

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 9-15

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__9_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ASYMPTOTIQUE DE WEYL POUR LES BOUTEILLES MAGNÉTIQUES

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

Soit $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction C^1 , on considère l'opérateur de Schrödinger associé au potentiel électrique $V : H_V = -\Delta + V$, qui est essentiellement autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et les propriétés suivantes que peut avoir V [Dans ce qui suit,

"EB" est une abréviation pour bouteille électrique,

"C" est une abréviation pour classique (par référence à la mécanique classique),

"Q" est une abréviation pour quantique (par référence à la mécanique quantique)] :

[EB ∞] $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$.

[EBC] pour presque toute donnée initiale $(x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^d)$, la trajectoire du système d'hamiltonien $\xi^2 + V(x)$ est bornée dans $T^*(\mathbb{R}^d)$.

[EBQ] H_V est à résolvante compacte.

Il est élémentaire de prouver que : [EB ∞] \implies [EBC] et [EBQ].

Problème : Y-a-t-il des relations directes entre [EBC] et [EBQ]?

En outre, sous l'hypothèse [EB ∞] augmentée d'une hypothèse sur $\|\text{grad } V\|$ ([R-S], p. 275 et suite), on a l'estimation de Weyl pour le comportement asymptotique de la fonction $N(\lambda)$ de dénombrement des valeurs propres : si $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ sont les valeurs propres de H_V (avec la convention usuelle sur les multiplicités) et $N_V(\lambda) = \#\{\lambda_n \leq \lambda\}$, on a :

$$N_V(\lambda) \sim \int_{\mathbb{R}^d} \nu_{V(x)}(\lambda) dx, \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty ;$$

où $\nu_{V_0}(\lambda) = C_d(\lambda - V_0)_+^{d/2}$ est la *densité d'états* ("integrated density of states") pour l'opérateur de Schrödinger $H_{V_0} = -\Delta + V_0$ avec potentiel V_0 constant (voir [CV 2] pour des définitions précises concernant la densité d'états).

Le but de cet exposé est de décrire des résultats similaires pour l'opérateur de Schrödinger avec champ purement magnétique dans \mathbf{R}^d .

1. L'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

Sur \mathbf{R}^d , le champ magnétique est donné par une 2-forme réelle fermée $B(x) = \sum_{j,k} b_{j,k}(x) dx_j \wedge dx_k$.

Lorsque $d = 2$, $B(x)$ est une fonction scalaire,

Lorsque $d = 3$, $B(x)$ s'identifie naturellement à un champ de vecteurs sur \mathbf{R}^3 .

Une 1-forme réelle $A = \sum_j a_j(x) dx_j$ sur \mathbf{R}^d est un potentiel magnétique de B si $dA = B$. L'hamiltonien classique est $h_B(x, \xi) = \sum_j (\xi_j - a_j)^2$. La projection sur \mathbf{R}^d de ses trajectoires est indépendante du choix de A : ce sont les trajectoires d'une particule chargée dans le champ B . L'opérateur de Schrödinger H_B décrivant les trajectoires d'une particule quantique dans \mathbf{R}^d est défini par :

$$H_B = \sum_{j=1}^d X_j^2 \quad \text{avec} \quad X_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j .$$

Un changement de potentiel magnétique $\tilde{A} = A + d\varphi$, affecte peu H_B : $\tilde{H}_B = e^{-i\varphi} H_B e^{i\varphi}$ est unitairement équivalent à H_B dans $L^2(\mathbf{R}^d)$: un tel changement s'appelle une transformation de jauge. Le problème du choix d'une bonne jauge est souvent important : la "vraie" donnée physique est celle de B et non de A . Sous des hypothèses raisonnables ([A-H-S]), H_B est essentiellement autoadjoint sur $L^2(\mathbf{R}^d)$.

On peut définir tout ceci dans un contexte purement géométrique: (X, g) est une variété riemannienne, B est vue comme la courbure d'une connexion ∇ sur un fibré en droites complexes L au-dessus de X : la condition de réalité de A s'interprète par le fait que la connexion préserve une structure hermitienne sur L . L'opérateur de Schrödinger est alors obtenu formellement sur $C_0^\infty(X; L) \subset L^2(X; L)$ à partir de la forme quadratique $q(f) = \int_X \|\nabla f\|^2 \nu_g$.

B étant donné, L n'est pas unique si $H^1(X; \mathbf{R}) \neq 0$ et n'existe que si $[B] \in H^2(X; 2\pi\mathbf{Z})$.

Cette définition géométrique est utile en particulier dans le cas périodique : $X = \mathbf{R}^d/\Gamma$ où L n'est pas trivial en général. Elle sert aussi pour les généralisations aux cas d'interactions non électromagnétiques qui sont associées à des connexions sur des fibrés de groupes structuraux plus généraux que $U(1)$: par exemple, il serait

intéressant de généraliser les divers résultats connus sur les champs magnétiques au cas de $SU(n)$, en particulier le calcul de la densité d'états pour les champs constants.

2. Bouteilles magnétiques

Le problème est maintenant de *confiner* une particule (classique ou quantique) dans une région bornée de \mathbb{R}^d au moyen d'un champ magnétique intense. Suivant [A-H-S], une telle configuration sera appelée "bouteille magnétique".

Introduisons quelques propriétés que peut vérifier B , parallèles à celles des champs électriques.

[$MB\infty$] $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|B(x)\| = +\infty$.

[MBC] Presque toutes les trajectoires classiques dans le champ B sont bornées.

[MBQ] H_B est à résolvante compacte.

Mentionnons quelques résultats :

1) Dans [A-H-S] et [IA], il est prouvé des résultats du type : [$MB\infty$] + Conditions \Rightarrow [MBQ].

2) Dans [D], il est prouvé que [$MB\infty$] $\not\Rightarrow$ [MBQ].

Parmi les problèmes, mentionnons en deux :

1) Trouver des conditions raisonnables telles que :

$$[MB\infty] + \text{Conditions} \Rightarrow [MBC].$$

2) Trouver des relations entre [MBC] et [MBQ].

En fait, pour $d \geq 3$, je ne connais aucun exemple où l'on sache prouver que [MBC] est vérifiée.

L'exemple le plus simple, pour $d = 3$, est le champ B donné par $\vec{B}(x, y, z) = \mathcal{V} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$ où \mathcal{V} est une matrice 3×3 réelle non singulière ($\det \mathcal{V} \neq 0$) et de trace nulle. D'après [A-H-S], ce champ vérifie [MBQ]. Il est d'autre part évident que toute droite vectorielle propre de \mathcal{V} est le support de trajectoires non bornées dans B . Sont-ce les seules trajectoires non bornées?

3. Densité d'états pour les champs constants

Si P est un opérateur elliptique autoadjoint ≥ 0 sur une variété compacte X et que l'on note $P_\lambda(x, y)dy = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}dy$ le noyau du projecteur spectral sur la somme des espaces propres correspondants à des valeurs propres $\leq \lambda$, on a :

$$N(\lambda) = \int_X P_\lambda(x, x)dx .$$

$P_\lambda(x, x)dx$ mérite donc dans ce cas le nom de densité de valeurs propres ou densité d'états. On peut généraliser cette notion au cas d'une variété non compacte : si $P_\lambda(x, y)dy$ est le noyau (C^∞) du projecteur spectral $\int_{-\infty}^{\lambda} dE(\mu)$ d'un opérateur elliptique autoadjoint P sur \mathbb{R}^d , on désigne la mesure $P_\lambda(x, x)dx$ sous le nom de *densité d'états*. Dans le cas où P est H_{B_0} (champ magnétique constant), il est clair pour des raisons d'homogénéité que $P_\lambda(x, x)dx$ est indépendant de x . On notera $\nu_{B_0}(\lambda)$ la mesure associée.

On peut calculer $\nu_{B_0}(\lambda)$ en se ramenant au cas de la dimension 2: on peut alors utiliser la formule explicite pour le noyau de $e^{-tH_{B_0}}$ et la relation : $e_{B_0}(t, x, x) = \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\nu_{B_0}(\lambda)$, ce qui donne la transformée de Laplace de $d\nu_{B_0}(\lambda)$. On peut aussi calculer directement le spectre de H_{B_0} . Les résultats sont les suivants :

$$(i) \text{ si } d = 2, d\nu_{B_0}(\lambda) = \frac{|B_0|}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\lambda - (2n+1)|B_0|) .$$

(ii) si $d \geq 3$, B_0 s'écrit dans une base orthonormée convenable de \mathbb{R}^d , $B_0 = \sum_{j=1}^r b_j dx_j \wedge dy_j$, $b_j > 0$.

On a alors :

$$\nu_{B_0}(\lambda) = C_{r,d} \sum_{n_i \geq 0} \left(\lambda - \sum_{i=1}^r (2n_i + 1)b_i \right)_+^{k/2}$$

avec $2r + k = d$, ou encore :

$$\int_0^{+\infty} e^{t\lambda} d\nu_{B_0}(\lambda) = (4\pi t)^{-d/2} \prod_{i=1}^r \left(\frac{b_i t}{\sinh b_i t} \right) .$$

La densité d'états est reliée à la fonction $N_{B_0, R}(\lambda)$ de dénombrement des valeurs propres de H_{B_0} sur un cube de côté R avec les conditions aux limites de Dirichlet. On a besoin de l'estimation précise suivante qui est le point essentiel et nouveau de notre preuve de la formule de Weyl pour les champs magnétiques :

THÉORÈME. — Il existe une constante C , ne dépendant que de d , telle que, pour tout A , avec $0 < A < R/2$, on ait :

$$(1) N_{B_0, R}(\lambda) \leq R^d \nu_{B_0}(\lambda);$$

$$(2) N_{B_0, R}(\lambda) \geq (R - A)^d \nu_{B_0}(\lambda - C/A^2).$$

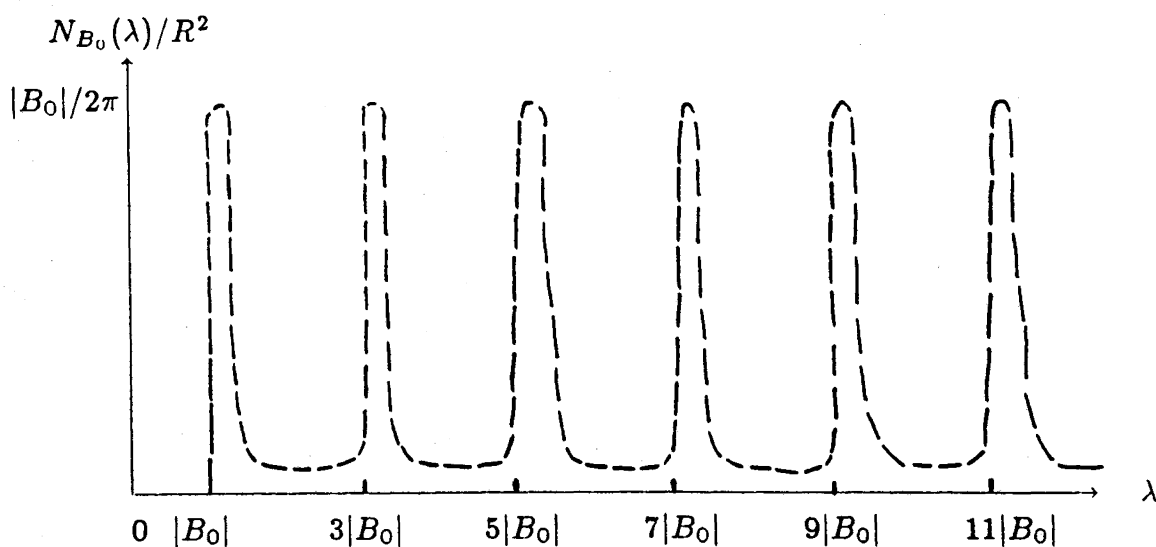
La preuve de (1) repose sur la méthode due à Polya ([P]). Remarquons qu'on ne fait aucune hypothèse sur l'orientation relative du cube et de B .

COROLLAIRE. — On a :

$$N_{B_0, R}(\lambda) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \int_{[0, R]^d} \nu_{B_0}(\lambda).$$

Le corollaire sert de point de départ pour la définition usuelle de $\nu_{B_0}(\lambda)$, mais cette définition usuelle est de peu d'utilité dans des contextes où les effets de bords ne sont jamais négligeables (géométrie hyperbolique, arbres). Nous renvoyons à [CV 2] pour d'autres commentaires à ce sujet.

Dans le cas $d = 2$, il est instructif de visualiser la fonction $N_{B_0, R}(\lambda)/R^2$ pour R grand :



4. L'asymptotique de Weyl

Le comportement asymptotique des valeurs propres de H_B , pour $\|B\|$ grand, a été étudié par plusieurs auteurs récemment : Tamura ([T]) a obtenu des résultats voisins des miens dans le cas $d = 3$ en utilisant l'intégrale de Feynman-Kac. Ivrii a annoncé des résultats d'un type voisin ([II]). Enfin, Demailly ([DY]) a obtenu des estimations du même type qu'il applique à des problèmes de géométrie complexe. Enfin, cette situation peut apparaître comme un cas particulier de celles étudiées dans [F].

On a le :

THÉORÈME ([CV 3]). — Supposons que le champ B sur \mathbb{R}^d vérifie $[MB\infty]$ et les conditions :

(i) $\exists C > 0$ telle que, $\forall x, x' \in \mathbb{R}^d$, $\|x - x'\| \leq 1$, on ait $\|B(x)\| \leq C\|B(x')\|$.

(ii) il existe un potentiel A de B tel que : $\forall \beta$, $|\beta| = 2$, $|D^\beta a_j(x)| = 0$ ($\|B(x)\|^{3/2}$).

Alors, si $N_{as}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu_{B(x)}(\lambda) dx$, on a, $\forall \varepsilon > 0$, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$N_{as}(\lambda(1 - \varepsilon)) \lesssim N(\lambda) \lesssim N_{as}(\lambda(1 + \varepsilon)).$$

Ce théorème s'applique aisément pour déterminer le comportement asymptotique de $N(\lambda)$ dans l'exemple décrit au §2.

6. Bibliographie

- [A-H-S] J. AVRON, I. HERBST ET B. SIMON. — *Schrödinger Operators with magnetic fields, I*, Duke Math. J., **45** (1978), 847-883.
- [B] G. BESSON. — *Geometry of Connections, I : An asymptotic expansion for the heat kernel associated to connections*, Preprint. Philadelphia, 1986.
- [C-H] R. COURANT et D. HILBERT. — *Methods of Mathematical Physics, I*, Wiley, 429-431, 1953.
- [CV 1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Calcul du spectre de certaines nilvariétés compactes de dimension 3*, Séminaire Grenoble-Chambéry (exposé n° 5), 83-84.

- [CV 2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Minorations de sommes de valeurs propres et conjecture de Polya*, Séminaire Grenoble-Chambéry (exposé n° 6), 84-85.
- [CV 3] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Comment. Math. Phys., **105** (1986), 327-335.
- [D] A. DUFRESNOY. — *Un exemple de champ magnétique dans \mathbb{R}^{ν}* , Duke Math. J., **50** (1983), 729-734.
- [DY] J.-P. DEMAILLY. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d'' -cohomologie*, Ann. Inst. Fourier, **35** (1985), 189-229.
- [F] CH. FEFFERMAN. — *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc., **9** (1983), 129-206.
- [IA] A. IWATSUKA. — *Magnetic Schrödinger Operators with compact Resolvent*, Preprint, 1985.
- [II] V. IVRII. — *Estimates for number of negative eigenvalues of Schrödinger operator with singular potential*, Proc. ICM 86 (Berkeley), à paraître.
- [M] F. MICHAU. — *Comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique*, Thèse de 3^{ème} cycle, Grenoble, 1982.
- [J-K] P. JORGENSEN et W. KLINK. — *Quantum Mechanics and Nilpotent Groups, I. The curved magnetic field*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **21** (1985), 969-999.
- [P] G. POLYA. — *On the eigenvalues of vibrating membranes*, Proc. London Math. Soc., **11** (1961), 419-433.
- [R-S] REED-SIMON. — *Methods of modern mathematical physics, IV*,.
- [T] H. TAMURA. — *Asymptotic Distribution of Eigenvalues for Schrödinger operators with Magnetic Fields*, Preprint Nagoya U., 1985.