Alain Dufresnoy

Comportement asymptotique de la distribution des valeurs propres de l'équation de Schrödinger associé à certains champs magnétiques sur un cylindre

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 2 (1983-1984), exp. nº 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A4_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA DISTRIBUTION DES VALEURS PROPRES DE L'EQUATION DE SCHRODINGER ASSOCIE A CERTAINS CHAMPS MAGNETIQUES SUR UN CYLINDRE

par Alain DUFRESNOY

On considère $X = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ et sur X un champ magnétique ne dépendant que de y, $B = B(y)dx \wedge dy$. On désigne par a une 1-forme différentielle telle que $da = B$, on appelle équation de Schrödinger associée à B

$$H(a) = -(\nabla - ia)^2 = -(\frac{\partial}{\partial x} - ia_1)^2 - (\frac{\partial}{\partial y} - ia_2)^2$$

où $a = a_1 dx + a_2 dy$.

On sait que si B tend vers l'infini à l'infini, alors l'opérateur $H(a)$ associé est à résolvante compacte (cf. par exemple [A.H.S.]).

Dans [M], Florence Michau a étudié le cas où $B(y) = 2y$ et a donné un équivalent du comportement asymptotique de la distribution des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger associé.

On se propose ici de généraliser, par une méthode légèrement différente, ce dernier résultat aux champs magnétiques dépendant de y et vérifiant certaines propriétés de régularité (par exemple les polynômes).

§ 1. RESULTATS PRELIMINAIRES

Considérons F une primitive de B (c'est-à-dire $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F'(y) = B(y)$) alors $H(a) = -(\frac{\partial}{\partial x}+iF(y))^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; cet opérateur commutant avec $\frac{\partial}{\partial x}$, on a une décomposition

$$L^2(X) = \underset{k\in\mathbb{Z}}{\oplus} \{L^2_y(\mathbb{R}) \times e^{ikx}\} \simeq \underset{k\in\mathbb{Z}}{\oplus} L^2_y(\mathbb{R})$$

et une décomposition de $H(a)$ en une somme directe d'opérateurs

$$H'_k : L^2_y(\mathbb{R}) \to L^2_y(\mathbb{R}) \quad \text{où} \quad H'_k = -\frac{d^2}{dy^2} + (k+F(y))^2 = -\frac{d^2}{dy^2} + V_k .$$

Suivant F. Michau, nous étudions le comportement de $\operatorname{Tr} e^{-tH(a)}$ lorsque t tend vers 0 ; pour cela, on remarque que

$$\operatorname{Tr} e^{-tH(a)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tr} e^{-tH'_k} ;$$

utilisant alors que $e^{-tH'_k}$ est un opérateur à noyau continu (noté $[e^{-tH'_k}](x,y)$), on a

$$\operatorname{Tr} e^{-tH'_k} = \int_{\mathbb{R}} [e^{-tH'_k}](y,y)dy$$

et donc

$$\operatorname{Tr} e^{-tH(a)} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} [e^{-tH'_k}](y,y)dy .$$

Si on pose $H_k = \frac{1}{2}H'_k$, on a, d'après la formule de Feynmann-Kac

$$[e^{-tH_k}](y,y) = \int e^{-\int_0^t V_k(X_s)ds} d\mu_{0,y,y,t}$$

(nous renvoyons pour les notations au livre de B. Simon [S])

donc :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} [e^{-tH_k}](y,y) = \int\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\int_0^t V_k(X_s)ds}\right)d\mu_{0,y,y,t} .$$

Soit $X : [0,t] \to \mathbb{R}$ une application continue ; calculons

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\int_0^t (F(X_s)+k)^2 ds}$$; ceci est égal à

$$e^{-\int_0^t F^2(X_s)ds} \times e^{\frac{1}{t}\{\int_0^t F(X_s)ds\}^2} \times \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t(k+\frac{1}{t}\int_0^t F(X_s)ds)^2}$$

or $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t(k+\frac{1}{t}\int_0^t F(X_s)ds)^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{t} \times e^{-\{\sqrt{t}(k+\frac{1}{t}\int_0^t F(X_s)ds)\}^2}$$

et l'on reconnaît dans cette dernière somme une somme de Riemann pour e^{-x^2} avec pas $\sqrt{t}$. On obtient alors

$$\frac{e^{-\int_0^t F^2(X_s)ds}}{\sqrt{t}} e^{\frac{1}{t}\{\int_0^t F(X_s)ds\}^2} \times \sqrt{\pi}(1-\epsilon(t))$$
$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\int_0^t (F(X_s)+k)^2 ds} \leq \frac{e^{-\int_0^t F^2(X_s)ds}}{\sqrt{t}} e^{\frac{1}{t}\{\int_0^t F(X_s)ds\}^2} \times \sqrt{\pi}(1+\epsilon(t)) .$$

En particulier, on a :

LEMME 1. - <u>Soit</u> $X : [0,t] \to \mathbb{R}$ <u>continue ; alors il existe une constante</u> A <u>ne dépendant ni de</u> F <u>ni de</u> X <u>telle que, si</u> $t \leq 1$, <u>on ait</u>

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\int_0^t (F(X_s)+k)^2 ds} \leq \frac{A}{\sqrt{t}} .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de remarquer qu'on peut, quitte à rajouter une constante entière à F , supposer que $0 \leq \int_0^t F(X_s)ds \leq t$ et utiliser les inégalités précédemment obtenues.

Ceci étant, lorsque t est "petit" la plupart des trajectoires du pont brownien restent "près" de y et dans cette région, F est "presque" une fonction affine, ce qui permet d'obtenir des résultats plus précis que le lemme précédent.

Plus précisément,

LEMME 2 [M]. - <u>Soit</u> $y \in \mathbb{R}$ <u>et</u> $\alpha > 0$. <u>Alors</u>

$$\int \chi(\omega \,|\, \exists s \in \,]0,t[\;;\; |\omega(s)-y| \geq \alpha) d\mu_{0,y,y,t} \leq \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{2\alpha^2}{t}\right) .$$

Démonstration. - On peut par exemple comparer le noyau de $e^{t\Delta}$ sur $\mathbb{R}$ et de e^{+tH_0} où H_0 est le laplacien sur $\mathbb{R}_+$, avec condition de Dirichlet en 0 (voir par exemple le lemme V.1 de [M]).

LEMME 3. - Considérons un intervalle $[y_0-\alpha, y_0+\alpha] = I$ sur lequel F est une fonction croissante et telle que $\operatorname*{Sup}_{y\in I} F'(y) / \operatorname*{Inf}_{y\in I} F'(y) = 1+\delta$; désignons par $\omega = \operatorname*{Sup}_{y\in I} F'(y)$. Alors il existe une suite $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels tel que pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on ait $V_k \leq (\omega y+k+\eta_k)^2$; de plus, la suite η_k peut être choisie bornée et vérifiant $0 \leq \eta_{k+1}-\eta_k \leq \delta$.

Démonstration. - On désigne par x_k la solution de $F(x)+k = 0$ sur I si elle existe ; sinon on pose

$$x_k = \operatorname{Inf} I \quad \text{si} \quad F(x)+k > 0 \quad \text{sur} \quad I$$

et $$x_k = \operatorname{Sup} I \quad \text{si} \quad F(x)+k < 0 \quad \text{sur} \quad I .$$

On considère alors la fonction affine de pente ω vérifiant $F(x_k) = \omega x_k + \eta_k$. Il est immédiat de voir que, sur I, on a

$$(F+k)^2 = V_k \leq (\omega y+k+\eta_k)^2 .$$

La suite x_k est une suite décroissante car F est une fonction croissante ; ceci entraîne, puisque $\omega = \operatorname*{Sup}_{y\in I} F'(y)$, que la suite η_k est une suite croissante. On a

$$\eta_{k+1}-\eta_k \leq (x_k-x_{k+1})\omega - 1 \leq \frac{1}{\lambda}\omega - 1 = \delta .$$

où λ désigne $\operatorname*{Inf}_{y\in I} F'(y)$.

On obtient de la même manière :

LEMME 3bis. - Considérons $[y_0-\alpha, y_0+\alpha] = I$ un intervalle sur lequel F est croissant et tel que $\operatorname*{Sup}_{y\in I} F'(y) / \operatorname*{Inf}_{y\in I} F'(y) = 1+\delta$; désignons par $\lambda = \operatorname*{Inf}_{y\in I} F'(y)$. Alors il existe une suite $\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels telle que pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on ait $V_k \geq (\alpha y+k+\zeta_k)^2$; de plus la suite ζ_k peut être choisie bornée et vérifiant $0 \leq \zeta_k-\zeta_{k+1} \leq \frac{\delta}{1+\delta}$.

On calcule alors les sommes

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t\tilde{H}_k}(y,y) \qquad \text{où} \quad \tilde{H}_k = \frac{1}{2}\ -\frac{d^2}{dy^2} + (\omega y + k + \eta_k)^2 \ .$$

En utilisant les formules connues pour l'oscillateur harmonique, on trouve

$$\left[\frac{\omega}{2\pi\,\mathrm{sh}(\omega t)}\right]^{\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\omega(\mathrm{ch}\,\omega t - 1)}{\mathrm{sh}\,\omega t}\left(\frac{k+\eta_k}{\omega}\right)^2\right].$$

On reconnaît alors à peu près une somme de Riemann pour la fonction e^{-x^2} si on multiplie par le pas "moyen" $p = \left(\frac{\mathrm{ch}\,\omega t - 1}{\omega\,\mathrm{sh}\,\omega t}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Si on remarque que

$$\frac{\omega}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\omega t - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\omega}{2\sqrt{\pi}\ \mathrm{sh}\,\frac{\omega t}{2}} \ ,$$

l'expression devient

$$\frac{\omega}{2\sqrt{\pi}\ \mathrm{sh}\frac{\omega t}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} p \exp[-\{p(k+\eta_k)\}^2 \ .$$

Autrement dit, la somme s'écrit

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p f(x_k) \quad \text{où} \quad x_k = p(k+\eta_k) \quad \text{et} \quad f : x \mapsto e^{-x^2} \ .$$

Or

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p f(x_k) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \le (1+\delta) \sum_{k\in\mathbb{Z}} p f(x_k) \ .$$

La somme qui est au milieu est évidemment minorée indépendamment de ω par une constante qui tend vers $\sqrt{\pi}$ lorsque $t \to 0$. On vérifie en effet que

$$p = \left(\frac{\mathrm{ch}\,\omega t - 1}{\omega\,\mathrm{sh}\,\omega t}\right)^{\frac{1}{2}} \le \ \frac{t}{2}^{\frac{1}{2}}$$

et on trouve alors

$$\frac{1}{1+\delta}(\sqrt{\pi} - \varepsilon(t))\,\frac{\omega}{2\sqrt{\pi}\ \mathrm{sh}\frac{\omega t}{2}} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-t\tilde{H}_k}\right](y,y) \ .$$

On peut faire exactement le même calcul pour $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-t\underset{\sim}{H}_k}\right](y,y)$

où $\underset{\sim}{H}_k = \frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{dy^2} + (\lambda y + k + \zeta_k)^2\right]$, et l'on trouve

$$\sum_k \left[e^{-t\underset{\sim}{H}_k}\right](y,y) \leq \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{sh}\frac{\lambda t}{2}} \times (\sqrt{\pi}+\varepsilon(t)) \times (1+\delta) \ .$$

On peut maintenant écrire

$$\sum_k \left[e^{-tH_k}\right](y,y) = \int_\Omega \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\int_0^t V_k(X_s)ds} \, d\mu_{0,y,y,t} \ .$$

Si on désigne par Ω_1 l'ensemble des trajectoires du pont brownien qui, durant l'intervalle $[0,t]$ restent dans $]y_0-\alpha \, , \, y_0+\alpha[\; = I$, on a

$$\sum_k \left[e^{-t\tilde{H}_k}\right](y,y) - \int_{\complement\Omega_1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\int_0^t \tilde{V}_k(X_s)ds} \, d\mu_{0,y,y,t}$$

$$\leq \int_{\Omega_1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\int_0^t V_k(X_s)ds} \, d\mu_{0,y,y,t} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-t\underset{\sim}{H}_k}\right](y,y) \ .$$

En utilisant alors les résultats des lemmes 1 et 2, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-t\tilde{H}_k}\right](y,y) - \frac{B}{t}\exp\left(-\frac{2\alpha^2}{t}\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-tH_k}\right](y,y)$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-t\underset{\sim}{H}_k}\right](y,y) + \frac{B}{t}\exp\left(-\frac{2\alpha^2}{t}\right) \ .$$

Soit en remplaçant les deux sommes de gauche et droite par leur valeur

$$\frac{1}{1+\delta}(\sqrt{\pi}-\varepsilon(t))\frac{\omega}{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{sh}\frac{\omega t}{2}} - \frac{B}{t}\exp\left(-\frac{2\alpha^2}{t}\right)$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-tH_k}\right](y,y) \leq (1+\delta)(\sqrt{\pi}+\varepsilon(t))\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{sh}\frac{\lambda t}{2}} + \frac{B}{t}\exp\left(-\frac{2\alpha^2}{t}\right) \ .$$

§ 2. COMPORTEMENT DE $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tr}\, e^{-tH_k}$ LORSQUE $t \to 0$ POUR CERTAINES FONCTIONS F ; APPLICATION.

On supposera tout d'abord que $F(y)$ est monotone sur les deux composantes du complémentaire d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

On peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-tH_k}\right](y,y)dy = \int_{[-M,M]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-tH_k}\right](y,y)dy + $$

$$+ \int_{y\notin[-M,M]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-tH_k}\right](y,y)dy \ .$$

En utilisant la formule de Feynmann-Kac, le lemme 1 et le fait que la mesure de $\mu_{0,y,y,t}$ est de masse totale $\frac{1}{\sqrt{t}}$, on est assuré que la contribution du premier terme est majorée par $2M \times \frac{A}{t}$; pour le deuxième terme, nous nous proposons d'utiliser l'encadrement obtenu à la fin du paragraphe précédent.

Pour chaque $y \notin [-M,M]$, on associe un intervalle centré en y de longueur $2\alpha(y)$ sur lequel F est une fonction monotone.

Pour que l'intégrale du terme $\frac{B}{t}\exp\left(-\frac{2\alpha^2(y)}{t}\right)$ ait une contribution majorable par un multiple de $\frac{1}{t}$, il suffit de choisir $\alpha(y) \geq \sqrt{t} \times (\mathrm{Log}|y|)^{\frac{1}{2}}$ puisque

$$\frac{B}{t}\int_M^{+\infty} \exp\left(-\frac{2\alpha^2(y)}{t}\right)dy \leq \frac{B}{t}\int_M^{+\infty} \exp(-2\,\mathrm{Log}\,y) \leq \frac{B}{t}\int_M^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \ .$$

Dans la suite, on fixera la longueur de l'intervalle I_y à $2\sqrt{t}(\mathrm{Log}|y|)^{\frac{1}{2}}$ et on désignera par $\delta(t,y)$ la valeur de δ associée à cet intervalle. Au cas où la fonction $\delta(t,y)$ converge vers 0 lorsque t tend vers 0 , il est clair que

$$\int_{y\notin[-M,M]} \frac{1}{1+\delta(t,y)} \frac{\omega(y)}{\mathrm{sh}\frac{\omega(y)t}{2}} dy \underset{t\to 0}{\sim} \int_{y\notin[-M,M]} \frac{\omega(y)}{\mathrm{sh}\frac{\omega(y)t}{2}} dy \qquad (A_1)$$

ainsi que

$$\int_{y\notin[-M,M]} (1+\delta)\frac{\lambda(y)}{\operatorname{sh}\frac{\lambda(y)t}{2}}\,dy \underset{t\to 0}{\sim} \int_{y\notin[-M,M]} \frac{\lambda(y)}{\operatorname{sh}\frac{\lambda(y)t}{2}}\,dy \qquad (A\,2)$$

Ceci est le cas si le champ magnétique $B(y) = F'(y)$ vérifie la propriété suivante

(S) $\dfrac{|I_y| \times \operatorname{Max}_{I_y} |B'|}{\operatorname{Min}_{I_y} |B|}$ est borné sur $\mathbb{R}\setminus[-M,M]$ pour une valeur strictement positive de t .

Exemples. Un polynôme, une somme de fonctions homogènes vérifient la propriété (S).

Remarque. Dans le cas où $B(y) = e^y$, on peut montrer que (A 1) et (A 2) sont satisfaites sans que (S) le soit.

Considérons maintenant un champ magnétique monotone sur les intervalles $]-\infty,-M]$ et $[M,+\infty[$ et vérifiant les conditions (A 1) et (A 2).

Un changement de variable montre facilement que :

$$\int_M^{+\infty} \frac{w(y)}{\operatorname{sh}\frac{w(y)t}{2}}\,dy \underset{t\to 0}{\sim} \int_M^{+\infty} \frac{B(y)}{\operatorname{sh}\frac{B(y)t}{2}}\,dy \ .$$

Remarquons alors que les intégrales précédentes ne sont pas majorées par un multiple de $\frac{1}{t}$ et que toute intégrale sur un intervalle borné de $\dfrac{B(y)}{\operatorname{sh}\frac{B(y)t}{2}}$ est majoré par un multiple de $\frac{1}{t}$.

On a montré :

PROPOSITION. - Soit B un champ magnétique qui est monotone sur les deux composantes du complémentaire d'un ensemble borné et qui vérifie les conditions (A 1) et (A 2). Alors on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tr} e^{-tH_k} \underset{t\to 0}{\sim} \int_{\mathbb{R}} \frac{|B(y)|}{2\operatorname{sh}\frac{|B(y)|t}{2}} dy \ .$$

En particulier, si B est un polynôme, la proposition précédente s'applique.

En fait, on peut montrer plus généralement que si B peut être encadré par deux champs magnétiques B_1 et B_2, tous deux monotones sur les deux composantes du complémentaire d'un intervalle borné, tels que $B_1 \underset{|y|\to\infty}{\sim} B_2$ vérifiant tous deux les conditions (A 1) et (A 2) et finalement

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|B_1(y)|}{\operatorname{sh}\frac{|B_1(y)|t}{2}} dy \underset{t\to 0}{\sim} \int_{\mathbb{R}} \frac{|B_2(y)|}{\operatorname{sh}\frac{|B_2(y)|t}{2}} dy$$

alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tr} e^{-tH_k} \underset{t\to 0}{\sim} \int_{\mathbb{R}} \frac{|B(y)|}{\operatorname{sh}\frac{|B(y)|t}{2}} dy \ .$$

En particulier, si B est un champ polynomial, ce qui compte pour le comportement asymptotique de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tr} e^{-tH_k}$ est le terme dominant du polynôme.

Si ce coefficient dominant est Cy^m, on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tr} e^{-tH_k} \underset{t\to 0}{\sim} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C|y|^m}{2\operatorname{sh}\left(\frac{C|y|^m t}{2}\right)} dy \underset{t\to 0}{\sim} \int_0^{+\infty} \frac{Cy^m}{\operatorname{sh}\frac{Cy^m t}{2}} dy$$

ou encore

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tr} e^{-tH_k} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1+1/m}} \frac{2^{1+1/m}}{C^{1/m}} \int_0^{+\infty} \frac{u^m}{\operatorname{sh} u^m} du$$

et donc

$$\operatorname{Tr} e^{-tH(a)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1+1/m}} \times \frac{1}{C^{1/m}} \int_0^{+\infty} \frac{u^m}{\operatorname{sh} u^m} du \ .$$

En appliquant le lemme de Karamata ([S]), on obtient :

$$N_E(H(a)) \underset{E\to\infty}{\sim} E^{1+1/m} \frac{1}{C^{1/m}\Gamma(2+1/m)} \int_0^{\infty} \frac{u^m}{\operatorname{sh} u^m} du$$

où $N_E(H(a))$ désigne le nombre de valeurs propres de $H(a)$ inférieures à E .

Remarque 1. - Ce calcul ne fait pas intervenir que m est entier.

Remarque 2. - On peut calculer $\int_0^\infty \frac{u^m}{\operatorname{sh} u^m} du$; un calcul facile montre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^m}{\operatorname{sh} u^m} du = \frac{1}{m} \Gamma(1+1/m) \frac{2^{1+1/m}-1}{2^{1/m}} \zeta(1+1/m)$$

(pour le voir on exprime sh en fonction de l'exponentielle et on fait apparaître au dénominateur $1-e^{2u^m}$; on développe $\frac{1}{1-e^{2u^m}}$ en série).

On trouve alors :

$$N_E(H(a)) \underset{E\to\infty}{\sim} \frac{1}{C^{1/m}(m+1)} \times (2-2^{-1/m}) \zeta(1+1/m) E^{1+1/m} .$$

Remarquons encore :

LEMME 4. - Soient deux fonctions positives continues f et g tendant vers l'infini à l'infini et telles que $|\{y ; f(y) \leq c\}| \underset{c\to\infty}{\sim} |\{y ; g(y) \leq c\}|$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{\operatorname{sh}\frac{f(y)t}{2}} dy \underset{t\to 0}{\sim} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(y)}{\operatorname{sh}\frac{g(y)t}{2}} dy .$$

Démonstration. - On désigne par $\Phi : u \to \frac{u}{\operatorname{sh} u}$; il suffit de montrer que si l'hypothèse est satisfaite, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(tf(y))dy \underset{t\to 0}{\sim} \int_{\mathbb{R}} \Phi(tg(y))dy$$

or

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(tf(y)dy = \int_0^1 |\{y ; f(y) \leq \frac{\Phi^{-1}(\lambda)}{t}\}| d\lambda$$ ou encore, pour $c \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^{\Phi(ct)} |(y ; f(y) \leq \frac{\Phi^{-1}(\lambda)}{t})| d\lambda + \int_{\Phi(ct)}^1 |(y ; f(y) \leq \frac{\Phi^{-1}(\lambda)}{t})| d\lambda .$$

Le deuxième terme tend vers 0 avec t , donc

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(tf(y))dy \underset{t\to 0}{\sim} \int_0^{\Phi(ct)} |(y\,;\, f(y) \le \frac{\Phi^{-1}(\lambda)}{t})|\,d\lambda\,.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir c assez grand de manière à ce que

$$\left| \frac{\int_0^{\Phi(ct)} |(y\,;\, f(y) \le \frac{\Phi^{-1}(\lambda)}{t})|\,d\lambda}{\int_0^{\Phi(ct)} |(y\,;\, g(y) \le \frac{\Phi^{-1}(\lambda)}{t})|\,d\lambda} - 1 \right| \le \epsilon$$

ce qui fournit le résultat désiré.

BIBLIOGRAPHIE.

[A,H,S] J. AVRON, I. HERBST, B. SIMON, Schrödinger operators with magnetic fields I. General interactions. Duke Mathematical Journal, vol. 45, n° 4, déc. 78, pp. 847-883.

[M] F. MICHAU, Thèse de troisième cycle, Grenoble 1982.

[S] B. SIMON, Functional integration and quantum physics. Academic press 1979.
