Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

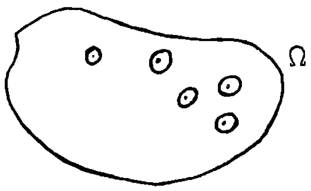
Colette Anne

Problème de la glace pilée

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 3 (1984-1985), exp. nº 7, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A7_0>

PROBLEME DE LA GLACE PILEE

par Colette ANNE



La question est celle de la perturbation du Laplacien avec conditions de Dirichlet au bord causée par la multiplication d'impuretés dans un domaine Ω.

Plus précisément Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, $\xi = (p_i)_{i\geq 1}$ une suite de points de Ω et $r_n|_{n\geq 1}$ une suite qui décroît vers 0.

Pour chaque n, on considère le laplacien $\Delta_n^{(\xi)}$ avec conditions de Dirichlet aux bords sur $\Omega_n = \Omega \setminus K_n$, $K_n = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, r_n)}$. Le résultat s'exprime en probabilité sur les suites ξ, munissons donc $X = \Omega^{\mathbb{N}}$ de la probabilité produit de la probabilité uniforme sur Ω, on a le

THEOREME 1. - Si $nr_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, le spectre de $\Delta_n^{(\xi)}$ converge en probabilité vers celui de $\Delta + \frac{4\pi\alpha}{|\Omega|}$ ($|\Omega| = \mathrm{Vol}(\Omega)$, Δ est le laplacien de Dirichlet sur Ω).

Mark Kac fut le premier à résoudre ce problème, il donna la méthode : étudier la convergence des noyaux de la chaleur grâce à leur expression brownienne. Rauch et Taylor introduisent le calcul fonctionnel. Chavel et Feldman généralisèrent le résultat aux variétés riemanniennes. D'autre part, S. Ozawa (voir [O.I]) établit une démonstration utilisant des approximations du noyau de Green. Nous suivrons ici la méthode de M. Kac, mais rappelons d'abord un autre résultat de S. Ozawa. Dans [O. II] l'auteur étudie la perturbation $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\varepsilon D}$ où D est un voisinage de $0 \in \Omega$. Si la j^e valeur propre, m_j, de Δ est simple, de fonction propre généralisée φ_j il montre :

$$m_j(\varepsilon) = m_j + \varepsilon \operatorname{Cap} D \, \varphi_j^2(\omega) + O(\varepsilon^{3/2}) \ . \ \text{Et} \quad \operatorname{Cap}(\varepsilon D) = \varepsilon \operatorname{Cap} D \ .$$

La correction sur les valeurs propres fait donc intervenir la capacité newtonnienne du domaine ôté. La capacité d'une sphère de rayon r_n dans $\mathbb{R}^3$ est $4\pi r_n$, celle de n boules est "proche" de $4\pi n r_n$, donc de $4\pi\alpha$.

1. RAPPELS SUR LE MOUVEMENT BROWNIEN.

Le noyau de la chaleur de $\mathbb{R}^3$ est

$$p_0(x,y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-\|x-y\|^2/4t} \ .$$

Soit :

$$\mathbb{W} = \mathcal{C}([0\,;+\infty[\,,\mathbb{R}^3)$$

$$X_t : \mathbb{W} \to \mathbb{R}^3$$

$$\omega \mapsto \omega(t) \ .$$

On munit $\mathbb{W}$ de la tribu $\mathcal{F}_\infty$ engendrée par les X_t, $t \geq 0$.

DEFINITION. - Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

X_t est un mouvement brownien issu de x si il existe une mesure de probabilité P_x sur $(\mathbb{W}, \mathcal{F}_\infty)$ telle que les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ $(t_1 < \dots < t_n)$ suivent la loi de densité :

$$p_0(t_1, x, x_1)\, p_0(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p_0(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \ ,$$

alors $P_x(X_0 = x) = 1$,

$X(t) - X(s)$ suit une loi gaussienne centrée d'écart-type $\sqrt{t-s}$,

$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendants,

les trajectoires sont continues.

On sait (Wiener) que P_x existe unique.

Donc, si X_t est le mouvement brownien issu de x,

$X_t + a$ est le mouvement brownien issu de $x+a$

et $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} X(\lambda t)$ est le mouvement brownien issu de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x$.

- $p_0(x,y,t)$ est la probabilité pour qu'une particule brownienne issue de x atteigne y au temps t.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\Delta_0(\Omega)$ son laplacien avec conditions de Dirichlet, le noyau de $e^{-t\Delta_0(\Omega)}$ est donné par :

$$p(x,y,t) = E_x\{\mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t])\subset\Omega\}} \mid \omega(t)=y\} p_0(x,y,t)$$

(on se restreint aux chemins inclus dans Ω).

- On définit le temps de contact sur D (union dénombrable de compacts) $\tau_D(\omega) = \inf\{t \mid \omega(t) \in D\}$.

Cap D a une expression brownienne. Plus précisément, si U_D est le potentiel d'équilibre de D ($U_{D|D} \equiv 1$; $\Delta U_{D|\mathbb{R}^3\setminus D} = 0$; $U_D \xrightarrow[\infty]{} 0$)

$$U_D(x) = P_x(\tau_D < \infty) \quad \text{et} \quad \text{cap } D = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta U_D = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla U_D)^2 .$$

Examinons d'abord un cas simple : $\alpha = 0$.

2. THEOREME 2. - Si $nr_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors, en notant $P_n : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega_n)$ le projecteur de restriction, pour chaque suite ξ et chaque f dans $L^2(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} (L^2(\Omega)) e^{-t\Delta_n} \circ P_n(f) = e^{-t\Delta}(f) .$$

Et plus généralement, si K_n sont des compacts inclus dans Ω vérifiant Cap $K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ on a le même résultat.

On en déduit la convergence forte de $F(\Delta_n) \circ P_n$ vers $F(\Delta)$ pour chaque F borélienne bornée continue sur un voisinage du spectre $\sigma(\Delta)$ de Δ, et aussi la convergence du spectre.

Preuves. - Notons $p_n(x,y,t)$ et $p(x,y,t)$ les noyaux de la chaleur respectifs, alors

$$p(x,y,t) = E_x\left\{ \mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t])\subset\Omega\}} \middle| \omega(t)=y\right\} p_0(x,y,t)$$

$$p_n(x,y,t) = E_x\left\{ \mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t])\subset\Omega\}}\, \mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t])\subset\mathbb{R}^3\setminus K_n} \middle| \omega(t)=y\right\} p_0(x,y,t)$$

donc

$$|p(x,y,t)-p_n(x,y,t)|$$
$$= E_x\left\{ \mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t])\subset\Omega\}} \mathbb{1}_{\{\tau_{K_n}\le t\}} \middle| \omega(t)=y\right\} p_0(x,y,t) \;.$$

Posons

$$A_n(x,y,t) = E_x\left\{ \mathbb{1}_{\{\tau_{K_n}\le t\}} \middle| \omega(t)=y\right\} \;.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|p(x,y,t)-p_n(x,y,t)|^2 \le p(x,y,t)p_0(x,y,t)A_n(x,y,t) \;.$$

Soit

$$U_n(x) = P_x(\tau_{K_n}<+\infty) = \int \frac{1}{|x-y|}\,d\mu_n(y)$$

et $\quad \mathrm{Cap}\, K_n = \int d\mu_n \quad (\mu_n = \Delta U_n)$.

Si S est un borné de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha_s = \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_s \frac{dx}{|x-y|}$

$$\int_S\int |p(x,y,t)-p_n(x,y,t)|^2 dy\,dx \le \frac{\alpha_s}{(\sqrt{4\pi t})^3}\,\mathrm{Cap}\, K_n \;.$$

a) On en déduit que $e^{-t\Delta_n}\circ P_n$ converge fortement vers $e^{-t\Delta}$.

Soit $f\in L^2(\Omega)$,

$$g_n = e^{-t\Delta_n}\circ P_n(f) = \int p_n(\cdot,y,t)f(y)dy$$

$$g = e^{-t\Delta}(f) = \int p(\cdot,y,t)f(y)dy \;.$$

Si S est un borné de $\mathbb{R}^3$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_S |g_n(x)-g(x)|^2 dx = 0 \;.$$

Prenons une suite extraite de g_n : $g_{n_j}|_{j\in\mathbb{N}}$. On a pour tout borné S , $\lim_{j\to+\infty}\int_S |g_{n_j}(x)-g(x)|^2 dx = 0$. En prenant successivement $S=[-m,m]$ on peut donc extraire une sous-suite $g_{m_j}|_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers g .

De plus, $p_n \leq p$, donc $|g_n(x)| \leq e^{-t\Delta}(|f|)(x)$ qui est dans $L^2(\Omega)$, on applique le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3} |g_{m_j}(x)-g(x)|^2 dx = 0 .$$

Donc 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite bornée : $\int_{\mathbb{R}^3}|g_{m_j}(x)-g(x)|^2 dx$. Forcément $\lim_{n\to\infty}(L^2(\Omega))g_n = g$.

(b) On en déduit que pour toute fonction continue F sur $[0,+\infty]$ $F(\Delta_n)\circ P_n$ converge fortement vers $F(\Delta)$.

Posons

$\Gamma = \mathcal{C}([0;+\infty])$ et $A = \left\{F\in\Gamma \,/\, F(\Delta_n)\circ P_n \xrightarrow{\text{fortement}} F(\Delta)\right\}$.

A est une sous-algèbre de Γ , fermée, qui sépare les points puisqu'elle contient $e^{-t\lambda}$ donc, d'après le théorème de Weierstrass-Stone : $A = \Gamma$.

(c) Ce résultat se prolonge aux fonctions continues bornées. Si F est telle, alors si $v = e^{-\Delta}u$:

$$F(\Delta_n)\circ P_n v = F(\Delta_n)\circ e^{-\Delta_n}\circ P_n u - F(\Delta_n)[e^{-\Delta_n}\circ P_n u - e^{-\Delta}u] .$$

$F\times e^{-\lambda} \in \Gamma$ et $F(\Delta_n)$ est uniformément borné, donc

$$F(\Delta_n)\circ P_n(v) \longrightarrow F(\Delta)\circ e^{-\Delta}(u) = F(\Delta)(v) ,$$

ainsi, $F(\Delta_n)\circ P_n$ converge vers $F(\Delta)$ sur $e^{-\Delta}(L^2(\Omega))$ qui est dense dans $L^2(\Omega)$, donc $F(\Delta_n)\circ P_n$ converge fortement vers $F(\Delta)$.

(d) On peut enfin étendre le résultat à F borélienne bornée continue sur un voisinage U de $\sigma(\Delta)$: soit v un ouvert de $\mathbb{R}$

tel que $\sigma(\Delta) \subset V \subset \overline{V} \subset U$, et ψ_1, ψ_2 une partition de 1 liée à $U, \overline{V}^c$.

$\psi_1 \times F$ est dans le cas c , donc $\psi_1 F(\Delta_n) \circ P_n \xrightarrow{\text{fortement}} \psi_1 F(\Delta)$.

$\psi_2(\Delta) = 0$, donc $\psi_2(\Delta_n) \circ P_n \xrightarrow{\text{fortement}} 0$

$(\psi_1 + \psi_2) F(\Delta_n) \circ P_n = \psi_1 F(\Delta_n) \circ P_n + \psi_2 F(\Delta_n) \circ P_n$

et $|\psi_2 F(\Delta_n) \circ P_n(u)| \leq \operatorname{Sup}|F| \, |\psi_2(\Delta_n) \circ P_n(u)|$

c.q.f.d.

e On applique d aux fonctions caractéristiques d'intervalles $\chi_{]a,b[}$ où ni a ni b ne sont dans $\sigma(\Delta)$. On obtient alors sur les projecteurs spectraux : $\pi_{]a,b[}(\Delta_n) \circ P_n$ converge fortement vers $\pi_{]a,b[}(\Delta)$. Cela entraîne que pour n assez grand ils ont même rang d'où on conclut simplement à la convergence des valeurs propres.

3. PREUVES DU THEOREME 1.

Soient ξ dans X ,

$p_n(x,y,t\,;\,\xi)$ le noyau de $e^{-t\Delta_n(\xi)} \circ P_n(\xi)$, et

$q(x,y,t)$ celui de $e^{-t(\Delta + \frac{4\pi\alpha}{|\Omega|})}$.

On a donc :

$$p_n(x,y,t,\xi) = E_x\{ \mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t]) \subset \Omega\}} \times \mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t]) \subset \mathbb{R}^3 \setminus K_n\}} \,|\, \omega(t) = y \} p_0$$

$$q(x,y,t) = e^{-\frac{4\pi\alpha t}{|\Omega|}} E_x\{ \mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t]) \subset \Omega\}} \,|\, \omega(t) = y \} p_0 \, .$$

On va évaluer $\int_X p_n(x,y,t\,;\,\xi)d\xi$. On introduit la saucisse de Wiener : $W_{\partial,t}(\omega) = \{ y \,|\, d(y, \omega([0,t])) < \partial \}$. On a le

LEMME. - P_x-<u>presque sûrement</u> :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|W_{\partial,t}|}{t} = 4\pi\partial \quad , \quad \lim_{\partial \to 0} \frac{|W_{\partial,t}|}{\partial} = 4\pi t \, .$$

Dire que $\omega([0,t])$ ne rencontre pas K_n , c'est dire qu'aucun centre $p_1 \dots p_n$ n'appartient à $W_{r_{n,t}}$. La probabilité pour un point de ne pas appartenir à $W_{r_{n,t}}$ est

$$\left(1 - \frac{|W_{r_{n,t}}|}{|\Omega|}\right)$$

celle pour qu'aucun des $p_1 \dots p_n$ n'y appartienne est

$$\left(1 - \frac{|W_{r_{n,t}}|}{|\Omega|}\right)^n .$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_X p_n(x,y,t,\xi)d\xi \\
&= E_x\left\{\mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t])\subset\Omega\}} \int_X \mathbb{1}_{\{(p_1 \dots p_n)\in(W^c_{r_{n,t}})^n\}} d\xi \;\middle|\, \omega(t)=y\right\} p_0 \\
&= E_x\left\{\mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t])\subset\Omega\}} \left(1- \frac{|W_{r_{n,t}}|}{|\Omega|}\right)^n \;\middle|\, \omega(t)=y\right\} p_0
\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{|W_{r_{n,t}}|}{|\Omega|} \sim \frac{4\pi r_n t}{|\Omega|} \sim \frac{4\pi\alpha t}{n|\Omega|}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_X p_n(x,y,t\,;\,\xi)d\xi &= e^{-\frac{4\pi\alpha t}{|\Omega|}} E_x\left\{\mathbb{1}_{\{\omega/\omega([0,t])\subset\Omega} \;\middle|\, \omega(t)=y\right\} p_0 \\
&= q(x,y,t) .
\end{aligned}$$

On est alors dans la situation suivante :

$A_n(\xi)$ et A sont des opérateurs auto-adjoints sur un hilbert séparable ,

$$\left(A_n(\xi) = e^{-t\Delta_n(\xi)} , \; A = e^{-t(\Delta+\frac{4\pi\alpha}{|\Omega|})}\right) .$$

$\int_X A_n(\xi)d\xi \longrightarrow A$ faiblement (grâce au théorème de Lebesgue)

$\int_X A_n^2(\xi)d\xi \longrightarrow A^2$ faiblement (en changeant t en $2t$).

Alors $A_n(\xi)$ converge vers A fortement en probabilité : en effet, on écrit

$$\int_X \|A_n(\xi)u - Au\|^2 d\xi$$
$$= \int_X (\langle A_n^2(\xi)u,u\rangle + \langle A^2u,u\rangle - 2\langle A_n(\xi)u, A_u\rangle)d\xi \ .$$

On en déduit alors la convergence des valeurs propres en probabilité comme précédemment.

(nb : $L^2(\Omega)$ étant séparable de toute suite de $A_n(\xi)$, on peut extraire une sous-suite qui converge presque sûrement pour tout u , c'est-à-dire que l'extraction peut être rendue indépendante de u).

4. DEMONSTRATION DE LA FORMULE ASYMPTOTIQUE DU VOLUME DE $W_{\partial,t}$.

(a) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{|W_{\partial,t}|}{t} = 4\pi\partial$.

(b) $\lim\limits_{\partial\to 0} \dfrac{|W_{\partial,t}|}{\partial} = 4\pi t$.

Posons $A_\partial = \dfrac{|W_{\partial,1}|}{\partial}$ et $B_\partial = \dfrac{|W_{1,\partial^{-2}}|}{\partial^{-2}}$.

(A) Il suffit de montrer $\lim\limits_{\partial\to 0} A_\partial = 4\pi$ et $\lim\limits_{\partial\to 0} B_\partial = 4\pi$ P_x-presque sûrement, car X_t vérifie la propriété d'échelonnement ; donc :

$$|W_{\lambda\partial,\lambda^2 t}| = \lambda^3 |W_{\partial,t}|$$

et $\dfrac{|W_{\partial,t}|}{t} = \partial \dfrac{|W_{1,t/\partial^2}|}{t/\partial^2}$, donc de $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{|W_{1,t/\partial^2}|}{t/\partial^2} = 4\pi$ $P_{\frac{x}{\partial}}$ -presque sûrement. On déduit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|W_{\partial,t}|}{t} = \partial 4\pi \quad P_x\text{-presque sûrement,}$$

et de même B_∂ donne (b).

Il est à remarquer que les résultats sur A_∂ et B_∂ ne sont pas équivalents (car le ré-échelonnement modifie le point de départ et on veut un résultat P_x-presque sûrement, pour chaque x). Mais A_∂ et B_∂ ont même loi, donc leurs moments d'ordre p vérifient les mêmes relations.

(B) Il suffit de montrer $E_x(|B_\partial - 4\pi|^2) < c\partial^{\frac{1}{2}}$, car on conclut alors par un argument de Borel-Cantelli :

a) $\forall \rho \in]0,1[$ on en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} B_{\rho^n} = 4\pi$ P_x-presque sûrement :

$$\{\omega / B_{\rho^m}(\omega) \text{ ne converge pas vers } 4\pi\}$$

$$= \bigcup_{p>0} \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} \{|B_{\rho^m}(\omega) - 4\pi| > \frac{1}{p}\}}_{\mathcal{a}_p}$$

$$\frac{1}{p^2} P_x(|B_{\rho^m} - 4\pi| > \frac{1}{p}) \leq E_x(|B_{\rho^m} - 4\pi|^2) \leq C\rho^{m/2} .$$

Donc $P_x(|B_{\rho^m} - 4\pi| > \frac{1}{p}) \leq p^2 C\rho^{m/2}$, terme d'une série convergente et d'après le lemme de Borel-Cantelli

$$\left(\Sigma P(A_m) < +\infty \Rightarrow P \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m = 0\right)$$

on a pour chaque p , $P_x(\mathcal{a}_p) = 0$, d'où le résultat a).

b) Soit ∂ près de 0 . Il existe n pour que $\rho^{n+1} \leq \partial \leq \rho^n$, donc

$$W_{1,\rho^{-2n}} \subset W_{1,\partial^{-2}} \subset W_{1,\rho^{-2(n+1)}}$$

et $$\rho^2 B_{\rho^n} \leq B_\partial \leq \rho^{-2} B_{\rho^{n+1}}$$

et P_x-presque sûrement $4\pi\rho^2 \leq \varliminf\limits_{\partial\to 0} B_\partial \leq \varlimsup\limits_{\partial\to 0} B_\partial \leq \rho^{-2} 4\pi$. On fait tendre ρ vers 1 et on obtient $\lim\limits_{\partial\to 0} B_\partial = 4\pi$, P_x-p.s.

c) A_∂ vérifie alors $E_x|A_\partial - 4\pi|^2 < c\partial^{\frac{1}{2}}$ et on conclut de façon indentique, car

$$\rho^{n+1} \leq \partial \leq \rho^n \Rightarrow \rho A_{\rho^{n+1}} \leq A_\partial \leq \rho^{-1} A_{\rho^n} .$$

C Reste à montrer l'inégalité $E_x(|B_\partial - 4\pi|^2) < c\partial^{\frac{1}{2}}$.
D'après le théorème de Spitzer (cf. [Sp] ou [S]) on a :

$$E_x(|W_{\partial,t}|) = 4\pi\partial t + 4\partial^2(4\pi t)^{\frac{1}{2}} + (\frac{4\pi}{3})\partial^3 .$$

D'autre part, en posant $r_{\tau,n} = |W_1((n-1)\tau, n\tau)|$ (où $W_\partial(t_1,t_2)$ est la saucisse de Wiener de rayon ∂ autour de $\omega([t_1,t_2])$) on définit des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On a :

$$|W_{1,t}| \leq \sum_{j=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1} r_{\tau,j} \quad , \text{ pour } \tau < t .$$

On en déduit :

1) $$|W_{1,t}| \leq \sum_{j=1}^{[t]+1} r_{1,j}$$

$$\Rightarrow E_x(|W_{1,t}|^2) \leq (t+1)^2 E_x(r_{1,1}^2) ,$$

(on utilise $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq n\sum_{i=1}^n a_i^2$), et $c_2 = E_x(r_{1,1}^2)$ est finie :
si $\forall s \in [0,1]$, $\|\omega(s)\| \leq m+1$, alors $W_{1,1} \subset S(m+2)$, donc

$$E_x(r_{1,1}^2) \leq \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)^3 \frac{4\pi}{3} \underbrace{\mathbb{P}_x(m \leq \max_{0\leq s\leq 1} X_s \leq (m+1))}_{0(e^{-m})} .$$

On a donc :

$$E_x(|r_{1,\tau}^2|) \leq (\tau+1)^2 c_2 .$$

2) A cause de l'indépendance des $r_{\tau,j}$

$$E_x(|W_{1,t}|^2) \leq ([\frac{t}{\tau}]+1)E(r_{\tau,1}^2) + ([\frac{t}{\tau}]+1)^2(E(r_{\tau,1}))^2 .$$

En posant $\tau = \sqrt{t}$, on a donc :

$$E_x(r_{\sqrt{t},1}^2) \leq c_2(\sqrt{t}+1)^2$$

$$E_x(|W_{1,t}|^2) \leq (\sqrt{t}+1)E_x(r_{\sqrt{t},1}^2) + (\sqrt{t}+1)^2(E_x(r_{\sqrt{t},1}))^2$$
$$\leq (\sqrt{t}+1)^3 c_2 + (\sqrt{t}+1)^2(E_x(r_{\sqrt{t},1}))^2 ,$$

et d'autre part, d'après le théorème de Spitzer :

$$|E_x(|W_{1,t}|)-4\pi t| \le c_1\sqrt{t}$$
$$|E_x(r_{\sqrt{t},1})-4\pi\sqrt{t}| \le c_1 t^{1/4} .$$

Donc :

$$\begin{aligned} E_x(|W_{1,t}-4\pi t|^2) &= E_x(|W_{1,t}|^2) + (4\pi t)^2 - 2(4\pi t)E_x(|W_{1,t}|) \\ &= E_x(|W_{1,t}|^2) + \underbrace{(E_x(|W_{1,t}|)-4\pi t)^2}_{\le c_1^2 t} - E_x(|W_{1,t}|)^2 \end{aligned}$$

et $$(\sqrt{t}+1)^2E_x(r_{\sqrt{t},1})^2 - E_x(|W_{1,t}|)^2$$

$$= ((\sqrt{t}+1)E_x(t_{\sqrt{t},1})+E_x(|W_{1,t}|))((\sqrt{t}+1)E_x(r_{\sqrt{t},1})\cdot E_x(|W_{1,t}|))$$

$$0(t)$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{t}+1)E_x(r_{\sqrt{t},1})-E_x(|W_{1,t}|) &= (\sqrt{t}+1)(E_x(r_{\sqrt{t},1})-4\pi\sqrt{t}) \\ &\quad - (E_x(|W_{1,t}|)-4\pi t)+4\pi\sqrt{t}) \\ &= 0(t^{3/4}) . \end{aligned}$$

Il existe donc une constante c pour que

$$|E_x(|W_{1,t}|-4\pi t|^2)| \le c t^{7/4}$$

et donc

$$E_x\left(\left(\frac{|W_{1,t}|}{t}-4\pi\right)^2\right) \le \frac{c}{t^{1/4}} .$$

5. REMARQUES.

• Ce résultat s'étend aux dimensions $m \ge 3$: si $nr_n^{m-2} \to \alpha$ le spectre limite est décalé de

$$\frac{(m-2)\mathrm{Vol}(S^{m-1})\alpha}{|\Omega|} .$$

• On peut mettre sur Ω une probabilité de densité ρ ($\rho \ge 0$, $\int_\Omega \rho(x)=1$) alors le spectre limite est en probabilité pour ρ celui de $\Delta + (m-2)\mathrm{Vol}(S^{m-1})\alpha\rho$ (on utilise la formule de Feynman-Kac, cf. [R. T]).

• Le problème du prolongement de ce résultat aux variétés riemanniennes est l'absence de propriété de ré-échelonnement, cf. [C.F].

• Le cas $m = 3$, $nr_n \to +\infty$ est résolu si on fait l'hypothèse d'exhaustivité de la suite $p_i|_{i\geq 1}$ dans un ouvert Ω_0 , $\Omega_0 \subset \Omega$. Supposons qu'il existe un ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$ qui contienne les K_n et tel qu'il existe une suite ρ_n de réels tels que, il existe $M > 0$ et $\rho_n^3 = \frac{c^{te}}{n}$ et pour chaque n , $B(p_i, \rho_n)_{1\leq i\leq n}$ recouvre Ω_0 de telle sorte que chaque point de Ω_0 est recouvert par au plus M boules.

Alors le spectre limite est celui de Laplacien avec conditions de Dirichlet sur $\Omega\setminus\overline{\Omega_0}$ (cf. [R.T]).

Heuristiquement : les $B(p_i, r_n)$ représentent des impuretés ou des points de glace. Si $\alpha = 0$ ils fondent, et si $\alpha = +\infty$ ils se figent en Ω_0 .

6. BIBLIOGRAPHIE

[K] Mark KAC, Probabilistic Methods in some problems of scattering theory. Rocky Mountain, J. Math. 4 (1974), 511-538.

[R.T] RAUCH-TAYLOR, Potential and Scattering Theory on Wildly Perturbed Domains. J. of Functional Analysis 18 (1975), 27-59.

[C.F] CHAVEL-FELDMAN, Riemannian Wiener Sausage. Preprint.

[O.II] OZAWA, Electrostatic capacity and eigenvalues of the Laplacian. Preprint.

[O.I] OZAWA, Random Media and Eigenvalues of the Laplacian. Commun. Math. Phys. 94 (1984), 421-443.

[S] SIMON, Functional Integration and Quantum Physics. Academic Press, New-York, 1979.

[Sp] SPITZER, Electrostatic Capacity, Heat Flow and Brownian Motion.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 3 (1964), 110-121.

PORT and STONE, Brownian Motion and Classical Potential Theory.
Academic Press, New-York, 1978.
