

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Géodésiques pour des métriques riemanniennes semi-continues inférieurement

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 151-156

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__151_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉODÉSQUES POUR DES MÉTRIQUES RIEMANNIENNES SEMI-CONTINUES INFÉRIEUREMENT

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

C'est un exercice instructif que d'essayer d'affaiblir au maximum les hypothèses de régularité sur une métrique riemannienne pour définir quelques objets géométriques : géodésique, courbure, rayon d'injectivité, laplacien, équation de la chaleur, mouvement brownien, etc.

Ce jeu n'est pas entièrement gratuit comme le montre les exemples suivants :

- théorie du contrôle et métriques de Carnot,
- double d'une variété à bord,
- optique géométrique ou ondulatoire près des hypersurfaces de séparation de de milieux d'indices différents,
- laplaciens sur un feuilletage.

1. Métriques semi-continues inférieurement

Dans toute la suite X est une variété compacte C^∞ de dimension d .

Métriques euclidiennes sci : c'est la donnée, sur un espace vectoriel E , d'un sous-espace F de E et d'une structure euclidienne g_0 sur F . La métrique g sur E est donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{si } x \in F \\ +\infty & \text{si } x \notin F \end{cases}$$

il est clair qu'une telle métrique est limite de la suite croissante des métriques euclidiennes $g_n(x \oplus y) = g_0(x) + ng_1(y)$ si $E = F \oplus G$ et g_1 métrique euclidienne

sur g .

Une métrique riemannienne *sci* est la donnée pour chaque x de X d'une métrique euclidienne *sci* sur $T_x X$, soit g_x ayant la propriété suivante : l'application $(x, v) \mapsto g_x(v)$ est *sci* comme fonction numérique sur TX . On a la propriété caractéristique suivante :

PROPOSITION. — *Si g est une métrique riemannienne sci sur la variété compacte X , il existe une suite croissante g_n de métriques Finslériennes continues sur X telles que, $\forall (x, v) \in TX$, on ait $g(x, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x, v)$.*

Remarque. — Je ne sais pas si dans cet énoncé on peut remplacer "Finslérienne" par "Riemannienne".

Démonstration. — Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ une base dénombrable de la topologie de X et supposons TX trivialisé sur les ω_α . Puis soit g_β une famille dénombrable dense de métriques euclidiennes (usuelles sur \mathbb{R}^d). Pour chaque (α, α', β) tel que $\omega_{\alpha'} \subset \subset \omega_\alpha$ et $g_\beta < g$ sur ω_α , on construit $g_{\alpha, \alpha', \beta} = \varphi \cdot g_\beta$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\omega_\alpha; \mathbb{R}^+)$, $\varphi|_{\omega_{\alpha'}} = 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$.

Soit γ_n la suite de ces $g_{\alpha, \alpha', \beta}$ et $\tilde{g}_n = \sup_{n \geq 1} \gamma_n$, $g_n = \max(\tilde{g}_n, g_0)$, ($g_0 \leq g$ partout). Alors g_n est une suite de métriques Finslériennes ayant la propriété voulue.

2. Exemples

a) **Double d'une variété à bord.** — Soit X une variété riemannienne (C^∞) compacte à bord et $Y = bX$ son bord. Soit Z l'espace topologique obtenu en recollant deux exemplaires X_+ et X_- de X le long de Y : si X est un domaine de \mathbb{R}^2 , Z est la plaque X où on n'a pas identifié le dessus et le dessous (cette idée remonte au moins Birkhoff). Z admet une structure naturelle de variété C^∞ : soit $n(y)$ le vecteur normal à Y intérieur, unitaire. On définit des recollements φ_\pm de $Y \times]0, \pm \varepsilon[$ avec X_\pm par : $\varphi_\pm(y, t) = y + |t|n(y)$.

Il existe alors une métrique g sur Z , qui induit la métrique initiale sur $\overset{\circ}{X}_+$ et $\overset{\circ}{X}_-$. Cette métrique est continue sur Z . Par exemple, si X est un ouvert de \mathbb{R}^2 avec la métrique euclidienne et s l'abscisse curviligne le long de y , on a :

$$g = dt^2 + \left(1 - |t|\kappa(s)\right)^2 ds,$$

où $\kappa(s)$ est la courbure algébrique du bord Y .

b) **Milieu d'indice variable.** — Soit X une variété C^∞ , Z une hypersurface séparant X en deux composantes connexes X_1 et X_2 . Soient g_1 (resp. g_2) des

métriques riemanniennes sur X_1 (resp. X_2) telles que $\forall z \in Z$, $g_1|_{T_z X} \leq g_2|_{T_z X}$. On définit g par $g|_{X_1} = g_1$ et $g|_{X_2} = g_2$. C'est une métrique riemannienne *sci* sur X .

c) **Cas d'une distribution de sous-espaces.** — Soit D une distribution de sous-espaces (donnée pour chaque x de X d'un sous-espace D_x de dimension k de $T_x X$ variant continûment avec x). Si g_0 est une métrique C^∞ auxiliaire sur X , on définit g par $g|_{D_x} = g_0$, $g|_{T_x X \setminus D_x} = +\infty$.

Deux cas extrêmes :

- le cas intégrable (feuilletages),
- le cas contrôlable (les crochets itérés des champs de vecteurs tangents à D engendrent $T_x X$ pour tout x) : métriques de Carnot.

3. Géodésiques

DÉFINITION. — Une courbe $\gamma : I \rightarrow X$, de classe H^1_{loc} , où I est un intervalle ouvert de \mathbf{R} est une *géodésique* si elle minimise localement l'énergie : $\forall t_0 \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute courbe γ_1 coïncidant avec γ sur $|t - t_0| \geq \varepsilon$ vérifie

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|\dot{\gamma}_1(t)\|_g^2 dt \geq \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|\dot{\gamma}(t)\|_g^2 dt.$$

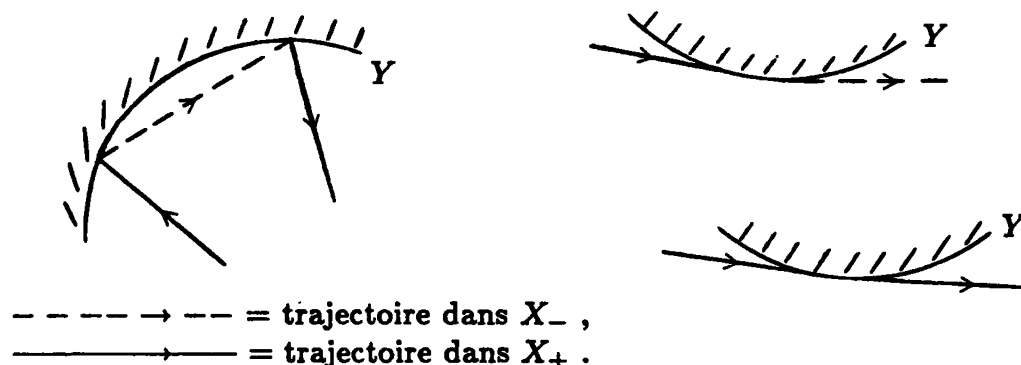
Dans tout ouvert où g est C^2 , les géodésiques sont les solutions des équations d'Euler-Lagrange.

THÉORÈME. — Si X est compacte et g *sci*, pour tout couple $a, b \in X$ tels que $d_g(a, b) < +\infty$, il existe une géodésique γ joignant a à b et réalisant la distance de a à b .

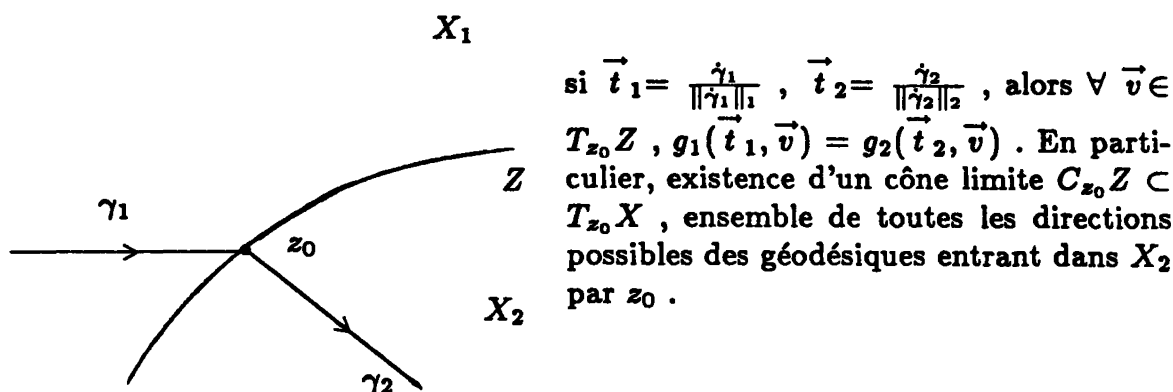
Démonstration. — Soit $\Omega_{a,b}^E$ l'ensemble des arcs $H^1([0,1], X)$ tels que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $E_g(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_g^2 dt \leq E$. Cet ensemble est compact pour la topologie H^1 faible et d'après Ascoli pour la topologie C^0 . Il suffit donc de prouver que la fonction énergie E_g est *sci* sur $\Omega_{a,b}^E$ pour la topologie de la convergence uniforme. Cela est classique si g est Finslérienne continue et donc dans le cas général car alors $E_g = \sup_n E_{g_n}$ avec $g_n \in C^0$.

Exemples. —

a) On retrouve les *trajectoires du billard* : Deux types de géodésiques près du bord en dimension 2 :



b) On retrouve les lois de la *réfraction* :



On peut aussi définir des notions d'indice de Morse et de points conjugués.

DÉFINITION. — Soit $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sci et $x_0 \in X$, on définit l'indice de Morse de F en x_0 ($\leq +\infty$) par : $\text{ind}_{x_0}(F) = \max_Z(\dim Z)$; Z sous-variété de X , $x_0 \in Z$ et $F|_Z$ admet en x_0 un maximum local.

On en déduit une notion d'indice de Morse d'une géodésique : $X = \Omega_{a,b}$, ou d'une géodésique périodique : $X = H^1(S^1, X)$ où F est l'énergie.

Points conjugués. — Soit $\gamma : [0, c] \rightarrow X$ une géodésique ; $x_0 = \gamma(0)$, on considère la fonction $n(t)$ qui est l'indice de Max de $\gamma|_{[0,t]}$ dans $\Omega_{x_0, \gamma(t)}$. C'est une fonction croissante, finie et à valeurs entières. Les points conjugués de x_0 sur γ sont les points de discontinuité de $n(t)$. $[n(t)$ est fini, car si $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ sont tels que sur $[t_i; t_{i+1}]$, γ minimise localement E et $W = \{\gamma_1 : [0, t] \rightarrow X | \forall i, \gamma_1(t_i) = \gamma(t_i)\}$, c'est une sous-variété de codimension finie et $E|_W$ a un minimum strict sur γ .]

4. Laplaciens

1) Cas où g est bornée. — Il existe g_0 métrique riemannienne C^∞ sur X et des constantes c_1 et c_2 telle que $0 < c_1 g_0 \leq g \leq c_2 g_0$. La forme quadratique $q(f) = \int_X \|df\|_g^2 v_g$ avec comme domaine $H^1(X)$ est fermée. L'extension de Friedrich de cette forme conduit à un opérateur autoadjoint sur $L^2(X, v_g)$ qui mérite le nom de laplacien associé à g . Ce n'est pas nécessairement un opérateur différentiel au sens classique.

Si $g|_\Omega$ (Ω ouvert de X) est C^2 alors $H_0^2(\Omega) \subset D(A)$ et Δ est le laplacien usuel dans Ω : $\forall f \in D(\Delta_g)$, $f|_\Omega \in H^2(\Omega)$ et $\Delta f|_\Omega = \Delta|_\Omega \cdot f|_\Omega$.

Là où g n'est pas régulière, il y a lieu d'écrire des conditions aux limites :

Ⓐ Dans l'exemple du double d'un domaine à bord X , on peut ainsi identifier $\Delta = \Delta_{Dirichlet}^X \oplus \Delta_{Neumann}^X$ en considérant les espaces propres de l'involution évidente de $L^2(X_+ \cup X_-)$.

Ⓑ Dans le cas où g a des discontinuités le long d'hypersurfaces, le formule de Green donne les conditions de recollement :

$$(1) \quad D(\Delta_g) = \left\{ f \in H^1(X) \mid f = f_1 \oplus f_2, f_i \in H^2(X_i), \frac{\partial f_1}{\partial n_1} \sigma_1 + \frac{\partial f_2}{\partial n_2} \sigma_2 = 0 \right\}$$

où σ_i sont les volumes sur le bord de X_i et n_i les normales extérieures calculées pour les deux métriques.

• Si g est continue, $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ et la condition est $\frac{\partial f_1}{\partial n_1} + \frac{\partial f_2}{\partial n_2} = 0$: c'est le cas des variétés C^1 par morceaux.

• Si g n'est pas continue par exemple $g_1 = g_0$ et $g_2 = n^2 g_0$ ($g_0 C^\infty, n > 1$), $\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = n^{d-1} \sigma_0$ d'où la condition : $\frac{\partial f_1}{\partial n_1} = n^{d-2} \frac{\partial f_2}{\partial n_2}$.

Dans ce cas, on peut mettre en évidence le phénomène de réflexion totale de certaines ondes planes issues du milieu d'indice > 1 . Décrivons le cas $X = \mathbb{R}^2$, $X_+ = \{y > 0\}$, $X_- = \{y < 0\}$, $g_0 = dx^2 + dy^2$: étudions les solutions de $\Delta f = \lambda f$ de la forme :

$$f_\pm(x, y) = F_\pm(y) \cdot e^{ix\xi} : \begin{cases} F_+'' + (\lambda - \xi^2)F_+ = 0 \\ F_-'' - (\lambda n^2 - \xi^2)F_- = 0. \end{cases}$$

On voit que si $\lambda > \xi^2$, une onde plane incidente

$$F_-^i(y) = e^{i\sqrt{\lambda n^2 - \xi^2} \cdot y}$$

se répartie en une onde plane réfléchie

$$F_-^r(y) = r(\xi) e^{i\sqrt{\lambda n^2 - \xi^2} \cdot y}$$

et une onde réfractée

$$F_+^r(y) = t(\xi)e^{i\sqrt{\lambda-\xi^2}\cdot y}.$$

Dans le cas où $\xi^2/n^2 < \lambda < \xi^2$, l'onde réfractée est à décroissance exponentielle : $F_+^v = t(\xi)e^{-\sqrt{\xi^2-\lambda}\cdot y}$: on a réflexion totale.

Dans tous ces cas Δ est à résolvante compacte et on a l'asymptotique de Weyl si l'ensemble des discontinuités se présente comme une réunion finie d'hypersurfaces.

2) Cas où g est finie sur une distribution $D \subset TX$. — On est alors amené à supposer que la distribution des sous-espaces ($D_x \subset T_x X ; x \in X$) est C^∞ et de dimension constante. Supposons que $g = g_0|_D$ où g_0 est C^∞ ; on peut considérer la forme quadratique $q(f) = \int_X \|df\|_g^2 \nu_{g_0}$, elle est fermable, car

$$\hat{D}(q) = \{f \in L^2(X) | Pf \in L^2(X)\}$$

où $P : \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X; D^*)$ est défini par $Pf = df|_D$. L'extension de Friedrich de q a l'inconvénient de dépendre de g_0 . Mais c'est une sorte de laplacien.

Deux cas extrêmes :

- Cas où les crochets de D engendrent TX , Δ est alors un opérateur hypoelliptique du type considéré par Hörmander.

- Cas où D est un feuilletage, Δ est une sorte de laplacien le long des feuilles.