Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Calcul du spectre de certaines nilvariétés compactes de dimension 3

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 2 (1983-1984), exp. nº 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A5_0>

Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie
CHAMBERY-GRENOBLE
1983-1984

CALCUL DU SPECTRE DE CERTAINES NILVARIETES COMPACTES DE DIMENSION 3

Exposé de Yves COLIN DE VERDIERE

Le but de cet exposé est le calcul du spectre du laplacien d'une variété riemannienne compacte $M = \Gamma\backslash G$ où G est le groupe de Heisenberg de dimension 3 muni d'une métrique invariante à gauche et Γ un sous-groupe discret opérant par translation à gauche sur G .

Après avoir décrit de façon précise les variétés M en question, le calcul repose sur le lemme algébrique classique qui permet le calcul du spectre de l'oscillateur harmonique $\Omega = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 x^2$.

Il serait intéressant de généraliser ces calculs à des quotients d'autres groupes nilpotents et éventuellement de mettre ainsi en évidence certaines déformations isospectrales explicites de variétés riemanniennes compactes.

1. DESCRIPTION DES VARIETES RIEMANNIENNES.

Soit G le groupe des matrices 3×3 à coefficients réels de la forme $g = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on notera aussi $g = \langle x,y,z \rangle$. Ce groupe G est le groupe de Heisenberg de dimension 3 .

On a :

$$\langle x,y,z\rangle\langle x',y',z'\rangle = \langle x+x' , y+y' , z+z'+xy'\rangle$$

et donc, avec des notations évidentes :

$$g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 = \langle 0,0,x_1y_2-x_2y_1\rangle .$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs invariants à gauche est engendrée par $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$, $Z = \frac{\partial}{\partial z}$ qui admet pour base duale $\xi = dx$, $\eta = dy$, $\zeta = dz - xdy$.

$$[X,Z] = [Y,Z] = 0 \quad ; \quad [X,Y] = Z .$$

Soit Γ un sous-groupe discret de G qui opère par translation à gauche et tel que $M = \Gamma\backslash G$ est <u>compacte</u>. Soit

$$\Gamma_k = \{\langle\sqrt{2\pi}kn_1 , \sqrt{2\pi}n_2 , 2\pi n_3\rangle \,|\, n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}\}$$

où k est un entier ≥ 1 , on a le :

THEOREME. - <u>Il existe un</u> k <u>unique et un automorphisme</u> φ <u>de</u> G <u>tel que</u> $\varphi(\Gamma) = \Gamma_k$: M <u>est difféomorphe à</u> $\Gamma_k\backslash G$ <u>pour un certain</u> k . <u>Ce</u> k <u>est un invariant topologique de</u> M <u>(il se calcule à partir du groupe fondamental</u> $\pi_1(M)$).

<u>Détermination de</u> k : soit $C = \{\langle 0,0,t\rangle | t\in\mathbb{R}\}$ le centre de G , $Z_0 = \Gamma\cap C$, $Z_1 = [\Gamma,\Gamma]\subset Z_0$, on a $k = [Z_0 : Z_1]$.

La démonstration du théorème n'est pas difficile. On peut utiliser des automorphismes de l'algèbre de Lie en travaillant sur des relèvements par $\exp^{-1}$ de générateurs convenables de Γ .

<u>Description de</u> M : soit $E = G/C \approx \mathbb{R}^2$ et $\tilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma\cap C \subset E$, alors $E/\tilde{\Gamma}$ est un tore de dimension 2 . L'application naturelle $\pi : M \to E/\tilde{\Gamma} = T$ est une fibration en cercles. La fibre de 0 est $C/Z_0 \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on a $\pi(\widetilde{\langle x,y,z\rangle}) = \widetilde{(x,y)} \in T$.

<u>Métriques riemanniennes</u> : soit g une métrique riemannienne invariante à gauche sur G ; g s'écrit
$g = P(dx,dy) + t^2(dz - xdy + Adx + Bdy)^2$. En faisant opérer les translations à droite de G , on obtient des variétés $\Gamma_k\backslash G$ 2 à 2 isométriques : $(R_{\gamma_0}(\Gamma.g) = \Gamma g\gamma_0)$ et

$$R^*_{\gamma_0}(g) = P(dx,dy) + t^2(dz - (x+x_0)dy + y_0dx + Adx + Bdy)^2 .$$

En prenant $y_0 = -A$ et $x_0 = B$, on obtient :

$$R^*_{\gamma_0}(g) = P(dx,dy) + t^2(dz - xdy)^2 ;$$

$$R^*_{\gamma_0}(g) = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2 + t^2(dz - xdy)^2 .$$

<u>On est ainsi ramené à étudier</u> $M = \Gamma_k\backslash G$ <u>où</u> G <u>est muni de la métrique</u> $g = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2 + t^2(dz-xdy)^2$. La fibration précédente $M \to T$ est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques. T est le tore plat $\mathbb{R}^2/\overline{\Gamma_k}$ avec
$\overline{\Gamma_k} = \{(\sqrt{2\pi}\,kn_1 , \sqrt{2\pi}\,kn_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ muni de la métrique
$adx^2 + 2bdxdy + cdy^2$. Les fibres C/Z_0 sont de longueurs $2\pi t$.

<u>Calcul des volumes</u> : soit $\delta = \sqrt{ac - b^2}$, $\mathrm{vol}(M) = 4\pi^2 kt\delta$

$\mathrm{vol}(T) = 2\pi k\delta$.

<u>Question</u> : soit M une variété riemannienne compacte <u>localement</u> isométrique au groupe de Heisenberg G de dimension 3 muni d'une métrique invariante à gauche, M est-elle <u>globalement</u> isométrique à une variété $\Gamma_k\backslash G$ du type précédent.

2. CALCUL DU SPECTRE

a. Un lemme.

Soit A un opérateur fermé non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, A^* son adjoint et $B = A^*A$ avec $D(B) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D(A^*)\}$, il n'est pas difficile de voir que B est autoadjoint, en fait c'est l'extension de Friedrichs de la forme quadratique fermée de domaine $D(A)$ définie par $q(x) = \|Ax\|^2$. On suppose que $[A, A^*] = c.\mathrm{Id}$ avec $c \neq 0$ et que B est à résolvante compacte, alors le spectre de B peut être ainsi décrit : les espaces propres sont tous de même dimension et le spectre est

(i) si $c > 0$, $Sp(B) = \{0, c, 2c, 3c, \dots\}$

(ii) si $c < 0$, $Sp(B) = \{-c, -2c, -3c, \dots\}$.

Remarque : si $c = 0$, A est autoadjoint et on ne peut rien dire de plus que $Sp(B) \subset [0, +\infty[$.

Preuve. - Si E_λ est un espace propre de B de valeur propre λ, alors :

$$A(E_\lambda) \subset E_{\lambda-c} \quad ; \quad A^*(E_\lambda) \subset E_{\lambda+c} \quad ; \quad A^*A_{\mid E_\lambda} = \lambda \mathrm{Id} \quad ;$$

$$AA^*_{\mid E_\lambda} = (\lambda+c)\mathrm{Id} \, .$$

En effet, par exemple, de $A^*A\varphi = \lambda\varphi$, on tire $A^*AA\varphi = (AA^* - c)A\varphi = (\lambda - c)A\varphi$ (si $\varphi \in E_\lambda$). Donc, si λ est valeur propre de B, A est un isomorphisme de E_λ sur $E_{\lambda-c}$ sauf si $\lambda = 0$ et A^* est un isomorphisme de E_λ sur $E_{\lambda+c}$ sauf si $\lambda+c = 0$.

Soit $c > 0$: si λ_0 valeur propre de B, $\lambda_0 - c, \dots, \lambda_0 - kc$ sont d'autres valeurs propres, jusqu'à ce qu'on arrive à 0 : on doit donc arriver à 0 (car $B \geq 0$), c'est-à-dire que $Sp(B) = \{0, c, 2c, \dots\}$ avec des espaces propres isomorphes.

Le cas $c < 0$ se traite de façon analogue.

b. Utilisation du lemme.

Calcul du laplacien :

soit $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1}$, on a :

$$\Delta = -\left(AX^2+B(XY+YX) + CY^2 + \frac{Z^2}{t^2}\right) .$$

En effet, cet opérateur est symétrique, à coefficients réels, à symbole principal g^* et $\Delta 1 = 0$.

On peut encore écrire Δ sous la forme :

$$\Delta = -\left(\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2+\frac{Z^2}{t^2}\right) , \text{ avec } \mathcal{X} = \sqrt{A}\,X + \frac{B}{\sqrt{A}}\,Y \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \frac{\sqrt{AC-B^2}}{\sqrt{A}}\,Y$$

et donc :

$$\begin{cases} [\mathcal{X},\mathcal{Y}] = \frac{1}{\delta} Z \\ [\mathcal{X}, Z] = [\mathcal{Y}, Z] = 0 \end{cases}$$

on pose alors :

$$\square = -(\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2)$$

et on a :

$$[\square , Z] = 0 .$$

Le calcul du spectre de Δ se fait à partir de celui du spectre joint de $\square$ et Z

$$\text{Spectre}(Z) = \{im \mid m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \square = (\mathcal{X}+i\mathcal{Y})(-\mathcal{X}+i\mathcal{Y}) - \frac{i}{\delta} Z$$

donc, avec une notation évidente :

$$\square_m = (\mathcal{X}+i\mathcal{Y})(-\mathcal{X}+i\mathcal{Y}) + \frac{m}{\delta} ,$$

$$\Delta_m = (\mathcal{X}+i\mathcal{Y})(-\mathcal{X}+i\mathcal{Y}) + \frac{m}{\delta} + \frac{m^2}{t^2} .$$

Spectre de Δ_0 : les fonctions correspondantes sont constantes sur les fibres, $\text{Spectre}(\Delta_0) = \text{Spectre}(T)$: c'est le spectre du tore plat $\mathbb{R}^2/\overline{\Gamma_k}$.

<u>Spectre de</u> Δ_m $(m \neq 0)$:

soit $A = -\mathcal{X} + i\mathcal{Y}$, $A^* = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}$, on a :

$$\Delta_m = A^*A + \frac{m}{\delta} + \frac{m^2}{t^2} \quad \text{et} \quad [A, A^*] = -2i[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \frac{2m}{\delta}\,\mathrm{Id}\ .$$

<u>Donc si</u> $m > 0$, $\mathrm{Sp}(\Delta_m) = \left\{ \frac{m}{\delta}(2\ell+1) + \frac{m^2}{t^2} \;\middle|\; \ell = 0, 1, 2, \dots \right\}$,

<u>si</u> $m < 0$, $\mathrm{Sp}(\Delta_m) = \left\{ \frac{|m|}{\delta}(2\ell+1) + \frac{m^2}{t^2} \;\middle|\; \ell = 0, 1, 2, \dots \right\}$.

Les multiplicités ne dépendent que de m et g , mais pas de ℓ . Pour les calculer, on utilise l'asymptotique de Weyl en remarquant que Δ_m s'identifie au laplacien sur les sections d'un fibré en droites complexes sur T et donc :

$$\#\{\text{valeurs propres de } \Delta_m \leq \lambda\} \sim \frac{\mathrm{aire}(T)}{4\pi}\lambda = \frac{k\delta}{2}\lambda\ .$$

Donc, si ν_m est la multiplicité :

$$\nu_m \times \#\left\{ \ell \;\middle|\; \frac{(2\ell+1)|m|}{\delta} \leq \lambda \right\} \sim \frac{k\delta}{2}\lambda\ ,$$

ce qui donne

$$\boxed{\nu_m = k.m}\ .$$

Pour résumer, on a :

$$\mathrm{Spectre}(\Delta) = \mathrm{Spectre}(T) \cup \left\{ \frac{m}{\delta}(2\ell+1) + \frac{m^2}{t^2} \;\middle|\; \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ \ell = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\}$$

chacune de ces valeurs propres étant <u>de multiplicité</u> $2km$

En particulier, la plus petite valeur propre non nulle de M est donnée par :

$$\lambda_1(M) = \inf\left\{ \lambda_1(T)\,,\ \frac{1}{\delta} + \frac{1}{t^2} \right\}\ .$$