

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GÉRARD BESSON

## **Sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 5 (1986-1987), p. 107-132

[<http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1986-1987\\_\\_5\\_\\_107\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__107_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LA MULTIPLICITÉ DES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN

par *Gérard BESSON*

L'étude des valeurs propres du Laplacien fait partie de la géométrie spectrale (voir [Bér]), née de la volonté de reconnaître une variété riemannienne par le "son" qu'elle émet (voir [Kac] et [Pro]). Si  $(X, g)$  est une variété riemannienne fermée (compacte, connexe et sans bord) la collection des valeurs propres du Laplacien  $\Delta$  est une suite de nombres s'accumulant à l'infini

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_n \nearrow +\infty .$$

La plupart des résultats obtenus portent sur la première valeur propre où sur les "dernières" (estimation asymptotique de  $\lambda_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini).

Parmi les invariants spectraux intéressants figurent les nombres

$$m_i = \text{multiplicité de } \lambda_i .$$

Rappelons que  $m_0 = 1$ , car il n'existe pas de fonctions harmoniques non constante sur une variété riemannienne fermée

On se pose alors la

0.1. QUESTION. *Quelles sont les valeurs possibles de  $m_i$  ?*

Comme toujours dans ce type de problèmes, il est très difficile d'obtenir des renseignements intéressants (telles que des inégalités optimales) sur  $m_i$  pour  $i > 1$ , de sorte que nous nous concentrerons dans ce qui suit sur l'étude de  $m_1$ .

La tendance naturelle est de penser que plus la variété est symétrique (gros groupe d'isométries) plus la multiplicité est grande. En particulier, on espère que la situation générique est, comme dans le cas de la dimension finie (matrices symétriques de  $\mathbf{R}^N$ ), que tous les  $m_i$  valent 1; ceci est vrai résultant du

0.2. THÉORÈME (K. Uhlenbeck [Uhl]). — *Génériquement dans l'espace des métriques toutes les valeurs propres sont simples.*

(Pour un énoncé précis le lecteur peut se référer à [Uhl], [Alb], [Ble-Wil] and [Ba-Ura]).

Par ailleurs, il existe des exemples *explicites* pour lesquelles  $m_1$  est grand, tels que les sphères canoniques et les tores plats (voir [B-G-M]). La question 1 peut alors se modifier en

0.3. QUESTION. *Quelle est la plus grande valeur possible pour  $m_1$  ?*

La première réponse à cette question est fournie en 1977 par S.Y. Cheng. Précisément

0.4. THÉORÈME ([Che]). — *Soit  $X$  une surface orientable fermée de genre  $\gamma$ . Alors pour toute métrique riemannienne*

$$(*) \quad m_1 \leq (1/2)(2\gamma + 2)(2\gamma + 3) .$$

En d'autres termes, en dimension 2 (l'orientabilité n'étant pas vraiment une restriction ici) la multiplicité de la première valeur propre est bornée en fonction de la topologie.

0.5. EXEMPLES.

i) Si  $X = S^2$  le théorème 0.4 permet d'affirmer que pour toute métrique riemannienne,

$$m_1 \leq 3 .$$

Par ailleurs pour la métrique canonique notée  $\text{can}$  sur  $S^2$  il est bien connu (voir [B-G-M]) que

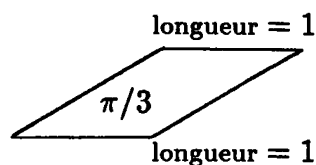
$$m_1(\text{can}) = 3$$

l'inégalité (\*) est donc optimale dans ce cas.

ii) Lorsque  $X = \mathbf{T}^2$  le théorème de Cheng donne

$$m_1 \leq 10$$

mais les seuls exemples connus pour les tores sont donnés par les métriques plates et la valeur maximale de  $m_1$  parmi celles-ci est 6, atteinte pour le tore plat équilatéral, i.e. la métrique plate (appelée *équi.* dans la suite) induite par la métrique euclidienne de  $\mathbf{R}^2$  lorsque  $\mathbf{T}^2$  est décrit comme  $\mathbf{R}^2/\mathcal{L}$  où  $\mathcal{L}$  est le réseau engendré par les vecteurs  $(1, 0)$  et  $(1/2, \sqrt{3}/2)$ .



$$m_1(\text{métrique plate}) \leq m_1(\text{équi}) = 6 .$$

Ce qui conduit tout naturellement à

0.6. QUESTION. *Est-ce que  $m_1 \leq 6$  pour toute métrique sur  $\mathbf{T}^2$  ?*

iii) Rien ne pouvait être dit, ni même imaginé sur l'optimalité de (\*) dans le cas du genre  $\gamma \geq 2$  .

En 1980, l'auteur était en mesure d'améliorer le résultat 0.4. Précisément

0.7. THÉORÈME ([Bes 1]). — *Sous les mêmes hypothèses que dans 0.4 on a,*

$$m_1 \leq 4\gamma + 3 .$$

0.8. THÉORÈME ([Bes 1]). — *Si  $X = \mathbf{T}^2$  on a*

$$m_1 \leq 6 .$$

*pour toute métrique riemannienne sur  $X$  .*

Dans [Bes 1] le cas du projectif réel est étudié également et on obtient l'inégalité optimale

$$m_1 \leq 5 = m_1(\text{can}) .$$

Ces résultats ne concernaient que la dimension 2, néanmoins ils confirmaient l'idée (naïve mais juste en dimension 2) que la multiplicité est liée à la "grosseur" du groupe d'isométrie.

La première faille dans l'édifice vint en 1982 lorsque H. Urakawa ([Ura]) exhibait une métrique sur  $S^3$  telle que,

$$m_1 = 7$$

alors que  $m_1(\text{can}) = 4$  (!) (voir aussi [Béber-Bou]).

Le but de ce texte est de *décrire* les résultats les plus récents dans ce domaine, qui en particulier permettent de répondre complètement à la question 0.3 dans le cas de la dimension supérieure ou égale à 3 (et donc explique le résultat d'Urakawa); ils conduisent de plus à une conjecture naturelle sur la meilleure borne en dimension 2.

Ce texte a plutôt été écrit pour être un guide à la lecture des articles concernés, en particulier il a été soulagé de tous les détails techniques (et ils sont nombreux) et met l'accent sur les principes de base et le schéma général.

Dans un premier temps il semble utile de rappeler les idées utilisées dans la preuve du théorème de Cheng (§1) avant de décrire les résultats plus récents (§2), ce qui conduira à la conjecture mentionnée ci-dessus et ce qui peut être

pensé comme un premier pas vers sa preuve (§3). Nous concluons par quelques remarques (§4).

## 1. Les idées du théorème de Cheng et quelques améliorations

Afin de décrire les développements récents de ce sujet il semble utile de rappeler les idées qui conduisent au théorème 0.4.

Ce dernier repose sur l'étude locale puis globale de l'ensemble nodal des fonctions propres, i.e. l'ensemble des points de  $X$  où une fonction propre s'annule.

### A. Etude locale.

Soit  $X$  une surface riemannienne ayant une première valeur propre multiple ( $m_1 > 1$ ) et soit  $E$  l'espace propre correspondant.

i) Si la dimension de  $E$  est grande on peut construire, par combinaison linéaire une fonction propre non identiquement nulle  $\varphi$  s'annulant à un ordre élevé en un point arbitraire noté 0, i.e. vérifiant (avec des notations évidentes)

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(N-1)}(0) = 0 ;$$

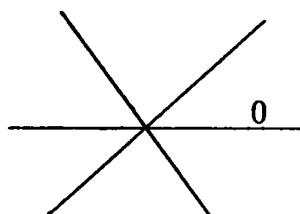
plus précisément puisque  $X$  est de dimension 2, si  $\dim E = \frac{N(N+1)}{2} + 1$  alors il existe une fonction  $\varphi \in E \setminus \{0\}$  s'annulant à un ordre au moins  $(N-1)$  en 0.

ii) Une fonction propre a un ensemble nodal très particulier. En fait, en coordonnées normales autour de 0, le développement de Taylor de  $\varphi$  est

$$\varphi(x) = p_N(x) + O(|x|^{N+1})$$

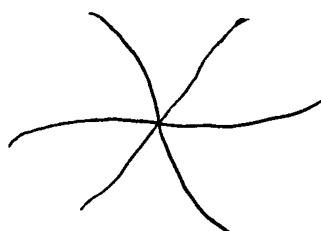
$p_N$  = polynôme homogène de degré (total)  $N$  et  $\Delta\varphi = \lambda\varphi \Rightarrow p_N$  est un polynôme harmonique.

Alors dans  $\mathbf{R}^2$  l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène harmonique de degré  $N$  est un système équiangulaire de  $N$  droites passant par l'origine



zéro de  $p_3$  dans  $\mathbf{R}^2$ .

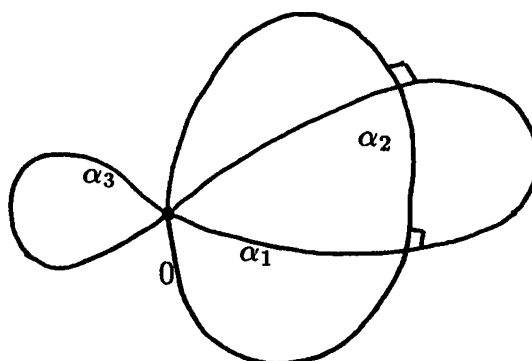
Un argument analytique facile montre que l'ensemble nodal de  $\varphi$  est  $C^2$ -difféomorphe à la figure ci-dessus au voisinage de 0.



zéros de  $\varphi$  au voisinage d'un point où elle s'annule à l'ordre 2.

## B. Etude globale.

Une image globale de l'ensemble nodal de  $\varphi$  est alors



Il s'agit d'un graphe plongé dans  $X$  ayant pour sommet les points où  $\varphi$  et  $\varphi'$  s'annulent ( $\varphi' = d\varphi$ ).

Il est alors clair que  $\varphi^{-1}(0)$  contient au moins  $N$  (3 sur la figure ci-dessus) "cercles" plongés lisses par morceaux.

De toute évidence la présence d'un trop grand nombre de tels cercles aurait pour effet de diviser  $X$  en beaucoup de composantes connexes, en fait on a le

1.1. LEMME ([Che]). — Si  $N \geq 2\gamma + k$  alors  $X \setminus \bigcup_{i=1}^N \alpha_i$  a au moins  $k + 1$  composantes connexes.

Si  $N$  est trop grand on contredit donc le célèbre

1.2. THÉORÈME (R. Courant [Cou-Hil]). — Si  $\varphi$  est une première fonction propre de  $X$  alors,

$$\# \{ \text{composantes connexes de } X \setminus \varphi^{-1}(0) \} = 2 .$$

En regroupant ces idées et en précisant les estimations on obtient la borne de Cheng.

## C. Amélioration de l'étude locale.

Afin de forcer l'annulation d'une fonction propre, on doit annuler les dérivées correspondantes, par exemple en coordonnées normales  $x = (x_1, x_2)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varphi(0) & & \\
 & & \bullet & & \\
 & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) \bullet & & \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0) & \\
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0) \bullet & & \bullet \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0) & & \boxed{\bullet \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0)}
 \end{array}$$

mais

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(0) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(0) = \lambda\varphi(0)$$

en sorte que l'annulation de  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(0)$  résulte de l'annulation de  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(0)$  et de  $\varphi(0)$ . Il est alors suffisant d'avoir  $\dim E \geq 6$  (au lieu de 7) pour avoir

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$$

différentiant l'équation

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi$$

en 0 donne des améliorations similaires à chaque étape : ceci conduit à la borne (voir [Bes 1]),

$$(**) \quad m_1 \leq 4\gamma + 3.$$

### 1.3. EXEMPLES.

i) Si  $X = S^2$  on obtient à nouveau l'inégalité (optimale!)

$$m_1 \leq 3.$$

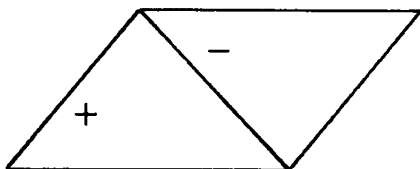
ii) Si  $X = \mathbf{T}^2$  (\*\*) devient  $m_1 \leq 7$  pour toute métrique riemannienne ce qui n'est pas encore la borne espérée.

### D. Amélioration de l'étude globale $X = \mathbf{T}^2$ .

Dans la situation (topologique) où  $X = \mathbf{T}^2$  nous avons en main une variété bien connue, on peut donc améliorer le lemme topologique utilisé dans la section B.

i) Le Lemme 1.1 a pour conséquence que l'on ne peut avoir une fonction propre de  $X$  s'annulant à l'ordre trois en un point (rappelons qu'il s'agit de premières fonctions propres uniquement), i.e.  $N \leq 3$ .

ii) Mais des fonctions propres s'annulant à l'ordre 2 existent sur le tore plat équilatéral



$\varphi$  s'annule à l'ordre 2 en 0

— = ensemble nodal de  $\varphi$

où

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) = & \sin [2\pi(x_1 - x_2\sqrt{3}/3)] + \sin [2\pi((2\sqrt{3}/3)x_2)] - \dots \\ & - \sin [2\pi(x_1 + x_2\sqrt{3}/3)] . \end{aligned}$$

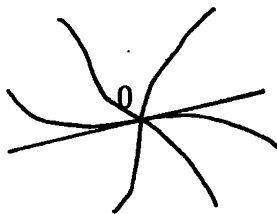
iii) Pour une telle fonction il n'est pas difficile de montrer que les trois cercles  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  satisfont,

a) Deux d'entre eux ne sont jamais homotopes.

b) Ils s'intersectent seulement en 0.

(si a) ou b) n'est pas vérifié  $X \setminus \{\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3\}$  a au moins trois composantes connexes).

iv) Alors si  $m_1 = 7$  on a un sous-espace de  $E$  de dimension 2 constitué de fonctions propres s'annulant à l'ordre 2 en 0. Choissant une direction  $\theta$  en 0 il est alors possible de trouver une fonction propre normalisée (de norme  $L^2$  égale à 1)  $f_\theta$  dans ce sous-espace telle qu'une des tangentes aux différentes branches de l'ensemble nodal de  $f_\theta$  en 0 soit donnée par  $\theta$ .



direction  $\theta$

ensemble nodal de  $f_\theta$  au voisinage de 0 .

Seules  $f_\theta$  et  $-f_\theta$  ont cette propriété, sinon il existerait une fonction de  $E$  s'annulant à l'ordre 3.

Les "cercles"  $\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta), \alpha_3(\theta), \theta \in S^1$  correspondant à  $f_\theta$  réalisent alors une homotopie entre  $\alpha_1(1), \alpha_2(1), \alpha_3(1)$  contredisent la propriété a) ci-dessus; finalement,

$$m_1 \leq 6 \quad \text{sur } X = \mathbf{T}^2 .$$

### E. Conclusion.

1) Lorsque la multiplicité maximale est réalisée pour une "belle" métrique (i.e. canonique avec beaucoup d'isométries), on peut la déformer en préservant l'action d'un groupe fini d'isométries qui agit irréductiblement dans le premier espace propre : ceci fournit une famille à un paramètre de métriques pour lesquelles  $m_1$  est constamment égale à la valeur maximale, d'où

*$m_1$  maximale n'est pas caractéristique .*

2) Il est utile de signaler que la preuve de Cheng repose sur la propriété suivante de l'espace propre  $E$ ; toute fonctions  $f \in E$  satisfait le théorème de Courant. En fait l'inégalité de Cheng serait vérifiée par la dimension de n'importe quel espace de fonctions satisfaisant cette propriété (à condition que les fonctions de cet espace aient un ensemble nodal "raisonnable").



3) En particulier, elle est vérifiée par le second espace propre de n'importe quel opérateur de Schrödinger sur  $X$

$$\Delta + V$$

où  $V$  est une fonction lisse.

## 2. Progrès récents

L'étude de la multiplicité a considérablement progressée récemment sous l'impulsion de Y. Colin de Verdière ([ColVer 1-4]). Dans ce paragraphe nous nous proposons de décrire les principes de base et les applications développées dans les références ci-dessus, la technique précise étant laissée de côté.

L'idée centrale est celle développée dans le célèbre article de V.I. Arnold ([Arn]) "modes et quasimodes" pour le cas de dimension finie, à savoir que

*avec suffisamment de paramètres on peut forcer la multiplicité*

il est nécessaire de préciser ce que l'on entend ici.

### A. Le principe de base.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille d'opérateurs qui est par exemple munie d'une structure de variété (de Banach) au voisinage de l'un d'entre eux noté  $\mathcal{O}$ .

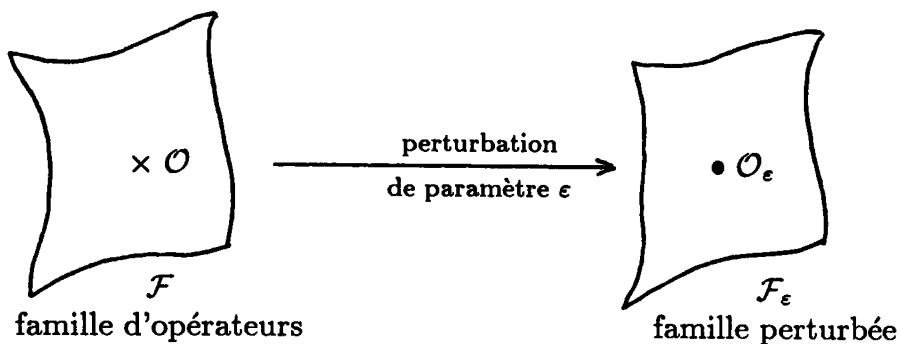


fig.1

Par souci de simplicité le lecteur peut supposer que  $\mathcal{F}$  est la famille des Laplaciens associée aux métriques riemanniennes sur une variété  $X$  ou la famille des opérateurs de Schrödinger à métrique fixée et potentiel variable. Un autre exemple important sera décrit dans la suite.

Supposons-nous donnée une perturbation de toute la famille  $\mathcal{F}$  indexée par un paramètre  $\varepsilon$  (petit!).

Enfin, nous supposons que l'opérateur  $\mathcal{O} \in \mathcal{F}$  a une valeur propre  $\lambda$  multiple de multiplicité  $N$ .

2.1. QUESTION. Qu'advient-il des valeurs propres des opérateurs  $\mathcal{F}$  sous la perturbation ?

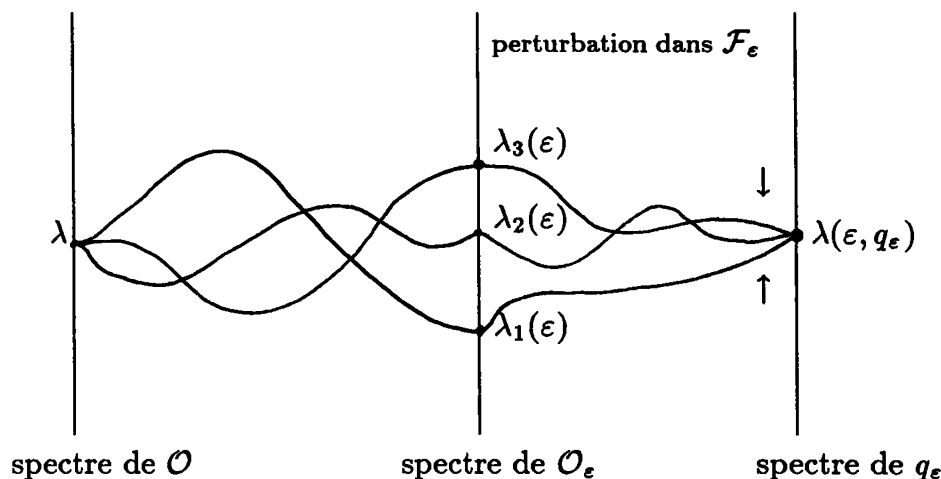


fig.2

On sait que si la perturbation est suffisamment régulière la valeur propre  $\lambda$  multiple de  $\mathcal{O}$  se scinde en des branches  $\lambda_i(\epsilon)$ , qui sont des valeurs propres de  $\mathcal{O}_\epsilon$  et qui n'ont aucune raison d'être multiple en général (le lecteur peut se reporter à [Kat] pour la théorie des perturbations).

On peut aussi perturber  $\mathcal{O}_\epsilon$  dans  $\mathcal{F}_\epsilon$  (voir fig.1) de sorte que l'on peut également faire dépendre les branches  $\lambda_i(\epsilon, q)$  de  $q \in \mathcal{F}_\epsilon$ . Alors si on a assez de paramètres définissant la famille  $\mathcal{F}_\epsilon$  de telle sorte que les branches varient avec *suffisamment d'indépendance* on peut en se déplaçant autour de  $\mathcal{O}_\epsilon$  dans  $\mathcal{F}_\epsilon$  forcer les nombres  $\lambda_i(\epsilon, q)$  à coïncider à nouveau pour un  $\epsilon$  donné ; en d'autres termes, on peut construire  $q_\epsilon \in \mathcal{F}_\epsilon$  tel que

$$\lambda_1(\epsilon, q_\epsilon) = \dots = \lambda_N(\epsilon, q_\epsilon) = \lambda(\epsilon, q_\epsilon) .$$

En pratique  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_\epsilon$  sont souvent de dimension infinie et l'on veut forcer la coïncidence d'un nombre fini de valeurs propres, il est donc raisonnable de penser que cette procédure va fonctionner. Ce n'est pourtant pas vrai en général, car on doit s'assurer que les fonctions  $\lambda_i(\epsilon, q)$  définies sur  $\mathcal{F}_\epsilon$  (ou de manière équivalente sur  $\mathcal{F}$ ) sont indépendantes ; ceci se traduit en ce que nous nommerons une

*condition de stabilité*

(voir [ColVer 2-3-4] et [Bes 2]).

Il y a de nombreuses façons d'énoncer une bonne condition de stabilité. Pour que la procédure ci-dessus soit applicable une forme faible de celle-ci suffit,

appelée Hypothèse d'Arnold Faible (W.A.H.) dans [ColVer 2]. Dans la section 3 nous énoncerons une condition appelée Hypothèse d'Arnold Forte (S.A.H.) qui (impliquant W.A.H.) convient mieux au travail qui sera présenté dans cette section et est plus facile à tester sur des exemples.

La condition de stabilité est une condition sur la famille  $\mathcal{F}_\varepsilon$  au voisinage de  $\mathcal{O}_\varepsilon$  ou de manière équivalente sur  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $\mathcal{O}$ ; puisque nous n'utiliserons qu'une version infinitésimale nous dirons que c'est une condition sur  $\mathcal{O} \in \mathcal{F}$ .

Dans la pratique nous utiliserons la procédure à l'envers, c'est-à-dire une situation étant donnée ( $\mathcal{F}_\varepsilon$ ) nous la ferons dégénérer vers une situation plus simple ( $\mathcal{F}$ ) pour laquelle nous connaissons l'existence d'un opérateur  $\mathcal{O}$  ayant les propriétés requises; la démarche sera donc en deux étapes :

- 1) calcul de l'asymptotique de  $\lambda_i(\varepsilon, q)$  pour tout  $q \in \mathcal{F}_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro et description de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{O} \in \mathcal{F}$ ,
- 2) vérification de la condition de stabilité pour  $\mathcal{O} \in \mathcal{F}$ .

Les applications que nous décrivons (brièvement) dans le paragraphe C nécessite l'utilisation d'opérateurs sur les graphes.

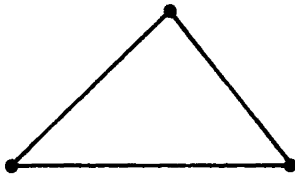
## B. Laplaciens sur les graphes.

Soit  $\Gamma$  un graphe fini, i.e. un ensemble de  $s = N + 1$  sommets reliés par au plus une arête non orientée. Soit  $a$  le nombre total des arêtes et  $v_i$  la valence du sommet  $i$ , i.e. le nombre d'arêtes partant de  $i$ . Nous utiliserons essentiellement le graphe sur  $s = N + 1$  sommets, noté  $K_s$ , qui a la valence maximale pour chaque sommet,

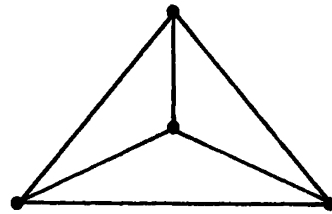
$$\forall i \text{ sommet de } K_s \quad v_i = s - 1 = N$$

ou de manière équivalente

$$a = \frac{(N + 1)N}{2}$$



$K_3$



$K_4$

Considérons l'espace  $\mathcal{L} \simeq \mathbf{R}^s$  des fonctions sur les sommets de  $\Gamma$  et étudions les opérateurs suivants : pour  $x \in \mathcal{L}$ ,  $x = (x_i)$

$$(Ax)_i = \left( \frac{1}{v_i} \sum_j c_{ij}(x_i - x_j) \right) + V_i$$

$c_{ij}, V_i \in \mathbf{R}$  et  $c_{ij} > 0$  si  $(i, j)$  est une arête et  $c_{ij} = 0$  sinon.

Ce sont des opérateurs de Schrödinger avec pour potentiel la fonction  $V = (V_i)$ . La matrice  $(c_{ij})$  doit être interprétée comme l'inverse de la métrique riemannienne (poids) portée par l'ensemble des arêtes.

En particulier si  $\Gamma = K_s$  il y a un opérateur privilégié défini par

$$(\mathcal{O}x)_i = \frac{1}{N} \sum_j (x_i - x_j)$$

qui a pour valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0 & \text{de multiplicité } 1 \\ \lambda_1 &= \frac{N+1}{N} & \text{de multiplicité } N \end{aligned}$$

(voir [ColVer 3] et [ColVer 4] pour plus de détails sur les graphes).

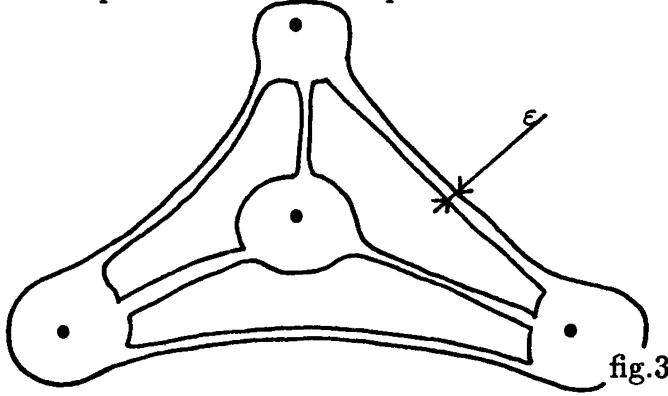
Les opérateurs ci-dessus ont une zéro-ième valeur propre,  $\lambda_0$ , simple. Nous appellerons  $\lambda_1$  (la première valeur propre) la suivante. Dans la suite  $\Gamma = K_s$ ,  $\mathcal{F}$  est la famille d'opérateurs décrite précédemment et  $\mathcal{O}$  l'opérateur ci-dessus, qui a une valeur propre de multiplicité  $N$ .

### C. Applications 1 : plonger des graphes dans $X$ .

Rappelons que  $X$  est une variété riemannienne fermée de dimension  $n$ . Supposons que le graphe complet  $K_s$  soit plongé dans  $X$ ,

$$K_s \hookrightarrow X$$

et perturbons la métrique de  $X$  de la manière suivante



multiplication par  $\varepsilon$   
la métrique riemannienne

Soit  $W_\varepsilon$  un voisinage du graphe dans  $X$  qui est constitué de voisinages tubulaires des arêtes et de boules centrées en les sommets de rayon (à peu près) fixe. Hors de  $W_\varepsilon$  on multiplie la métrique par  $\varepsilon$  et

- i) On fait tendre  $\varepsilon$  vers 0.
- ii) La métrique perturbée n'étant plus continue, on régularise au voisinage du bord de  $W_\varepsilon$ .

Une étude difficile et très technique de l'asymptotique des valeurs propres perturbées montre que les  $s = N + 1$  première valeurs propres se comportent (à

une puissance de  $\varepsilon$  près) comme les valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger sur le graphe (voir §B).

En appliquant le principe de base on obtient,

2.2. THÉORÈME (Y. Colin de Verdière [ColVer 1,3]). —

1) Si  $n \geq 3$  alors pour tout entier  $N$  il existe une métrique sur  $X$  telle que  $m_1 = N$ .

2) Si  $n = 2$  et  $X$  est orientable alors il existe une métrique sur  $X$  et une fonction lisse  $V$  telle que la multiplicité de la seconde valeur propre de l'opérateur de Schrödinger correspondant soit

$$m_1 = E \left[ \frac{5 + \sqrt{48\gamma + 1}}{2} \right].$$

( $E$  désigne la partie entière).

2.3. REMARQUES.

i) Si  $n \geq 3$  pour tout  $N$  le graphe complet à  $N + 1$  sommets se plonge dans  $X$ .

ii) Si  $n = 2$  le nombre maximal de sommets d'un graphe complet se plongeant dans une surface orientable de genre  $\gamma$  est majoré par

$$s = N + 1 \leq E \left[ \frac{7 + \sqrt{48\gamma + 1}}{2} \right] \quad ([\text{Rin}]).$$

iii) Il est plus facile pour l'étude du spectre d'utiliser la forme quadratique

$$q(f) = \int_X |df|^2 = \text{intégrale de Dirichlet de } f \in H^1(X)$$

au lieu de l'opérateur et le théorème 2.2 est obtenu en étudiant l'effet de la perturbation décrite sur la forme quadratique ci-dessus.

En dimension 2,  $q$  est un invariant conforme de sorte que la multiplication de la métrique par  $\varepsilon$  en dehors de  $W_\varepsilon$  n'a aucun effet si  $q$  est évaluée sur des fonctions à support en dehors de  $W_\varepsilon$ . Dans ce cas, on doit utiliser une autre perturbation (voir [ColVer 3]).

Ceci explique (grossièrement) l'apparition d'un opérateur de Schrödinger en dimension 2 au lieu de Laplaciens simples. Il n'est pas connu si  $V$  peut être nul.

iv) Un graphe complet vérifie toujours la condition W.A.H..

v) Le problème soulevé dans la question 0.4 est donc complètement résolu en dimension supérieure ou égale à 3.

**D. Applications 2 :** modeler une surface sur un graphe.

Dans ce paragraphe nous supposons que  $X$  est une surface orientable munie d'une métrique à courbure constante  $-1$  (donc  $\gamma \geq 2$ ).

Soit  $S$  la réunion de géodésiques périodiques telles que  $X \setminus S$  a  $N + 1$  composantes connexes, on peut alors modifier la structure conforme en multipliant la longueur de chaque géodésique dans  $S$  par un nombre  $\varepsilon$ .

Il est connu (voir [Do-Pi-Ra-Su] et [Col 1]) que les  $N + 1$  premières valeurs propres ( $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ ) convergent vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 et se comportent asymptotiquement comme celles d'un graphe dont les sommets correspondent aux parties épaisses de  $X$  et les arêtes aux voisinages tubulaires des géodésiques de  $S$ .

On se trouve donc dans une situation où l'on peut appliquer le principe de base. En choisissant  $S$  de sorte que le graphe limite soit complet on obtient le résultat suivant dû à B. Colbois et Y. Colin de Verdière,

**2.4. THÉORÈME ([Col-ColVer]).** — *Si  $X$  est orientable de genre  $\gamma \geq 3$  il existe une métrique à courbure constante  $-1$  sur  $X$  telle que*

$$m_1 = E \left[ \frac{1 + \sqrt{8\gamma + 1}}{2} \right]$$

## 2.5. REMARQUES.

i) L'asymptotique des valeurs propres utilisée dans la preuve de ce théorème est celle obtenue dans [Col]. Voir aussi [Bur] pour un raffinement.

ii) Dans [Col-Bur] il est prouvé en utilisant les théories des représentations et des revêtements que pour tout entier premier  $p$  il existe une surface de Riemann compacte de genre  $\gamma = p(p - 1) + 1$  et  $m_1 = p - 1$ .

iii) Il est à noter qu'il s'agit là des premiers exemples de surfaces pour lesquelles  $m_1 \underset{\gamma \rightarrow +\infty}{\sim} c\sqrt{\gamma}$ .

iv) Toute surface de Riemann peut se plonger dans toute variété de dimension supérieure ou égale à 3. On peut alors utiliser le Théorème 2.4 et un procédé analogue à celui développé dans le paragraphe C pour obtenir le Théorème 2.2 de manière plus simple (techniquement) (voir [Bes 2]).

v) Dans [Col-ColVer] le théorème s'applique aussi à la surface de Riemann d'aire finie.

## D. Applications 3 : attacher des anses et éclater des points sur les surfaces.

En découpant des petites boules (de rayon  $\varepsilon$ ) dans une variété riemannienne on ne perturbe pas beaucoup les valeurs propres.

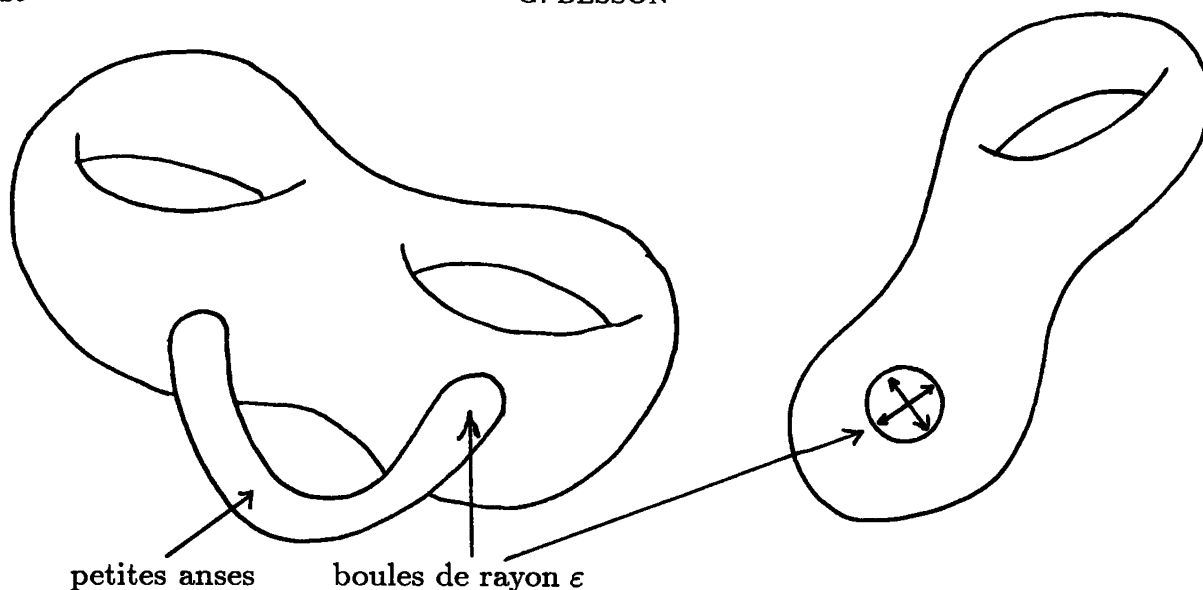


fig.4

On peut alors ajouter à une surface donnée des petites anses qui dégénèrent. Il a été prouvé que dans cette situation les valeurs propres convergent ([Cha-Fel]). De manière similaire on peut identifier les points opposés du bord d'une boule géodésique (éclatement) de rayons  $\varepsilon$ ; de nouveau le spectre converge lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 (voir [ColVer 3]).

Le principe de base s'applique avec ces asymptotiques et  $\mathcal{F}$  définie comme étant la famille des Laplaciens pour les métriques sur les surfaces limites.

## 2.6. THÉORÈME (Y. Colin de Verdière [ColVer 3]). —

1) Si  $X$  est une surface de Riemann orientable il existe une métrique riemannienne sur  $X$  telle que  $m_1 = 6$ .

2) Si  $X$  est une surface non orientable il existe une métrique riemannienne sur  $X$  pour laquelle  $m_1 = 5$ .

## 2.7. REMARQUE.

i) Si  $X \# Y$  dénote la somme connexe des deux surfaces  $X$  et  $Y$ . Alors

$$X \text{ orientable de genre } \gamma \geq 1 \Rightarrow X = \underbrace{T^2 \# T^2 \# T^2 \dots \# T^2}_{\gamma \text{ fois}}$$

et on ajoute des anses à un tore qui possède une métrique pour laquelle  $m_1 = 6$  (et qui vérifie de plus la bonne condition de stabilité).

Si  $X$  est non orientable alors  $X$  est obtenu à partir du projectif réel en ajoutant des anses ou éclatant des points et sur  $P^2(\mathbf{R})$  la métrique canonique à une première valeur propre (stable) avec  $m_1 = 5$ .

ii) En particulier si  $X = \mathbf{K}^2 = P^2(\mathbf{R}) \# P^2(\mathbf{R})$  est la bouteille de Klein alors il existe une métrique avec  $m_1 = 5$  et il est prouvé dans [ColVer 3] que cela est la valeur maximale, i.e.

$$\text{pour toute métrique sur } \mathbf{K}^2, \quad m_1 \leq 5 ;$$

l'inégalité est donc optimale.

La preuve de la borne supérieure repose sur un raffinement du lemme topologique utilisé dans le théorème de Cheng pour le cas de  $\mathbf{K}^2$ .

### 3. Une conjecture et un premier pas en direction de sa preuve

Dans cette section nous allons donner la condition de stabilité qui convient à notre propos, c'est-à-dire l'étude des "propriétés génériques des fonctions propres en présence de multiplicité". L'étude est motivée par une conjecture "raisonnable" due à Y. Colin de Verdière et elle peut être interprétée comme un premier pas vers sa preuve (dans la direction choisie).

#### A. Une conjecture pour $m_1$ sur les surfaces.

Comme il a été mentionné plus haut le problème de la recherche de la multiplicité maximale d'une métrique riemannienne est complètement résolu en dimension supérieure ou égale à 2 par le théorème 2.2.

Par ailleurs, le cas des surfaces est toujours ouvert ; nous savons des exemples de grande multiplicité sur les surfaces, mais la borne

$$m_1 \leq 4\gamma + 3$$

n'est certainement pas optimale (elle ne l'est déjà pas pour  $\gamma = 1$ ) de sorte que la meilleure valeur est encore à découvrir.

La méthode décrite brièvement dans les sections précédentes repose sur la théorie des graphes, plus précisément sur les plongements de graphes complets à  $N+1$  sommets dans la variété. Si  $X$  est une surface de genre  $\gamma$ , la valeur maximale d'un tel  $N$  est

$$N_{\max} = E \left( \frac{5 + \sqrt{48\gamma + 1}}{2} \right)$$

il est alors naturel de poser la

**3.1. CONJECTURE ([COLVER 1]).** — *Pour toute métrique riemannienne sur  $X$  (ou opérateur de Schrödinger)*

$$m_1 \leq N_{\max} .$$



### 3.2. REMARQUES.

i) La conjecture est vraie si  $\gamma = 0$  ou  $1$ .

ii) Si la conjecture 3.1 est vraie pour les opérateurs de Schrödinger, alors l'inégalité est optimale par le théorème 2.2.

iii) Dans [Bur] la borne

$$m_1 \leq \sqrt{6(\gamma - 1)}$$

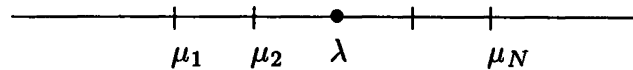
pour des métriques est obtenue lorsque  $X$  est proche d'un graphe dans le sens de l'application  $\mathbf{D}$  de la section précédente.

Afin de faire un pas vers une preuve de la conjecture, il est nécessaire de trouver une bonne propriété des espaces propres multiples; le théorème de Courant en est une mais cela ne suffit certainement pas à prouver 3.1.

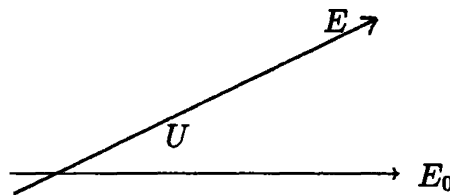
### B. Une condition de stabilité.

Dans les quatre paragraphes suivants  $X$  est une variété de dimension quelconque. Soit  $\lambda$  une valeur propre de multiplicité  $N$  correspondant à une métrique  $g_0$ ; on se propose d'étudier l'ensemble

$W = \{\text{métrique } g \text{ proche de } g_0 \mid g \text{ à } \lambda \text{ pour valeur propre avec la multiplicité } N\}$ ,  
si  $E_0$  est l'espace propre correspondant à  $g_0$ , par petites perturbations la valeur propre  $\lambda$  se scinde en  $N$  valeurs propres  $\mu_1, \dots, \mu_N$



et l'espace propre  $E_0$  en la somme  $E$  des espaces propres correspondant aux valeurs propres  $\mu_1, \dots, \mu_N$ .



En particulier dans l'espace de Sobolev  $H^1(X)$ ,  $E$  est proche de  $E_0$ , de sorte que l'on peut aisément construire une  $L^2$ -isométrie canonique, notée  $U$  entre eux (voir [ColVer 1]).

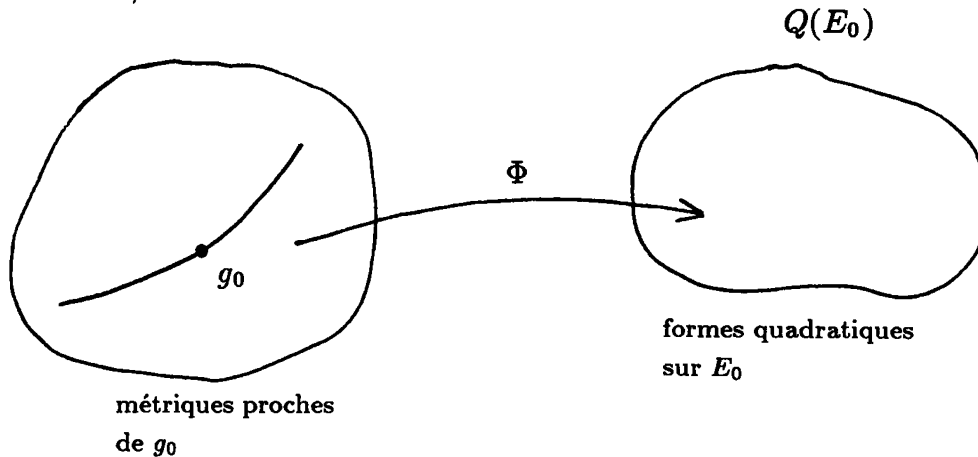
Soit  $q_0$  (resp.  $q'$ ) l'intégrale de Dirichlet correspondant à la métrique  $g_0$  (resp.  $g$ ), alors

$$q_0 \upharpoonright E_0 = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire  $L^2$ ; définissons  $q$  par

$$q(x, y) = q'(Ux, Uy) \text{ pour } x, y \in E_0$$

$q$  est la forme  $q'$  transportée sur l'espace fixe  $E_0$ , on a donc construit une application  $\Phi$ ,



telle que  $\Phi(g_0) = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On pose alors la

**3.3. DÉFINITION.** — On dira que la valeur propre  $\lambda$  est *stable* si  $\Phi$  est une submersion en  $g_0$ .

#### 3.4. REMARQUES.

- i) C'est la propriété S.A.H. de [ColVer 2].
- ii) La stabilité de  $\lambda$  implique que  $W$  est une sous-variété au voisinage de  $g_0$ , et cela va permettre de faire de la géométrie différentielle sur  $W$ .
- iii) On doit prendre quelques précautions avec la topologie utilisée sur l'espace des métriques, en particulier il est plus intéressant de travailler avec des variétés de Banach de sorte que nous utiliserons la topologie  $C^k$  sur cet espace pour  $k$  grand. Ces détails ne seront pas décrits ici, le lecteur peut se référer à [Bes 2].

A première vue, il ne semble pas très aisé de vérifier qu'une valeur propre est stable en ce sens; dans [ColVer 2] il est prouvé en utilisant la théorie des groupes que

#### 3.5. THÉORÈME (Y. Colin de Verdière). —

- i) Toutes les valeurs propres de la métrique canonique sur  $X = S^2$  sont stables.
- ii) Une valeur propre sur un tore plat de dimension 2 est stable si et seulement si sa multiplicité n'excède pas 6.

En particulier des valeurs propres instables existent. En vue de pouvoir décider de la stabilité ou non d'une valeur propre dans un cadre général nous

allons donner un critère pratique.

### C. Un critère de stabilité.

La notion de stabilité d'une valeur propre donnée appartient à la théorie des perturbations. Dans la définition 3.4 nous avons utilisé des perturbations générales de métriques; nous pourrions aussi bien nous limiter aux métriques conformes à  $g_0$ ; ou bien aux perturbations du Laplacien associé à  $g_0$  par des potentiels lisses. Une notion de stabilité est associée à chacun de ces aspects.

Nous dirons qu'une valeur propre est stable, conformément stable ou stable pour les potentiels, suivant le type de perturbations considérées.

Rappelons que  $E_0$  désigne l'espace propre multiple et soit  $(u_i)_{1 \leq i \leq N}$  une base (orthonormée) de  $E_0$ , alors on a la

3.6. PROPOSITION (voir [Bes 2]). — La valeur propre  $\lambda_0$  est

i) *non conformément stable ou non stable pour les potentiels si et seulement si il existe une relation non triviale du type*

$$\sum_{i \leq j} \alpha_{ij} u_i(x) u_j(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in X$$

avec  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha_{ij})_{i,j} \neq 0$ .

ii) *non stable si les relations suivantes sont satisfaites simultanément*

$$\begin{cases} \sum_{i \leq j} \alpha_{ij} u_i(x) u_j(x) = 0 & \text{pour tout } x \in X \\ \text{et} \\ \sum_{i \leq j} \alpha_{ij} (d_x u_i \circ d_x u_j) \equiv 0 \end{cases}$$

où  $a \circ b$  désigne le produit symétrique de  $a$  et  $b$ , et  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ .

### 3.7. Remarques.

i) La preuve de la proposition est facile car on connaît exactement la dérivée des valeurs propres par rapport à une variation du type considéré (voir [Bes 2]).

ii) La propriété de stabilité est une propriété de l'espace propre  $E_0$ . En effet, si l'on définit

$$E_0^2 = \{\text{fonctions } u \cdot v, \text{ pour } u \in E_0 \text{ et } v \in E_0\}$$

alors dans le cas i) (par exemple) la stabilité est équivalente à

$$\dim E_0^2 = \frac{N(N+1)}{2},$$

dans la suite on écrira que  $E_0$  est stable au lieu de  $\lambda_0$  stable.

### 3.8. Exemples.

i) Si  $X = S^n$  muni de la métrique canonique, le premier espace propre est engendré par la restriction à  $S^n$  des coordonnées de  $\mathbf{R}^{n+1}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . Il est alors évident qu'il n'y a aucune relation non triviale

$$\sum_{i \leq j} \alpha_{ij} x_i x_j \equiv 0 .$$

En conséquence, la première valeur propre de  $S^n$  est stable en tous les sens possibles. Mais d'autres valeurs propres peuvent ne pas être stable, par exemple sur  $S^3$  ([Tor]).

ii) Si  $X = \mathbf{T}^2$  vu comme

$$X = \mathbf{R}^2 / \mathcal{L} \quad \mathcal{L} \text{ engendré par } (1, 0) \text{ et } (0, 1)$$

alors la métrique quotient plate a un premier espace propre de multiplicité 4 engendré par les fonctions

$$\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y),$$

et bien évidemment

$$\cos^2(2\pi x) + \sin^2(2\pi x) \equiv 1 \equiv \cos^2(2\pi y) + \sin^2(2\pi y),$$

de sorte que la valeur propre correspondante *n'est pas* conformément stable. Toutefois par le théorème 3.5 (et c'est facile à vérifier avec le critère) elle est stable.

### D. Propriétés génériques des fonctions propres.

Avec les notations du paragraphe précédent, définissons l'application

$$X \xrightarrow{F_g} \mathbf{R}^N$$

$$x \longmapsto (u_1(x), \dots, u_N(x))$$

où  $(u_i)_{i=1,2,\dots,N}$  est une base de l'espace propre de dimension  $N$  relatif à la valeur propre  $\lambda$  de la métrique  $g \in W$  (voisine de  $g_0$ ). La référence à  $g$  sera omis dans l'expression de  $(u_i)$ .

Il est clair que la base  $(u_i)$  peut être choisie dépendant différentiablement (par exemple  $C^1$ ) de la métrique (voir [Bes 2]) en utilisant l'isométrie canonique du paragraphe C.

Afin de trouver une propriété générique de l'application  $\Phi$  il est utile de rappeler ce qui est connu pour une application quelconque

$$X^n \xrightarrow{G} \mathbf{R}^N, \quad n = \dim X .$$

Soit  $G$  une application de classe  $C^k$  de  $X$  dans  $\mathbf{R}^N$  ( $k$  est assez grand) alors génériquement

$G$  est une fonction de Morse si  $N = 1$  [Mor]

$G$  est une immersion si  $N \geq 2n$  [Whi]

$G$  est un plongement si  $N \geq 2n + 1$  [Whi]

les deux derniers résultats sont les célèbres théorèmes de Whitney. (La définition précise de la topologie et de la généricité est omise ici, l'auteur n'ayant pas l'intention d'être exhaustif).

Que peut-on dire si l'on remplace  $G$  par  $F_g$ ? Le premier pas a été fait par K. Uhlenbeck [Uhl] : lorsque  $N = 1$  génériquement  $F_g$  est une fonction de Morse. (si  $N = 1$  la valeur propre  $\lambda_0$  est simple et clairement  $W$  est un voisinage ouvert de  $g_0$ , auquel cas puisque  $X$  est compacte, générique signifie pour un ouvert dense).

Les deux autres pas peuvent être franchis si  $\lambda_0$  est stable, précisément

**3.8. PROPOSITION.** — Si  $\lambda_0$  est une valeur propre stable de multiplicité  $N$  alors pour un ouvert dense de métriques dans  $W$ .

i)  $F_g$  est une immersion si  $N \geq 2n$ .

ii)  $F_g$  est un plongement si  $N \geq 2n + 1$ .

### 3.9. REMARQUES.

i) La preuve est faite en utilisant un théorème de transversalité. Elle est un peu technique car on doit étudier le comportement des fonctions propres par rapport à une métrique de  $W$ . Tout se ramène à montrer que si  $G(x_0, y)$  est la fonction de Green et  $v$  une fonction propre alors

$$G(x_0, \cdot)v(\cdot)$$

ne peut pas être  $C^\infty$ .

Afin de prouver cela, on a besoin de prendre  $g_0$  de classe ( $C^\infty$ ) mais pour appliquer le théorème de transversalité  $W$  doit être une variété de Banach, on s'autorise donc des perturbations  $C^k$  ( $k$  grand). Le lecteur peut se référer à [Bes 2] pour les détails.

L'auteur voudrait mettre l'accent sur le fait que la proposition 3.8 repose sur une étude *locale* (première étape de la preuve de Cheng) de la fonction de Green.

ii) Dans l'énoncé de la proposition 3.8 la stabilité est entendu comme étant l'un des trois cas présentés ci-dessus.

iii) la proposition 3.8 serait vide s'il n'existait aucune valeur propre stable.

### E. Encore des valeurs propres stables.

Quelles sont les valeurs propres multiples stables en dehors des exemples canoniques?

En fait tous les exemples décrits par Y. Colin de Verdière, B. Colbois et Y. Colin de Verdière sont stables.

En effet, elles sont obtenues par la procédure suivante :

1) Un sous-espace de  $L^2$  est donné par la situation, il est appelé espace test  $E_{\text{test}}$ . Dans le cas du plongement du graphe dans  $X$ ,  $E_{\text{test}}$  est un plongement dans  $L^2(X)$  des fonctions sur le graphe en associant à chacune d'elle une fonction constante sur les parties épaisses (voir fig.3), et harmonique sur les parties fines.

2) Ensuite une construction géométrique permet d'exhiber une valeur propre de multiplicité égale à  $\dim(E_{\text{test}})$  et un espace propre  $E$  proche de  $E_{\text{test}}$  dans l'espace de Sobolev  $H^1(X)$ .

Alors la stabilité conforme (par exemple) peut-être reformulée de la manière suivante :

$$\mathbf{R}^{\frac{N(N+1)}{2}} \xrightarrow{L} L^2(X)$$

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \mapsto \sum_{i \leq j} \alpha_{ij} u_i u_j$$

$$\begin{aligned} E \text{ stable} &\iff L \text{ injective} \\ &\iff L \text{ ouverte i.e. } \exists C \ L(\alpha) \geq C|\alpha| \ (C > 0) \\ &\text{où } |\alpha| = \left( \sum_{i \leq j} \alpha_{ij}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

il est alors clair que la proximité de  $E$  et  $E_{\text{test}}$  dans  $H^1(X)$  implique que,

$$E \text{ stable} \iff E_{\text{test}} \text{ stable} .$$

Dans chaque situation particulière on est donc conduit à prouver la stabilité de l'espace *explicite*  $E_{\text{test}}$  bien sûr ici par stabilité conforme on entend

$$\dim(E_{\text{test}}^2) = \frac{N(N+1)}{2}$$

et une définition analogue de la stabilité.

### 3.10. REMARQUES.

❖ i) Dans la section précédente il a été écrit que le graphe complet satisfait à la condition de stabilité. C'est vrai pour la forme faible (W.A.H. de [ColVer 2]), la seule nécessaire pour construire une valeur propre multiple, mais c'est aussi vrai pour la version forte de la condition de stabilité utilisée dans cette section. Ce n'est toutefois pas vrai pour la stabilité des potentiels; en effet l'espace propre multiple  $E_0$  de l'opérateur canonique sur un graphe complet est de dimension  $N$ , si  $s = N + 1$ , et l'espace  $L^2(K_s)$  est de dimension  $N + 1$  de sorte que

$$N + 1 < \frac{N(N+1)}{2} = \dim(E_0^2)$$

si  $N \geq 3$ .

La stabilité pour les potentiels n'est donc *jamais* satisfaite si  $N \geq 3$ .

Néanmoins le plongement  $E_{\text{test}}$  de  $E_0$  dans  $L^2(X)$  est utilisé dans l'application 1 de la section 2 satisfait à cette condition.

Le lecteur doit garder à l'esprit ces deux versions de la condition de stabilité.

ii) Lorsque des graphes sont utilisés pour construire des valeurs propres multiples nous savons déjà que la condition S.A.H. est satisfaite pour  $E_{\text{test}}$  (voir [Bes 2]), ce qui règle le cas des applications 1 et 2 de la section 2.

Dans l'application 3 l'espace  $E_{\text{test}}$  est l'espace propre correspondant à la première valeur propre de la métrique canonique sur le plan projectif ou sur un tore plat (et donc à une dimension  $\leq 6$ ). Nous savons qu'elles sont stables (non nécessairement conformément stables pour le tore).

iii) Ces exemples explicites de grande multiplicité permettent d'énoncer le

**3.11. THÉORÈME.** — *Sur toute variété fermée  $X^n$  il existe des métriques riemanniennes telles que  $X^n$  soit plongée dans  $\mathbf{R}^{2n+1}$  avec pour coordonnées des premières fonctions propres.*

## F. Et la conjecture ?.

Revenons au cas des surfaces; dans ce paragraphe  $X$  sera de *dimension 2*. Prouver la conjecture dans un cadre général est certainement très difficile car des multiplicités pathologiques peuvent apparaître. La condition de stabilité forte assure qu'un tel phénomène ne peut se produire, car il s'agit de la condition qui permet de préserver la multiplicité sous perturbations (d'où son nom).

L'idée qui suit est une tentative pour prouver la conjecture pour les valeurs propres.

Supposons que  $X$  soit munie d'une métrique telle que la première valeur propre soit stable et telle que  $m_1 = N \geq 5$  (car  $5 = 2 \times 2 + 1$ ). Il existe alors des métriques proches de celles-ci telles que l'application,

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{F_g} \mathbf{R}^N \\ x &\longmapsto (u_1(x), \dots, u_N(x)) \end{aligned}$$

soit un plongement (avec les notations du paragraphe précédent).

Ce résultat fut obtenu par une *étude locale* des fonctions propres et si nous désirons suivre le schéma de la preuve de Cheng il nous faut trouver une propriété globale de ces plongements.

La traduction géométrique du théorème de Courant est la propriété suivante que nous nommerons TPO

- *tout hyperplan de  $\mathbf{R}^N$  passant par l'origine sépare  $F(X)$  en exactement deux composantes connexes.*

ce qui rappelle la propriété bien connue de certains plongements de surfaces fermées

$$X \xrightarrow{G} \mathbf{R}^N$$

appelée la propriété des deux parties (TPP) qui est la suivante :

- pour tout demi-espace  $H$  de  $\mathbf{R}^N$  (le bord de  $H$  est un hyperplan qui ne passe pas nécessairement par l'origine)  
 $H \cap G(X)$  est connexe.

Th. Banchoff a montré que pour des surfaces fermées TPP est équivalente à la tension du plongement (voir [Kui 1]). Certainement les plongements  $F$  ne sont pas tendus car

3.12. THÉORÈME (N. Kuiper [Kui 2]). — Si  $G$  est un plongement tendu, substantiel (i.e.  $G(X)$  n'est pas inclus dans un sous-espace) et  $C^2$  de la surface  $X$  dans  $\mathbf{R}^N$  alors

$$N \leq 5 .$$

Et il existe des métriques pour lesquelles  $m_1 > 5$  (et bien sûr  $F$  est lisse).

Mais par ailleurs on a le très beau résultat dû à Th. Banchoff ([Ban]).

3.13. THÉORÈME ([Ban]). — Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus et si  $G$  est supposée polyédrale (i.e.  $G(X)$  est un polyèdre de  $\mathbf{R}^N$ ) alors

$$N \leq E \left\lceil \frac{5 + \sqrt{48\gamma + 1}}{2} \right\rceil .$$

L'idée serait donc de déformer le plongement lisse TPO donné par  $F$  en un plongement TPP mais polyédral et d'appliquer le théorème ci-dessus afin de prouver la conjecture.

### 3.14. REMARQUES.

i) La borne qui apparaît dans 3.13 est la même que celle qui apparaît dans la conjecture, car, pour un polyèdre, être tendu est une propriété du 1-squelette (voir [Küh]) qui est un graphe.

De plus la preuve est très similaire à celle qui conduit à la borne supérieure pour le nombre de sommets d'un graphe complet plongeable dans  $X$  .

ii) Il est aisé de vérifier que le premier espace propre d'un tore plat équilatéral qui est de multiplicité 6 fournit un plongement dans  $\mathbf{R}^6$  qui n'est pas tendu. En effet, il suffit de construire une fonction, par combinaison linéaire des fonctions propres et des constantes, qui a un minimum local non strict en un point ce qui peut être fait explicitement.

iii) Il est clair qu'il ne s'agit que d'une approche possible permettant de prouver la conjecture et que beaucoup d'autres peuvent être envisagées.



#### 4. Conclusion

Les progrès récents dans l'étude de la multiplicité des valeurs propres du Laplacien a permis d'introduire de nouvelles idées qui ont conduit à la solution complète du problème original en dimension supérieure ou égale à 3. Le cas de la dimension 2 est toujours ouvert, mais la conjecture ci-dessus est un objectif à atteindre.

Beaucoup d'autres problèmes peuvent être posés, en relation avec les précédents. Mentionnons-en ici deux.

**Problème 1 :** Surfaces à courbure constante.

Soit  $X$  une surface de Riemann et  $\mathcal{T}$  l'espace des modules de métriques à courbure constante ( $\gamma =$  genre de  $X \geq 2$ ) alors que vaut

$$\sup_{g \in \mathcal{T}} (m_1(g)) = M(\gamma) ?$$

On sait que

$$4\gamma + 3 \geq M(\gamma) \geq E \left( \frac{1 + \sqrt{8\gamma + 1}}{2} \right) .$$

**Problème 2 :** Variétés de dimension supérieure.

Soit sur  $X$ , variété fermée l'ensemble

$$\mathcal{T} = \{ \text{métrique} \setminus | \text{courbure sectionnelle} | \times (\text{diamètre})^2 \leq 1 \}$$

que vaut

$$\sup_{g \in \mathcal{T}} (m_1(g)) = M(X) ?$$

**Problème 3 :** Fibrés vectoriels.

Que peut-on dire de la multiplicité de la (toute) première valeur propre du Laplacien brut agissant sur les sections d'un fibré vectoriel métrique muni d'une connexion sur une variété riemannienne.

#### 5. Bibliographie

- [Alb] J. ALBERT. — *Genericity of simple eigenvalues for elliptic PDE's*, Proc. Amer. Math. Soc., **48** (1975), 413-418.
- [Arn] V.I. ARNOLD. — *Modes and quasimodes*, Functional Anal. Appl., **6** (1972), 94-101.
- [Ba-Ura] S. BANDO, H. URAKAWA. — *Generic properties of eigenvalues of the Laplacian for compact Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J., **35** (2) (1983), 155-172.

- [Ban] TH. BANCHOFF. — *Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds*, Amer. J. Math., **87** (1965), 245-256.
- [Bér] P. BÉRARD. — *Spectral geometry : direct and inverse problems*, Lecture notes in Math., n° 1207, Springer Verlag, 1986.
- [Béber-Bou] L. BÉRARD BERGERY, J.P. BOURGUIGNON. — *Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibers*, Illinois J. Math., **26** (1982), 181-200.
- [Bes 1] G. BESSON. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier, **30** (1980), 109-128.
- [Bes 2] G. BESSON. — *Propriétés génériques des fonctions propres et multiplicité*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 81, Grenoble, 1987.
- [B-G-M] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET. — *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes, n° 194, Springer N.Y., 1971.
- [Ble-Wil] D. BLEECKER, L. WILSON. — *Splitting the spectrum of a Riemannian manifold*, Siam J. Math. Analysis, **11** (1980), 813-818.
- [Bur] M. BURGER. — *Dégénérescence de surfaces de Riemann et petites valeurs propres*, Preprint.
- [Bur-Col] M. BURGER, B. COLBOIS. — *A propos de la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **300** (1985), 247-250.
- [Cha-Fel] I. CHAVEL, E. FELDMANN. — *Spectra of manifolds with small handles*, Comment. Math. Helv., **56** (1981), 83-102.
- [Che] S.Y. CHENG. — *Eigenfunctions and nodal sets*, Commentarii Math. Helv., **51** (1976), 43-55.
- [Col 1] B. COLBOIS. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien des surfaces à courbure -1*, Thèse Université de Lausanne, 1987.
- [Col-ColVer] B. COLBOIS, Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Multiplicité de la première valeur propre positive du Laplacien d'une surface à courbure constante*, To appear in Commentarii Math. Helv..
- [ColVer 1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien*, Comm. Math. Helvetici, **61** (1986), 254-270.
- [ColVer 2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold*, To appear in Comm. Math. Helvetici.
- [ColVer 3] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Construction de Laplaciens dont une partie du spectre est donnée*, To appear in Annales Scient. E.N.S..
- [ColVer 4] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 71, Grenoble, 1987.
- [ColVer-Mar] Y. COLIN DE VERDIÈRE, A. MARIN. — *Triangulations presque-équilatérales d'une surface*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 88, Grenoble, 1987.
- [Cou-Hil] R. COURANT, D. HILBERT. — *Methods of Mathematical Physics*, Wiley-Interscience I, 1953, II 1962.
- [Do-Pi-Ra-Su] J. DODZIUK, T. PIGNATARO, D. SULLIVAN, B. RANDOL. — *Estimating small eigenvalues of Riemann surfaces*, preprint.

- [Kac] M. KAC. — *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly, **73** (1966), 1-23.
- [Kat] T. KATO. — *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 132, Springer-Verlag, 1973.
- [Küh] W. KÜHNEL. — *Tight and 0-tight polyhedral embeddings of surfaces*, Invent. Math., **58** (1980), 161-177.
- [Kui 1] N. KUIPER. — *Tight embeddings and maps, submanifolds of geometrical class three in  $E^n$* , The Chern symposium, Proc. Int. Symp. Calif. Springer-Verlag, (1979), 97-145.
- [Kui 2] N. KUIPER. — *Immersions with minimal total absolute curvature*, Coll. de Géométrie Diff. Bruxelles CBRM, (1958), 75-88.
- [Mor] M. MORSE. — *The critical points of a function of  $n$  variables*, Transactions of the A.M.S., **33** (1931), 71-91.
- [Oza] S. OZAWA. — These proceedings,.
- [Pro] M.H. PROTTER. — *Can one hear the shape of a drum? revisited*, Siam Review, Vol. 29, n° 2, june, 1987.
- [Rin] G. RINGEL. — *Map color Theorem*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 209, Springer-Verlag, 1974.
- [Tor] N. TORKI. — Private communications,.
- [T-S-G] SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE. — *Institut Fourier de Grenoble*, Année 1986-87.
- [Uhl] K. UHLENBECK. — *Generic properties of eigenfunctions*, Amer. J. Math., **98** (1976), 1059-1078.
- [Ura] H. URAKAWA. — *On the least eigenvalue of the Laplacian for compact group manifold*, J. Math. Soc. Japan, **31** (1982), 181-200.
- [Whi] H. WHITNEY. — *Geometric Integration theory*, Princeton Math. Series 21, 1957.

— ♦ —

**Institut Fourier**  
 B.P.74  
 38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex  
 (France)

(21 décembre 1987)