

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

E. COMBET

## Inégalités de Morse d'après E. Witten

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 2 (1983-1984), exp. n° 1, p. 1-32

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1983-1984\\_\\_2\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A1_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

1983-1984

## INEGALITES DE MORSE d'après E.WITTEN

par E. COMBET

### INTRODUCTION.

Ces exposés sont consacrés à l'étude d'une partie d'un article de E. Witten [6] . Il s'agit de donner une interprétation "physique" des inégalités de Morse. Une approche analogue des formules géométriques se trouve aussi dans un article récent de L. Alvarez-Gaumé [1].

Ce qui est nouveau dans ces articles c'est le type de formules considérées : inégalités de Morse, formule de Lefschetz, formule de Gauss-Bonnet, théorème de l'indice de Atiyah-Singer etc.

La méthode consiste à trouver un effet quantique qui représente la formule donnée, et permet de la "redémontrer".

Ceci donne les correspondances suivantes :

<u>Effet quantique</u>		<u>Formule géométrique</u>
Limite quasi-classique de l'effet tunnel en présence de supersymétries	} —————>	Inégalités de Morse [6]
Invariant supersymétrique de Witten		
- avec champ magnétique	—————>	Formule de Lefschetz [1] [7]
- aux grandes températures	—————>	Théorème de l'indice [1]

On utilise donc essentiellement dans cette méthode la théorie quantique des champs supersymétriques.

## 1.2

On voit apparaître ainsi deux aspects physiques fondamentaux des formules considérées :

(1) une théorie supersymétrique qui traduit le fait que le système se partage en bosons et fermions qui se distinguent à l'aide de l'opérateur de Witten  $(-1)^F$ . Il se trouve que la trace de cet opérateur est un invariant topologique du système qui ne dépend que des états de base (c'est-à-dire d'énergie nulle) [7] .

(2) un calcul de perturbation par rapport à un petit paramètre (la constante  $\hbar$ , une constante de couplage, l'inverse d'une "température" etc.) Ce calcul fait apparaître un fait physique caractéristique des milieux stochastiques : la diffusion s'agglutine avec une grande probabilité autour des diverses singularités du système : les "configurations constantes", les "états classiques d'énergie nulle", les "instantons" qui joignent ces états etc. [4].

Par exemple en théorie quantique supersymétrique on a l'égalité :

$$\text{Tr}(-1)^F = \text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H}$$

où  $H$  est l'hamiltonien et  $\beta$  l'inverse de la "température". Le membre de gauche est un invariant topologique : le membre de droite, calculé quand  $\beta \rightarrow 0$  fait apparaître les singularités géométriques de  $H$ . On conçoit que cela puisse conduire au théorème de l'indice. Le but est atteint moyennant l'usage de divers "théorèmes" de physique mathématique concernant :

- (a) les propriétés asymptotiques du spectre d'un opérateur perturbé,
- (b) l'analyse des instantons,
- (c) l'analyse des instantons en présence de supersymétries.

---

A propos de certains de ces "théorèmes" on peut se poser des problèmes de formalisation mathématique.

Dans le contexte physique considéré ici la démarche la plus naturelle pour établir ces résultats consiste à utiliser l'intégration fonctionnelle qui traduit "automatiquement" le processus de quantification considéré. On obtiendra ainsi, dans les cas les plus simples, les phénomènes de concentration décrits plus haut. Cependant sous son aspect général utilisé en quantification des champs de jauge l'intégration fonctionnelle est elle-même en cours (rapide) de formalisation et, comme nous l'avons annoncé, nous nous bornerons ici aux inégalités de Morse d'après Witten.

Les inégalités de Morse sont liées à l'effet tunnel en mécanique quantique.

Rappelons rapidement en quoi consiste cet effet.

On considère une particule de masse  $m$  soumise à une force  $F$  qui dérive d'une fonction potentielle  $V$  indépendante du temps :

$$F = - \text{grad } V.$$

L'hamiltonien de ce système est l'opérateur

$$H = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$$

où  $\Delta$  est le laplacien usuel

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_2)^2} + \dots$$

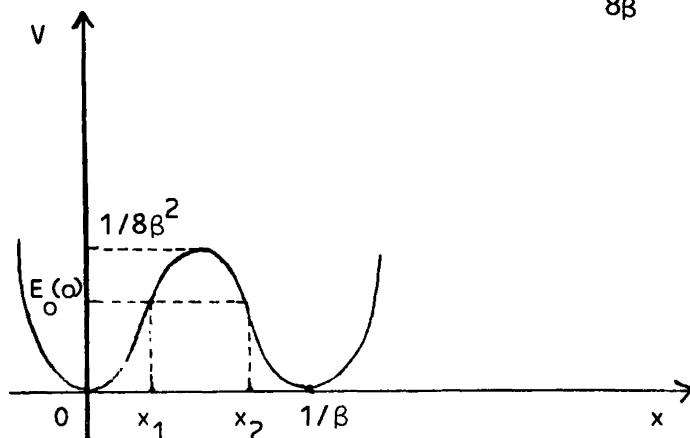
Les états quantiques fondamentaux du système sont les solutions de l'équation de Schrödinger réduite :

$$H\psi = E\psi, \quad E \in \mathbb{R}$$

Si l'on suppose que  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $V \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^n$  et que  $V(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$  alors  $H$  admet un spectre discret pur et la première valeur propre  $E_0$  est non-dégénérée positive ([5], Th. XIII...)

Le cas classique est donné pour  $n=1$ , par l'oscillateur harmonique où l'on prend  $V(x) = x^2$ .

On obtient l'effet tunnel en prenant par exemple  $V(x) = x^2(1 - \beta x)^2$  qui se réduit à l'oscillateur harmonique pour  $\beta = 0$ . Il y a dans ce cas deux puits de potentiel  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{\beta}$  qui sont séparés par la barrière de potentiel  $\frac{1}{8\beta^2}$ .



#### I.4

On note  $E_0(\beta)$  la première valeur propre de  $H(\beta) = -\frac{h^2}{2m} \Delta + x^2(1-\beta x)^2$  ; elle est simple et la fonction propre associée peut être choisie strictement positive pour tout  $x$  (la particule a une probabilité non nulle de traverser la barrière  $1/8\beta^2$ ). Les calculs sont effectués asymptotiquement quand  $\beta \rightarrow 0^+$ . On obtient alors les caractéristiques de l'effet tunnel :

(i) il y a dégénérescence asymptotique de l'énergie de base (c'est-à-dire que le calcul asymptotique donne une valeur propre minimale double (voir par exemple [5] , XII. 3, exemple 6) ; ce point correspond à un dédoublement asymptotique de l'oscillateur harmonique aux points 0 et  $\frac{1}{\beta}$  .

(ii) les deux premières valeurs propres  $E_0(\beta)$  ,  $E_1(\beta)$  tendent vers  $E_0(0)$  et  $E_0(\beta) - E_1(\beta)$  est de l'ordre

$$\exp \left( - c \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2(1-\beta x)^2 - E_0(0)} dx \right) \quad ([2])$$

(ceci correspond à un calcul "d'instantons" c'est-à-dire un calcul qui fait intervenir la droite joignant les points où  $x^2(1-\beta x)^2$  traverse  $E_0(0)$ ).

Un calcul aussi classique d'effet tunnel concerne les premières valeurs propres de l'opérateur

$$H = -\frac{h^2}{2m} \Delta + (1-x^2)^2$$

considéré asymptotiquement quand  $h \rightarrow 0$  (c'est ce qu'on appelle le calcul asymptotique quasi-classique). On retrouve dans ce cas les deux caractéristiques (i) (ii) rappelées ci-dessus, avec un effet instanton du type

$$\exp \left( - c \int_{-1}^{+1} \sqrt{(1-x^2)^2} dx \right)$$

où  $c$  est une constante numérique ([3] §5). On trouvera dans l'article [4] une analyse physique assez générale de ce type d'effet.

---

Ce sont ces divers problèmes que nous allons considérer dans ces exposés à travers les inégalités de Morse en nous plaçant au point de vue de la formalisation mathématique. Le plan suivi est celui de E. Witten [6] :

I. Calculs riemanniens et perturbation du laplacien par une fonction de Morse  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Analyse asymptotique du laplacien perturbé, "augmentation asymptotique" des états de base et inégalités faibles de Morse :  $B_p(M) < M_p(h)$ .

II. Introduction au calcul des instantons dans  $\mathbb{R}^n$ . Le petit modèle cohomologique associé aux inégalités fortes de Morse. Calcul des matrices de ce petit modèle (instantons).

---

On s'est efforcé de rendre aussi rigoureuses que possible ces nouvelles preuves des inégalités de Morse. Nous verrons que ceci est possible pour la partie I de ces exposés. Malheureusement des lacunes subsistent dans la partie II et nous les signalerons soigneusement car nous n'avons pas toujours réussi à les combler.

---

La bibliographie est signalée à la fin de cette introduction et de chaque partie.

---

BIBLIOGRAPHIE.

- [ 1 ] L. ALVAREZ-GAUME, *Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index theorem*, Commun. Math. Phys. 90, 161-173 (1983).
  - [ 2 ] E.M. HARREL, *On the rate of Asymptotic Eigenvalue Degeneracy*, Commun. Math. Phys. 60, 73-95 (1978).
  - [ 3 ] G. JONA-LASINIO, F. MARTINELLI and E. SCOPPOLA, *New approach to the semi-classical limit of quantum mechanics I*. Commun. Math. Phys. 80, 223-254 (1981).
  - [ 4 ] R. JACKIW, *Quantum meaning of classical field theory*, Rev. of Mod. Physics 49, 681-705 (1977).
  - [ 5 ] M. REED / B. SIMON, *Analysis of operators IV*, Academic Press 1978.
  - [ 6 ] E. WITTEN, *Supersymmetry and Morse theory*. J. Differential Geometry 17 (1982) 661-692.
  - [ 7 ] E. WITTEN, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nuclear Physics, B 202 253-316 (1982).
-

## I

INEGALITES FAIBLES DE MORSE

On commence par rappeler les formules de calcul sur une variété riemannienne compacte  $(M, g)$  de dimension  $n$  (section A) ; ensuite on applique ces formules aux perturbations du laplacien provoquées par la donnée d'une fonction  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  (section B) et, suivant E. Witten, on en déduit les inégalités faibles de Morse (section C).

A. RAPPELS DE CALCUL RIEMANNIEN.

Pour simplifier on supposera que  $M$  est orientée.

On note  $\Lambda^p T^*(M)$  le fibré vectoriel des  $p$ -formes alternées sur  $M$ , avec  $0 \leq p \leq n$ . On considère aussi les  $p$ -formes complexes  $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ . On note  $\omega$  la  $n$ -forme volume riemannien sur  $M$  :

$$\omega_x = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base quelconque orthonormée directe de  $T_x^*(M)$ .

Le produit scalaire défini par  $g$  sur  $T(M)$  et  $T^*(M)$  s'étend aux fibrés  $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$  en posant :

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_p) = \sum_{\pi} \varepsilon(\pi) (v_1, w_{\pi(1)}) \dots (v_p, w_{\pi(p)})$$

où la somme porte sur toutes les permutations  $\pi$  de la suite  $(1, \dots, p)$ .

On en déduit un isomorphisme

$$* : \Lambda^p T_x^*(M) \otimes \mathbb{C} \simeq \Lambda^{n-p} T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$$

tel que l'on ait, pour  $\lambda$  et  $\mu \in \Lambda^p T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$  :

$$\lambda \wedge (*\mu) = (\lambda, \mu) \omega_x$$

Sur le fibré  $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$  on a :

$$** = (-1)^{p(n-p)} .$$

On note  $\langle , \rangle$  le produit hermitien naturel sur les sections  $C^\infty(\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C})$  :

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M (\phi, \psi)_x \omega_x .$$



## I.8

On note  $d : C^\infty(\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1} T^*(M) \otimes \mathbb{C})$  la dérivation extérieure et  $d^*$  l'opération adjointe pour le produit hermitien précédent.

Pour  $\phi$  de degré  $p-1$ ,  $\psi$  de degré  $p$  on obtient, d'après la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M d(\phi \wedge (*\psi)) \\ &= \int_M d\phi \wedge (*\psi) + (-1)^{p-1} \int_M \phi \wedge d(*\psi) \\ &= \langle d\phi, \psi \rangle + (-1)^{(p-1)} (-1)^{(n-p+1)} (p-1) \int_M \phi \wedge ** d(*\psi) \\ &= \langle d\phi, \psi \rangle - \langle \phi, (-1)^{(p-1)} (n-p+1) * d * (-1)^p \psi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$d_p^* = (-1)^{(p-1)} (n-p+1) * d * (-1)^p.$$

Etant donnée  $v \in T_x^*(M)$  on définit le produit intérieur :

$$i_v : \Lambda^p T_x^*(M) \rightarrow \Lambda^{p-1} T_x^*(M)$$

en posant :

$$i_v(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} (v, e_j) e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_j \wedge \dots \wedge e_p.$$

Pour  $\lambda$  de degré  $p-1$  et  $\mu$  de degré  $p$ , on obtient (en utilisant une base orthonormée) :

$$(v \wedge \lambda, \mu) = (\lambda, i_v(\mu))$$

d'où l'on déduit, pour des sections  $\phi$  et  $\psi$  :

$$(1) \quad \langle v \wedge \phi, \psi \rangle = \langle \phi, i_v(\psi) \rangle ;$$

enfin, pour  $f \in C^\infty(M)$  réelle on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi, d^*(f\psi) \rangle &= \langle d\phi, f\psi \rangle \\ &= \langle fd\phi, \psi \rangle \\ &= \langle d(f\phi), \psi \rangle - \langle df \wedge \phi, \psi \rangle \\ &= \langle \phi, fd^*\psi \rangle - \langle \phi, i_{df}\psi \rangle \end{aligned}$$

et ainsi :

$$(2) \quad d^*(f\psi) = fd^*\psi - i_{df}\psi.$$

Nous utiliserons aussi dans la section suivante des formules à indices bien connues en géométrie riemannienne [10]. Etant donné le tenseur covariant  $\chi$  de rang  $p$ , sa dérivée covariante  $\nabla\chi$  est le tenseur covariant de rang  $p+1$  de composantes :

$$(\nabla_i \chi)_{i_1 \dots i_p} = \partial_i \chi_{i_1 \dots i_p} - \sum_{v=1}^p \Gamma_{i_v i}^{\alpha} \chi_{i_1 \dots i_{v-1} \alpha i_{v+1} \dots i_p}$$

où les  $\Gamma_{ji}^{\alpha}$  sont les symboles de Christoffel dans le système de coordonnées utilisées (ou bien dans le champ de co-repères considérés) :

$$\Gamma_{ji}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_i g_{\beta j} + \partial_j g_{\beta i} - \partial_{\beta} g_{ji}),$$

les sommations étant effectuées sur les indices répétés.

Pour une  $p$ -forme alternée  $\chi$  l'usage de la dérivation covariante  $\nabla$  permet d'exprimer  $d\chi$  et  $d^*\chi$  et l'on a en particulier :

$$(3) \quad (d^*\chi)_{k_1 \dots k_{p-1}} = - (\nabla^i \chi)_{ik_1 \dots k_{p-1}}.$$

## B. PERTURBATION DU LAPLACIEN.

$(M, g)$  est une variété riemannienne compacte.

On considère sur  $M$  la fonction  $h \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ .

On définit

$$d_t = e^{-ht} d e^{ht} \quad , \quad d_t^* = e^{ht} d^* e^{-ht}$$

On a immédiatement :

$$d_t^2 = (d_t^*)^2 = 0$$

$$\langle d_t \phi, \psi \rangle = \langle e^{-ht} d e^{ht} \phi, \psi \rangle = \langle \phi, e^{ht} d^* e^{-ht} \psi \rangle$$

donc  $d_t^*$  est l'adjoint de  $d_t$ .

On a aussi la formule :

$$\begin{aligned} (4) \quad d_t \phi &= e^{-ht} d(e^{ht} \phi) \\ &= e^{-ht} (d(e^{ht}) \wedge \phi + e^{ht} d\phi) \\ &= t dh \wedge \phi + d\phi \end{aligned}$$

## I.10

On considère enfin le laplacien perturbé :

$$H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t.$$

En notant  $d_t^p$  la restriction de  $d_t$  à  $C^\infty(\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C})$  on peut définir le nombre de Betti :

$$B_p(t) = \dim (\text{Ker } d_t^p / \text{Im } d_t^{p-1}) ;$$

mais l'application :  $\psi \rightarrow e^{-tH} \psi$  définit un isomorphisme :

$$\text{Ker } d_t^p / \text{Im } d_t^{p-1} \simeq \text{ker } d_t^p / \text{Im } d_t^{p-1}$$

et l'on a :

$$\dim \text{Ker } H_t^p = B_p(t) = B_p = \dim \text{Ker } H^p$$

où  $H^p$  est le laplacien sur les  $p$ -formes.

Nous allons maintenant effectuer le calcul effectif de  $H_t$  afin d'obtenir la formule de E. Witten.

On déduit de (1) et de (4) :

$$d_t^* \psi = t i_{dh} \psi + d^* \psi.$$

Pour une  $q$ -forme  $\chi$  on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} d_t^* d_t \chi &= t i_{dh} (t dh \wedge \chi + d\chi) + d^* (t dh \wedge \chi + d\chi) \\ &= d^* d\chi + t^2 i_{dh} (dh \wedge \chi) + t (i_{dh} d\chi + d^* (dh \wedge \chi)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_t d_t^* \chi &= t dh \wedge (t i_{dh} \chi + d^* \chi) + d (t i_{dh} \chi + d^* \chi) \\ &= dd^* \chi + t^2 dh \wedge (i_{dh} \chi) + t (dh \wedge d^* \chi + d(i_{dh} \chi)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_t \chi &= H\chi + t^2 [i_{dh} (dh \wedge \chi) + dh \wedge (i_{dh} \chi)] \\ &\quad + t [i_{dh} d\chi + d(i_{dh} \chi) + d^* (dh \wedge \chi) + dh \wedge d^* \chi]. \end{aligned}$$

On a, par définition des produits intérieur et extérieur :

$$i_{dh} (dh \wedge \chi) = i_{dh} (dh) \chi = dh \wedge (i_{dh} \chi),$$

donc :

$$i_{dh} (dh \wedge \chi) + dh \wedge (i_{dh} \chi) = (dh)^2 \chi$$

où l'on pose

$$(dh)_x^2 = (dh_x, dh_x).$$

Il reste maintenant à calculer

$$P_{dh}(\chi) = i_{dh}(d\chi) + d(i_{dh}\chi) + d^*(dh \wedge \chi) + dh \wedge d^*\chi.$$

Pour  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , compte tenu de (2).

$$\begin{aligned} P_{dh}(f\chi) &= i_{dh}(df \wedge \chi + f d\chi) + df \wedge i_{dh}\chi + f d(i_{dh}\chi) \\ &\quad + f d^*(dh \wedge \chi) - i_{df}(dh \wedge \chi) + f dh \wedge d^*\chi - dh \wedge i_{df}\chi \\ &= (dh, df)\chi - df \wedge i_{dh}\chi + f i_{dh}d\chi + df \wedge i_{dh}\chi + f d(i_{dh}\chi) \\ &\quad + f d^*(dh \wedge \chi) - (df, dh)\chi + dh \wedge i_{df}\chi = f dh \wedge d^*\chi - dh \wedge i_{df}\chi. \\ &= f [i_{dh}(d\chi) + d(i_{dh}\chi) + d^*(dh \wedge \chi) + dh \wedge d^*\chi] \\ &= f P_{dh}(\chi). \end{aligned}$$

Ceci montre que  $P_{dh}$  est un opérateur différentiel d'ordre zéro sur les fibrés de formes. Il suffit d'évaluer  $P_{dh}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)$  dans un système de coordonnées quelconques.

On prend, au voisinage d'un point fixé  $x_0$  de  $M$  un système de coordonnées normales géodésiques. On a dans ces coordonnées :

$$\begin{aligned} g_{ij}(x_0) &= \delta_{ij} \\ \Gamma_{kl}^i(x_0) &= 0 \\ d(g^{ij})(x_0) &= 0 \\ d^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^q)(x_0) &= 0 \\ \nabla_i \nabla_j h(x_0) &= \partial_i \partial_j h(x_0) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Il vient ainsi, au point  $x_0$  :

$$\begin{aligned} P_{dh}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) &= d(i_{dh}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)) + d^*(dh \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) \\ &= \sum_k \left[ d\left(\frac{\partial h}{\partial x^k} i_{dx^k}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)\right) + d^*\left(\frac{\partial h}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p\right) \right] \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 h}{\partial x^k \partial x^\ell} dx^\ell \wedge i_{dh^k}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) + \sum_k \frac{\partial h}{\partial x^k} d(i_{dx^k}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)) \\ &\quad + \sum_k \frac{\partial h}{\partial x^k} d^*(dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) - i_{\sum_k \frac{\partial^2 h}{\partial x^\ell \partial x^k} dx^\ell} (dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p). \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, les 2-ème et 3-ème termes sont nuls au point  $x_0$  et l'on obtient :

$$P_{dh}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 h}{\partial x^l \partial x^k} (dx^l \wedge i_{dx^k} - i_{dx^k} dx^l \wedge)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p).$$

On trouve de cette façon la formule donnée par E. Witten [12] dans un champ de co-repères orthonormés  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ .

On pose :

$$a^k_\psi = i_{\theta^k} \psi$$

$$a^{k*}_\psi = \theta^k \wedge \psi ;$$

alors il vient :

$$P_{dh}(\chi) = \sum_{i,j} \nabla_i \nabla_j h [a^{i*}, a^j](\chi)$$

En conclusion, nous obtenons :

$$H_t \chi = H \chi + t^2 (dh)^2 \chi + t \sum_{i,j} \nabla_i \nabla_j h [a^{i*}, a^j](\chi).$$

### C. INEGALITES FAIBLES DE MORSE.

#### (a) Le spectre du laplacien perturbé :

Ayant considéré une fonction  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , nous avons introduit le laplacien perturbé

$$H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t$$

où :

$$d_t = e^{-th} d e^{th} ;$$

nous avons vu que

$$\dim \text{Ker } H_t^p = \dim \text{Ker } H^p$$

c'est-à-dire :

$$B_p(t) = B_p \text{ (le } p\text{-ème nombre de Betti de } M)$$

(nous avons posé ici :

$$H \equiv H_0 = dd^* + d^*d).$$

Nous avons aussi montré dans la section précédente qu'en un point  $x$  de  $M$  on a :

$$(6) \quad H_t = dd^* + d^*d + t^2(dh)^2 + \sum_{i,j} t \nabla_i \nabla_j h [a^{i*} \cdot a^j]$$

où  $a^k_\psi = i_{\theta^k} \psi$ ,  $a^{k*} \psi = \theta^k \wedge \psi$ ,  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$  étant un co-repère orthonormé en  $x$ .

On note  $L^2(\Lambda T^*M \otimes \mathbb{C})$  l'espace de Hilbert obtenu en complétant  $C^\infty(T^*M \otimes \mathbb{C})$  pour le produit pré-hilbertien  $\langle, \rangle$  de la section A ci-dessus.

La restriction  $H_t^p$  de  $H_t$  à  $\Lambda^p T^*M \otimes \mathbb{C}$  est alors un opérateur différentiel elliptique admettant un spectre discret :

$$0 \leq \lambda_p^1(t) \leq \lambda_p^2(t) \leq \lambda_p^3(t) \leq \dots$$

D'après l'égalité (5) il s'agit de calculer le nombre de valeurs propres  $\lambda_p^k(t)$  égales à 0 : ce nombre est égal à  $B_p$  ; il est indépendant de  $t$ .

Nous allons effectuer ce calcul sous l'hypothèse que  $h$  est une fonction de Morse sur  $M$ .

#### HYPOTHESE :

Dans toute la suite on suppose que  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  est une fonction de Morse non dégénérée sur  $M$  c'est-à-dire que  $dh = 0$  en un nombre fini de points et en chacun de ces points critiques, le hessien  $(\nabla_i \nabla_j h)$  est non-dégénéré. On note  $M_p(h)$ , ou  $M_p$ , le nombre de points critiques de  $h$  dont l'indice de Morse est égal à  $p$  (cet indice est le nombre de valeurs propres négatives du hessien  $\nabla^2 h$ , pour  $p = 0, 1, \dots, n$ ).

Le calcul de  $B_p$  est effectué dans la suite à l'aide de deux résultats inspirés du rappel (i) concernant l'effet tunnel donné plus haut dans l'introduction.

Ces résultats peuvent se résumer de la façon suivante :

1°) Soit  $\lambda_p^k(t)$  la  $k$ -ième valeur propre de  $H_t^p$ . Alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_p^k(t)}{t}$  existe.

2°) Cette limite  $A_p^k$  est l'une des valeurs propres des approximations euclidiennes de  $H_t^p$  au voisinage des points critiques de  $h$ .

Nous allons préciser ces énoncés en donnant des références précises.

(b) : Analyse asymptotique du spectre :

On trouve les résultats (1°) et (2°) dans les articles [9] , [11].

On peut aussi les obtenir par la méthode d'encadrement utilisée en [8] pour un problème analogue de localisation de l'indice d'un opérateur elliptique.

Citons ici le th. 1.1 de [11] (nous le simplifions légèrement) :

<< On considère sur  $\mathbb{R}^n$  l'opérateur  $H(t) = -\Delta + t^2 f + tg$  où  $\Delta$  est le laplacien scalaire,  $f$  et  $g$  sont  $C^\infty$ ,  $g$  est bornée inférieurement,  $f \geq 0$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ ,  $f$  a un nombre fini de zéros,  $\{x^{(a)}\}_{1 \leq a \leq k}$  en chacun desquels la matrice

$$A_{ij}^{(a)} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(a)})$$

est strictement définie-positive. On pose :

$$K^a = -\Delta + tg(x^{(a)}) + t^2 \sum_{i,j} A_{ij}^a x_i x_j$$

Soient  $te_1 \leq te_2 \leq te_3 \leq \dots$  l'ensemble ré-ordonné des valeurs propres des opérateurs  $K^a$  pour  $a = 1, \dots, k$  (on voit que  $t$  est en facteur dans toutes ces valeurs propres en faisant le changement de variables  $x \rightarrow xt^{-1/2}$ ).

Alors pour chaque entier  $k > 0$ , si l'on note  $E^k(t)$  la  $k$ -ième valeur propre de  $H(t)$  on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E^k(t)/t = e_k.$$

On a donc ramené le calcul de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E^k(t)}{t}$  à une approximation euclidienne de  $H(t)$  autour d'un point critique de  $f$ .

Ce théorème est démontré en [11] par des méthodes relativement élémentaires.

Il est étendu dans cet article [11] aux laplaciens sur les formes d'une variété riemannienne compacte. C'est sous cette forme qu'il sera utilisé ici.

(c) Cas du laplacien sur les formes :

On reprend ici la fonction de Morse  $h$  sur  $M$ .

Soit  $0$  un point critique de  $h$ . Alors on peut choisir un système de coordonnées normales géodésiques en  $0$  où l'on a :

$$h(x) = h(0) + \frac{1}{2} \sum \lambda_i (x^i)^2 + O(\|x\|^3).$$

On a une approximation euclidienne de  $H_t$  en 0 à l'aide de l'opérateur  $\bar{H}_t$  défini sur les formes de  $\mathbb{R}^n$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\bar{H}_t &= \sum_i H_i + t \sum_j \lambda_j K_j \\ H_i &= -\frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} + t^2 \lambda_i^2 (x^i)^2 \\ K_j &= [a^{j*}, a^j] = \theta^j \wedge i_{\theta^j} - i_{\theta^j} \theta^j \wedge .\end{aligned}$$

Chaque  $H_i$  peut être considéré comme l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique sur  $\mathbb{R}$ . Ses valeurs propres sont égales à

$$t |\lambda_i| (1+2N_i)$$

$N_i = 0, 1, 2, \dots$ . Soit  $\phi_{N_i}$  la fonction propre correspondante, alors  $t |\lambda_i| (1+2N_i)$  est aussi valeur propre de  $H_i$  sur  $L^2(\Lambda^{pT*} \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C})$  avec la fonction propre  $\phi_{N_i}(x_i) \chi$  où  $\chi \in \Lambda^{pT*} \mathbb{R}^n$  est une p-forme quelconque.

Puisque  $K_j$  est un opérateur d'ordre zéro sur les champs de p-formes, il suffit de le considérer sur l'espace vectoriel  $\Lambda^{pT*} \mathbb{R}^n$ . Cet espace admet la base naturelle  $(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$ .

On calcule  $K_j(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})$  suivant deux cas :

1er cas :  $j$  figure dans la suite  $i_1, \dots, i_p$  :  $\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} = \theta^j \wedge \phi$ , on obtient dans ces conditions :

$$K_j(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) = \theta^j \wedge i_{\theta^j}(\theta^j \wedge \phi) = \theta^j \wedge \phi = \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}.$$

2ème cas :  $j$  ne figure pas dans cette suite :

$$\begin{aligned}K_j(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) &= -i_{\theta^j}(\theta^j \wedge \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) \\ &= -\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}.\end{aligned}$$

On voit ainsi que les opérateurs  $K_j$  se diagonalisent simultanément sur les vecteurs de base avec les valeurs propres  $\pm 1$ .



Ainsi on a, au point critique 0 de h sur M :

$$\bar{H}_t = \sum_i H_i + t \sum_j \lambda_j K_j$$

où les opérateurs  $H_i, K_j$  commutent deux à deux. Leurs formes propres peuvent s'écrire

$$\phi(x) \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$$

où  $\phi(x) = \phi(x^i)$  pour  $H_i$  et  $\phi(x) = 1$  pour  $K_j$  et où  $(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$  est une base de  $\Lambda^{pT^*} \mathbb{R}^n$ .

On déduit de ceci que les formes propres de  $\bar{H}_t$  sont égales à :

$$\phi_{N_1}(x^1) \dots \phi_{N_n}(x^n) \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$$

et que les valeurs propres de  $\bar{H}_t$  sont égales à

$$t \sum_{i=1}^n (|\lambda_i| (1+2N_i) + \lambda_i n_i)$$

avec  $N_i = 0, 1, 2, \dots$  et avec  $n_i = \pm 1$ , le nombre de  $n_i$  égaux à +1 étant, lui, égal à p (on considère d'abord tout cela la restriction de  $\bar{H}_t$  à  $L^2(\Lambda^{pT^*} \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C})$ ).

#### (d) Les inégalités faibles de Morse :

D'après le "principe de localisation" rappelé en (b), on obtient pour l'une quelconque des valeurs propres  $\lambda_p^k(t)$  de  $H_t^p$  le fait que la limite  $A_p^k$  de  $\frac{\lambda_p^k(t)}{t}$  existe quand  $t \rightarrow +\infty$  et est égale à l'un des nombres précédents :

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n (|\lambda_i| (1+2N_i)) + \lambda_i n_i$$

où  $N_i \in \mathbb{N}$  et  $n_i = \pm 1$  (le nombre de  $n_i$  égaux à +1 étant égal à p).

D'autre part si  $\lambda_p^k(t) = 0$  on a évidemment  $A_p^k = 0$  donc d'après le rappel (a), le nombre de Betti  $B_p$  de M est inférieur ou égal au nombre d'expressions (7) qui sont nulles. Mais l'expression (7) est nulle si et seulement si :

$$N_i = 0,$$

Chacun des  $n_i$  qui égale 1 correspond à un  $\lambda_i < 0$  ; Comme il a  $p$  de ces  $n_i$  dans l'expression (7), ceci donne un point critique d'indice de Morse égal à  $p$ .  
On a donc

$$B_p(M) < M_p(h)$$

Conclusion : cette inégalité faible de Morse est une conséquence du fait qu'il y a augmentation asymptotique des états d'énergie nulle du laplacien sur les  $p$ -formes quand ce laplacien est perturbé par un potentiel déduit d'une fonction de Morse.

On peut dire aussi que le nombre de Betti  $B_p$  de  $M$  est une borne inférieure pour le nombre "d'états classiques" d'énergie nulle  $((dh)^2 = 0)$ , d'indice de  $M$  sur  $p$ , dans le potentiel  $t^2(dh)^2$ . Une caractéristique globale de  $M$  (le nombre de Betti) exerce ainsi une contrainte sur des propriétés locales de  $h$ .

\*\*\*\*\*

BIBLIOGRAPHIE.

- [ 8 ] E. COMBET, *Perturbations singulières et formules de localisation.*  
CRAS (série I) 297 (1983) 59-61.
- [ 9 ] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, *Puits multiples pour l'équation de Schrödinger,*  
Saint-Jean- de Monts juin 1983.
- [10] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions.* Dunod 1955.
- [11] B. SIMON, *Semi-classical of low lying eigenvalues,* Annales IHP. (A)  
vol. XXXVIII, 1983 , 295-307.
- [12] E. WITTEN, *voir l'introduction, réf. [6] .*

\*\*\*\*\*

## INEGALITES FORTES DE MORSE

Nous abordons dans cette seconde partie le calcul des inégalités fortes de Morse (section A) et le calcul des matrices du "petit" complexe cohomologique associé à ces inégalités (section D).

Les résultats de la section A peuvent encore être formalisés rigoureusement en tenant compte de ce qui est connu dans le cas scalaire et qui devrait s'étendre sans difficulté au cas des formes. Par contre nous nous sommes contentés dans la section D d'énoncer les résultats de Witten. Ceux-ci s'appuient sur un "calcul d'instantons en présence de supersymétries" que nous n'avons pu formaliser qu'en partie dans les sections B et C.

### A LES INEGALITES FORTES DE MORSE.

Soit  $(M, g)$  une variété compacte orientée de dimension  $n$ , munie d'une métrique riemannienne  $g$  et  $h$  une fonction de Morse :  $M \rightarrow \mathbb{R}$ .

On a vu qu'à chaque point critique  $A_k$  d'indice  $p$  de  $h$  sur  $M$  correspond une valeur propre  $\lambda_p^k(t)$  de  $H_t^p$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_p^k(t) / t = 0.$$

On a ici  $k = 1, 2, \dots, M_p$ .

On note  $X_p$  l'espace vectoriel engendré par les  $p$ -formes propres correspondantes.

Cet espace est de dimension égale à  $M_p$  (le nombre de points critiques d'indice de Morse égal à  $p$ ). Ceci est connu dans le cas scalaires [16] mais reste à prouver pour les  $p$ -formes. Nous l'admettons ici (voir l'exposé [23]).

Pour  $\psi \in X_p$  :

$$H_t^{p+1} d_t^p \psi = d_t^p H_t^p \psi = \lambda_p^k(t) d_t^p \psi$$

donc  $d_t \psi \in X_{p+1}$ .

Puisque  $\text{Ker } H_t^p$  est contenu dans  $X_p$ , on voit que l'on obtient ainsi un complexe

$$(1) \quad d_t^p : X_p \rightarrow X_{p+1}$$

tel que  $d_t^{p+1} \circ d_t^p = 0$  et  $B_p = \dim (\text{Ker } d_t^p / \text{Im } d_t^{p-1})$ .

On dit que (1) est le petit complexe cohomologique associé à  $h$  sur  $M$ .

On déduit facilement de ceci les inégalités fortes de Morse :

$$M_0 \geq B_0$$

$$M_1 - M_0 \geq B_1 - B_0$$

.....

$$M_k - M_{k-1} + \dots + (-1)^k M_0 \geq B_k - B_{k-1} + \dots + (-1)^k B_0.$$

Pour montrer cela on utilise la suite :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} M_0 & & M_1 & & M_2 & & M_3 \dots\dots \\ X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 \dots\dots \\ \text{Ker } d_t^0 & & \text{Ker } d_t^1 / \text{Im } d_t^0 & & \text{Ker } d_t^2 / \text{Im } d_t^1 & & \text{Ker } d_t^3 / \text{Im } d_t^2 \dots \\ B_0 & & B_1 & & B_2 & & B_3 \dots\dots \end{array} \right.$$

On a évidemment  $M_0 \geq B_0 = \dim \text{Ker } d_t^0$

$$M_1 \geq \dim \text{Ker } d_t^1$$

$$M_1 - M_0 \geq \underbrace{\dim \text{Ker } d_t^1}_{B_1} - \underbrace{(\dim \text{Im } d_t^0 + \dim \text{Ker } d_t^0)}_{B_0}$$

et ainsi de suite.

Il est connu que l'existence des inégalités fortes de Morse équivaut à l'existence d'un petit complexe cohomologique (1). La méthode de Witten présente, entre autres, l'intérêt de donner une construction explicite de ce petit complexe.

En résumé, à chaque point critique  $A_k^{(p)}$  d'indice  $p$  de  $h$  sur  $M$  correspond une "basse" valeur propre  $\lambda_p^k(t)$  de  $H_t^p$  et une  $p$ -forme propre normalisée  $\psi_{A_k^{(p)}}(t)$  :

$$H_t^p \psi_{A_k^{(p)}}(t) = \lambda_p^k(t) \psi_{A_k^{(p)}}(t).$$

Ces  $p$ -formes propres constituent une base de  $X_p$  (voir [16] pour le cas scalaire ; nous admettons que ceci reste vrai pour les  $p$ -formes ; voir [23] pour le cas général) et nous devons calculer les matrices de  $H_t^p$  et de  $d_t^p$  sur ces bases.

Ces calculs sont effectués dans l'article de E. Witten [21] à l'aide d'arguments de supersymétries dont la formalisation mathématique ne semble pas avoir été publiée à ce jour.

Ces calculs reposent sur l'analyse des instantons dont les points fondamentaux peuvent se résumer de la façon suivante :

(i) Les parties principales de ces calculs se concentrent autour des points critiques de  $h$  et des courbes qui joignent ces points en minimisant l'action euclidienne du système. Ces courbes, quand elles existent, sont précisément appelées des instantons.

(ii) La recherche des instantons est liée à un calcul de variations qui, dans le cas considéré ici, est un problème de recherche des lignes de plus grande pente joignant les divers points critiques de la fonction  $h$ .

(iii) Les éléments de matrice

$$\langle \psi_{A_k^{(p)}}(t), H_t^p \psi_{A_\ell^{(p)}}(t) \rangle$$

ont une partie principale de l'ordre de

$$\exp - 2t | h(A_k^{(p)}) - h(A_\ell^{(p)}) |.$$

(iv) Les éléments de matrice

$$\langle \psi_{A_k^{(p+1)}}(t), d_t^p \psi_{A_\ell^{(p)}}(t) \rangle$$

ont une partie principale de l'ordre de

$$\exp - t | h(A_k^{(p+1)}) - h(A_\ell^{(p)}) |.$$

(v) Chaque instanton  $[A_k^{(p+1)} \rightarrow A_\ell^{(p)}]$  contribue à la matrice précédente par un coefficient entier égal à  $\pm 1$  et dont la définition précise sera donnée à la fin de cette deuxième partie.

Nous allons reprendre ces points les uns après les autres en essayant de les justifier. Dans la plupart des cas cela ne sera possible qu'en se référant au cas scalaire considéré dans les articles récents [16],[18] où d'ailleurs les résultats sont seulement énoncés mais non démontrés. Cependant ce type de phénomène est bien connu en physique mathématique ; voir par exemple [17] , [22] .

#### B. L'USAGE DES INSTANTONS EN MECANIQUE QUANTIQUE.

L'usage des instantons (ou "pseudo-particules") est apparu récemment pour expliquer précisément l'effet tunnel entre les états classiques d'énergie nulle, quand on fait un calcul d'approximation. Ceci est le cas en théorie des champs de Yang et Mills comme en théorie d'un système à une particule. Une particularité de ce phénomène est le passage d'une action-minkowskienne à une action euclidienne et l'apparition de termes exponentiels [17] , [22] .

Tout cela peut être vu d'une façon parfaitement rigoureuse dans le cas élémentaire d'une particule.

---

Le mouvement d'un point matériel de masse  $m$  soumis dans  $\mathbb{R}^n$  à une force qui dérive du potentiel  $V$  suit les lois de Newton :

$$m \ddot{\gamma}_j = - V'_{x_j} \quad , \quad j = 1, \dots, n.$$

On a au cours du mouvement la loi de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 + V = E \text{ (constante) ;}$$

entre les points  $(A_0, t_0)$ ,  $(A, t)$  le mouvement suit une courbe extrémale de la fonctionnelle (Hamilton) :

$$(2) \quad \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 - V \right) ds$$

et cette courbe rend extrémale la fonctionnelle (Maupertuis) :

$$\int_{t_0}^t \sqrt{2m(E-V(\gamma(s)))} \, |\dot{\gamma}(s)| \, ds$$

parmi toutes les trajectoires telles que  $\frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 + V = E$  (constante).

En mécanique quantique on associe à cette particule une fonction d'onde  $\psi$  solution de l'équation de Schrödinger associée à l'hamiltonien

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V.$$

Les états stationnaires du système sont solutions de l'équation réduite :

$$H\psi = E\psi, \quad E \in \mathbb{R}.$$

Notre problème est d'étudier le comportement asymptotique des fonctions propres associées aux basses valeurs propres de  $H$ .

Citons ici un résultat de B. Simon [18] :

"Soit  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $V \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) > 0$ ,  $V$  s'annule exactement en deux points  $a$  et  $b$  et en ces points la matrice  $(\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j)$  est définie-positive.

On note  $E_0(\lambda)$ ,  $E_1(\lambda)$  les deux premières valeurs propres de l'opérateur  $H(\lambda) = -\frac{1}{2} \Delta + \lambda^2 V$ ;  $\Omega_0(\lambda)$  et  $\Omega_1(\lambda)$  sont les fonctions propres normalisées associées.

Pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$  on pose

$$(3) \quad \rho(x, y) = \inf_{\gamma, t, t_0} \left\{ \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}(s)^2 + V(\gamma(s)) \right) ds \mid \gamma(t_0) = x, \gamma(t) = y \right\}$$

où  $\gamma$  décrit un ensemble de chemins absolument continus.

Alors on a les deux résultats suivants :

- (i)  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \log(E_1(\lambda) - E_0(\lambda)) \right\} = \rho(a, b)$
- (ii)  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{2} \log \Omega_0(\lambda, x) \right\} = \min(\rho(x, a), \rho(x, b))$  .



On notera ici un fait caractéristique de ce type de calcul : c'est l'usage de l'action euclidienne

$$\int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}(s)^2 + V(\gamma(s)) \right) ds$$

au lieu de l'action classique <sup>(2)</sup>. On peut noter que le lagrangien classique

$\frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 - V$  peut être considéré comme l'approximation du lagrangien relativiste

$-c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\gamma}^2}{c^2}} - V$  et il y a donc passage d'une action minkowskienne à une action

euclidienne. On sait que ce fait est caractéristique du calcul des instantons, notamment en théorie des champs de Yang et Mills.

On peut noter aussi que a et b sont des mouvements "classiques" d'énergie nulle de la particule considérée ( $V(a) = V(b) = 0$ ,  $\dot{\gamma} = 0$ ) et que le calcul des variations <sup>(3)</sup> conduit à chercher des courbes extrémales joignant ces points a et b. Nous reviendrons sur ce problème dans la prochaine section. Notons que l'on appelle instantons ces courbes extrémales qui joignent les mouvements "classiques" d'énergie nulle..

---

Dans l'article [16], ces résultats sont étendus au cas où V a un nombre fini quelconque de zéros non dégénérés dans  $\mathbb{R}^n$  (ou sur une variété riemannienne). Les éléments de matrice de  $H(\lambda)$  sont exprimés à l'aide des géodésiques joignant deux zéros de V dans la métrique d'Agmon (à comparer à la fonctionnelle de Maupertuis) :

$$(4) \quad \int_{t_0}^t \sqrt{2V(\gamma(s))} |\dot{\gamma}(s)| ds.$$

Il n'est pas tout à fait évident que ce calcul soit équivalent au précédent et nous y reviendrons dans la prochaine section. En attendant, si l'on admet que ces résultats [16], [18] restent vérifiés pour les laplaciens sur les p-formes on en déduit les énoncés (i), (ii), (iii) de la section A de cette seconde partie on a en effet ici pour le lagrangien euclidien :

$$g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j + t^2 g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} = g_{ij} (\dot{\gamma}^i + \epsilon t g^{ik} \frac{\partial h}{\partial x^k}) (\dot{\gamma}^j + \epsilon t g^{jk} \frac{\partial h}{\partial x^k}) - 2\epsilon t \frac{\partial h}{\partial x^k} \dot{\gamma}^k$$

où  $\varepsilon = \pm 1$ . Le minimum de l'action sera donc atteint le long des lignes de plus grande pente

$$\dot{\gamma}^i \pm t g^{ik} \frac{\partial h}{\partial x^k} = 0$$

et ce minimum est égal à  $\mp 2 t (h(y) - h(x))$ .

Une méthode directe pour montrer les résultats [16] , [18] repose sur l'intégration fonctionnelle. En reprenant par exemple l'opérateur

$$H(\lambda) = -\frac{1}{2} \Delta + \lambda^2 V$$

et en écrivant

$$H(\lambda) \psi = E$$

alors on a pour chaque  $t$  :

$$\begin{aligned} e^{-tH(\lambda)} \psi &= e^{-tE} \psi \\ \psi &= e^{-tH(\lambda)} e^{tE} \psi . \end{aligned}$$

Il est possible d'exprimer le noyau  $e^{-t \frac{H(\lambda)}{\lambda}}(x,y)$  en utilisant la formule de Feynman-Kac. Cette formule s'écrit formellement :

$$e^{-t \frac{H(\lambda)}{\lambda}}(x,y) = \int e^{-\lambda \int_0^t (\frac{1}{2} \dot{\gamma}^2(s) + V(\gamma(s))) ds} \delta(\gamma(0)-x) \delta(\gamma(t)-y) "d\gamma"$$

c'est-à-dire comme intégrale sur les chemins joignant  $x$  à  $y$ . On sait que l'on peut justifier cette formule heuristiquement [14] , rigoureusement [19] et, qu'en tous cas, elle se comporte asymptotiquement comme elle est écrite plus haut c'est-à-dire suivant le principe de Laplace bien connu pour les intégrales exponentielles ordinaires [19] . C'est ce fait qui conduit à considérer les zéros de  $V$  et les extrémales de l'action euclidienne qui joignent ces zéros, c'est-à-dire les instantons.

On notera que les résultats donnés dans cette section constituent une généralisation directe de ceux que nous avons rappelés dans l'introduction à propos de l'effet tunnel en mécanique quantique.

C. EXISTENCE DES INSTANTONS

Un problème de calcul des variations.

Etant donnés  $\bar{x}$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\Omega(\bar{x}, \bar{y})$ , l'ensemble des applications  $\gamma$  absolument continues sur un intervalle  $(t_0, t)$  borné ou non de  $\mathbb{R}$  (cet intervalle dépend de  $\gamma$ ) telles que

$$\gamma(t_0) = \bar{x}, \quad \gamma(t) = \bar{y}.$$

Dans la suite on fixe  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  telle que  $V \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

A chacun des chemins  $\gamma$  précédents on fait correspondre le nombre

$$I(\gamma) = \int_{t_0}^t [\dot{\gamma}(s)^2 + V(\gamma(s))] ds$$

et on pose

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{\gamma \in \Omega(\bar{x}, \bar{y})} I(\gamma).$$

1er cas. il existe  $V_0 > 0$  tel que  $V \geq V_0$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

On a dans ce cas un problème classique, le point essentiel étant que  $(t_0, t)$  peut être inclus dans un intervalle compact fixe  $[0, T]$  car on a :

$$I(\gamma) \geq \int_{t_0}^t V_0 dt$$

d'où l'on déduit :

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq (t - t_0)V_0.$$

On peut donc se limiter à l'étude des intégrales  $I(\gamma)$  prises sur les chemins  $\gamma \in H_1(0, T, \mathbb{R}^n)_{\bar{x}, \bar{y}}$  c'est-à-dire les chemins absolument continus  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $\gamma(0) = \bar{x}$ ,  $\gamma(T) = \bar{y}$ .

On sait dans ces conditions qu'il existe une courbe  $\gamma_0$  qui minimise effectivement  $I(\gamma)$  et l'on a (voir par exemple [13], proposition 2.5)

$$\begin{aligned} I(\gamma_0) &= \rho(\bar{x}, \bar{y}) \\ (5) \quad &= \inf_{\gamma \in H_1(0, 1, \mathbb{R}^n)_{\bar{x}, \bar{y}}} \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(s))} |\dot{\gamma}(s)| ds. \end{aligned}$$

On trouve ainsi dans ce cas une coïncidence des géodésiques de la métrique d'Agmon (5) avec les courbes minimales du lagrangien  $\dot{\gamma}^2 + V$ .

2ème cas ;  $V$  est positive sur  $\mathbb{R}^n$  et s'annule en un nombre fini de points.

Dans ces conditions le problème considéré est à extrémités  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  fixes dans  $\mathbb{R}^n$  mais les instants  $t_0, t$  peuvent devenir infinis.

Prenons par exemple  $L(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y}$  quelconque.

On obtient dans ce cas :

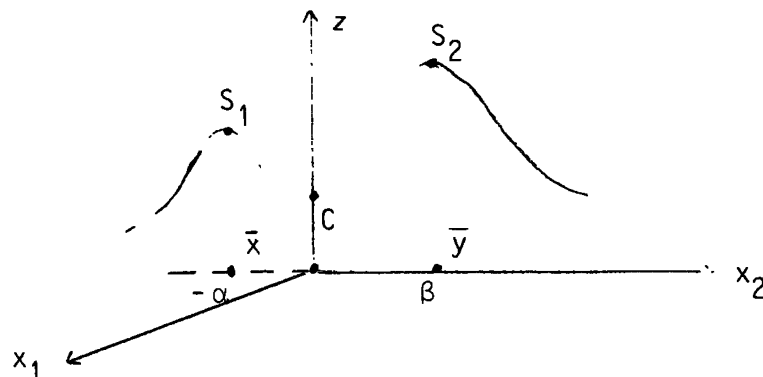
$$\begin{aligned} I(\gamma) &= \int_{t_0}^t (\dot{\gamma}^2 + \gamma^2) ds \\ &= \int_{t_0}^t (\dot{\gamma} - \gamma)^2 dt + 2 \int_{t_0}^t \gamma \dot{\gamma} ds \\ &= \int_{t_0}^t (\dot{\gamma} - \gamma)^2 dt + |\bar{y}|^2 ; \end{aligned}$$

Il vient aussi  $\rho(0, \bar{y}) = |\bar{y}|^2$  et  $\rho(0, \bar{y})$  est atteint par la courbe  $\gamma : ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\gamma(s) = e^{s\bar{y}}.$$

Ainsi, dans ce deuxième cas on a un calcul des variations à extrémités  $(\bar{x}, t_0)$ ,  $(\bar{y}, t)$  variables non-bornées.

Il est possible que  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$  ne soit pas atteinte par une courbe. Prenons par  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , avec  $h > 0$  et supposons que les deux sommets  $S_1 = (0, -\alpha, h_1)$ ,  $S_2 = (0, \beta, h_2)$  soient, sur la montagne d'équation  $z = h(x_1, x_2)$  séparés par le col  $(0, 0, h_3) = C$



Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  le lagrangien  $= \dot{x}^2 + (\text{grad } h)^2$  ; les extrémités de sont liées aux lignes de plus grande pente sur la montagne car l'on a :

$$I(\gamma) = \int_{t_0}^t (\dot{\gamma} \pm \text{grad } h)^2 ds \pm 2(h(\bar{y}) - h(\bar{x})) ;$$

on obtient ici pour  $\bar{x} = (0, -\alpha)$ ,  $\bar{y} = (0, \beta)$

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = h_1 + h_2$$

et il n'existe pas de chemin  $\gamma$  donnant  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$  (il faut prendre la réunion des deux lignes de plus grande pente  $[S_1 \rightarrow C]$ ,  $[C \rightarrow S_2]$ ).

Voici maintenant un cas où une solution du problème existe : on suppose que  $V(x)$  coïncide avec  $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i)$  au voisinage de  $\bar{x}$ , on fait la même hypothèse au voisinage de  $\bar{y}$  et on suppose que  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont les seuls zéros de  $V$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère autour de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  les petite ellipsoïdes  $\mathcal{E}_{\bar{x}}$ ,  $\mathcal{E}_{\bar{y}}$  d'équation  $\sum \sqrt{\lambda_i}(x_i - \bar{x}_i)^2 = \varepsilon > 0$  dans les axes principaux de la forme  $(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j})$ , les  $\lambda_i > 0$  étant les demi-longueurs de ces axes. Pour  $\xi \in \mathcal{E}_{\bar{x}}$  on a  $\rho(\bar{x}, \xi) = \varepsilon$ . On commence par minimiser  $I(\gamma)$  avec  $\gamma$  joignant  $\xi \in \mathcal{E}_{\bar{x}}$  à  $\eta \in \mathcal{E}_{\bar{y}}$



C'est un problème dont les extrémités  $(\xi, t_0)$ ,  $(\eta, t)$  sont variables mais décrivent une sous-variété compacte de  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ . Dans ce cas  $\rho(\xi, \eta)$  est atteint par une courbe  $\gamma$  joignant  $\bar{\xi}$  à  $\bar{\eta}$  (voir par exemple [15]) et la solution du problème s'obtient en joignant  $x$  à  $\bar{\xi}$ ,  $y$  à  $\bar{\eta}$  par des rayons des ellipsoïdes.

On obtiendra toujours, pour le cas où  $V$  s'annule seulement en deux points de l'espace  $\mathbb{R}^n$  une solution dans le cas général en approchant  $V$  par son hessien au voisinage de ces deux points.

Remarque :

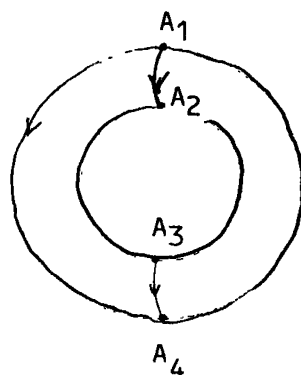
J'ignore s'il existe un théorème qui donne un énoncé d'existence d'instantons c'est-à-dire de courbes qui donnent effectivement  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$  dans le cas où  $V$  s'annule en plus de deux points de  $\mathbb{R}^n$ .

Même dans le cas des lignes de plus grande pente sur une variété, le problème ne semble pas simple ; c'est un problème de détermination des courbes séparatrices du système

$$\dot{\gamma} = \pm \text{grad } h$$

joignant deux positions d'équilibre.

Par exemple si l'on prend la fonction altitude  $h$  sur le tore vertical,  $\rho(A_1, A_2)$   $\rho(A_1, A_4)$  sont atteints mais  $\rho(A_1, A_3)$  ne l'est pas



On pourrait penser que dans les calculs asymptotiques spectraux des sections précédentes seules interviennent les nombres  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$  mais nous allons voir que les instantons (c'est-à-dire les géodésiques qui donnent  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ ) aussi interviennent.

D. LES MATRICES DU PETIT COMPLEXE.

Il reste maintenant à examiner les deux derniers points énoncés en fin de la section A précédente :

Etant donné le petit complexe

$$d_t^p : X_p \rightarrow X_{p+1} \quad p = 0, \dots, n,$$

les éléments de matrice

$$\langle \psi_{A_k^{(p+1)}}(t), d_t^p \psi_{A_\ell^{(p)}}(t) \rangle$$

ont des parties principales déterminées par les instantons  $[A_k^{(p+1)} \rightarrow A_\ell^{(p)}]$ .

Ceci n'est pas difficile à admettre d'après tout ce qui précède mais il reste à déterminer exactement cette contribution. Ainsi qu'on l'a déjà dit, E. Witten donne cette contribution en s'appuyant sur des arguments empruntés à la physique-mathématiques des supersymétries ([21], p. 672).

---

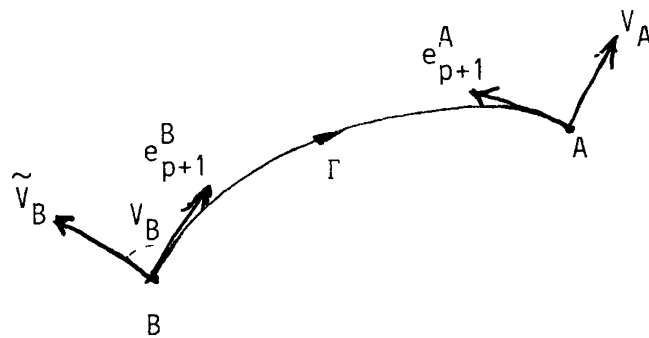
Soit B un point critique d'indice  $p+1$  de  $h$  ; on suppose que le hessien de  $h$  au point B a des valeurs propres  $\lambda_i$  telles que :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{p+1} < 0 < \lambda_{p+1} < \dots < \lambda_n.$$

Soit A un point critique d'indice  $p$  de  $h$  , on suppose que le hessien de  $h$  au point A a des valeurs propres  $\mu_i$  telles que

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p < 0 < \mu_{p+1} < \dots < \mu_n.$$

Supposons aussi que  $h(B) > h(A)$  ; alors on peut dire que "génériquement" un instanton  $\Gamma : B \rightarrow A$  part tangentiellement (à l'instant  $-\infty$ ) au  $(p+1)^{\text{ème}}$  vecteur propre  $e_{p+1}^B$  de  $\nabla dh$  en B et arrive tangentiellement (à l'instant  $+\infty$ ) au  $(p+1)^{\text{ème}}$  vecteur propre  $e_{p+1}^A$  de  $\nabla dh$  au point A.



Si l'on revient au calcul des inégalités faibles de Morse au § (d), section C de la partie I, on voit que la fonction propre  $\tilde{\psi}_B$  de  $H_t^{p+1}$  relativement à B est proportionnelle à  $\theta_B^1 \wedge \dots \wedge \theta_B^{p+1}$  tandis que  $\tilde{\psi}_A$  est proportionnelle à  $\theta_A^1 \wedge \dots \wedge \theta_A^p$ . On peut admettre que  $\tilde{\psi}_A$ ,  $\tilde{\psi}_B$  sont les parties principales de  $\psi_A$ ,  $\psi_B$  aux points A et B. Dans ces conditions, si  $\psi_A$  et  $\psi_B$  sont choisies positivement proportionnelles à  $\theta_A^1 \wedge \dots \wedge \theta_A^p$  et  $\theta_B^1 \wedge \dots \wedge \theta_B^{p+1}$ ; on trouve que la contribution de  $\Gamma$  à la matrice  $\langle \psi_B, d_t^p \psi_A \rangle$  a pour expression  $+\exp(-t(h(B)-j(A)))$ .

Remarque finale: on trouve dans l'article [20] le développement des fonctions propres autour des minimum d'un potentiel dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### Remarque.

On se reportera à l'exposé [23] de G. Henniart pour quelques détails supplémentaires concernant les problèmes posés par la formalisation des méthodes de E. Witten, ainsi que pour d'autres applications de ces méthodes.



BIBLIOGRAPHIE.

- [13] R. CARMONA and B. SIMON, *Pointwise bounds of Eigenfunctions V.*, Commun. Math. Phys. 80 (1981), 59-81.
  - [14] R.P. FEYNMAN, *Statistical Mechanics*, Benjamin 1972.
  - [15] W.H. FLEMING - R.W. RISHEL, *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer-Verlag 1975.
  - [16] B. HELFFER - J.S. SJOSTRAND, Voir réf. [9], partie I.
  - [17] R. JACKIW, Voir réf. [4], introduction.
  - [18] B. SIMON, *Instantons, double wells and large deviations*, Bulletin of A.M.S. 8 (2), 1983, 323-326.
  - [19] B. SIMON, *Functional integration and quantum physics*, Ac. Press 1979.
  - [20] B. SIMON, Voir réf [11], partie I.
  - [21] E. WITTEN, Voir réf. [6], introduction et [12], partie I.
  - [22] E. WITTEN, *Instantons, the quark model and the 1/N expansion*, Nuclear physics, B. 149 (1979) 285-320.
  - [23] G. HENNIART, *Les inégalités de Morse, d'après E. Witten*, Séminaire Bourbaki, n° 617, Novembre 1983.
-