

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PIERRE PANSU

**Pincement des variétés à courbure négative d'après
M. Gromov et W. Thurston**

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 101-113

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__101_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PINCEMENT DES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE

d'après M. Gromov et W. Thurston

par *Pierre PANSU*

Pour une variété riemannienne compacte, ou de volume fini, supposer que la courbure sectionnelle K est strictement négative est une hypothèse forte, c'est-à-dire

- elle a de nombreuses conséquences.
- elle est difficile à réaliser, i.e., on ne dispose pas de beaucoup d'exemples.

Cela se manifeste de façon frappante :

- il y a peu de propriétés des variétés à courbure constante qu'on ne sache pas étendre au cas où la courbure est variable.

En fait, cela a conduit M. Gromov à introduire une notion de "courbure négative généralisée", une façon de dégager les inégalités élémentaires sur lesquelles repose la théorie, de la relier au concept d'action de groupe hyperbolique, et d'englober certains aspects de la théorie combinatoire des groupes, voir [3].

Une autre direction vers laquelle la théorie peut sans doute s'étendre pour trouver plus de flexibilité est la mécanique lagrangienne, voir [2].

- il a fallu attendre 1980 pour que G.D. Mostow et Y.T. Siu [7] mettent en évidence des variétés compactes à courbure négative qui ne sont pas difféomorphes à un espace localement symétrique.

Les exemples sont des surfaces kähleriennes, obtenues comme revêtements ramifiés de surfaces à courbure holomorphe constante. On peut calculer leur signature τ et leur caractéristique d'Euler χ , qui satisfont

$$0 \neq \tau \neq \frac{1}{3}\chi,$$

alors que pour un espace localement symétrique de dimension 4, on a ou bien $\tau = 0$, ou bien $\chi = 3\tau$.

On connaît aujourd'hui des exemples en toutes dimensions ≥ 4 . Déjà dans [3], M. Gromov introduisait des revêtements ramifiés au-dessus de variétés à courbure constante comme moyen systématique pour obtenir des variétés à

courbure négative. L'article récent [4], contient trois démonstrations du fait que, à partir de la dimension 4, ces exemples n'ont pas de métrique à courbure constante. La première repose sur la rigidité de Mostow, la notion de volume simplicial et le fait que, en dimension ≥ 4 , le volume contrôle le diamètre. La seconde, reproduite dans ces notes, sur la rigidité de Mostow appliquée à des hypersurfaces. La troisième donne un résultat plus fort.

THÉORÈME (M. Gromov, W. Thurston [4]). — *Pour tout $n \geq 4$ et tout $\delta > 0$, il existe une variété compacte de dimension n , admettant des métriques à courbure sectionnelle K négative mais pas de métrique à courbure pincée*

$$-1 \leq K \leq -\delta.$$

L'objet de cet exposé est d'expliquer en détail une partie de l'article [4] : le lemme 1.2 (construction de variétés compactes à courbure constante qui admettent des revêtements ramifiés), le paragraphe 2 (construction de métriques à courbure négative, et même pincée, sur ces revêtements ramifiés), la remarque 3.6 (ces variétés n'ont pas de métrique à courbure constante).

1. Construction d'exemples

1.1. Construction topologique. — Soit V une variété orientable, soit W une hypersurface orientable à bord de V , i.e., ∂W est une sous-variété de codimension 2 de V . Découpons V le long de W , de façon à obtenir une variété $\bar{V}$ dont le bord est le double de W . Remarquer que, si V est orientée, elle induit sur les deux copies de W des orientations opposées. Fixons un entier i . Prenant i copies de $\bar{V}$, on peut les recoller le long de leur bord de façon compatible avec les orientations (voir figure 1). On obtient une variété lisse $\bar{V}$, munie d'une application $p : \bar{V} \rightarrow V$ qui est un revêtement ramifié au-dessus de ∂W .

1.2. Métriques sur les revêtements ramifiés. — Si V est munie d'une métrique riemannienne g , la métrique image réciproque $\bar{g}$ sur $\bar{V}$ est singulière le long de ∂W . On doit se convaincre que $\bar{g}$ a, en un sens généralisé, une courbure *plus négative* que celle de g . En dimension 2, si on se laisse guider par la formule de Gauss-Bonnet, on est conduit à attacher à $\bar{g}$ une masse de Dirac de courbure affectée du poids $-2\pi(i-1)$ à chaque point de ∂W . En dimension plus grande, on peut adopter une définition de [3] : la courbure est négative ou nulle si la fonction distance restreinte localement à deux géodésiques est convexe. Si c'est le cas pour g , et si ∂W est totalement géodésique, ça l'est a fortiori pour $\bar{g}$. Noter que l'idée que les revêtements ramifiés de l'espace euclidien ont une courbure négative est ancienne. Elle est utilisée dans [8], page 421, par exemple.

Pour construire des variétés à courbure négative, il suffit donc, étant donné

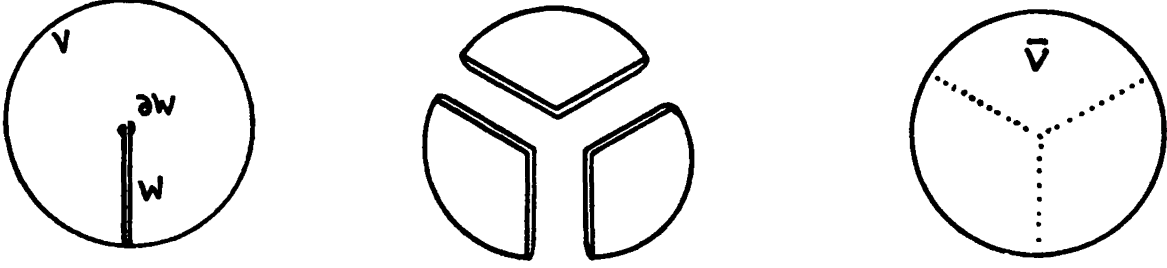


Figure 1

g ayant cette propriété, de lisser la métrique $\bar{g}$ en gardant la courbure négative. Remarquer qu'il s'agit d'une construction locale, si bien qu'on peut supposer V simplement connexe, à condition de travailler dans un voisinage tubulaire du lieu de ramification de rayon R fixé. Je ne sais la faire en toute dimension que lorsque g a une courbure sectionnelle constante.

Il s'agit de lisser la métrique $\bar{g} = p^*g$ où g est la métrique canonique de l'espace hyperbolique H^n et p est le revêtement ramifié à i feuillets au-dessus d'un plan P de codimension 2. Sur H^n , on utilise les coordonnées exponentielles normales à P : $x \in P, \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, r > 0$. Sur le revêtement ramifié $\bar{V}$, on choisit des coordonnées $x \in P, \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, r > 0$ de façon que l'application p s'écrive

$$p(x, \theta, r) = (x, i\theta, r).$$

La métrique g s'écrit

$$g = dr^2 \oplus sh^2(r)d\theta^2 \oplus ch^2(r)dx^2,$$

d'où

$$\bar{g} = dr^2 \oplus sh^2(r)i^2d\theta^2 \oplus ch^2(r)dx^2.$$

On cherche la métrique lissée sous la forme

$$g' = dr^2 \oplus \sigma^2(r)d\theta^2 \oplus ch^2(r)dx^2,$$

où $\sigma(r) = sh(r)$ pour r petit, et $\sigma(r) = ish(r)$ pour $r \geq R$.

Calculons sa courbure sectionnelle. Notons H une hypersurface θ constant. Notons

$$\partial\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} / \left| \frac{\partial}{\partial\theta} \right|$$

et

$$\partial r = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Alors, lorsque chacun des vecteurs A, B, C, D , vaut $\partial\theta$, ∂r ou est tangent à H mais orthogonal à ∂r , la courbure $R(A, B, C, D)$ est nulle sauf s'il s'agit d'une courbure sectionnelle.

En effet, comme H est totalement géodésique, à courbure constante -1 , c'est vrai pour des vecteurs tangents à H . Prenons donc $C = \partial\theta$. Comme H est totalement géodésique, on a

$$D_E \partial\theta = 0 \quad \text{pour } v \text{ tangent à } H,$$

d'où $R(A, B, \partial\theta) = 0$ pour A, B tangents à H . Prenons $B = C = \partial\theta$. Sachant que $D_{\partial\theta} \partial\theta$ est parallèle à ∂r et que, pour A tangent à H mais orthogonal à ∂r , $D_A \partial r$ est parallèle à A , on trouve que $R(A, \partial\theta, \partial\theta)$ est colinéaire à A . Enfin, pour $A = \partial r$, comme le crochet $[\partial r, \partial\theta]$ est parallèle à $\partial\theta$, on trouve que $R(\partial r, \partial\theta, \partial\theta)$ est parallèle à ∂r .

Il reste à calculer les courbures sectionnelles des plans construits sur ∂r , $\partial\theta$ ou un vecteur qui leur est orthogonal. Pour les plans tangents à H , la courbure sectionnelle vaut -1 . Comme les surfaces x constant sont totalement géodésiques, et de révolution, on a

$$R(\partial r, \partial\theta, \partial r, \partial\theta) = -\sigma''(r)/\sigma(r) ;$$

enfin, sachant que

$$D_{\partial\theta} \partial\theta = -\sigma'(r)/\sigma(r)$$

et que, pour v tangent à H , orthogonal à ∂r ,

$$D_v \partial r = -\text{th}(r),$$

on trouve que la courbure des plans orthogonaux à ∂r vaut

$$\text{th}(r)\sigma'(r)/\sigma(r).$$

On vérifie facilement qu'on peut interpoler entre les fonctions $sh(r)$ et $ish(r)$ en gardant les quantités $-\sigma''(r)/\sigma(r)$ et $\text{th}(r)\sigma'(r)/\sigma(r)$ proches de -1 , à condition de le faire sur un intervalle assez grand. On conclut

PROPOSITION 1.1. (M. Gromov [3]). — Notons $\bar{V}$ le revêtement ramifié à i feuillets de H^n autour d'un plan P de codimension 2. Pour tous i, ϵ fixés, il existe une métrique g' sur $\bar{V}$ telle que

(i) le revêtement ramifié est une isométrie locale en dehors du voisinage tubulaire de largeur $R(i, \epsilon)$ de P ;

(ii) la courbure sectionnelle K de g' satisfait

$$-1 - \epsilon \leq K \leq -1.$$

Remarque 1.2. — Une construction semblable est possible dans le cadre kählerien, elle est à l'origine des exemples initiaux de G.D. Mostow et Y.T. Siu [7].

On part de l'espace hyperbolique complexe (boule unité de $\mathbb{C}^m$ munie de sa métrique de Bergmann), et d'un hyperplan complexe P . Si r désigne la distance à P , la métrique de Bergmann s'écrit

$$\omega = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(1-r^2).$$

On construit sur le revêtement à i feuillets V ramifié au-dessus de P une métrique kählerienne sous la forme $-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\phi(r)$. La courbure sectionnelle est négative, mais il n'est pas clair qu'on peut obtenir un pincement proche de celui de l'espace hyperbolique complexe (dixit Gromov).

2. Variétés à courbure constante particulières

Pour appliquer la construction précédente, il faut disposer d'une variété V compacte à courbure constante, telle que

- (i) V contient une sous-variété totalement géodésique P de codimension 2, qui borde dans V .

Si on souhaite une courbure pincée entre $-1 - \epsilon$ et -1 , il faut de plus que

- (ii) l'application exponentielle normale soit injective sur le voisinage tubulaire de P de largeur $R(i, \epsilon)$.

2.1. Construction générale. — La construction que nous allons présenter est due à J. Millson [5]. Elle utilise un minimum d'arithmétique. Il s'agit de trouver un sous-groupe discret cocompact dans $SO_0(n, 1)$. Il y a de multiples façons de plonger $SO(n, 1)$ dans $SL(N, \mathbb{R})$, $N > n$, et quelquefois, la trace de $SL(N, \mathbb{Z})$ sur le plongement est un sous-groupe cocompact.

Soit A l'anneau des entiers d'un corps de nombres F de degré d , i.e. $d = \dim_{\mathbb{Q}} F$. Notons $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ les homomorphismes de F dans $\mathbb{C}$, notons

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d) : F \rightarrow \mathbb{C}^d.$$

Remarquer que $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^d$ est discret. En effet, $a \in A \Leftrightarrow P(a) = 0$ pour un polynôme $P(X) = X^d + \dots$ à coefficients entiers. On a

$$P(X) = \prod_{i=1}^d (X - \sigma_i(a)) \in \mathbb{Z}[X]$$

donc les $\sigma_i(a)$ ne sont jamais simultanément petits, à moins que $P(X) = X^d$, soit $a = 0$.

On suppose désormais que F est totalement réel, i.e. $\sigma(F) \subset \mathbb{R}^d$. Comme, pour $a \in A$ générique, les nombres $1, a, a^2, \dots, a^{d-1}$ sont indépendants sur $\mathbb{Z}$, le groupe abélien A est de rang d au moins, donc

$$\sigma(A) \text{ est un réseau de } \mathbb{R}^d.$$

On note $E_1, \dots, E_d$ des copies de $\mathbf{R}^{n+1}$. On construit un réseau Λ dans l'espace vectoriel réel

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_d.$$

Λ est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 + \dots + \lambda_d, \\ \lambda_i &= (\sigma_i(a^1), \dots, \sigma_i(a^{n+1})) \end{aligned}$$

où $a^1, \dots, a^d$ décrivent A .

Soit q une forme quadratique sur A^{n+1} . On note q_i la forme quadratique sur $E_i = \mathbf{R}^{n+1}$ obtenu en étendant $\sigma_i(q)$. Considérons, dans $SL(E)$, le sous-groupe

$$G = \{g \in SL(E) ; gE_i = E_i\}.$$

On définit un sous-groupe discret Γ de G par

$$\Gamma = \{g \in G ; g\Lambda = \Lambda\}.$$

Alors $\Gamma \backslash G$ s'identifie à l'orbite sous G du réseau Λ dans l'espace R des réseaux de volume fixé de E . Cette interprétation géométrique va aider à montrer que $\Gamma \backslash G$ est compact.

2.1. — Si q est non dégénérée, l'orbite $G\Lambda$ est fermée dans R .

En effet, définissons une fonction G -invariante P de E vers l'espace des polynômes unitaires de degré d comme suit : pour $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_d \in E$, posons

$$P(\lambda)(X) = \prod_{i=1}^d (X - q_i(\lambda_i)) \in \mathbf{R}[X].$$

Alors P est à valeurs dans $\mathbf{Z}[X]$ sur les G -orbites des vecteurs de Λ . En effet,

$$P(\lambda)(X) = \prod_{i=1}^d (X - \sigma_i(\alpha))$$

où $\alpha = q(a^1, \dots, a^{n+1}) \in \mathbf{Z}$. Soit $g_j\Lambda$ des réseaux qui convergent vers un réseau Λ' . Toute base μ_k , $0 \leq k \leq (n+1)d$ est limite d'une base λ_k^j de $g_j\Lambda$. Comme $P(\lambda_k^j) \in \mathbf{Z}[X]$ converge vers $P(\mu_k)$, on a

$$P(\lambda_k^j) = P(\mu_k)$$

pour j assez grand. De même, pour tous k, k' ,

$$P(\lambda_k^j - \lambda_{k'}^j) = P(\mu_k - \mu_{k'})$$

pour j assez grand. Comme $P(\lambda)$ détermine les $q_i(\lambda_i)$ à seulement $d!$ possibilités près, il existe un j tel que, pour tous $i \leq d$, $k, k' \leq (n+1)d$,

$$q_i(\lambda_k^j) = q_i(\mu_k)$$

et

$$q_i(\lambda_k^j - \lambda_{k'}^j) = q_i(\mu_k - \mu_{k'}).$$

Il existe donc un $g \in G$ tel que $g(\lambda_k^j) = g(\mu_k)$, soit $\Lambda' = gg_j\Lambda$. $\square$

PROPOSITION 2.2. — *Si l'une des formes quadratiques $\sigma_i(q)$ ne représente pas zéro sur Λ , alors l'orbite $G\Lambda$ est compacte.*

On utilise le critère de compacité de Mahler. Une partie X de l'espace R des réseaux de volume fixé est précompacte si et seulement si il existe un voisinage de l'origine dans E dont l'intersection avec tout réseau Λ de X se réduit à 0.

Si $\lambda \in G\Lambda$, alors $P(\lambda) \in \mathbb{Z}[X]$. Si λ est trop petit, ce n'est possible que si $P(\lambda) = P(0) = X^d$, c'est-à-dire, $q_i(\lambda) = 0$ pour tout i , ce qui entraîne $\lambda = 0$ par hypothèse. $\square$

2.2. Obtention d'un grand rayon d'injectivité. — Par un choix convenable de l'anneau A et de la forme quadratique q , on va construire une variété à courbure constante -1 à partir du réseau Γ . Soit s un entier algébrique tel que tous les $\sigma_i(s)$ sauf un exactement (par exemple, $\sigma_1(s)$) soient positifs. Pour en obtenir un, il suffit de prendre un nombre algébrique quelconque, de lui ajouter un rationnel de façon à réaliser la condition de signes, et de le multiplier par un nombre entier. Soit A l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(s)$, et posons

$$q = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + sx_{n+1}^2.$$

Alors les formes quadratiques $q_2, \dots, q_d$ sont définies positives, et q_1 est de signature $(n, 1)$. En particulier, la forme quadratique q_2 ne représente pas zéro sur A . Le groupe G s'écrit

$$G = SO(E_1, q_1) \times K$$

où K est compact, $SO(q_1, \mathbb{R})$ est isomorphe à $SO(n, 1)$. La projection de Γ sur le premier facteur, encore notée Γ , est un sous-groupe discret cocompact de $SO(n, 1)$.

Le groupe Γ contient la symétrie

$$x_1 \mapsto -x_1$$

et la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1).$$

On note D_4 le sous-groupe de Γ qu'ils engendrent.

On construit des variétés V^m de grand rayon d'injectivité en prenant le quotient de H^n par des sous-groupes d'indice fini Γ_m de Γ . Pour chaque entier m , le stabilisateur Γ_m du réseau $m\Lambda$ dans G est cocompact, pour les mêmes raisons que celle évoquées pour Λ . Dans une base de Λ , les matrices des éléments de Γ_m ont leurs coefficients congrus à 1 modulo m , donc

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma_m = \{1\}.$$

Pour m assez grand, la variété

$$V_m = \Gamma_m \backslash SO(n, 1)/SO(n)$$

est lisse et orientable. En effet, les éléments de Γ qui ont des points fixes dans H^n tombent dans un nombre fini de classes de conjugaison : fixons un domaine fondamental Δ pour Γ ; si $\gamma \in \Gamma$ fixe une sous-variété Φ , un conjugué $\delta^{-1}\gamma\delta$ fixe un $\delta\Phi$ qui rencontre Δ , or il n'y a qu'un nombre fini de telles sous-variétés, et leur stabilisateur est fini. Par conséquent, le sous-groupe distingué Γ_m ne rencontre aucune de ces classes de conjugaison, pour m assez grand.

Pour la même raison, le rayon d'injectivité de V_m tend vers l'infini avec m . En effet, les éléments de Γ_m responsables d'un petit rayon d'injectivité tombent dans un nombre fini de classes de conjugaison.

La variété V_m a un groupe D_4 d'isométries (comme Γ_m est distingué, D_4 le normalise) comportant une symétrie S et une rotation R . Notons P_m le lieu des points fixes de ce groupe dans V_m . Alors le rayon d'injectivité normal ν de P_m est au moins la moitié du rayon d'injectivité de V_m . En effet, il existe un arc géodésique a de longueur 2ν dont les deux extrémités reposent orthogonalement sur P_m . Alors $a \cup R^2a$ est une géodésique fermée. On conclut que ν tend vers l'infini avec m .

2.3. Obtention de symétries. — Montrons que, quitte à prendre un revêtement double, le groupe D_4 détermine sur V_m un pavage en 4 domaines conformément à la figure ci-dessous.

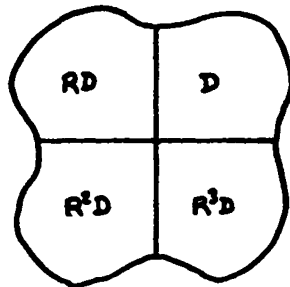


Figure 2

Notons H l'ensemble des points fixes de la symétrie S . Nous avons besoin que H sépare V_m . C'est certainement le cas si on remplace V_m par

$$\dot{V}_m = \dot{\Gamma} \backslash H^n$$

où

$$\dot{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma_m ; \gamma \cdot H = 0 \text{ dans } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

En effet, $H = 0$ dans $H_{n-1}(\dot{V}_m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

LEMME 2.3. — *Soit V une variété riemannienne connexe, munie d'une action isométrique du groupe D_4 qui, au voisinage de chaque point fixe, est conjuguée à l'action standard de D_4 sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que l'ensemble H des points fixes d'une symétrie S de D_4 sépare V . Alors il existe un domaine fondamental D qui pave V conformément à la figure 2.*

Choisissons une orientation pour l'hypersurface H . Comme H sépare V , il existe une sous-variété à bord A de V telle que $\partial A = H$, orientation comprise. Montrons que A est unique. En effet, soit A' une autre sous-variété de bord H . Si $x \in \dot{A}$ = intérieur de A , soit y une projection orthogonale de x sur H . Alors le segment géodésique $[x, y] \subset \dot{A}$. Or $y \in \partial A'$, donc un sous-segment $[y, z] \subset [y, x]$ est contenu dans A' . Comme $[y, x]$ ne rencontre pas H , nécessairement $x \in A'$. On conclut que $A = A'$.

Un argument similaire montre que $A \cap SA = H$. Il s'ensuit que $A - SA$ est un cycle qui recouvre A exactement une fois. Sa classe d'homologie est donc la classe fondamentale, d'où $A \cup SA = V$.

Soit R une rotation de D_4 . On a $R^2 A = SA$. En effet, comme S et R^2 commutent, R^2 fixe H en renversant son orientation, donc $\partial R^2 A = H$, d'où $R^2 A = A$ par unicité. Posons $D = A \cap RA$. Alors $D \cap RD \subset H$, car

$$D \cap RD = A \cap RA \cap R^2 A = A \cap RA \cap SA = H \cap RA.$$

Aussi, si on pose

$$W = D \cap RD,$$

on a $W \cup SW = H$, car

$$W \cup SW = (H \cap RA) \cup (H \cap SRA) = H \cap (RA \cup SRA) = H.$$

On note P le lieu des points fixes de R . On a

$$P = W \cap SW = H \cap SH$$

et aussi

$$\bigcup_{i=1}^4 R^i D = V,$$

$$\partial D = W \cup RW$$

et encore

$$\partial W = P$$

conformément à la figure 2. □

3. Des variétés sans métriques à courbure constante

C'est seulement récemment que M. Gromov et W. Thurston [4] sont parvenus à montrer que certaines des variétés à courbure négative obtenues par revêtement ramifié n'admettent pas de métrique à courbure constante. Voici un de leurs arguments, reposant sur la rigidité de Mostow.

THÉORÈME 3.1. (G.D. Mostow [6]). — *Soient M, M' deux variétés riemanniennes compactes, à courbure constante de dimension ≥ 3 . Tout isomorphisme de $\pi_1(M)$ sur $\pi_1(M')$ est induit par une unique isométrie de M sur M' .*

On part d'une variété compacte V à courbure constante, munie d'un groupe D_4 d'isométries qui divise V en quatre morceaux isométriques, notés D , se rencontrant suivant l'axe P . Soit $V' \rightarrow V$ le revêtement ramifié à i feuillets au-dessus de P , autrement dit, V' est obtenue en recollant $4i$ exemplaires de D autour de P . On munit V' d'une métrique g' à courbure négative, comme dans la première partie. Alors V' a un groupe D_{4i} d'isométries qui échange les morceaux D . On raisonne par l'absurde.

HYPOTHÈSE 3.2. — *V' a le type d'homotopie d'une variété compacte U à courbure constante.*

On va montrer successivement :

- que U a même dimension que V' ;
- que U a un groupe D_{4i} d'isométries qui divise U en $4i$ morceaux isométriques, notés Δ ;
- que D et Δ (ainsi que leurs bords) ont même groupe fondamental;
- que cela entraîne que D et Δ sont isométriques; d'où une contradiction manifeste si $i > 1$, car Δ a, le long de l'axe, un angle $\frac{\pi}{2i}$.

3.3. — *Les fibrés des 2-repères orthonormés $St_2(U)$ et $St_2(V')$ sont homéomorphes. En particulier, $\dim U = \dim V'$.*

On utilise la notion de "sphère à l'infini" S^∞ pour une variété simplement connexe $\tilde{U}$ à courbure négative ou nulle, voir [1], et une idée de J. Cheeger, qui montre qu'on peut reconstruire la variété $St_2 U$ à partir de l'action de $\pi_1(U)$ sur S^∞ (voir [3]), lorsque la propriété de visibilité [1] est satisfaite. A tout triplet (x_1, x_2, x_3) de points distincts de S^∞ , on peut faire correspondre un 2-repère orthonormé de $\tilde{U}$ comme suit : on projette x_3 sur la droite reliant x_1 à x_2 ; on obtient un point u d'où partent deux géodésiques orthogonales, soit un point de $St_2(\tilde{U})$.

On a décrit un homéomorphisme naturel entre $St_2(\tilde{U})$ et l'espace T des triplets. Lorsque la courbure est strictement négative, un isomorphisme entre

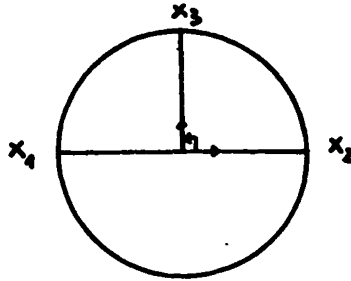


Figure 3

groupes cocompacts d'isométries de telles variétés induit un homéomorphisme entre les sphères à l'infini, qui conjugue les actions des groupes. On a donc un homéomorphisme de $St_2(\tilde{U})$ sur $St_2(V')$ qui passe au quotient. $\square$

Supposons $\dim U \geq 3$. Alors la rigidité de Mostow (Théorème 3.1) entraîne que D_{4i} agit par isométries sur U . Les actions induites de D_{4i} sur $St_2(U)$ et $St_2(V')$ sont conjuguées par l'homéomorphisme décrit précédemment.

LEMME 3.4. — Soient X, X' des variétés riemanniennes compactes à courbure négative, admettant des groupes d'isométries G et G' . Supposons que G et G' soient conjugués par un isomorphisme I de $\pi_1(X)$ sur $\pi_1(X')$. Supposons que G contienne des symétries par rapport à des hypersurfaces qui divisent X en $4i$ secteurs isométriques, notés D . Alors

- (i) G' a la même propriété, i.e. , il contient des symétries par rapport à des hypersurfaces qui divisent X' en $4i$ secteurs isométriques, notés D' , et
- (ii) $I(\pi_1(D))$ (resp. $I(\pi_1(\partial D))$) est conjugué à $\pi_1(D')$ (resp. à $\pi_1(\partial D')$).

Une symétrie par rapport à une hypersurface dans $\tilde{X}$ est caractérisée par le fait que son extension à S^∞ fixe les points d'une hypersphère plongée, et échange les deux composantes du complémentaire. Par conséquent, si S est une symétrie de G , $S' = I \circ S \circ I^{-1} \in G'$ est une symétrie de X' . Si $H = \text{Fix}(S) \subset X$ et $H' = \text{Fix}(S') \subset X'$, alors

$$\begin{aligned} \pi_1(H) &= \text{Fix}(S) \subset \pi_1(X) \\ &= I^{-1}(\pi_1(H')). \end{aligned}$$

Le fait que la classe de H dans $H_{n-1}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ soit nulle est une propriété du plongement $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(X)$, car X est un $K(\pi, 1)$. On conclut que H' sépare X' en deux morceaux, et, par le lemme 3.4, que les H' relatifs aux $2i$ symétries de G' divisent X' en $4i$ morceaux isométriques, qu'on note D' .

Clairement, $\partial D'$ est isométrique à H' , d'où (ii) pour les bords.

Il reste à localiser $\pi_1(D)$ dans $\pi_1(X)$. Considérons, dans le revêtement universel $\tilde{X}$, la réunion des hypersurfaces $\tilde{H}$ fixées par les relèvements des symétries de G . Soit C une composante du complémentaire, et notons $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel. Comme C est simplement connexe, et $\pi(C) = D$, le groupe fondamental $\pi_1(D)$ s'identifie à

$$\Sigma = \{\gamma \in \pi_1(X) ; \gamma C \subset C\}.$$

Si on note L (resp. L') la réunion des images réciproques dans $St_2(\tilde{X})$ (resp. $St_2(\tilde{X}')$) des hypersurfaces fixées par les symétries de G (resp. G'), alors l'homéomorphisme

$$St_2(\tilde{X}) \longrightarrow T \xrightarrow{I} T' \longrightarrow St_2(\tilde{X}')$$

envoie L sur L' et conjugue les actions de $\pi_1(X)$ et $\pi_1(X')$. En particulier, il envoie le sous-groupe Σ sur le sous-groupe Σ' de $\pi_1(X')$ qui fixe une certaine composante de $St_2(\tilde{X}') \setminus L'$. On conclut que $I(\pi_1(S))$ est conjugué à $I(\pi_1(S'))$. $\square$

Ce lemme appliqué à V' et U montre que U est divisé en $4i$ morceaux Δ . Montrons que D et Δ sont isométriques. D'après le théorème 3.1, si $\dim V' \geq 4$, ∂D et $\partial \Delta$ sont isométriques. Les angles au sommet permettent de mettre bout à bout 2 exemplaires de D et $2i$ exemplaires de Δ autour de P , comme indiqué sur la figure 4, et d'obtenir une variété lisse Y à courbure constante possédant un "demi-tour" τ , involution isométrique fixant une sous-variété totalement géodésique P .

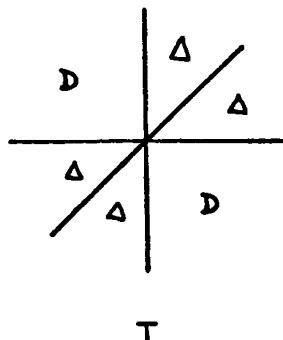


Figure 4

Le groupe fondamental de Y est obtenu par somme amalgamée, au-dessus de $\pi_1(\partial D)$, de $2i + 2$ copies de $\pi_1(D)$. Il possède donc un groupe D_{2i+2} d'automorphismes, contenant le demi-tour τ . D'après le théorème 3.1, ce groupe agit aussi par isométries sur Y . Les points fixés par D_{2i+2} sont exactement ceux fixés par τ , c'est la sous-variété P . Soit R une rotation d'angle $\frac{\pi}{i+1}$ dans D_{2i+2} . Montrons que R envoie un secteur D sur un secteur Δ contigu. Les groupes fondamentaux de D et Δ sont plongés comme des sous-groupes Γ et Γ' de $\pi_1(T)$ tels que $R(\Gamma) = \Gamma'$. Soit $\tilde{P}$ une composante de l'image réciproque de P dans $\tilde{T}$. Alors l'enveloppe convexe C (resp. C') de $\Gamma\tilde{P}$ (resp. $\Gamma'\tilde{P}$) est le revêtement

universel de D (resp. Δ). Comme $RC = C'$, on conclut que $RD = \Delta$, ce qui, par considération des angles, entraîne $i = 1$. $\square$

Remarque 3.5. — L'argument qui précède ne s'étend pas à la dimension 3. En fait, les exemples de dimension 3 décrits ci-dessus admettent tous une métrique à courbure constante, voir [9], Theorem 2.5 : comme ils admettent des métriques à courbure négative possédant des surfaces totalement géodésiques (donc incompressibles), ils sont homotopiquement atorçidaux et Haken.

Références

- [1] P. EBERLEIN, B. O'NEILL. — *Visibility manifolds*, Pacific. J. Math., **46** (1973), 45-109.
- [2] P. FOULON. — *Estimation de l'entropie des systèmes lagrangiens sans points conjugués*, Preprint Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1985.
- [3] M. GROMOV. — *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, pp.183-213 in "Riemann surfaces and related topics : proc. of the 1978 Stony Brook conference", ed. by I. Kra and B. Maskit, Ann. Math. Studies **97**, Princeton, 1981.
- [4] M. GROMOV, W. THURSTON. — *Pinching constants for hyperbolic manifolds*, à paraître à Inventiones Math., 1986.
- [5] J. MILLSON. — *On the first Betti number of a constant negatively curved manifold*, Annals of Math., **104** (1976), 235-247.
- [6] G.D. MOSTOW. — *Quasiconformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. Math. I.H.E.S., **34** (1968), 53-104.
- [7] G.D. MOSTOW, Y.T. SIU. — *A compact Kähler manifold of negative curvature not covered by the ball*, Annals of Math., **112** (1980), 321-360.
- [8] A.V. POGORELOV. — *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Israel program for scientific translations, Jerusalem, 1973.
- [9] W. THURSTON. — *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups, and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., **6** (1982), 357-382.

—◇—

Pierre PANSU
 Centre de Mathématiques
 Ecole Polytechnique
 UA 169 du C.N.R.S.
 91128 PALAISEAU Cedex