

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

## Sur les longueurs des trajectoires périodiques d'un billard

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 1 (1982-1983), exp. n° 3, p. 1-18

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1982-1983\\_\\_1\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1982-1983__1__A3_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

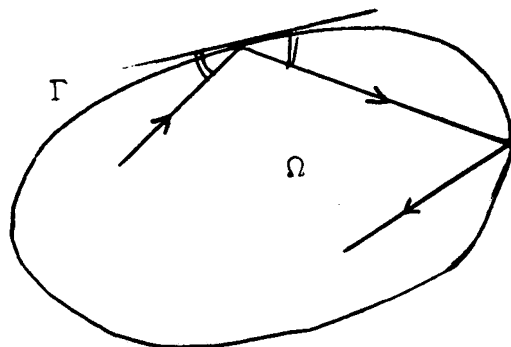
Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

1982-1983

## SUR LES LONGUEURS DES TRAJECTOIRES PERIODIQUES D'UN BILLARD

par Yves COLIN DE VERDIERE

Soit  $\Omega$  un domaine convexe borné de  $\mathbb{R}^2$  de bord  $\Gamma$  lisse ayant pour longueur  $L$  ; on s'intéresse aux longueurs des trajectoires périodiques pour le problème du billard dans  $\Omega$  : un point se déplace de façon rectiligne dans  $\Omega$  jusqu'à ce qu'il arrive sur  $\Gamma$  où sa trajectoire se réfléchit suivant la loi de l'optique géométrique.



La motivation initiale de ce travail est la relation avec la théorie spectrale de  $\Omega$  : si  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est le spectre du laplacien dans  $\Omega$  avec conditions aux limites de Neumann (ou de Dirichlet) le support singulier de la distribution  $Z(t) = \sum_n \cos t\sqrt{\lambda_n}$  est contenu dans l'ensemble des longueurs des trajectoires périodiques du billard (en y incluant les multiples de  $L$  comme longueurs limites) et ces ensembles sont égaux pour un domaine  $\Omega$  générique ([B-B], [G-M2] et [H]).

### III. 2

Le fameux problème de M. Kac "Can you hear the shape of a drum ?" semble donc accessible à partir de l'étude des longueurs des trajectoires périodiques du billard  $\Omega$ .

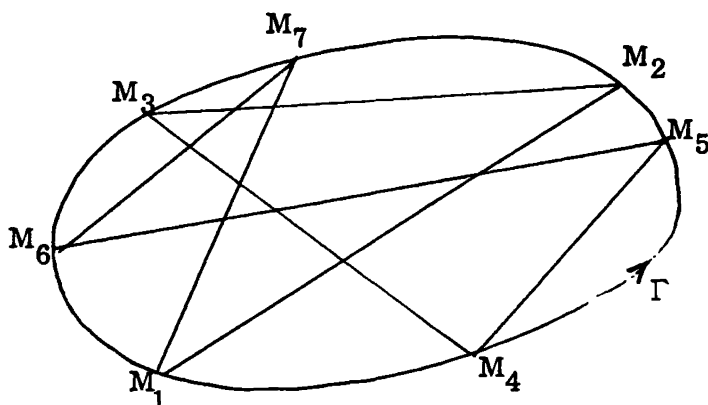
Après avoir rappelé les résultats classiques de Poincaré-Birkhoff sur l'existence de trajectoires périodiques et l'interprétation symplectique donnée par Guillemin et Melrose ([G-M1]) du "spectre" des longueurs, nous étudions le comportement asymptotique du spectre des longueurs des trajectoires proches d'une trajectoire périodique stable : cette étude se fait à partir de la forme normale de Birkhoff et d'une agréable démonstration du théorème de Poincaré-Birkhoff due à Dvorin-Lazutkin ([D-L]).

Nous appliquons ensuite ceci aux billards ayant les symétries d'une ellipse et pour lesquels le petit axe est stable. Reliant les invariants de Birkhoff au développement de Taylor de  $\Gamma$  aux extrémités du petit axe, nous montrons un théorème de rigidité : absence de déformations non triviales de  $\Omega$  conservant le spectre des longueurs des trajectoires périodiques. Ceci doit beaucoup au travail de Marvizi-Melrose ([M-M]) sur l'asymptotique du spectre des longueurs des trajectoires s'accumulant sur le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

1. Trajectoires périodiques du billard.
2. Le point de vue symplectique.
3. Asymptotique du spectre des longueurs près d'un point fixe elliptique d'un germe de transformation canonique.
4. Invariants de Birkhoff du petit axe de  $\Omega$  et géométrie de  $\Gamma$ .
5. Conclusion et problèmes.

### 1. TRAJECTOIRES PERIODIQUES DU BILLARD.

Soit  $M : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$  un paramétrage de  $\Gamma$  (supposée orientée une fois pour toutes) par l'abscisse curviligne et donc  $M(s+L) = M(s)$ . Si  $M_1, \dots, M_n$  est une suite de points de  $\Gamma$  (ligne polygonale), soit  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$  tels que  $M(s_i) = M_i$  et  $s_i \leq s_{i+1} < s_i + L$ . Alors, si  $M_{n+1} = M_1$ , on a  $s_{n+1} - s_1 = m \cdot L$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ); l'entier  $m$  s'appelle le nombre de rotation de la ligne polygonale fermée  $M_1 M_2 \dots M_n M_1$ . Si on change l'orientation de  $\Gamma$ , on obtient un nouveau nombre de rotation  $m'$  tel que  $m+m' = n$ . Le nombre de rotation non orienté  $\nu = \inf(m, m')$  vérifie donc  $1 \leq \nu \leq \frac{n}{2}$ .



$$\begin{cases} n = 7 \\ m = 3 = \nu \end{cases}$$

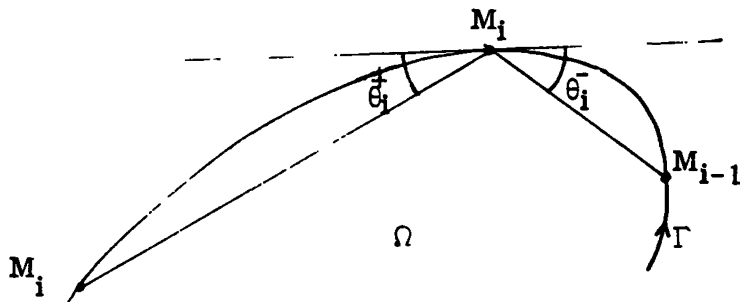
On a le :

**THEOREME (Birkhoff).** Pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers vérifiant  $1 \leq m \leq n-1$ , il existe au moins 2 lignes polygonales à  $n$  sommets et de nombre de rotation  $m$  qui soient des trajectoires périodiques du billard.

Preuve. Le preuve de l'existence d'une trajectoire périodique du billard de type  $(m, n)$  est élémentaire par une méthode variationnelle que nous rappelons ci-après. L'existence d'au moins deux trajectoires périodiques distinctes de ce type est en principe due à Birkhoff et a été reconsidérée plus récemment ([B-N], [N] et aussi [M], [K]).

On paramètre l'ensemble  $\mathcal{P}_{n, m}$  des polygones à  $n$  côtés et de nombre de rotation  $m$ , éventuellement dégénérés, par  $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \Delta_{n, m}$

où  $\Delta_{n,m} = [0, L]^n \cap \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \sigma_1 + \dots + \sigma_n = mL\}$ . A  $(s, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  on associe la ligne  $(M(s), (M(s+\sigma_1), \dots))$ . Si  $F : \mathcal{P}_{n,m} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est la longueur de la ligne polygonale fermée associée au point  $(s, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ,  $F$  est définie et continue sur le compact  $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \Delta_{n,m}$  et y atteint son maximum en un polygone  $P_0$  dont il est facile de voir à l'aide de l'inégalité triangulaire qu'il est non dégénéré. La fonction  $F$  y est donc différentiable et de différentielle nulle ; si on utilise les coordonnées locales  $s_0 = s$ ,  $s_1 = s + \sigma_1, \dots, s_{n-1} = s + \sigma_1 + \dots + \sigma_{n-1}$ , on peut écrire  $\frac{\partial F}{\partial s_i} = 0$  et cette différentielle vaut aussi  $\cos \theta_i^+ - \cos \theta_i^-$ , donc  $\theta_i^+ = \theta_i^-$ . Le maximum est donc atteint pour une trajectoire périodique du billard de type  $(n, m)$ .

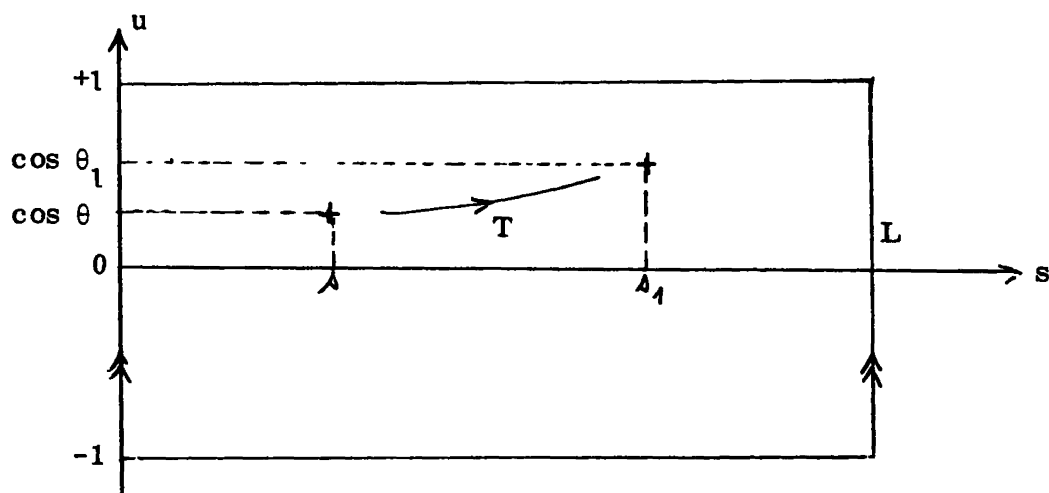
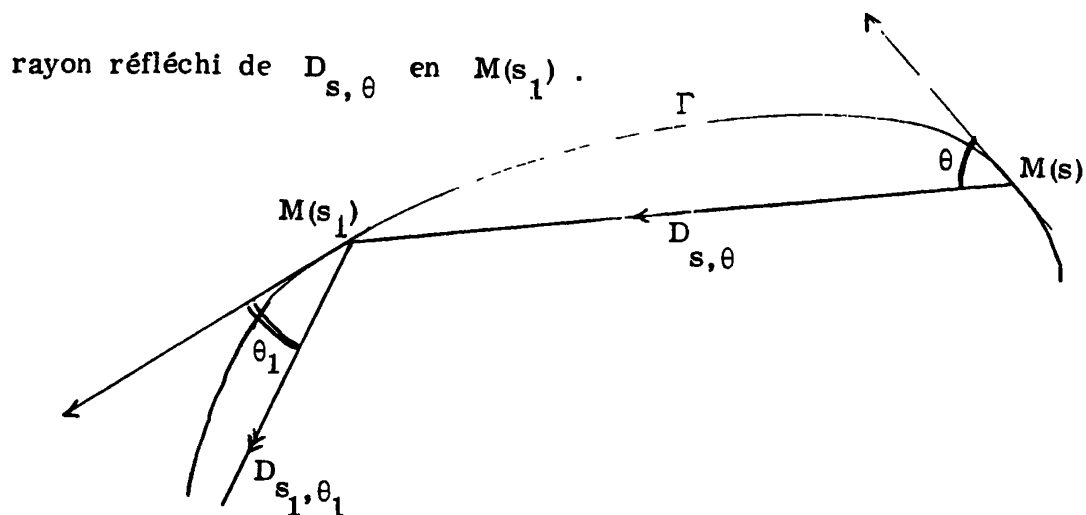


2. LE SPECTRE DES LONGUEURS DU POINT DE VUE SYMPLECTIQUE.

---

Au billard  $\Omega$ , on associe une variété symplectique  $X$  et une transformation canonique  $T$  de  $X$  qui correspond à l'opération de réflexion sur le bord de  $\Omega$ . La variété  $X$  est  $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times ]-1, +1[$ . On la munit de la structure symplectique  $\omega = du \wedge ds$  ( $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ ,  $|u| < 1$ ).

Au point  $(s, u = \cos \theta)$  ( $\theta \in ]0, \pi[$ ), on associe la demi-droite  $D_{s, \theta}$  d'origine  $M(s)$  faisant avec la tangente orientée à  $\Gamma$  en  $M(s)$  l'angle  $\theta$ . La transformation  $T$  est définie par  $T(s, \cos \theta) = (s_1, \cos \theta_1)$  où  $M(s_1) = D_{s, \theta} \cap \Gamma$  et  $\theta_1$  est l'angle du



PROPOSITION.  $T$  est symplectique :  $T^*(du \wedge ds) = du \wedge ds$ .

Remarque 1. On utilise dans la pratique le relèvement  $\tilde{T}$  de  $T$ ,

$\tilde{T} : \mathbb{R} \times ]-1, +1[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]-1, +1[$  tel que  $\tilde{T}(s, 1) = (s, 1)$ ,

$\tilde{T}(s, -1) = (s+L, -1)$ .

Remarque 2. Les trajectoires périodiques du billard sont en

bijection avec les points périodiques de  $T$ . Si  $\tilde{T}^n(s_0, u_0) = (s_0 + mL, u_0)$ , on a une trajectoire périodique de type  $(n, m)$ .

Preuve ([G-M]). Soit  $F(s, s_1) = -d(M(s), M(s_1))$ , où  $d$  est la distance euclidienne. On a  $\frac{\partial F}{\partial s} = \cos \theta$ ,  $\frac{\partial F}{\partial s_1} = -\cos \theta_1$  et donc le graphe  $G$  de  $T$  est défini par :

$$G = \left( s, \frac{\partial F}{\partial s} ; s_1, -\frac{\partial F}{\partial s_1} \right) \mid s, s_1 \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z} .$$

$F$  est donc une fonction génératrice de  $T$ , qui est donc symplectique.

### LE SPECTRE DES LONGUEURS.

Soit  $T : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow$  une transformation symplectique qui préserve les bords orientés ; si  $d\alpha = \omega$ , la forme  $T^*(\alpha) - \alpha$  est non seulement fermée, mais exacte ; en effet si  $\gamma = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \{1\}$ ,  $\int_{\gamma} T^*(\alpha) - \alpha = 0$ . Si  $T^*(\alpha) - \alpha = df$ , on pose pour tout point périodique  $M$  de  $T$ , i.e. tel que  $T^n(M) = M$ ,  $L_{M,n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k M)$ . Si  $\beta$  est une autre forme telle que  $d\beta = \omega$ , on a  $\beta = \alpha + d\varphi + c \cdot ds$ , on en déduit qu'il existe des constantes  $T_0, U_0$  telles que les longueurs  $L'_{M,n}$  calculées à partir de  $\beta$  vérifient :

$$L'_{M,n} = L_{M,n} + n \cdot T_0 + m \cdot U_0$$

où  $m$  est le nombre de rotation de la trajectoire périodique. (L'argument donné ici est une généralisation de celui donné par Guillemin-Melrose ([G-M]) dans le cas d'une variété  $X$  simplement connexe).

### 3. SPECTRE DES LONGUEURS D'UN GERME ELLIPTIQUE DE DIFFEOMORPHISME SYMPLECTIQUE

Si  $T : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  est un germe  $C^\infty$  de transformation symplectique, on peut par la méthode du paragraphe précédent associer à tout point périodique de  $T$  une longueur. On choisit une normalisation  $T_0$  (longueur du point fixe  $T(0) = 0$ ) et si  $d\alpha = dx \wedge dy$  et  $f$  est telle que  $\begin{cases} df = T^*(\alpha) - \alpha \\ f(0) = T_0 \end{cases}$ , on pose pour  $M$  tel que  $T^n(M) = M$ ,

$$L(M,n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k M) ;$$

on vérifie comme plus haut que  $L(M, n)$  ne dépend pas du choix de  $\alpha$ .

Le but de ce paragraphe est d'étudier le comportement asymptotique du spectre des longueurs d'une telle transformation  $T$  supposée elliptique et suffisamment générique.

a) La forme normale de Birkhoff.

Soit  $T : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  un germe de transformation symplectique  $C^\infty$  ( $T^*(dx \wedge dy) = dx \wedge dy$ ). On dit que  $T$  est elliptique si la différentielle  $T'(0)$  de  $T$  en  $0$  admet 2 valeurs propres distinctes de module 1,  $e^{\pm i\alpha}$ . Si on suppose  $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$ , il existe des coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  au voisinage de  $0$  dans  $\mathbb{R}^2$  telles que  $d\xi \wedge d\eta = dx \wedge dy$  et que dans les coordonnées polaires  $\rho = \xi^2 + \eta^2$ ,  $\xi = \sqrt{\rho} \cos \theta$ ,  $\eta = \sqrt{\rho} \sin \theta$ ,  $T$  s'écrive :

$$T(\rho, \theta) = (\rho + 0(\rho^\infty), \theta + b_0 + b_1 \rho + \dots + 0(\rho^\infty)) .$$

Cette forme s'appelle forme normale de Birkhoff ([S-M] p. 155).

Les nombres  $(b_0, b_1, \dots, b_N, \dots)$  sont bien déterminés par  $T$  et s'appellent les invariants de Birkhoff de  $T$ . On a  $b_0 = \pm \alpha(2\pi)$ . Les  $(b_i)_{i \geq 1}$  sont plus compliqués à calculer.

La transformation  $T$  est dite intégrable si l'on peut choisir les coordonnées  $(\xi, \eta)$  de façon que  $T(\rho, \theta) = (\rho, \theta + b_0 + B_1(\rho))$  avec  $B_1 \in C^\infty([0, \rho_0[ , \mathbb{R})$ ,  $B_1(0) = 0$ . La transformation  $T$  sera dite générique si

$$(*) \quad \begin{cases} b_0/\pi \notin \mathbb{Q} \\ b_1 \neq 0 \quad (\text{dans le cas intégrable } B_1'(0) \neq 0) . \end{cases}$$

On supposera dans la suite  $b_1 > 0$ .



b) Spectre des longueurs dans le cas intégrable.

On a  $\omega = d\xi \wedge d\eta = \frac{1}{2} d\rho \wedge d\theta$  ; on peut donc choisir  $\alpha = \frac{1}{2} \rho d\theta$  ,  
 $T^*(\alpha) - \alpha = \frac{1}{2} \rho B_1'(\rho) d\rho = df$  et  $f(0) = T_0$  . Les points périodiques  
de période  $n$  sont tels que :

$$n(B_1(\rho) + b_0) = \ell \cdot 2\pi , \quad \begin{cases} \rho \in [0, \rho_0[ \\ \ell \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

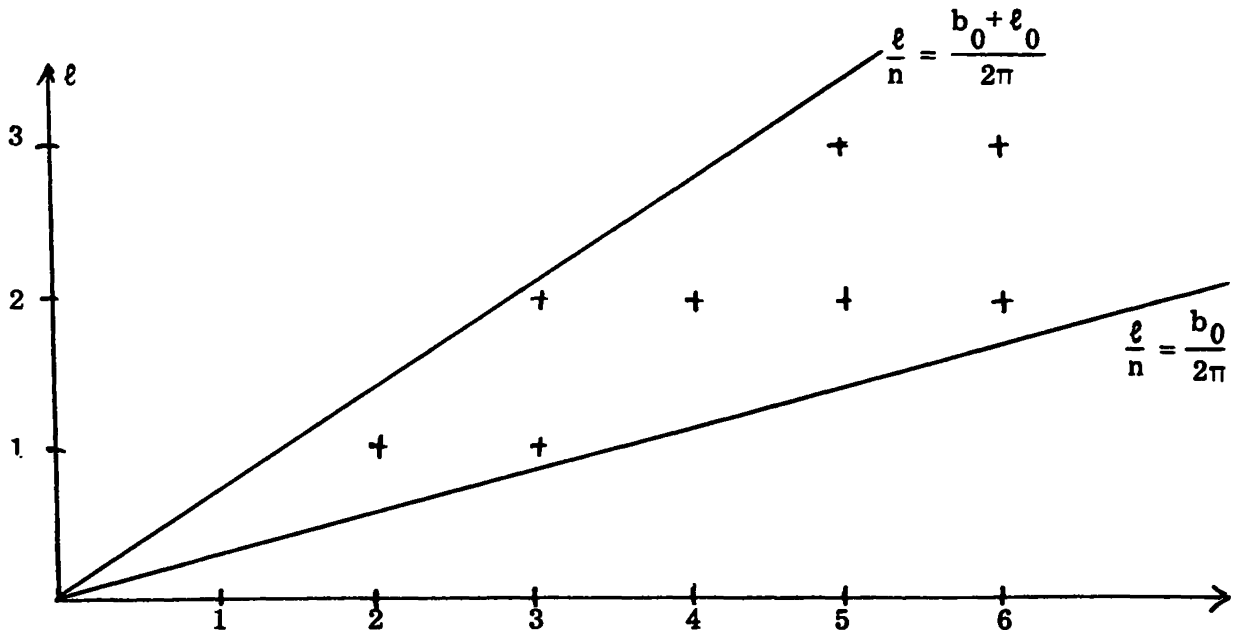
On a donc  $\rho = B_1^{-1}(\frac{\ell}{n} 2\pi - b_0)$  et les longueurs  $\mathcal{J}_{n, \ell} = n f(B_1^{-1}(\frac{\ell}{n} 2\pi - b_0))$  .

La fonction  $\phi(u) = (f \circ B_1^{-1})(u)$  vérifie :

$$(**) \quad \begin{cases} \phi' = \frac{1}{2} B_1^{-1} \\ \phi(0) = T_0 \end{cases} .$$

D'où le spectre des longueurs :

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{n, \ell} = n\phi(\frac{\ell}{n} 2\pi - b_0) \\ \frac{\ell}{n} 2\pi - b_0 \in [0, \rho_0[ \end{cases}$$



c) Le théorème des points périodiques de Poincaré-Birkhoff.

A. Préparatifs techniques (d'après [D-L]).

Soit  $B$  l'espace de Banach des fonctions réelles continûment dérivables de période 1 muni de la norme :

$$\|f\| = \max_{\xi} |f(\xi)| + \max_{\xi} |f'(\xi)| .$$

Soit  $\ell, n \in \mathbb{Z}$  ( $n \neq 0$ ), et  $\mathcal{L} : B \rightarrow B$  défini par

$$(\mathcal{L}f)(\xi) = f(\xi + \frac{\ell}{n}) - f(\xi) .$$

On a une décomposition en somme directe  $B = \text{Ker}(\mathcal{L}) \oplus \text{Im}(\mathcal{L})$  associée à des projecteurs  $P$  et  $Q$  :

$$(Pf)(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi + \frac{j}{n}) \quad \text{et} \quad Qf = f - Pf .$$

De plus cette décomposition est stable par  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}$  est un isomorphisme de  $\text{Im}(\mathcal{L})$  sur lui-même. Notons par  $Q$  l'opérateur tel que :

$$Q \upharpoonright_{\text{Ker}(\mathcal{L})} \equiv 0 \quad ; \quad Q \upharpoonright_{\text{Im}(\mathcal{L})} \equiv (\mathcal{L} \upharpoonright_{\text{Im}(\mathcal{L})})^{-1} .$$

On a alors le :

**LEMME ([D-L]).**  $\|Q\| \leq \frac{1}{4}n^2$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme d'opérateurs dans  $B$ .

Preuve. On utilise la décomposition spectrale explicite de  $\mathcal{L}$ .

#### B. Construction des points périodiques.

Soit  $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, \rho_0[ \rightarrow$  un difféomorphisme de la forme :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = x + B_0 + y + y^N F(x, y) \\ y_1 = y + y^{N+1} G(x, y) \end{cases} ,$$

où  $F, G$  sont  $C^1$  et  $T$  laisse invariante une mesure  $a(x, y)dx \wedge dy$  avec  $a(x, 0) = 1$ .

[On ramène le cas étudié à celui-là en posant  $\theta = 2\pi x$  et  $b_1 \rho + \dots + b_{N-1} \rho^{N-1} = y$ ].

Si  $F, G$  étaient nulles, les points périodiques correspon-

draient à  $y = \frac{\ell}{n} - B_0$ . On va montrer l'existence de points périodiques par application du théorème des fonctions implicites ; on fait le changement de variables :

$$(2) \quad \begin{cases} y = \delta(1+Y) \\ x = X \end{cases}$$

avec  $\delta = \frac{\ell}{n} - B_0$ ,  $Y \in ]-1, +1[$ ,  $X \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Dans la suite, on aura  $\delta = O(n^{-1})$ . On obtient :

$$(3) \quad \begin{cases} X_1 = X + \frac{\ell}{n} + \delta Y + \delta^N F_\delta(X, Y) \\ Y_1 = Y + \delta^N G_\delta(X, Y) \end{cases}$$

où  $F_\delta$ ,  $G_\delta$  sont bornées en norme  $C^1$  uniformément pour  $0 \leq \delta \leq \delta_0$ . On cherche alors un difféomorphisme  $\Phi_\delta$  au voisinage de  $Y = 0$  de la forme

$$(4) \quad \begin{cases} X = \xi + \delta \varphi(\xi) \\ Y = \eta + \delta \psi(\xi) \end{cases}$$

de façon que :

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi, \psi \in \mathcal{B} \\ P\varphi = 0 \\ T(\xi, 0) = (\xi + \frac{\ell}{n}, \delta^N H(\xi)) \\ \mathcal{L}H = 0. \end{cases}$$

L'invariance de la mesure  $a(x,y)dx \wedge dy$  par  $T$  implique, comme dans la démonstration usuelle du théorème de Poincaré-Birkhoff que  $H$  s'annule en un point  $\xi_0$  et que  $T^n(\xi_0, 0) = (\xi_0 + \ell, 0)$  : c'est un point de période  $n$  de  $T$ .

Reportant (4) dans (3) et utilisant (5), il vient le système :

$$(6) \quad \begin{cases} P\varphi = 0 \\ \mathcal{L}\varphi = \delta\psi + \delta^{N-1}F_\delta \\ \mathcal{L}\psi = \delta^{N-1}(G_\delta - H) \\ QH = 0 \end{cases}$$

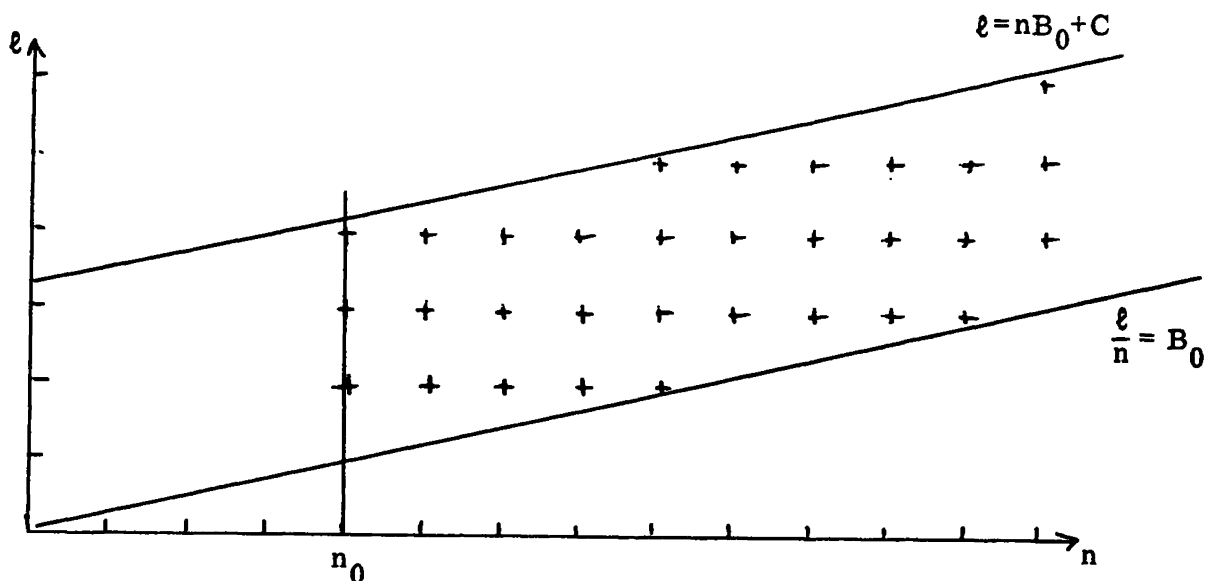
ou encore

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi = \delta^N \mathcal{G}^2(G_\delta) + \delta^{N-1} \mathcal{G}(F_\delta) \\ \psi = -\delta^{N-2} P F_\delta + \delta^{N-1} \mathcal{G}(G_\delta) \\ H = P G_\delta, \end{cases}$$

qui est de la forme  $(\varphi, \psi) = \mathfrak{F}(\delta, n; \varphi, \psi)$  où  $\|\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varphi}\| = O(n^{4-N})$  et  $\|\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \psi}\| = O(n^{4-N})$  en faisant l'hypothèse  $\delta = O(n^{-1})$ .

Le théorème des fonctions implicites permet de conclure, pour  $n \geq n_0$ , à l'existence d'une solution périodique dont tous les itérés vérifient  $|y - \delta| = O(n^{3-N})$ , et donc, par rapport au cas intégrable  $F = G = 0$ , les longueurs  $\tilde{\mathcal{J}}_{\ell, n}$  vérifient  $\tilde{\mathcal{J}}_{\ell, n} = \mathcal{J}_{\ell, n} + O(n^{2-N})$  pour  $|\frac{\ell}{n} - B_0| \leq \frac{C}{n}$  ( $n \geq n_0$ ).

En particulier, le développement asymptotique des  $\tilde{\mathcal{J}}_{\ell, n}$  est le même que celui des  $\mathcal{J}_{\ell, n}$  et si  $C$  est choisi assez grand pour que la bande  $0 \leq \frac{\ell}{n} - B_0 \leq \frac{C}{n}$  contienne une infinité de points entiers, le développement asymptotique des  $\tilde{\mathcal{J}}_{n, \ell}$  détermine les invariants de Birkhoff  $b_i$  : en effet si on a une suite  $t_j \rightarrow 0^+$ , et une fonction  $\mathfrak{F}(t) \sim \sum_{i \geq 0} \varphi_i t^i$ , la donnée des  $\mathfrak{F}(t_j) \pmod{t_j^m}$  détermine les  $\varphi_i$  par récurrence :  $\varphi_0 = \lim \mathfrak{F}(t_j)$  ;  $\varphi_1 = \lim \frac{\mathfrak{F}(t_j) - \varphi_0}{t_j}$ , etc...



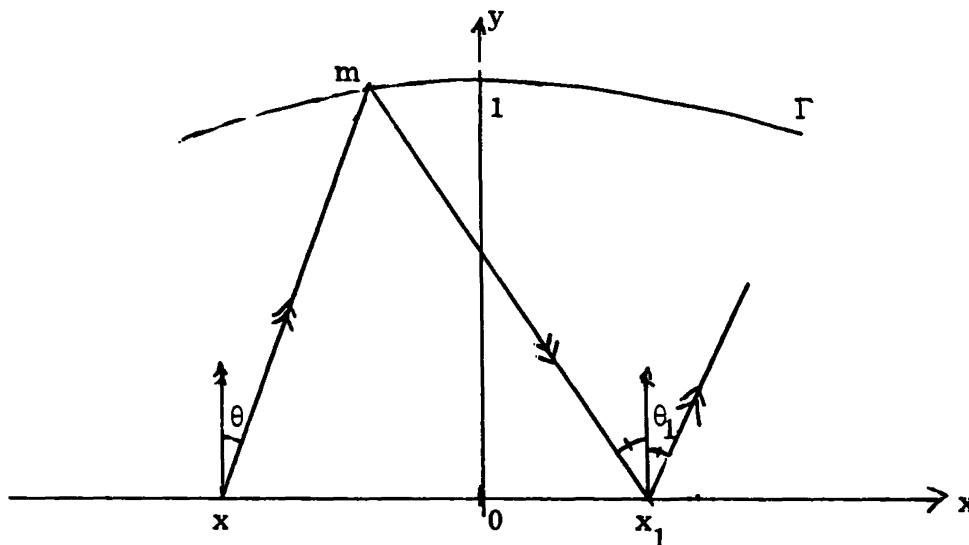
En résumé :

**THEOREME.** Si  $T$  est un germe de transformation symplectique de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , elliptique et générique, d'invariants de Birkhoff  $(b_i)_{i \geq 0}$  ; soit  $C > 0$  tel qu'il existe une infinité de points entiers dans la bande  $B = \{(n, \ell) \mid 0 \leq \ell - n \frac{b_0}{2\pi} \leq C\}$ , il existe un entier  $n_0$  tel que pour chaque  $(n, \ell)$  de  $B$  avec  $n \geq n_0$ ,  $T$  admette un point périodique de période  $n$ . Le développement asymptotique des longueurs  $\tilde{\mathcal{J}}_{n, \ell}$  ne dépend que des invariants de Birkhoff  $b_i$  par les formules valables dans un cas intégrable qui est tangent d'ordre infini à  $T$ . Si  $T_0$  et  $T_1$  vérifient les hypothèses précédentes avec le même  $b_0$  et ont le même spectre des longueurs  $\tilde{\mathcal{J}}_{n, \ell}$ , elles ont les mêmes invariants de Birkhoff [ici même spectre des longueurs signifie :  $\forall (n, \ell) \in B, \mathcal{J}_{n, \ell}^0 = \mathcal{J}_{n, \ell}^1$ , et non  $\{\mathcal{J}_{n, \ell}^0\} = \{\mathcal{J}_{n, \ell}^1\}$ ].

4. INVARIANTS DE BIRKHOFF ET SERIE DE TAYLOR PRES D'UN SOMMET DU PETIT AXE DU BILLARD.

---

Soit  $y = f(x) = 1 + a_0 x^2 + \dots + a_n x^{2n-2} + \dots$  la série de Taylor de la courbe  $\Gamma$  près d'un sommet du petit axe (supposé de longueur 2, ce qui ne nuit pas à la généralité de ce qui va suivre).



On note  $T$  le germe de transformation canonique  $T : (x, \sin \theta) \mapsto (x_1, \sin \theta_1)$ , obtenue par réflexions du rayon d'origine  $(x, 0)$  faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $Oy$  successivement sur  $\Gamma$  et sur  $Ox$  : la transformation  $T^2$  correspond à une section de Poincaré le long du petit axe de  $\Gamma$ .

La transformation  $T$  est définie au moyen de la fonction génératrice (ou fonction phase),

$$\varphi(x, x_1, s) = \left[ (x-s)^2 + (f(s))^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ (x_1-s)^2 + (f(s))^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On a :

$$\text{graphe } T = \left\{ \left( x, \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; x_1, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \right\}.$$

On a le développement de Taylor suivant :

$$\varphi \sim 2 + \varphi_0(x, x_1, s) + \dots + \varphi_n(x, x_1, s) + \dots$$

où  $\varphi_n$  est un polynôme homogène de degré  $2n+2$  déterminé par  $\{a_0, \dots, a_n\}$ . On a :

$$\varphi_0(x, x_1, s) = \frac{1}{2}(x^2 + x_1^2) - s(x+x_1) + (2a_0+1)s^2,$$

$$\varphi_n(x, x_1, s) = \psi_n(x, x_1, s) + 2a_n s^{2n+2},$$

où  $\psi_n$  ne dépend que de  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ .

En particulier, la partie linéaire  $L$  de  $T$  a pour fonction génératrice  $\varphi_0$  :

$$\text{graphe}(L) = \{(x, x-s; x_1, -(x_1-s)) \mid 2(2a_0+1)s - (x+x_1) = 0\}$$

donc :

$$L = \begin{pmatrix} A-1 & -A \\ 2-A & A-1 \end{pmatrix}, \text{ avec } A = 2(2a_0+1).$$

On en déduit que  $L$  est elliptique si  $a_0 \in ]-\frac{1}{2}, 0[$ , c'est-à-dire si le centre de courbure de  $\Gamma$  en  $(0, 1)$  est sur le  $\frac{1}{2}$  axe  $\{0\} \times \mathbb{R}_*^-$ ; c'est ici le cas. On fera dans la suite l'hypothèse (H) que l'angle  $\alpha \in ]0, \pi[$  défini par  $\cos \alpha = 4a_0+1$  vérifie  $\alpha \notin 2\pi \cdot \mathbb{Q}$  [équivalent à (\*) pour  $T$ ].

On a le :

**THEOREME.**  $a_0, \dots, a_{n-1}$  étant fixé, le n-ème invariant  $b_n$  de Birkhoff de  $T$  est de la forme :  $b_n = B + C \cdot a_n$  avec  $C \neq 0$ .

Donc du point de vue formel,  $a_0$  étant fixé de façon que (H) soit vraie, la correspondance  $(a_1, \dots, a_n, \dots) \mapsto (b_1, \dots, b_n, \dots)$  est une bijection; si on connaît les  $(b_n)$ , on peut déterminer les  $(a_n)$ .

Le théorème se prouve au moyen d'une succession de lemmes. On suppose toujours que  $a_0$  (vérifiant (H)),  $a_1, \dots, a_{n-1}$  sont fixés).

LEMME 1.  $T \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = T^0 \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + C(x-\xi)^{2n+1} a_n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + o(|x|+|\xi|)^{2n+2}$ ,  
 où  $T^0$  est le jet d'ordre  $2n+1$  de  $T$  pour  $a_n = 0$ , et  $C \neq 0$ .

Preuve.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi^0}{\partial s} + 4(n+1) a_n s^{2n+1} + o((|x|+|x_1|+|s|)^{2n+2})$$

(où  $\varphi^0$  est le jet d'ordre  $2n+1$  de  $\varphi$  pour  $a_n = 0$ ) ; soit :

$$s = s^0(x, x_1) + C_1 a_n (x+x_1)^{2n+1} + o((|x|+|x_1|)^{2n+2}) \quad (C_1 \neq 0)$$

et donc

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0(x, \xi) + C_1 A^{2n+2} (x-\xi)^{2n+1} a_n + o((|x|+|\xi|)^{2n+2}) \\ \xi_1 = \xi_1^0(x, \xi) - C_1 A^{2n+2} (x-\xi)^{2n+1} a_n + o((|x|+|\xi|)^{2n+2}) \end{cases}$$

Désignons par :

$G_{2n+1}$  le groupe des jets d'ordre  $2n+1$  de difféomorphismes symplectiques de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  ;

$\Gamma_{2n+1}$  le sous-groupe des  $g \in G_{2n+1}$  de la forme  $\text{Id} + o((|x|+|\xi|)^{2n+1})$  ;

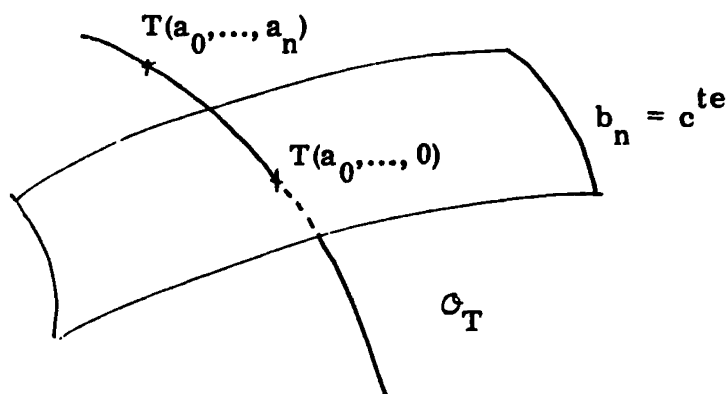
$$\mathcal{O}_T = \{T' \in G_{2n+1} \mid T' = T + o((|x|+|\xi|)^{2n+1})\}.$$

On a une action de  $\Gamma_{2n+1}$  sur  $\mathcal{O}_T$  par conjugaison :  $\gamma \cdot T' = \gamma \circ T' \circ \gamma^{-1}$ .

L'orbite de  $T'$  si (H) est vérifiée (pour  $T$  et donc pour tout

$T' \in \mathcal{O}_T$ ) est caractérisée par  $\Gamma_{2n+1} \cdot T' = \{T'' \mid b_n(T'') = b_n(T')\}$  où  $b_n$  est le  $n$ -ème invariant de Birkhoff et on a le :

LEMME 2. Dans  $\mathcal{O}_T$  la courbe  $a_n \mapsto T(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n)$  est transversale aux orbites de  $\Gamma_{2n+1}$ .





Preuve. Si on complexifie et qu'on fait un changement linéaire de coordonnées dans  $\mathbb{C}^2$  qui ramène la partie linéaire  $L$  de  $T$  à être de la forme  $T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ v/\lambda \end{pmatrix}$  avec  $\lambda = e^{i\alpha}$ , l'espace tangent à  $\Gamma_{2n+1} \cdot T$  est formé de  $\delta T$  de la forme  $\delta T(u, v) = \begin{pmatrix} \delta T_1(u, v) \\ \delta T_2(u, v) \end{pmatrix}$  où  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) sont des polynômes homogènes de degré  $2n+1$  en  $u$  et  $v$  sans termes en  $u^{n+1}v^n$  (resp.  $u^n v^{n+1}$ ). La tangente à la courbe  $a_n \rightarrow T(a_0, \dots, a_n)$  est de la forme  $\delta T = (au + bv)^{2n+1} V_0$  où  $V_0 \in \mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)$  et  $au + bv$  est la forme linéaire transformée de  $\xi - x$ , en particulier ni  $a$ , ni  $b$  ne sont nuls ; donc  $(au + bv)^{2n+1}$  contient des termes en  $u^n v^{n+1}$ .

Fin de la preuve. Il résulte du lemme 1 et de la construction des invariants de Birkhoff ([S-M] p. 158, relation 18) que,  $a_0, \dots, a_{n-1}$  étant fixés, on a  $b_n = B + Ca_n$ . Le lemme 2 montre alors que  $C \neq 0$ .

## 5. CONCLUSION ET PROBLEMES.

Soit  $\Gamma_t$  une famille de courbes convexes fermées  $C^\infty$  dépendant continûment de  $t$  telle que :

- 1)  $\forall t$ ,  $\Gamma_t$  a les symétries d'une ellipse ;
- 2)  $\Gamma_t$  vérifie la condition (H) (cela implique que le rayon de courbure aux sommets du petit axe est constant) ;
- 3) le spectre des longueurs des trajectoires du billard  $\Gamma_t$  est indépendant de  $t$ , alors :

THEOREME. Sous les conditions précédentes, la série de Taylor de  $\Gamma_t$  près des sommets du petit axe est indépendante de  $t$ .  
En particulier, si  $\Gamma_t$  est analytique réelle,  $\Gamma_t$  est isométrique à  $\Gamma_0$ .

Revenons au problème plus général de l'asymptotique du spectre des longueurs des trajectoires périodiques de type  $(n, m)$  : les résultats précédents sont relatifs à l'asymptotique  $n = n/2$ .

L'article de Marvizi-Melrose décrit l'asymptotique  $m = \text{cte}$ ,  $n \rightarrow +\infty$  des longueurs des trajectoires s'accumulant sur le bord.

On peut généraliser les considérations de notre exposé au cas d'une trajectoire stable générique de type  $(n_0, m_0)$  et obtenir des asymptotiques de longueurs de trajectoires de type  $(kn_0, km_0)$ .

Il serait intéressant d'obtenir d'autres renseignements sur l'asymptotique des longueurs ne mettant pas en jeu de trajectoires périodiques stables.

Mentionnons quelques autres problèmes :

① Généralisation des asymptotiques précédentes dans le cas de résonances :  $b_0/\pi \in \mathbb{Q}$ .

② La construction du §4 montre que formellement tout germe de difféomorphisme symplectique de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  est réalisable par un miroir symétrique : y-a-t-il des résultats de ce type qui ne soient pas seulement formels, par exemple dans le cas intégrable ?

③ Plus généralement, la recherche des billards complètement intégrables semble être un problème largement ouvert. Poritzki ([P]) semble démontrer que, sous certaines hypothèses sur la topologie du feuilletage invariant par  $T$ , il n'y a que les billards elliptiques qui soient complètement intégrables. Il me paraît concevable que certains billards à symétrie équilatérale et de diamètre constant soient intégrables : le petit axe et le grand axe de l'ellipse étant alors remplacés par 2 trajectoires périodiques d'ordre 3, l'une stable, l'autre instable.

