Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

A. El Soufi
S. Ilias

Le volume conforme et ses applications d'après Li et Yau

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 2 (1983-1984), exp. nº 7, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A7_0>

LE VOLUME CONFORME ET SES APPLICATIONS d'après LI et YAU

par A. EL SOUFI et S. ILIAS

Dans leur article "A new conformal invariant and its applications etc..." (cf. [L-Y]), P. Li et S.T. Yau introduisent un invariant conforme pour les variétés riemanniennes compactes qu'ils appellent "volume conforme". Ceci leur permet de retrouver et de généraliser certains résultats déjà existants et concernant différentes branches de la théorie des surfaces.

En effet, ils montrent que, pour toute surface (M, g), le produit $\lambda_1 V$ où λ_1 est la première valeur propre et V le volume de (M, g), est majoré par $2V_c(M)$ où $V_c(M)$ est le volume conforme de (M, g). Une conséquence de ceci est le résultat de Yang et Yau donnant une majoration de $\lambda_1 V$ par une constante qui ne dépend que du genre de M (cf. 2.3).

Ils montrent aussi (cf. théorème B) que le volume conforme d'une surface (M, g) qui s'immerge minimalement par son premier espace propre dans une sphère canonique est égal au volume de (M, g). Ceci leur permet de montrer que sur une telle surface, la métrique g réalise, dans sa classe conforme, le maximum de la fonctionnelle $\lambda_1 V$. Ils généralisent ainsi un résultat dû à Hersh ([H]).

Ils observent enfin (théorème C) que le volume conforme d'une surface (M, g) immergée dans $\mathbb{R}^n$ majore sa courbure moyenne totale

$\int_M |H|^2$ où H est la courbure moyenne. Ils en déduisent une preuve de la conjecture de Willmore pour une certaine classe de tores et généralisent ce type de résultats à d'autres surfaces.

En plus d'un exposé détaillé de tous ces résultats et de leurs conséquences nous trouvons dans ce qui suit une généralisation aux variétés de dimension quelconque du théorème 1 de [L-Y] qui ne concernait que les surfaces. En effet, nous montrons que si (M, g) est une variété de dimension m alors

$$\lambda_1 V^{2/m} \leq m V_c(M)^{2/m} .$$

Ceci nous a permis de déterminer le volume conforme de tous les espaces homogènes irréductibles (cf. 3.8) et de montrer (cf. 3.10) que si (M, g) est un tel espace alors toute métrique $\tilde{g}$ sur M conforme à g vérifie

$$\lambda_1(\tilde{g}) V(\tilde{g})^{2/m} \leq \lambda_1(g) V(g)^{2/m} .$$

1. - INTRODUCTION DE LA NOTION DE VOLUME CONFORME.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension m et soit S^n la sphère unité munie de sa métrique canonique notée can

Une métrique $\tilde{g}$ sur M sera dite conforme à la métrique g si en chaque point de M la métrique $\tilde{g}$ est proportionnelle à g.

Une immersion φ de M dans S^n sera dite conforme si la métrique $\varphi^*\mathrm{can}$ induite par φ est conforme à g.

On notera $V(M)$ le volume de M et si φ est une immersion de M dans S^n, on désignera par $V(\varphi(M))$ le volume de M pour la métrique $\varphi^*\mathrm{can}$.

Dans toute la suite et sans qu'il soit nécessaire de le spécifier, nous utiliserons le mot immersion pour désigner aussi celles qui admettent des points de ramification non dégénérés.

Les résultats de cet article reposent essentiellement sur les deux observations suivantes :

1.1. - Première observation.

Soit f une fonction de classe C^1 sur M. Il est clair que la quantité $\int_M |df|_g^m dv_g$ ne dépend que de la classe conforme de la métrique g.

1.2. - Deuxième observation.

Une propriété classique remarquée d'abord par Blaschke puis généralisée par White et Chen est la suivante (cf. [Wh] et [C 1]) :

THEOREME. Soit M une surface immergée dans une variété $(\tilde{M}, \tilde{g})$ de courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ ($R_{\tilde{g}}$ est normalisée de manière à valoir 1 sur S^n) et soit $H_{\tilde{g}}$ la courbure moyenne de M. La quantité

$$\tau(M, (\tilde{M}, \tilde{g})) = \int_M (|H_{\tilde{g}}|^2_{\tilde{g}} + R_{\tilde{g}})\, dv_{\tilde{g}}$$

ne dépend que de la classe conforme de la métrique $\tilde{g}$.

Ces deux observations permettent d'obtenir presque immédiatement les résultats suivants (cf. théorèmes A, B et C) dans lesquels G représente le groupe des difféomorphismes conformes de S^n.

1 Soit φ une immersion de M dans S^n. Il existe $\gamma \in G$ tel que

$$\lambda_1 V(M)^{2/m} \le m\, V(\gamma \circ \varphi(M))^{2/m} .$$

② On suppose $m = 2$. Si φ est une immersion isométrique minimale de M dans S^n alors, quel que soit $\gamma \in G$ on a

$$V(M) = V(\varphi(M)) \geq V(\gamma \circ \varphi(M)) .$$

③ Si M est une surface dans $\mathbb{R}^n$ de courbure moyenne H alors, quel que soit $\gamma \in G$ on a

$$\int_M |H|^2 dv_{can} \geq V(\gamma \circ \pi^{-1}(M))$$

où $\pi^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n$ est une projection stéréographique inverse.

Ces trois résultats justifient l'introduction de la notion suivante :

1.3. - DEFINITION.

On appelle n-<u>volume conforme</u> d'une immersion $\varphi : M \to S^n$ la quantité $V_c(n, \varphi)$ définie par :

$$V_c(n, \varphi) = \sup_{\gamma \in G} V(\gamma \circ \varphi(M)) .$$

L'infimum sur toutes les immersions conformes de M dans S^n de $V_c(n,\varphi)$ est dit n-<u>volume conforme</u> de M , on le note $V_c(n, M)$. C'est un invariant conforme.

Les résultats 1 , 2 et 3 peuvent s'énoncer à l'aide de cet invariant conforme (cf. théorème A, B et C) .

1.4. - <u>Propriétés du volume conforme</u>.

1. $V_c(n, M) \geq V_c(n+1, M)$.

2. <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux variétés riemanniennes de même dimension</u>. <u>S'il existe une immersion</u> $f : M \to N$ <u>de degré</u> d <u>alors</u>

$$V_c(n, M) \leq |d| \, V_c(n, N) .$$

3. M étant de dimension m on a

$V_c(n,M) \geq V(S^m)$.

Plus précisément, soit φ une immersion conforme de M dans S^n . Si un point de S^n est atteint k-fois alors

$V_c(n,\varphi) \geq kV(S^m)$.

Les propriétés 1 et 2 sont immédiates pour une preuve de 3, voir [L-Y] .

La propriété 1 nous permet de poser

$V_c(M) = \lim V_c(n,M)$.

Nous l'appellerons volume conforme de M .

1.5. - Remarque : Soit M une surface orientable de genre g . Un corollaire du théorème de Riemann-Roch (cf. [G-H] , p. 261) affirme l'existence d'un revêtement ramifié conforme de M sur S^2 de degré inférieur ou égal à $[\frac{g+1}{2}]+1$. Les propriétés 2 et 3 ci-dessus impliquent alors pour tout n :

$$V(S^2) \leq V_c(n,M) \leq ([\frac{g+1}{2}]+1)V_c(n,S^2) .$$

Nous verrons par la suite (cf. 3.1) que $V(S^2) = V_c(n,S^2) = 4\pi$. D'où

$$4\pi \leq V_c(n,M) \leq 4\pi([\frac{g+1}{2}]+1) .$$

2. - ESTIMATION DU λ_1 .

2.1. - LEMME (cf. [H]). Soit φ une immersion de M dans S^n . Il existe $\gamma \in G$ tel que $\psi = \gamma\circ\varphi = (\psi_1,\dots,\psi_{n+1})$ vérifie

$$\int_M \psi_i \, dv_g = 0$$

pour tout i .

<u>Preuve</u>. Pour tout $p \in S^n$ et tout $k \in]0,1]$ on définit un élément de G en posant $\gamma_{p,k} = \pi_p^{-1} \circ H_k \circ \pi_p$ et $\gamma_{p,k}(p) = p$ où π_p est la projection stéréographique de pôle $-p$ et où H_k est l'homothétie de rapport k dans $\mathbb{R}^n$. On pose $\psi^{p,k} = \gamma_{p,k} \circ \varphi$ et on considère l'application F de $]0,1] \times S^n$ dans la boule unité ouverte B^{n+1} définie par :

$$F : (k,p) \to \frac{1}{V(M)} \left(\int_M \psi_1^{p,k} dv, \ldots, \int_M \psi_{n+1}^{p,k} dv \right) .$$

Du fait que $\lim_{k \to 0} \gamma_{p,k}(m) = p$ pour tout $m \in S^n$, l'application F se prolonge donc en une application continue de $[0,1] \times S^n$ dans $\bar{B}^{n+1}$ en posant $F(0,p) = p$. Puisque $F(1,.)$ est une constante (car $\gamma_{p,1} = Id_{S^n}$). L'application F doit être surjective. En effet, si un point de B^{n+1} n'appartient pas à l'image de F on pourrait projeter cette image (via le point en question) sur $S^n = \partial B^{n+1}$ et obtenir ainsi une homotopie entre l'identité et un point de S^n. Or, S^n n'est pas contractible. Par suite, F est surjective et il existe un couple (k,p) tel que $F(k,p) = 0$. ∎

2.2. - THEOREME A. <u>Soit</u> (M,g) <u>une variété riemannienne compacte de dimension</u> m. <u>Alors, quel que soit</u> n, <u>on a</u> :

$$\lambda_1 V(M)^{2/m} \leq m V_c(n,M)^{2/m} .$$

<u>L'égalité implique que</u> M <u>admet, à homothétie près, une immersion isométrique minimale dans</u> S^n <u>donnée par le premier espace propre de</u> M.

<u>Preuve</u>. Soit $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1})$ une immersion conforme de M dans S^n. D'après le lemme précédent, on peut supposer que $\int_M \varphi_i dv_g = 0$. Par le principe du minimax, on a :

$$\lambda_1 \leq \frac{\sum_i \int_M |d\varphi_i|_g^2 dv_g}{\sum_i \int_M \varphi_i^2 dv_g} = \frac{\int_M \sum_i |d\varphi_i|_g^2 dv_g}{V(M)} \leq \frac{\left[\int_M (\sum_i |d\varphi_i|_g^2)^{m/2} dv_g \right]^{2/m}}{V(M)^{2/m}} .$$

A cause de la première observation, on a :

$$\int_M (\sum_i |d\varphi_i|_g^2)^{m/2} dv_g = \int_M (\sum_i |d\varphi_i|_{\varphi^*g}^2)^{m/2} dv_{\varphi^*g} = \int_M m^{m/2} dv_{\varphi^*g} \ .$$

D'où

$$\lambda_1 \leq m \frac{V(\varphi(M))^{2/m}}{V(M)^{2/m}} \ .$$

On en déduit immédiatement l'inégalité annoncée.

Supposons maintenant qu'on ait l'égalité. Via une homothétie, on peut supposer $\lambda_1 = m$ pour avoir $V(M) = V_c(n, M)$. On considère alors une suite $(\varphi^k)_k$ d'immersions conformes de M dans S^n telles que $V_c(n, \varphi^k) \to V(M)$ et on suppose que $\int_M \varphi_i^k dv_g = 0$ pour tout k et i . En appliquant d'une part le principe du minimax d'autre part l'inégalité de Hölder on obtient pour tout k

$$(*) \qquad \lambda_1 \sum_i \int_M (\varphi_i^k)^2 dv_g \leq \sum_i \int_M |d\varphi_i^k|^2 dv_g \leq m V_c(n, \varphi^k)^{2/m} V(M)^{1-\frac{2}{m}} \ .$$

Ces inégalités montrent que pour chaque i , la suite $(\varphi_i^k)_k$ est bornée au sens $H_{1,2}$. On peut donc la supposer convergente au sens L^2 et noter φ_i sa limite (théorème de Kondrakov). De plus, la première inégalité dans $(*)$ étant valable pour chaque i on obtient par passage à la limite :

$$\lim_{k\to\infty} \int_M |d\varphi_i^k|^2 dv_g = m \int_M \varphi_i^2 dv_g \ .$$

Ceci va nous permettre de déduire que φ_i appartient au premier espace propre E_1 de M et que $(\varphi_i^k)_k$ converge vers φ_i au sens $H_{1,2}$. En effet, notons p la projection orthogonale sur E_1 et $p^\perp$ la projection sur $E_1^\perp$. On a alors $\|\varphi_i^k\|_{L^2}^2 = \|p\varphi_i^k\|_{L^2}^2 + \|p^\perp \varphi_i^k\|_{L^2}^2$ et $\|d\varphi_i^k\|_{L^2}^2 = \|dp\,\varphi_i^k\|_{L^2}^2 + \|dp^\perp \varphi_i^k\|_{L^2}$. Du fait que

$(\|d\varphi_i^k\|_{L^2}^2 - \lambda_1 \|\varphi_i^k\|_{L^2}^2) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ il vient que $(\|dp^\perp \varphi_i^k\|_{L^2}^2 - \lambda_1 \|p^\perp \varphi_i^k\|_{L^2}^2) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

et comme $\|dp^{\perp}\varphi_i^k\|^2_{L^2} \geq \lambda_2\|p^{\perp}\varphi_i^k\|^2_{L^2}$, on a alors $(\lambda_2-\lambda_1)\|p^{\perp}\varphi_i^k\|^2_{L^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Ceci implique que $p^{\perp}\varphi_i = 0$ et donc que $\varphi_i \in E_1$.

Maintenant, la convergence de $(\varphi_i^k)_k$ vers φ_i au sens $H_{1,2}$ découle du fait que :

$$\begin{aligned}\|d\varphi_i^k - d\varphi_i\|^2_{L^2} &= \|d\varphi_i^k\|^2_{L^2} + \|d\varphi_i\|^2_{L^2} - 2\langle d\varphi_i^k, d\varphi_i\rangle \\ &= \|d\varphi_i^k\|^2_{L^2} + \lambda_1\|\varphi_i\|^2_{L^2} - 2\lambda_1\langle\varphi_i^k,\varphi_i\rangle\end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 quand $k \to \infty$.

L'application $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1})$ est donc une immersion conforme de M dans S^n dont les composantes sont dans E_1 . Maintenant, si on applique le laplacien à $\sum \varphi_i^2 = 1$ on obtient $\sum_i |d\varphi_i|^2 = m$. Ceci implique que l'immersion φ est en fait isométrique, elle satisfait bien donc aux conditions de l'énoncé. ∎

2.3. - <u>Remarque</u>. Dans le cas d'une surface orientable M de genre g le théorème précédent et la remarque 1.5 donnent

$$\lambda_1 V(M) \leq 8\pi\left(\left[\frac{g+1}{2}\right] + 1\right)$$

qui est un résultat de Yang et Yau (cf. [Y-Y]).

3. - SURFACES MINIMALES DANS LA SPHERE ET ESPACES HOMOGENES IRREDUCTIBLES.

Une conséquence directe de l'observation 1.2 est le théorème suivant :

3.1. - THEOREME B. *Soit* (M, g) *une surface compacte et supposons qu'il existe une immersion isométrique minimale* φ *de* M *dans* S^n *alors*

$$V(M) = V_c(n, \varphi) \geq V_c(n, M) .$$

Si, de plus, l'immersion φ *est donnée par le premier espace propre alors* $V(M) = V_c(n, \varphi) = V_c(n, M) = V_c(M)$.

Preuve. Soit $\gamma \in G$, d'après 1.2 on a :

$$\tau(\varphi(M), (S^n, can)) = \tau(\varphi(M), (S^n, \gamma^* can)) = \tau(\gamma \circ \varphi(M), (S^n, can)) .$$

L'immersion φ étant minimale on a $\tau(\varphi(M), (S^n, can)) = V(M)$. D'où

$$V(M) = \int_{\gamma \circ \varphi(M)} (|H|^2 + 1)\, dv_{can} \geq V(\gamma \circ \varphi(M)) .$$

Maintenant si on suppose $\lambda_1 = 2$, le théorème A nous donne $V(M) \leq V_c(n, M)$ qui implique bien que $V(M) = V_c(n, M) = V_c(M)$. ■

Du fait que $V_c(M)$ est un invariant conforme il résulte immédiatement du théorème B le corollaire suivant :

3.2. - COROLLAIRE. *Soit* (M, g) *une surface compacte immergée minimalement dans* S^n *par son premier espace propre. Pour toute autre métrique minimale* $\tilde{g}$ *conforme à* g *on a* :

$$V(\tilde{g}) \geq V(g) .$$

3.3. - *Remarques*. Rappelons que S^2 et $\mathbb{R}P^2$ admettent, chacun, une structure conforme unique. On a alors pour $\mathbb{R}P^2$ que toute métrique minimale $\tilde{g}$ vérifie $V(\tilde{g}) \geq V(\text{surface de Véronèse}) = 6\pi$.

D'autre part, le théorème B implique, en particulier, que toutes les métriques minimales d'une même structure conforme qui vérifient $\lambda_1 = 2$ sont de même volume. On en déduit pour S^2 que la métrique canonique est la seule métrique admettant des immersions isométriques minimales par son premier espace propre.

Les théorèmes A et B donnent immédiatement le corollaire suivant :

3.4. - COROLLAIRE. Soit (M, g) une surface minimale dans S^n. Toute métrique $\tilde{g}$ conforme à g vérifie :

$\lambda_1(\tilde{g})V(\tilde{g}) \leq 2V(g)$.

L'égalité implique que $(M, \tilde{g})$ est, à homothétie près, immergée minimalement par son premier espace propre dans S^n .

3.5. - Cas particulier du corollaire Si (M, g) est une surface immergée minimalement dans S^n par son premier espace propre alors, pour toute métrique $\tilde{g}$ conforme à g on a :

$\lambda_1(\tilde{g})V(\tilde{g}) \leq \lambda_1(g)V(g)$.

L'égalité implique que $(M, \tilde{g})$ est, à homothétie près, immergée minimalement par son premier espace propre dans S^n .

3.6. - Remarque. Ce dernier résultat concerne en particulier S^2, $\mathbb{R}P^2$ et le tore plat carré munis de leurs métriques canoniques et se plongeant minimalement (par leur premier espace propre) respectivement dans S^2 , S^4 et S^3 . La qualité $\lambda_1(\mathrm{can})V(\mathrm{can})$ vaut respectivement dans ces cas 8π , 12π et $4\pi^2$.

Signalons enfin que le cas de S^2 est un résultat connu dû à Hersh (cf. [H]).

Le théorème B reste valable en dimension quelconque pour une certaine classe de variétés homogènes :

3.7. - THEOREME B'. Soit (M, g) une variété homogène compacte, on suppose qu'il existe une immersion isométrique minimale φ de M dans S^n telle que :

- $\varphi(M)$ ne soit contenu dans aucune hypersphère.
- φ soit équivariante (i.e. le groupe transitif H de M est isomorphe à un sous-groupe $\tilde{H}$ de $O(n+1)$ tel que pour tout $\alpha \in H$ on ait $\varphi \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ \varphi$) .

Alors

$V(M) = V_c(n, \varphi) \geq V_c(n, M)$.

Si, de plus, φ est donné par le premier espace propre alors $V(M) = V_c(n, \varphi) = V_c(n, M) = V_c(M)$.

Pour une preuve cf. [L-Y] .

3.8. - Remarque. Si (M, g) est un espace homogène irréductible on sait que, à homothétie près, tout espace propre fournit une immersion isométrique minimale équivariante (cf. [B-G-M]). On a donc pour ces variétés :

$$V_c(n, (M, g)) = V_c(n, (M, \frac{\lambda_1}{m} g)) = V(M, \frac{\lambda_1}{m} g) = (\frac{\lambda_1}{m})^{m/2} V(M, g)$$

où $n+1$ est la dimension du premier espace propre.

Il résulte immédiatement des théorèmes A et B' le corollaire suivant :

3.9. - COROLLAIRE. Soit (M, g) une variété homogène de dimension m admettant une immersion isométrique minimale dans S^n qui vérifie les hypothèses du théorème B'. Alors, pour toute métrique $\tilde{g}$ conforme à g on a :

$\lambda_1(\tilde{g}) V(\tilde{g})^{2/m} \leq m V(g)^{2/m}$.

L'égalité implique que $(M, \tilde{g})$ est, à homothétie près, immergée minimalement par son premier espace propre dans S^n .

3.10. - Cas particulier du corollaire. Si (M,g) est un espace homogène irréductible, alors pour toute métrique $\tilde{g}$ conforme à g on a

$$\lambda_1(\tilde{g})\, V(\tilde{g})^{2/m} \leq \lambda_1(g)\, V(g)^{2/m} .$$

L'égalité implique que $(M,\tilde{g})$ est, à homothétie près, immergée minimalement par son premier espace propre dans S^n où $n+1$ est la dimension du premier espace propre de (M,g) .

3.11. - Remarque. Ce dernier résultat concerne en particulier les espaces symétriques de rang 1 : S^m, $\mathbb{R}P^m$, $\mathbb{C}P^d$, $\mathbb{H}P^d$ et $Ca\,P^2$ munis de leurs métriques canoniques. Pour permettre le calcul du volume conforme et de la quantité $\lambda_1(\mathrm{can})\, V(\mathrm{can})$ pour ces espaces nous rappelons les données suivantes :

M	S^m	$\mathbb{R}P^m$	$\mathbb{C}P^d$	$\mathbb{H}P^d$	$Ca\,P^2$
λ_1	m	$2(m+1)$	$4(d+1)$	$8(d+1)$	48
V	ω_m	$\frac{\omega_m}{2}$	$\frac{\pi^d}{d!}$	$\frac{\pi^{2d}}{(2d+1)!}$	$\frac{6\pi^8}{11!}$

Signalons enfin que dans le cas de S^m notre résultat améliore celui de Berger dans [B] .

4. - CONJECTURE DE WILLMORE.

Dans [W] , Willmore montre que pour les tores $\mathbb{T}^2$ réalisés dans $\mathbb{R}^3$ comme bords des voisinages tubulaires d'une courbe fermée à courbure non nulle on a :

$$\tau(\mathbb{T}^2,\mathbb{R}^3) = \int_{\mathbb{T}^2} |H|^2 dv_{\mathrm{can}} \geq 2\pi^2 .$$

Il conjecture alors que cette propriété doit rester valable pour tout tore immergé dans $\mathbb{R}^3$. Chen a étendu cette conjecture aux tores immergés dans $\mathbb{R}^n$.

A l'aide de la notion du volume conforme il va être possible de prouver cette conjecture pour une certaine classe de tores et de généraliser ce type de résultats à d'autres surfaces.

4.1. - THEOREME C. <u>Soit</u> M <u>une surface compacte de</u> $\mathbb{R}^n$, <u>alors</u>

$$\int_M |H|^2 dv_{can} \geq V_c(n, \pi^{-1}) \geq V_c(n,M)$$

<u>où</u> π^{-1} <u>est l'inverse d'une projection stéréographique</u>.

<u>Preuve</u>. Soit $\gamma \in G$ par la deuxième observation on a

$$\tau(M, (\mathbb{R}^n, can)) = \tau(M, (\mathbb{R}^n, (\gamma\circ\pi^{-1})^* can)) = \tau(\gamma\circ\pi^{-1}(M), (S^n, can)) .$$

D'où

$$\int_M |H|^2 dv_{can} = \int_{\gamma\circ\pi^{-1}(M)} (|H|^2 + 1) dv_{can} \geq V(\gamma\circ\pi^{-1}(M)) .$$

Le résultat annoncé en découle immédiatement. ■

Une conséquence directe des théorèmes A et C est le corollaire suivant :

4.2. - COROLLAIRE. <u>Soit</u> M <u>une surface compacte de</u> $\mathbb{R}^n$. <u>On note</u> g <u>la métrique induite par</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Alors</u>

$$\int_M |H|^2 dv_{can} \geq \frac{1}{2} \sup\{\lambda_1(\tilde{g}) V(\tilde{g}) / \tilde{g} \text{ conforme à } g\} .$$

On sait que tous les tores sont classifiés à difféomorphismes conforme près par les tores plats $\mathbb{T}^2_{(x,y)}$ engendrés par les couples $\{(1,0),(x,y)\}$ avec $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $y \geq \sqrt{1-x^2}$. Le corollaire 4.2 implique alors pour les tores le résultat suivant :

4.3. - COROLLAIRE. Soit $(\mathbb{T}^2, g)$ un tore immergé dans $\mathbb{R}^n$ et conformément équivalent au tore plat $\mathbb{T}^2_{(x,y)}$, alors :

$$\int_{\mathbb{T}^2} |H|^2 dv_{can} \geq \frac{2\pi^2}{y} .$$

Preuve. On applique 4.2 en remarquant que pour $\mathbb{T}^2_{(x,y)}$, $\lambda_1(can) = \frac{4\pi^2}{y^2}$ et $V(can) = y$. ■

4.4. - Remarque. Ce dernier résultat montre en particulier que la conjecture en question est vraie pour les tores classifiés par les tores plats $\mathbb{T}^2_{(x,y)}$ avec $y \leq 1$. De plus, il n'est pas difficile de voir que dans ce cas (i.e. le cas $y \leq 1$) l'égalité $\int_{\mathbb{T}^2} H^2 dv_{can} = 2\pi^2$ implique que $\mathbb{T}^2$ est conformément équivalent au tore plat carré $\mathbb{T}^2_{(0,1)}$.

Le théorème C nous permet aussi de retrouver un résultat dû à Chen (cf. [C 2]) :

4.5. - COROLLAIRE. Soit M une surface compacte de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à $\mathbb{R}P^2$. Alors

$$\int_M |H|^2 dv_{can} \geq 6\pi .$$

Le théorème C et la propriété 3 du volume conforme permettent d'avoir le corollaire suivant :

4.6. - COROLLAIRE. Soit φ une immersion isométrique d'une surface compacte M dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que l'image réciproque d'un certain point p de $\mathbb{R}^n$ contienne k points distincts de M . Alors

$$\int_M |H|^2 dv_{can} \geq 4k\pi .$$

Par suite, la condition $\int_M |H|^2 dv_{can} < 8\pi$ implique que φ est un plongement.

4.7. - <u>Cas particulier du corollaire</u>. <u>Si on suppose que</u> φ <u>est une immersion isométrique minimale de</u> M <u>dans</u> S^n <u>telle qu'un point</u> p <u>de</u> S^n <u>soit atteint</u> k <u>fois</u>. <u>Alors</u>

$$V(M) \geq 4k\pi$$

<u>et par suite</u>, <u>la condition</u> $V(M) < 4\pi$ <u>implique que</u> φ <u>est un plongement</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[B] M. BERGER : Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes. Compositio Math. 26, (1973), 129-149.

[B-G-M] BERGER-GAUDUCHON-MAZET : Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture notes in math. vol.194, Springer 1971.

[C 1] B.-Y. CHEN : Some conformal invariants of submanifolds and their applications. Boll. Un. Mat. Ital. (4) 10 (1974), 380-385.

[C 2] B.-Y. CHEN : Geometry of submanifolds and applications. Sciences University of Tokyo, 1981.

[G-H] P. GRIFFITHS, J. HARRIS : Principles of Algebraic Geometry. Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience Series (1978).

[H] J. HERSCH : Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes. C.R.A.S. 270 (1970), 1645-1648.

[L-Y] P. LI , S.T. YAU : A new conformal invariant and its applications etc... . Inv. Math. 69 (1982), 269-291.

[W] T.J. WILLMORE : Note on embedded surfaces. Ann. St. Univ. Iasi, s.I.a. Mathematica, 11B (1965), 493-496.

[Wh] J.H. WHITE : A global invariant of conformal mappings in space. Proc. Amer. Math. Soc. 39 (1973), 649-650.

[Y-Y] P. YANG, S.T. YAU : Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds. Annali della scuola sup. di Pisa 7 (1980), 55-63.