus proche de  $\lambda_k$  et distincte de  $\lambda_k$ .

**THÉORÈME 3.** — Soit  $\alpha = (K, \omega, D, \Lambda, p) \in \mathbf{R}^+ \times (\mathbf{R}_*^+)^3 \times \mathbf{N}$ . Il existe une fonction explicitable  $r_\alpha(\varepsilon)$  vérifiant  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\alpha(\varepsilon) = 0$  et telle que :

$$|\lambda_k(T_\varepsilon N) - \lambda_k - \varphi_p(\varepsilon) \int_N f_k^2| \leq r_\alpha(\varepsilon) \cdot \varphi_p(\varepsilon)$$

pour toute variété  $M$  et toute sous-variété  $N$  de  $M$  vérifiant les hypothèses  $H_\alpha$ .

Preuve. — cf. [Cs 3]. ■

Remarque. — Des exemples montrent que les hypothèses  $H_\alpha$  sont toutes nécessaires au sens où si l'une manque, il existe un contre-exemple à la conclusion, cf. [Cs 3] p.79.

### Bibliographie

- [Ae 1] C. ANNÉ. — *Perturbation du spectre  $S \setminus TUB^\varepsilon Y$  (Conditions de Neumann)*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, n° 4, Grenoble, 1985-1986.
- [Ae 2] C. ANNÉ. — *Spectre du Laplacien et limite de variété avec perte de dimension*, Preprint Institut Fourier, Grenoble, n° 45, 1985.
- [An] ANCONA. — *Théorie du potentiel*, Cours de 3ème cycle, Univ. Paris VI.
- [Au] T. AUBIN. — *Non linear analysis on manifolds, Monge-Ampère equation*, Springer Verlag Berlin, 1982.
- [Ba] C. BANDLE. — *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman London, 1980.
- [Bd] P.H. BÉRARD. — *Spectral geometry : direct and inverse problems*, Lecture Notes in Math. Springer 1207, 1986.
- [Bn] G. BESSON. — *Comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien dans un domaine avec un trou*, Bull. Soc. Math. France, 113 (1985), 211-230.
- [Cl] I. CHAVEL. — *Eigenvalue in riemannian geometry*, Academic Press, New-York, 1984.
- [C-F 1] I. CHAVEL, E.A. FELDMAN. — *Spectra of domains in compact manifolds*, J. Funct. Anal., 30 (1978), 198-222.
- [C-F 2] I. CHAVEL, E.A. FELDMAN. — *The Lenz shift and Wiener Sausage in insulated domains*, Warwick Symposium on Stochastic Analysis, 1987.
- [C-F 3] I. CHAVEL, E.A. FELDMAN. — *The Lenz shift and Wiener Sausage in riemannian manifolds*, Compositio Math., 60 (1986), 65-84.
- [C-F 4] I. CHAVEL, E.A. FELDMAN. — *Spectra of manifolds less a small hole*, preprint, New-York, 1986.
- [C-P] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU. — *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [Ck] G. CHOQUET. — *Lecture on analysis, vol. 1*, Benjamin New-York, 1969.
- [C-C] B. COLBOIS, Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 62, Grenoble, 1986.
- [C-H] R. COURANT, D. HILBERT. — *Methods of Mathematical physics*, Wiley-Interscience I 1953, II, 1962.
- [Cs 1] G. COURTOIS. — *Estimations du noyau de l'opérateur de la chaleur et du noyau de Green d'une variété riemannienne, application aux variétés privées d'un  $\varepsilon$ -tube*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., 303 (1986), 135-138.

- [Cs 2] G. COURTOIS. — *Spectre des variétés privées d'un  $\varepsilon$ -tube*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 61, Grenoble, 1986.
- [Cs 3] G. COURTOIS. — *Comportement d'une variété riemannienne compacte sous perturbation topologique par excision d'un domaine*, Thèse - Grenoble, 1987.
- [DG] G. DEL GROSSO, F. MARCHETTI. — *Asymptotic estimates for the principal eigenvalue of the Laplacian in a geodesic ball*, Appl. Math. Optim., 10 (1983), 37-50.
- [G-T] S. GILBARD, N.S. TRUDINGER. — *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag Berlin, 1983.
- [G-P] V. GUILLEMIN, A. POLLACK. — *Differential topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1974.
- [H-K] E. HEINTZE, H. KARCHER. — *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 11 (1978), 451-470.
- [Kc] M. KAC. — *Probabilistic methods in some problems of scattering theory*, Rocky Mountain J. Math., 4 (1974), 511-537.
- [Ko] T. KATO. — *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, 1966.
- [L-Y] P. LI, S.T. YAU. — *Eigenvalues of a compact riemannian manifold*, Proc. Sympos. Pure Math., (1980), 205-239.
- [M-T] T. MATSUZAWA, S. TANNO. — *Estimates of the first eigenvalue of a big cup domain of a 2-sphere*, Comp. Math., 47 (1982), 95-100.
- [M-N-P] V.G. MAZ'YA, S.A. NAZAROV, B.A. PLAMENEVSKII. — *Asymptotic expansion of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes*, Math. U.S.S.R. Izv., 24 (1985), 321-345.
- [Ma] C. MIRANDA. — *Partial differential equation of elliptic type*, Springer Verlag Berlin, 1970.
- [Oz 1] S. OZAWA. — *Singular Hadamard's variation of domains and eigenvalues of the Laplacian*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math.I, 56 (1980), 306-310; II 57 (1981), 242-246.
- [Oz 2] S. OZAWA. — *Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian*, Duke Math. J., 48 (1981), 767-778.
- [Oz 3] S. OZAWA. — *The first eigenvalues of the laplacian on two dimensional riemannian manifolds*, Tohoku Math. J., 34 (1982), 7-14.
- [Oz 4] S. OZAWA. — *Electrostatic capacity and eigenvalues of the Laplacian*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., 30 (1982), 53-62.
- [Oz 5] S. OZAWA. — *An asymptotic formula for the eigenvalues of the Laplacian in a three dimensional domain with a small hole*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., 30 (1983), 243-247.
- [R-T] J. RAUCH, M. TAYLOR. — *Potential and scattering on wildly perturbed domains*, J. Funct. Anal., 18 (1975), 27-59.
- [Sr] F. SPITZER. — *Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 3 (1964), 110-121.