

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

R. MARROT

Sur l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1944

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1944__267__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1944__267__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Série A
N° de Série :
2173
N° D'ORDRE :
3046

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR R. MARROT

1^{re} THÈSE. — SUR L'ÉQUATION INTÉGRODIFFÉRENTIELLE DE BOLTZMANN.

2^e THÈSE. — LES FONCTIONS MONOGÈNES DE M. BOREL.

Soutenues le 30 octobre 1944 devant la Commission d'Examen.

MM. VILLAT	{	<i>Président.</i>
PÉRÈS		<i>Examineurs.</i>
VALIRON		

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1947

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen

PAUL MONTEL

PROFESSEURS

P MONTEL	† Théorie des Fonctions	DUPONT	† Théories chimiques
L BLARINGHEM	† Botanique	LANQUINE	† Géologie structurale et géologie appliquée,
G JULIA	† Analyse supérieure et Algèbre supérieure	VALIRON	† Calcul différentiel et calcul intégral
C MAUGUIN	† Mineralogie	BARRABÉ	Géologie structurale et Géologie appliquée
A MICHEL-LEVY	† Pétrographie	F PERRIN	Théories physiques
A DENJOY	† Géométrie supérieure	VAVON	† Analyse et mesures chimiques
L LUTAUD	† Géographie physique et géologie dynamique	G DARMOIS	† Mathématiques générales
E DARMOIS	† Enseignement de Physique	CHAITON	† Biologie maritime
A DEBIERNE	† Électronique et Radioactivité	AUBEL	Chimie biologique
M JAVILLIER	† Chimie Biologique	JACQUES BOURCART	Géographie physique et Géologie dynamique
ROBERT LEVY	† Physiologie comparée	M ^{me} JOLIO-CURIE	Physique générale et Radioactivité
HENRI VILLAT	† Mécanique des fluides et applications	PLANTEFOL	Botanique
CH JACOB	† Géologie	CABANNES	† Recherches physiques
P PASCAL	† Chimie générale	GRASSE	† Zoologie (Évolution des êtres organisés)
M FRECHET	† Calcul des probabilités et Physique mathématique	PREVOST	Chimie organique
E ESCLANGON	† Astronomie	BOULIGAND	Mathématiques
M ^{me} RAMART-LUCAS	† Chimie organique	CHAUDRON	Chimie
H BÉGHIN	† Mécanique physique et expérimentale	WYART	Mineralogie
FOCH	† Mécanique expérimentale des fluides	TEISSIER	† Zoologie
PAUTHENIER	† Electrotechnique générale	MANGENOT	† Biologie végétale
DE BROGLIE	† Théories physiques	P AUGER	† Physique
CHRÉTIEN	Optique appliquée	MONNIER	Physiologie générale
JOB	† Chimie générale	PIVETEAU	Géologie
PRENANT	† Anatomie et Histologie comparées	ROCARD	Physique
VILLEY	† Mécanique physique et expérimentale	H CARTAN	Calcul différentiel
COMBES	† Physiologie végétale	SCHAEFFER	† Physiologie générale
GARNIER	† Application de l'analyse à la Géométrie	LAFFITTE	Chimie (P C B)
PERES	† Mécanique rationnelle	LERAY	Mécanique théorique des fluides
HACKSPILL	† Chimie minérale	FAVART	Calcul des probabilités et Physique mathématique
LAUGIER	† Physiologie générale	COULOMB	† Physique du globe
IOUSSAINT	Technique Aeronautique	M ^{lle} COUSIN	Biologie animale (P C B)
M CURIE	Physique (P C B)	CHRETIEN	Analyse et mesures chimiques
G RIBAUD	† Hautes températures	DRACH	Évolution des êtres organisés
CHAZY	† Mécanique analytique	CHATELET	† Arithmétique et théorie des nombres
GAULT	† Chimie appliquée	EPHRUSSI	† Génétique
CROZE	† Physique théorique et Physique céleste	WURMSER	† Biologie physico chimique
		KASLER	Physique
		BAUER	† Chimie Physique
		RIVIERE	Géologie

Sect états

. . . .

CH MONIER

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

L'ÉQUATION INTÉGRODIFFÉRENTIELLE DE BOLTZMANN.

INTRODUCTION.

Ce travail est consacré à l'étude de l'équation de Boltzmann, déterminant la répartition des vitesses des molécules dans un gaz. J'ai d'abord repris le raisonnement classique de Boltzmann afin de mettre en évidence le sens de la fonction F qui est celui d'une densité de probabilité. Ceci m'a conduit à étudier le cas où les molécules du gaz obéissent à la dynamique de relativité restreinte; on obtient ainsi une équation admettant des propriétés de symétrie identiques à celles de l'équation classique. Ces propriétés permettent, par de simples intégrations, d'aboutir aux équations complètes de l'Hydrodynamique. Cette méthode, équivalente au fond à celle des équations de transfert de Maxwell est d'une grande simplicité; elle permet de plus d'étudier la variation de l'entropie de la masse gazeuse, et conduit à une notion de *système isolé* définie par des conditions globales portant sur l'ensemble de la paroi. Bien entendu, l'hypothèse de caractère local, d'une réflexion élastique sur la paroi entraîne ces conditions, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire et pourrait être élargie.

Dans le Chapitre II, j'étudie, à la suite d'un Mémoire fondamental de T. Carleman, le cas où, en l'absence de forces extérieures, l'on suppose la fonction de répartition F à symétrie sphérique. Il est alors clair que l'équation de Boltzmann admet formellement deux intégrales premières. Carleman établit que, à toute fonction positive $f(r)$ véri-

fiant la condition $f(r) < \frac{c}{(1+r)^{n+\varepsilon}}$, il correspond une solution unique $F(r, t)$ de l'équation, se réduisant à $f(r)$ pour $t = 0$, vérifiant les intégrales premières et obéissant au H-théorème. J'ai cherché à affaiblir les hypothèses, et j'ai démontré que les solutions vérifient les intégrales premières et le théorème H sous les conditions suivantes :

a. $F(r, t)$ est positive ou nulle pour $0 < r < \infty$, $t > 0$, continue par rapport à r et t .

b. Il existe un nombre α supérieur à 5 (d'ailleurs arbitrairement voisin de 5) tel que l'intégrale $\int_0^\infty F(r, t) r^\alpha dr$ converge uniformément sur tout intervalle pour $0 \leq t \leq t_1$.

c. L'intégrale $\int_0^\infty F(r, t) r^2 dr$ exprimant le nombre des molécules satisfait à la même condition.

Au Chapitre III, j'ai cherché à étendre le champ d'application du théorème de Carleman. Le résultat obtenu est le suivant : pour qu'il existe une solution à symétrie sphérique, lorsque le gaz est soumis à un champ de forces extérieures, il faut d'abord que ce champ dérive d'un potentiel, ensuite que la fonction de distribution initiale vérifie une équation intégrale linéaire aisée à former. S'il existe de telles solutions, la méthode de Carleman convenablement appliquée permet toujours de les obtenir.

Le dernier chapitre est consacré à un essai d'étude des solutions voisines de la solution de Maxwell. On forme l'équation aux variations de l'équation de Boltzmann au voisinage de la solution à e^{-br^2} ; on est ainsi conduit à une équation intégrodifférentielle linéaire qui se prête à une étude assez complète : allure de la solution pour t tendant vers l'infini; réduction à une équation intégrale fournissant une expression analytique de la solution, valable pour $t \geq 0$, unicité de la solution correspondant à des valeurs données pour $t = 0$.

Enfin, j'ai indiqué à la fin du chapitre une représentation analytique d'un caractère différent pour les solutions d'une classe d'équations intégrodifférentielles analogues à l'équation aux variations.

Le problème des solutions voisines de la solution de Maxwell présente beaucoup d'analogies avec la question des mouvements asymptotiques à une position d'équilibre en mécanique et doit pouvoir être traité par une méthode analogue. Toutefois, le nombre de degrés de liberté du système est ici infini, ce qui semble rendre beaucoup plus délicate la question de la convergence des approximations successives. Aussi ne l'ai-je pas abordée ici.

Ce travail n'aurait sans doute jamais vu le jour sans l'aide constante de mon ami A. Lichnerowicz. Je suis heureux de lui adresser ici mes remerciements pour les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer, pendant la recherche comme pendant la rédaction.

M. le Professeur J. Pérès a bien voulu accueillir ce travail : je lui suis profondément reconnaissant de l'appui constant qu'il n'a cessé de m'accorder, ses conseils et ses remarques m'ont été précieux.

M. H. Villat m'a fait l'honneur de présider le jury et d'accueillir ce travail dans son *Journal de Mathématiques* : qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma plus respectueuse reconnaissance.

Enfin M. Valiron a bien voulu accepter de faire partie du jury : c'est une nouvelle marque de bienveillance dont je suis heureux de le remercier ici.

Voici quelques Mémoires qui m'ont été utiles :

L. BOLTZMANN, Vorlesungen über Gastheorie.

T. CARLEMAN, Sur la théorie mathématique de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann (*Act. Math.*, t. 60).

T. CARLEMAN, Sur la théorie mathématique de l'équation de Boltzmann (*Arkiv. for math. och Phys.*, 1932).

T. CARLEMAN, Sur les équations intégrales singulières, à noyau symétrique réel (Uppsala).

E. HECKE, Über die Integralgleichungen der kinetischen Gastheorie (*Math. Zeits.*, t. 12).

D. HILBERT, Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen. Integral-gleichungen (6 ste Mitteilung).

G. JULIA, Séminaire de mathématiques (1934-1935).

Y. ROCARD, L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz.

CHAPITRE I.

1° Dans ce chapitre, nous rappellerons brièvement le raisonnement classique par lequel L. Boltzmann a établi son équation; puis nous l'étendrons au cas où les molécules obéissent à la dynamique de la relativité restreinte; enfin nous étudierons les propriétés de symétrie de l'équation classique et leurs conséquences : équations de l'hydrodynamique et H-théorème; ces propriétés formelles peuvent d'ailleurs s'étendre au cas relativiste.

2° Considérons une masse gazeuse formée d'un nombre très grand N de molécules sphériques identiques, sur lesquelles agit un champ de forces extérieures donné de composantes X, Y, Z au point $P(x, y, z)$ ($X = X(x, y, z)$, etc.). Admettons que l'action des autres molécules sur une molécule M quelconque se réduise à celle des chocs, de sorte qu'en dehors de ces instants de choc, la molécule M n'est soumise qu'au champ X, Y, Z . Supposons la pression du gaz en un point quelconque suffisante pour qu'une molécule arbitraire subisse un grand nombre de chocs par seconde (ce nombre est de l'ordre de 10^9 dans les conditions usuelles). L'énorme dispersion produite par ces chocs très nombreux sur des obstacles de très petits rayons de courbure rend illusoire la détermination par les équations de la mécanique de la trajectoire d'une molécule déterminée en fonction des conditions initiales. A des données initiales physiquement indiscernables correspondront au bout d'un temps très court (de l'ordre de 10^{-6} sec) des trajectoires complètement différentes. Nous n'insisterons pas sur l'analyse détaillée du phénomène qui a été faite par M. É. Borel ⁽¹⁾. La conclusion est que la position et la vitesse d'une molécule du gaz ont le caractère de variables aléatoires. Soit $\vec{p}(\xi, \eta, \xi)$ la quantité de mouvement d'une molécule M (dont la masse au repos est prise pour unité de masse) de vitesse $\vec{V}(u, v, w)$. En mécanique classique on

⁽¹⁾ Cf. É. BOREL, *La Mécanique statistique et l'irréversibilité* (*Journ. de Phys.*, 1913, 5^e série, t. 3).

a $\vec{p} = \vec{V}$; en mécanique relativiste, il n'en est pas ainsi : nous garderons donc les notations distinctes $\vec{p}$ et $\vec{V}$. Pour définir l'état du gaz à l'instant t , nous diviserons l'espace de coordonnées x, y, z en cellules dV , ensembles des points dont les coordonnées sont comprises entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$; nous diviserons de même l'espace des moments en cellules $d\omega$, ensembles des points dont les coordonnées sont comprises entre ξ et $\xi + d\xi$, η et $\eta + d\eta$, ζ et $\zeta + d\zeta$, et nous désignerons par $NF(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) dV d\omega$, ou plus brièvement par $NF(\mathbf{M}, \vec{p}, t) dV d\omega$, le nombre moyen des molécules du gaz appartenant à l'instant t à la classe $(dV, d\omega)$, c'est-à-dire ayant leur centre de gravité situé dans l'élément dV , et leur point de vitesse dans l'élément $d\omega$: il suffit d'imaginer un très grand nombre de systèmes gazeux définis par des conditions initiales (position et vitesse des molécules) physiquement identiques : $NF dV d\omega$ est la moyenne pour l'ensemble de ces systèmes du nombre des molécules de la classe $(dV, d\omega)$. Étudions la variation de ce nombre entre l'instant t et l'instant $t + dt$. Son expression formelle est $N \frac{\partial F}{\partial t} dV d\omega$. Cette variation est due à plusieurs causes; plaçons-nous d'abord dans le cas de la mécanique classique.

1. ENTRÉES ET SORTIES DES MOLECULES POUR L'ELEMENT dV . — La variation correspondante est

$$= N \left(u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right) dV d\omega dt.$$

2. ACTION DU CHAMP EXTERIEUR (X, Y, Z) . — Pendant l'instant dt , la quantité de mouvement d'une molécule *qui ne subit pas de choc* varie de

$$d\xi = X dt, \quad d\eta = Y dt, \quad d\zeta = Z dt.$$

La variation correspondante du nombre des molécules de la classe $(dV, d\omega)$ est

$$= N \left(X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) dV d\omega dt.$$

5. ACTION DES CHOCs MOLECULAIRES. — Supposant que le gaz n'est pas trop comprimé, nous négligeons les chocs triples : leur probabilité est petite devant celle des chocs binaires. Deux sortes de chocs sont susceptibles de modifier le nombre des molécules de la classe $(dV, d\omega)$.

a. Choc d'une molécule $M(dV, d\omega)$ et d'une molécule $M_1(dV, d\omega_1)$. — La molécule M est alors perdue pour la classe $(dV, d\omega)$. Pour évaluer le nombre moyen de ces chocs, soient M_1 une molécule susceptible de choquer M , $\vec{W}$ sa vitesse relative par rapport à M , P le point du plan π mené par M normalement à $\vec{W}$, où la parallèle à $\vec{W}$ issue de M_1 vient percer ce plan, et enfin $d\sigma$ un élément d'aire du plan π de centre P . Les molécules M_1 pouvant choquer M dans $d\sigma$ pendant le temps dt ont leur centre dans le cylindre de base $d\sigma$, de hauteur $|\vec{W}| dt$. L'ensemble de tous les cylindres ainsi associés à chaque molécule $(dV, d\omega)$ occupe un volume

$$N \cdot F |\vec{W}| d\sigma dt d\omega.$$

Ce volume doit d'ailleurs être supposé intérieur à dV , ce qui exige que dt soit pris assez petit. Le nombre moyen des molécules de la classe $(dV, d\omega_1)$ contenu dans ces cylindres est donc

$$N^2 F \cdot F_1 |\vec{W}| d\sigma dt d\omega d\omega_1 dV,$$

en désignant comme nous le ferons désormais par F_1 la fonction $F(M, \vec{p}_1, t)$. Le raisonnement précédent, qui équivaut au fond à l'application du théorème des probabilités composées, suppose qu'il y a indépendance entre les molécules M et les molécules M_1 : c'est un point que l'on peut justifier en invoquant la dispersion due aux chocs.

Le nombre moyen des chocs, c'est-à-dire le nombre moyen des molécules perdues par la classe $(dV, d\omega)$ du fait des chocs, est donc

$$N^2 dV d\omega dt \iint_{\Omega_1 \Sigma} F \cdot F_1 |\vec{W}| d\sigma d\omega_1,$$

où Ω_1 désigne l'espace des quantités de mouvement $\vec{p}_1$, et Σ l'aire du plan Π où les chocs peuvent se produire. Dans le calcul précédent, nous avons d'ailleurs négligé le volume propre occupé par les molé-

cules, ce qui revient encore à supposer que le gaz n'est pas trop comprimé. Pour définir Σ , on peut, soit imaginer les molécules comme de petites sphères de rayon ρ , le choc se produisant quand les sphères entrent en contact, soit comme des points exerçant les uns sur les autres des forces centrales très grandes quand la distance des points est inférieure ou égale à 2ρ , nulles ou du moins négligeables quand cette distance est supérieure ou égale à 2ρ . Dans tous les cas, la durée du choc doit être considérée comme infiniment petite par rapport à dt . L'aire Σ est donc un cercle du plan Π , de centre M , de rayon 2ρ .

b. Choc d'une molécule $M'(dV, d\omega')$ et d'une molécule $M_1(dV, d\omega_1)$ rejetant la molécule M' dans la classe $(dV, d\omega)$. — A la fin du choc les molécules M' et M_1 ont des quantités de mouvement $\vec{p}$ (par hypothèse) et $\vec{p}_1$. Pour obtenir tous les couples $\vec{p}', \vec{p}_1'$ donnant lieu à un choc de l'espèce étudiée, il suffit donc de prendre un choc de l'espèce a défini par le couple initial $\vec{p}, \vec{p}_1$ et le point P , de coordonnées ρ, ε dans Π , de calculer les valeurs finales des quantités de mouvement

$$(C_1) \quad \begin{cases} \vec{p}' = \vec{p}'(\vec{p}, \vec{p}_1, \rho, \varepsilon), \\ \vec{p}_1' = \vec{p}_1'(\vec{p}, \vec{p}_1, \rho, \varepsilon), \end{cases}$$

ainsi que les coordonnées ρ', ε' du point P' où la parallèle issue de M' (position de M en fin de choc, qui coïncide donc avec la position initiale M) au vecteur vitesse relative de M_1 par rapport à M' , $\vec{W}'$ pour le plan Π' mené par M' perpendiculairement à $\vec{W}'$; on aura tous les couples $\vec{p}', \vec{p}_1'$ de valeurs initiales pour un choc de l'espèce b en laissant à $\vec{p}$ sa valeur fixe, en prenant $\vec{p}_1$ arbitraire dans Ω_1 , ρ arbitraire entre 0 et 2ρ , ε arbitraire entre 0 et 2π .

Un raisonnement identique à celui du paragraphe a . fournit alors pour le nombre des molécules gagnées par la classe $(dV, d\omega)$ l'expression

$$N^2 dV dt \iint_{\Sigma'} F' F_1' |\vec{W}'| d\sigma' d\omega' d\omega_1',$$

où le domaine d'intégration est défini par ce qui précède.

Le bilan total pour la classe $(dV, d\omega)$ fournit donc la relation

$$\begin{aligned} (E_1) \quad d\omega \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \sum^u \frac{\partial F}{\partial r} + \sum^\lambda \frac{\partial F}{\partial z} \right\} &= \lambda \iint_{\Sigma'} (F' F_1) |\vec{W}'| d\sigma' d\omega' d\omega_1 \\ &= \lambda \iint_{\Omega_1 \Sigma} (F F_1) |\vec{W}| d\sigma d\omega d\omega_1. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant les lois du choc :

1° Conservation de la quantité de mouvement

$$(1) \quad \vec{p} + \vec{p}_1 = \vec{p}' + \vec{p}'_1.$$

2° Conservation de l'énergie

$$(2) \quad E + E_1 = E' + E'_1.$$

E désignant l'énergie cinétique de la particule M . De ces relations résulte comme on le vérifie aussitôt l'égalité avant et après le choc des valeurs absolues des vitesses relatives

$$(3) \quad |\vec{W}'| = |\vec{W}|$$

Enfin, les équations du choc s'obtenant par passage à la limite des équations de la mécanique, on peut appliquer le théorème de Liouville aux molécules M et M_1 . On trouve ainsi

$$(4) \quad d\sigma d\omega d\omega_1 = d\sigma' d\omega' d\omega'_1.$$

Grâce à (3) et (4), l'équation (E_1) prend la forme classique

$$(E) \quad \{F\} = T(F),$$

en posant

$$(5) \quad \{F\} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum^u \frac{\partial F}{\partial r} + \sum^\lambda \frac{\partial F}{\partial z}.$$

$$(6) \quad T(F) = \lambda \iint_{\Omega_1 \Sigma} (F' F_1 - F F_1) |\vec{W}| d\sigma d\omega_1.$$

Il importe de noter que les relations (1) et (2), ainsi que leur conséquence (3) et la relation (4), subsistent si l'on substitue aux chocs proprement dits l'action de forces de grande intensité et de faible

rayon d'action (inférieur à une constante 2ρ de l'ordre de grandeur du diamètre moléculaire) *pourvu que ces forces soient conservatrices.*

La relation (6) n'est pas encore complètement explicite, car les relations (1) et (2) ne déterminent pas entièrement l'état des vitesses après le choc. Il est aisé de les compléter en se plaçant pour plus de simplicité dans l'hypothèse du choc élastique. On posera alors

$$\vec{p}' = \vec{p} - \vec{P}; \quad \vec{p}'_1 = \vec{p}_1 + \vec{P},$$

où le vecteur percussion $\vec{P}$ a la direction de la normale commune aux deux sphères en contact.

Remarque. — La relation (6) est susceptible d'une forme légèrement différente mettant en jeu la vitesse normale relative W_n , projection du vecteur $\vec{W}$ sur la normale commune aux deux sphères. Soit $d\Sigma'$ l'élément d'aire de la sphère du centre M, de rayon 2ρ qui se projette suivant $d\sigma$ sur le plan π et $d\Sigma$ l'élément d'aire homothétique sur la sphère S de centre M, de rayon unité. On a évidemment

$$|\vec{W}| d\sigma = |\vec{W}_n| d\Sigma = 4\rho^2 |W_n| d\Sigma.$$

La fonctionnelle $T(F)$ prend alors la forme

$$(6') \quad T(F) = 2N\rho^2 \iint_{\Omega, \Sigma} (F'F'_1 - F F_1) W_n d\omega_1 d\Sigma.$$

Terminons en explicitant complètement les calculs. On a

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi - \alpha W_n, & \xi'_1 &= \xi_1 + \alpha W_n, \\ \eta' &= \eta - \beta W_n, & \eta'_1 &= \eta_1 + \beta W_n, \\ \zeta' &= \zeta - \gamma W_n, & \zeta'_1 &= \zeta_1 + \gamma W_n, \end{aligned}$$

où

$$W_n = \alpha(\xi_1 - \xi) + \beta(\eta_1 - \eta) + \gamma(\zeta_1 - \zeta),$$

les coordonnées α, β, γ du point courant de la sphère unité S étant liées par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

5. ÉQUATION RELATIVISTE DE LA THÉORIE DES GAZ. — Nous supposons dans ce paragraphe que les molécules obéissent à la dynamique de la

relativité restreinte. Avec les notations introduites au paragraphe 2, et en désignant par $R(x, y, z, t)$ un système de référence lié à l'observateur (indépendant donc des molécules du gaz) le premier membre $\{F\}$ de l'équation (E) subsiste sans modification

$$\{F\} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum u \frac{\partial F}{\partial x} + \sum \frac{\partial F}{\partial \xi}.$$

Reprenons le décompte des chocs. Soit M une molécule de la classe $(dV, d\omega)$, R' un système de référence lié à M ; supposons que le champ extérieur (X, Y, Z) n'est pas trop intense, de façon à pouvoir négliger la variation de la vitesse d'une molécule M libre pendant le temps dt ; dans ces conditions, R' est en translation uniforme par rapport à R , et l'on passe de l'un à l'autre par la transformation de Lorentz. Soit M_1 une molécule de quantité de mouvement $\vec{p}_1$ (par rapport à R) venant choquer M . Si, au début du choc, nous désignons par $\vec{V}$ et $\vec{V}_1$ les vitesses de M et M_1 par rapport à R , la vitesse relative $\vec{W}$ de M_1 par rapport à M , c'est-à-dire la vitesse de M_1 par rapport à R' est donnée par la formule aisée à vérifier

$$|\vec{W}|^2 = \frac{|\vec{V}|^2 + |\vec{V}_1|^2 - 2\vec{V} \cdot \vec{V}_1 - |\vec{V} \wedge \vec{V}_1|^2}{(1 - \vec{V} \cdot \vec{V}_1)^2},$$

où l'on a pris la vitesse de la lumière pour unité.

Comme en mécanique classique nous supposerons le choc dû à l'action pratiquement instantanée (d'une durée négligeable par rapport à l'élément de temps dt intervenant dans la mise en équation) de forces conservatives. Nous admettrons donc qu'à la fin du choc la quantité de mouvement et l'énergie totale du système des deux molécules M et M' ont repris les valeurs qu'elles avaient au début du choc. On en déduit que $|\vec{W}|$ a la même valeur au début et à la fin du choc ⁽¹⁾ : il suffit pour cela de voir que $|\vec{W}|$ ne dépend que de

(1) Il faut noter que les systèmes de référence R' correspondant au début et à la fin du choc quoique coïncidant dans l'espace sont bien distincts, car ils ont des vitesses différentes relativement à R .

$K^2 = |\vec{p} + \vec{p}_1|^2$, et de l'énergie cinétique totale $\mathcal{E}$. En effet, la masse au repos d'une molécule étant toujours prise pour unité, on a

$$K^2 = \frac{|\vec{V}|^2}{1 - |\vec{V}|^2} + \frac{|\vec{V}_1|^2}{1 - |\vec{V}_1|^2} + \frac{2\vec{V} \cdot \vec{V}_1}{\sqrt{(1 - |\vec{V}|^2)(1 - |\vec{V}_1|^2)}},$$

$$\mathcal{E}^2 = \frac{1}{1 - |\vec{V}|^2} + \frac{1}{1 - |\vec{V}_1|^2} + \frac{2}{\sqrt{(1 - |\vec{V}|^2)(1 - |\vec{V}_1|^2)}}.$$

Par suite, on a

$$|\vec{W}|^2 = 1 - \frac{1}{\Lambda^2}$$

en posant

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - K^2) - 1 = \frac{1 - \vec{V} \cdot \vec{V}_1}{\sqrt{(1 - |\vec{V}|^2)(1 - |\vec{V}_1|^2)}}.$$

Ainsi, comme en mécanique classique, on a

$$|\vec{W}| = |\vec{W}'|.$$

Les molécules $M_1(dV, d\omega_1)$ susceptibles de choquer une molécule M dans l'aire $d\sigma$ du plan Π , perpendiculaire en M à $\vec{W}$, au cours du temps dt , ont leurs centres dans un élément de volume cylindrique dont la mesure dans (R) est $|\vec{W}| d\sigma dt$. (On peut utiliser comme intermédiaire l'expression de ce volume dans R' $|\vec{W}'| d\sigma d\tau$, τ temps propre de R' .)

Il résulte alors du raisonnement rappelé dans le cas classique que le nombre des molécules perdues par la classe $(dV, d\omega)$ du fait des chocs est encore

$$N^2 d\omega dV dt \iint_{\Omega_1 \Pi} F F_1 |\vec{W}| d\sigma d\omega_1.$$

Le nombre des molécules gagnées par la classe $(dV, d\omega)$ grâce aux chocs des espèces contraires est de même

$$N^2 dV dt \iint_{\Pi'} |\vec{W}| F' F'_1 d\sigma' d\omega' d\omega'_1.$$

Enfin, les quantités de mouvement étant les variables conjuguées des coordonnées de position, le théorème de Liouville s'étend à la relativité restreinte, donc, par passage à la limite aux chocs; et l'on a

$$d\sigma d\omega d\omega_1 = d\sigma' d\omega' d\omega'_1.$$

Le bilan total nous conduit donc encore à l'équation

$$(E_1) \quad \{F\} = N \iint_{\Omega_1 \Pi} (F' F'_1 - F F_1) |\vec{W}| d\sigma d\omega_1.$$

Pour achever d'expliciter l'équation, il faudrait encore déterminer effectivement $\vec{p}'$ et $\vec{p}'_1$ en fonction de $\vec{p}$, $\vec{p}_1$ et des variables de position de l'élément $d\sigma$ dans le plan Π : c'est une question que nous n'aborderons pas.

L'équation (E') sans être notablement plus compliquée que l'équation classique (E) présente, semble-t-il, l'intérêt d'être applicable au cas des particules de grande vitesse. Son analogie de forme avec (E) permet d'étendre au cas relativiste les propriétés formelles de l'équation (E), en particulier la détermination, lorsqu'il existe de l'état stationnaire. A la solution de Maxwell pour un gaz homogène en équilibre

$$F = a e^{-hE} = a e^{-\frac{h}{2} u^2 + v^2 + w^2},$$

correspond la formule relativiste, bien connue en mécanique statistique,

$$F = a e^{-hE} = a e^{-\frac{h}{\sqrt{1-\beta^2}} \tilde{E}^2},$$

où E désigne dans les deux cas l'énergie cinétique d'une molécule.

4. PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE DE L'ÉQUATION (E). INTÉGRALES PREMIÈRES. —

Les propriétés fondamentales de l'équation (E) résultent de certaines symétries de l'expression $T(F)$ dont la signification physique est d'ailleurs évidente. Nous ferons l'hypothèse que les formules du choc sont réciproques, c'est-à-dire que la transformation faisant passer de $\vec{p}$, $\vec{p}_1$, φ , ε à $\vec{p}'$, $\vec{p}'_1$, φ' , ε' coïncide avec son inverse. On le vérifie aisément dans le cas des chocs en mécanique classique. Toutefois,

faute d'une démonstration rigoureuse de cette propriété en dynamique relativiste, nous l'admettons comme hypothèse.

Étudions donc l'intégrale

$$I = \int_{\Omega} \Phi(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta) T(F) d\omega = N \iiint_{\Sigma \Omega_1 \Sigma} \Phi(F'F'_1 - F F_1) \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma.$$

En prenant pour nouvelles variables d'intégration $\xi', \eta', \zeta', \xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, \varphi', \varepsilon'$ au lieu de $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \varphi, \varepsilon$, on a, grâce à (5),

$$J = \iiint_{\Sigma \Omega \Omega_1} \Phi F'F'_1 \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma = \iiint_{\Sigma' \Omega' \Omega'_1} \Phi F'F'_1 \left| \vec{W} \right| d\omega' d\omega'_1 d\sigma'.$$

En échangeant les variables primées et non primées, on a, d'après la réciprocité des formules de choc,

$$J = \iiint_{\Sigma \Omega \Omega_1} \Phi' F'F'_1 \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma.$$

Par suite,

$$I = N \iiint_{\Sigma \Omega \Omega_1} (\Phi' - \Phi) F'F'_1 \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma.$$

Échangeant le rôle de $\hat{p}$ et $\vec{p}_1$, il vient

$$I = N \iiint_{\Sigma \Omega \Omega_1} (\Phi'_1 - \Phi_1) F'F'_1 \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma,$$

et par suite

$$I = \frac{N}{2} \iiint_{\Sigma \Omega \Omega_1} F'F'_1 (\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1) \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma.$$

D'où l'on déduit par le même procédé

$$I = -\frac{N}{2} \iiint_{\Sigma \Omega \Omega_1} F'F'_1 (\Phi' + \Phi'_1 - \Phi - \Phi_1) \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma.$$

D'où enfin la formule fondamentale

$$(6') \quad I = \frac{N}{4} \iiint_{\Sigma \Omega \Omega_1} (F'F'_1 - F F_1) (\Phi + \Phi_1 - \Phi' - \Phi'_1) d\omega d\omega_1 d\sigma.$$

Le facteur $\Phi + \Phi_1 - \Phi' - \Phi'_1$ s'annule manifestement pour les cinq fonctions

$$\Phi = x, \quad \Phi = \xi, \quad \Phi = \eta, \quad \Phi = \zeta, \quad \Phi = E,$$

énergie cinétique d'une molécule, d'après les lois du choc. On a donc les identités

$$(7) \quad \int_{\Omega} \Phi T(F) d\omega = 0, \quad \text{pour } \Phi = 1, \xi, \eta, \zeta, E.$$

Elles expriment que les chocs moléculaires laissent invariants le nombre, la quantité de mouvement et l'énergie de l'ensemble des molécules de l'élément dV . De là nous allons tirer les équations habituelles de la mécanique des fluides en nous bornant pour plus de simplicité à la mécanique classique, où $\xi = u$, $\eta = v$, $\zeta = w$.

Pour cela, il nous sera utile de calculer des intégrales telles que $\int_{\Omega} u \frac{\partial F}{\partial u} d\omega$, $\int_{\Omega} v \frac{\partial F}{\partial v} d\omega$, etc. Soit S_R une sphère de centre O, de rayon R, dans l'espace Ω . On a

$$(8) \quad \int_{V(S)} u \frac{\partial F}{\partial u} d\omega = \int_S u F dv dw - \int_{V(S)} F d\omega.$$

Or, pour que le nombre des molécules et l'énergie cinétique de la masse gazeuse soient définis, on doit supposer la convergence des intégrales

$$\int_{\Omega} F d\omega, \quad \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) F d\omega.$$

Comme $F > 0$, il en résulte la convergence de

$$\int_{\Omega} |u| F d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \left(\int_{S_\rho} |u| F d\sigma \right) d\rho,$$

$d\sigma$ étant l'élément d'aire de la sphère $d\sigma$. Par suite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |u| F d\sigma = 0$$

a fortiori

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |\alpha u F| d\sigma = 0.$$

α désignant le cosinus de l'angle de l'axe ou et du rayon vecteur joignant zéro à $d\sigma$. Il existe donc une suite $R_i \rightarrow \infty$ telle que

$$\lim_{R_i \rightarrow \infty} \int_{S_{R_i}} |u F \alpha| d\sigma = 0,$$

a fortiori

$$\lim_{R_i \rightarrow \infty} \int_{S_{R_i}} u F \, dv \, d\omega = 0.$$

Appliquons alors l'équation (8) en prenant pour S une sphère de rayon R_i et faisons tendre R_i vers l'infini

$$(9) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial F}{\partial u} \, d\omega = - \int_{\Omega} F \, d\omega.$$

La même méthode montre que

$$(9') \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial F}{\partial v} \, d\omega = \int_{\Omega} v \frac{\partial F}{\partial u} \, d\omega = 0,$$

$$(10) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u} \, d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial v} \, d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial w} \, d\omega = 0.$$

Reprenons l'équation (E) et intégrons les deux membres dans l'espace Ω_i entier, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} F \, d\omega + \mathbf{S} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega} u F \, d\omega + \mathbf{S} \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u} \, d\omega = 0.$$

Pour alléger l'écriture, nous poserons

$$\int_{\Omega} F \, d\omega = n, \quad \int_{\Omega} u F \, d\omega = \bar{u}, \quad \int_{\Omega} u v F \, d\omega = \bar{u} \bar{v}, \quad \dots$$

En tenant compte de (10), la relation précédente peut alors s'écrire

$$(11) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0.$$

C'est la relation de continuité hydrodynamique. Pour la mettre sous la forme habituelle, il suffit d'introduire la densité ρ du fluide en $\mathbf{M}(x, y, z)$, et la vitesse de l'élément fluide en $\mathbf{M}$: u_0, v_0, w_0 . On a

$$\rho = N \int_{\Omega} F \, d\omega = N n; \quad u_0 = \frac{\int_{\Omega} u F \, d\omega}{\int_{\Omega} F \, d\omega} = N \frac{\bar{u}}{\rho}.$$

La relation (11) s'écrit alors

$$(11') \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_0) = 0,$$

ou, si l'on introduit les dérivées d'Euler,

$$(11'') \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{d\rho}{dt} &+ \rho \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Multiplions maintenant les deux membres de l'équation (E) par u , puis par v et w , et intégrons chaque fois dans l'espace Ω . Tenant compte de (9) et (9') il vient

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} = n\Lambda, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} = n\Upsilon, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}w}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} = nZ. \end{cases}$$

Ce sont les équations générales de l'hydrodynamique. Introduisons la vitesse relative (U, V, W) d'une molécule de la classe dV par rapport à l'élément fluide situé en M . On a aussitôt

$$\begin{aligned} u &= u_0 + U, & \bar{u} &= nu_0, & \bar{U} &= 0, \\ \bar{u}^2 &= nu_0^2 + \bar{U}^2, & \dots, & & \bar{u}v &= nu_0v_0 + \bar{U}\bar{V}, & \dots \end{aligned}$$

La première équation (12) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_0^2 + \Lambda \bar{U}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_0 v_0 + \Lambda \bar{U}\bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_0 w_0 + \Lambda \bar{U}\bar{W}) = \rho \Lambda.$$

Tenant compte de l'équation de continuité (11'), il vient

$$\rho \frac{du_0}{dt} + \Lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\bar{U}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{U}\bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{U}\bar{W}) \right\} = \rho \Lambda,$$

de même

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_0}{dt} + \Lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\bar{V}\bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{V}^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{V}\bar{W}) \right\} &= \rho \Upsilon, \\ \rho \frac{dw_0}{dt} + \Lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\bar{W}\bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{W}\bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{W}^2) \right\} &= \rho Z. \end{aligned}$$

En comparant à la forme usuelle des équations de l'hydrodynamique, on voit apparaître le tenseur à 9 composantes des pressions

$$\begin{aligned} & \overline{U^2}, \quad \overline{UV}, \quad \overline{UW}, \\ & \overline{UV}, \quad \overline{V^2}, \quad \overline{VW}, \\ & \overline{UW}, \quad \overline{VW}, \quad \overline{W^2}, \end{aligned}$$

et l'on voit qu'il est bien symétrique.

Multiplions enfin par $E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}r^2$ les deux membres de l'équation (E) et intégrons dans Ω en utilisant la relation

$$\int_{\Omega} E \frac{\partial F}{\partial u} d\omega = - \int_{\Omega} u F d\omega = - \overline{u},$$

nous obtenons l'équation de conservation de l'énergie

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} F r^2 d\omega + \mathbf{S} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega} u F r^2 d\omega = 2(\overline{u} X + \overline{v} Y + \overline{w} Z),$$

dans laquelle on peut éliminer X, Y, Z grâce aux équations (12).

Les calculs qui nous ont conduit aux équations (11), (12), (13) fournissent ainsi un résultat équivalent à la méthode des équations de transfert; ils peuvent d'ailleurs être étendus au cas d'un mélange de plusieurs fluides.

3. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION H. — Introduisons avec L. Boltzmann la fonction

$$(14) \quad H(x, y, z, t) = \int_{\Omega} F \log F d\omega,$$

et supposons le champ extérieur nul : $X = Y = Z = 0$. Multiplions les deux membres de (E) par $(1 + \log F)$ et intégrons dans l'espace Ω

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial t} (1 + \log F) d\omega + \mathbf{S} \int_{\Omega} u \frac{\partial F}{\partial x} (1 + \log F) d\omega \\ & = \int_{\Omega} (1 + \log F) T(F) d\omega = \int_{\Omega} \log F T(F) d\omega. \end{aligned}$$

En posant dans la formule (6) $\Phi = \log F$, il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} T(F) \log F \, d\omega \\ &= -\frac{1}{4} \iiint_{\Sigma \Omega \Omega_1} (F' F_1' - F F_1) |\log F F_1' - \log F F_1| |\hat{W}| \, d\omega \, d\omega_1 \, d\sigma. \end{aligned}$$

La fonction $\log x$ étant croissante, l'élément différentiel de la seconde intégrale est toujours positif, par suite,

$$\int_{\Omega} T(F) \log F \, d\omega \leq 0.$$

Nous obtenons ainsi une inégalité de transfert pour l'entropie

$$(15) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{S} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega} u F \log F \, d\omega \leq 0.$$

6. INTEGRALES PREMIÈRES. — Supposons d'abord le gaz homogène, F ne dépendant pas de $\mathbf{M}(x, y, z)$, le champ extérieur étant toujours nul, les formules (11), (12) et (13) se simplifient et fournissent *cinq intégrales premières de l'équation E*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F \, d\omega &= A; & \int_{\Omega} u F \, d\omega &= U_0; & \int_{\Omega} v F \, d\omega &= V_0; \\ \int_{\Omega} w F \, d\omega &= W_0; & \int_{\Omega} F r^2 \, d\omega &= B. \end{aligned}$$

La formule (15) donne alors le H-théorème

$$\frac{dH}{dt} \leq 0.$$

Revenons au cas général, en supposant la masse gazeuse enfermée dans une enceinte dont nous désignerons la paroi par S , et intégrons dans le volume limité par S les équations (11), (12), (13) et (15).

De l'équation (11) résulte

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n \, dx \, dy \, dz + \int_V \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\} dx \, dy \, dz = 0.$$

La seconde intégrale se transforme en une intégrale de surface; d'où la formule

$$(11') \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V n \, dx \, dy \, dz + \iint_S \bar{u} \, dy \, dz + \bar{v} \, dz \, dx + \bar{w} \, dx \, dy = 0,$$

qui exprime ce résultat évident : la variation du nombre des molécules continue dans (S) est égale au flux des molécules à travers la surface S.

Les équations (12) fournissent de même par intégration

$$(12') \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \, dx \, dy \, dz + \int_S \bar{u}^2 \, dy \, dz + \overline{uv} \, dz \, dx + \overline{uw} \, dx \, dy = \int_V n \, \lambda \, dx \, dy \, dz,$$

ce qui traduit le théorème de la conservation de la quantité de mouvement pour l'ensemble de la masse du gaz. Enfin l'équation (13) fournit :

$$(13') \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \int_{\Omega} F r^2 \, d\omega + \int_S \left\{ \int_{\Omega} u F r^2 \, d\omega \right\} dy \, dz \\ + \left\{ \int_{\Omega} v F r^2 \, d\omega \right\} dz \, dx \\ + \left\{ \int_{\Omega} w F r^2 \, d\omega \right\} dx \, dy = \int_V (\bar{u} \, \lambda + \bar{v} \, \chi + \bar{w} \, \zeta) \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

qui exprime la conservation de l'énergie.

De là résultent les conditions à imposer à la masse gazeuse pour exprimer qu'elle est isolée : tout d'abord $X = Y = Z = 0$; puis les conditions portant sur le *comportement de F à la frontière* :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} (16_1) \left\{ \iint_S \bar{u} \, dy \, dz + \bar{v} \, dz \, dx + \bar{w} \, dx \, dy = 0, \right. \\ \left. \iint_S \bar{u}^2 \, dy \, dz + \overline{uv} \, dz \, dx + \overline{uw} \, dx \, dy = 0, \right. \\ (16_2) \left\{ \iint_S \overline{uv} \, dy \, dz + \bar{v}^2 \, dz \, dx + \overline{vw} \, dx \, dy = 0, \right. \\ \left. \iint_S \overline{uw} \, dy \, dz + \overline{vw} \, dz \, dx + \bar{w}^2 \, dx \, dy = 0, \right. \\ (16_3) \left\{ \iint_S \left\{ \int_{\Omega} u F r^2 \, d\omega \right\} dy \, dz + \dots \right. \end{array} \right. = 0.$$

Les cinq conditions (16) ne suffisent pas à exprimer que le système est isolé : elles n'entraînent pas le H-théorème. Intégrons donc l'inégalité (15) dans le volume V et posons

$$\mathcal{H} = \int_V H \, dx \, dy \, dz.$$

Il vient

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \iint_S \left\{ \int_{\Omega} u \, F \log F \, d\omega \right\} dy + dz \left\{ \int_{\Omega} v \, F \log F \, d\omega \right\} dz + dx + \dots \leq 0.$$

Nous compléterons la définition du système isolé en posant

$$(17) \quad \iint_S \left(\int_{\Omega} u \, F \log F \, d\omega \right) dy \, dz + \dots = 0;$$

l'inégalité ainsi obtenue $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \leq 0$ nous permet de définir l'entropie de la masse gazeuse par la relation généralisée de Boltzmann

$$S = k \mathcal{H}$$

en gardant l'énoncé classique : l'entropie d'un système isolé va toujours en croissant.

7. CONDITIONS AUX LIMITES VÉRIFIÉES PAR F. — Plaçons-nous toujours dans le cas où le gaz est enfermé dans une enceinte. En tout point de la paroi S de cette enceinte F doit alors vérifier une condition supplémentaire. Supposons — c'est l'hypothèse la plus simple — la paroi parfaitement élastique. Si $\vec{p}$ est la quantité de mouvement d'une molécule incidente, $\vec{p}_1$ la quantité de mouvement de cette molécule après réflexion, $\vec{n}$ la normale unitaire à la paroi, dirigée vers l'intérieur au point d'incidence, de composantes α, β, γ , on a

$$(18) \quad \vec{p}_1 \cdot \vec{n} = -\vec{p} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{p}_1 = \vec{p} - 2\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n}).$$

En particulier

$$(18') \quad |\vec{p}_1|^2 = |\vec{p}|^2.$$

F vérifie évidemment la condition $F(\vec{p}) = F(\vec{p}_1)$ (19).

Alors

$$\bar{u} = \int_{\vec{p}, \vec{n} > 0} u F d\omega + \int_{\vec{p}, \vec{n} < 0} u F d\omega.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \bar{u}\alpha + \bar{v}\beta + \bar{w}\gamma &= \int_{\Omega} (u\alpha + v\beta + w\gamma) F d\omega = \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \vec{n} F d\omega, \\ \bar{u}\alpha + \bar{v}\beta + \bar{w}\gamma &= \int_{\vec{p}, \vec{n} > 0} \vec{p} \cdot \vec{n} F d\omega + \int_{\vec{p}, \vec{n} < 0} \vec{p} \cdot \vec{n} F d\omega. \end{aligned}$$

Les deux intégrales se détruisent élément par élément si l'on tient compte de (18) et (19). Donc,

$$\bar{u}\alpha + \bar{v}\beta + \bar{w}\gamma = 0.$$

On obtient de même, grâce à (18'),

$$\begin{aligned} \overline{ur^2}\alpha + \overline{vr^2}\beta + \overline{wr^2}\gamma &= 0, \\ u \overline{\log F}\alpha + v \overline{\log F}\beta + w \overline{\log F}\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients différentiels dans les formules, (16₁) (16₂) et (17) sont identiquement nuls; il s'agit donc là de propriétés *locales* : constance du nombre de molécules, conservation de l'énergie, entropie. Il ne peut évidemment en être de même avec les formules (16₂) : la quantité de mouvement n'est pas localement conservée.

CHAPITRE II.

SOLUTIONS A SYMÉTRIE SPHERIQUE, EN L'ABSENCE DE CHAMP EXTERIEUR.

1. LES SOLUTIONS A SYMÉTRIE SPHERIQUE. — Nous nous limiterons désormais à l'équation (1) de Boltzmann correspondant à la dynamique classique.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'une fonction de distribution est à symétrie sphérique si elle ne dépend du vecteur $\vec{p}$ que par son module.*

Ainsi F ne dépend alors des composantes u, v, w de la vitesse d'une molécule que par l'intermédiaire du groupement :

$$r^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier les solutions à symétrie sphérique de l'équation (E) correspondant au cas où le champ (X, Y, Z) est nul. L'équation (E) s'écrit alors

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \sum u \frac{\partial F}{\partial x} = T(F)$$

ou

$$(2) \quad \sum u \frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial t} + T(F).$$

Si F est à symétrie sphérique, le second membre de (2) ne dépend de u, v, w que par l'intermédiaire r . Il doit donc en être de même du premier membre, ce qui entraîne immédiatement

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ainsi, dans ce cas, on ne peut obtenir une fonction à symétrie sphérique que si elle correspond à une distribution homogène du gaz, c'est-à-dire si F est indépendante de x, y, z . Les solutions cherchées satisfont donc à l'équation intégrodifférentielle

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$$

qui sera dite *la forme réduite* de Boltzmann.

2. LA FORME CANONIQUE DE CARLEMAN POUR L'EQUATION DE BOLTZMANN. — Supposons les molécules sphériques, de rayon ρ et reprenons les notations du Chapitre I.

La molécule M_1 rencontre la molécule M lorsque le point M_1 se trouve sur la sphère de centre M de rayon 2ρ . Si donc $4\rho^2 dS$ est l'élément d'aire découpé sur cette sphère par le cylindre qui admet dans le plan M la base $d\sigma$ et dont les génératrices sont parallèles à W, on obtient, en introduisant au lieu de W la vitesse normale relative de M_1 par rapport à M, comme nous l'avons vu au Chapitre I :

$$T(F) = 2N\rho^2 \int_s \int_\Omega (F'F'_1 - FF_1) |W_n| ds d\omega_1,$$

où S désigne la sphère unité. En remplaçant la fonction F par la fonction KF , où K est une constante, on peut toujours réduire le facteur $2N\rho^2$ à l'unité et poser

$$(4) \quad T(F) = J(F) - F L(F)$$

avec

$$(5) \quad J(F) = \int_S \int_{\Omega_1} F' F'_1 \left| \vec{W}_n \right| ds d\omega_1$$

et

$$(6) \quad L(F) = \int_S \int_{\Omega_1} F_1 \left| \vec{W}_n \right| ds d\omega_1.$$

Désignons par r et r_1 les valeurs absolues des vitesses de M et M_1 , par θ et θ_1 les angles de ces vitesses avec le vecteur MM_1 ; r' , r'_1 ; θ' , θ'_1 désigneront les grandeurs correspondantes associées au couple M' , M'_1 . En vertu des équations (1), (2) et (3) relatives aux lois du choc, on a entre ces grandeurs les équations :

$$(7) \quad \begin{cases} r'^2 = r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r^2 \sin^2 \theta, \\ r_1'^2 = r_1^2 \sin^2 \theta_1 + r^2 \cos^2 \theta, \end{cases}$$

et la fonctionnelle $J(F)$ s'exprime par la formule :

$$J(F) = 4\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi F(r', t) F(r'_1, t) |r_1 \cos \theta_1 - r \cos \theta| \sin \theta \sin \theta_1 r_1^2 d\theta d\theta_1 dr_1,$$

tandis que (LF) peut s'écrire :

$$L(F) = 4\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi F(r_1) |r_1 \cos \theta_1 - r \cos \theta| \sin \theta \sin \theta_1 r_1^2 d\theta d\theta_1 dr_1.$$

En prenant comme nouvelles variables d'intégration les variables r' , r'_1 et θ_1 , on voit qu'on peut effectuer dans $J(F)$ l'intégration en θ_1 . Carleman a ainsi ramené par des calculs simples la fonctionnelle $J(F)$ à la forme (¹)

$$(8) \quad J(F) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty G(r, \lambda, \mu) \lambda \cdot \mu \cdot F(\lambda, t) \cdot F(\mu, t) d\lambda d\mu,$$

(¹) Dans toute la suite, nous omettons dans les expressions de $J(F)$ et $L(F)$ le facteur numérique $4\pi^2$ qui ne joue évidemment aucun rôle essentiel.

où λ, μ remplacent r' et r'_1 et où $G(r, \lambda, \mu)$ est la fonction symétrique de λ et μ définie par le tableau pour

$$\begin{array}{ll} \lambda^2 + \mu^2 \leq r^2, & G = 0; \\ \lambda \geq r, \quad \mu \leq r, & G = 1; \\ \lambda \geq r, \quad \mu \leq r, & G = \frac{\mu}{r}; \\ \lambda \leq r, \quad \mu \leq r, & G = \frac{\lambda}{r}; \\ \lambda \leq r, \quad \mu = r \quad \text{avec} \quad \lambda^2 + \mu^2 \leq r^2, & G = \frac{1}{r} (\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - r^2}); \end{array}$$

d'une manière analogue posons

$$P(r, r_1) = \int_0^\pi \int_0^\pi |r_1 \cos \theta_1 - r \cos \theta| \sin \theta \sin \theta_1 d\theta d\theta_1.$$

On obtient ainsi

$$(9) \quad L(F) = \int_0^r P(r, r_1) F(r_1, t) r_1^2 dr_1$$

avec

$$P(r, r_1) = \begin{cases} 2r - \frac{2r_1^2}{3r}, & \text{pour } r_1 \leq r, \\ 2r_1 - \frac{2r^2}{3r_1}, & \text{pour } r_1 \geq r. \end{cases}$$

L'équation ainsi obtenue est la forme canonique de Carleman :

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 4 \int_0^r \int_0^r G(r, \lambda, \mu) \lambda \mu F(\lambda, t) F(\mu, t) d\lambda d\mu \\ - F(r, t) \int_0^r P(r, r_1) F(r_1, t) r_1^2 dr_1.$$

A. Propriétés des solutions de l'équation réduite.

3° Les conditions fondamentales (c). Nous nous proposons d'étudier les propriétés d'une classe de solution de l'équation réduite de Boltzmann.

Envisageons les solutions satisfaisant aux trois conditions suivantes [conditions (c)] :

1° $F(r, t)$ est continue en R et en t pour : $0 < r < \infty, 0 \leq t \leq t_1$.

La fonction F est toujours positive ou nulle.

2° Il existe un nombre $x > 5$ tel que l'intégrale

$$C(t) = \int_0^\infty F(r, t) r^x dr$$

soit uniformément convergente pour $0 \leq t \leq t_1$.

3° Il existe un nombre ρ (aussi petit que l'on voudra) tel que la fonction soit bornée pour $0 \leq r \leq \rho$, $0 \leq t \leq t_1$.

La première hypothèse est imposée par la nature physique du problème, sauf toutefois la condition de continuité par rapport à r . Les deux autres nous apparaissent comme des conditions minima assurant l'existence des intégrales premières et la validité du H-théorème. Établissons en effet sous ces hypothèses la validité des deux intégrales premières correspondant au nombre des molécules et à l'énergie. Commençons par quelques majorations indispensables, en remarquant qu'il résulte des conditions (c) que l'intégrale $C(t)$ est une fonction continue de t sur $(0, t_1)$, qu'elle admet donc sur cet intervalle une borne c_1 .

4° *Bornes supérieures de $J(F)$ et $L(F)$.* — Je dis que, sous les hypothèses faites, les quatre intégrales

$$A = \int_0^\infty F r^2 dr, \quad I = \int_0^\infty F r dr, \quad K = \int_0^\infty F r^3 dr, \quad B = \int_0^\infty F r^4 dr$$

sont bornées pour $0 \leq t \leq t_1$. Il suffit de le voir pour A par exemple,

$$(11) \quad A = \int_0^\rho F r^2 dr + \int_\rho^\infty F r^2 dr < \int_0^\rho F r^2 dr + \frac{1}{\rho^{x-2}} \int_\rho^\infty F r^x dr$$

les deux termes du second membre sont bornés pour $0 \leq t \leq t_1$.

On voit de plus que l'intégrale A est uniformément convergente, car c étant uniformément convergente, à tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre r_1 (indépendant de t), tel que pour $R > r_1$, on ait :

$$\int_R^\infty F r^x dr < \varepsilon.$$

D'où il résulte

$$\int_R^\infty F r^2 dr < \frac{\varepsilon}{R^{x-2}}.$$

Donc les quatre intégrales A, B, I, K sont bornées et uniformément convergentes. Soient A₁, B₁, I₁, K₁ leurs bornes supérieures. Majorons maintenant

$$L(F) = \int_0^\infty P(r, r_1) F(r_1) r_1^2 dr_1.$$

Pour cela remarquons avec M. Carleman que

$$P(r, r_1) < 2(r + r_1).$$

Par suite,

$$L(F) \leq 2r \int_0^\infty F(r_1) r_1^2 dr_1 + 2 \int_0^\infty F(r_1) r_1^3 dr_1.$$

D'où

$$(12) \quad L(\bar{F}) \leq 2(A_1 r + K_1).$$

Pour limiter J(F), remplaçons G(r, λ, μ) par le noyau majorant G₁(r, λ, μ) défini par le tableau :

$$\begin{array}{lll} \lambda < \frac{r}{\sqrt{2}}, & \mu > \frac{r}{\sqrt{2}}, & G_1 = \frac{\lambda}{r}; \\ \lambda > \frac{r}{\sqrt{2}}, & \mu < \frac{r}{\sqrt{2}}, & G_1 = \frac{\mu}{r}; \\ \lambda < \frac{r}{\sqrt{2}}, & \mu < \frac{r}{\sqrt{2}}, & G_1 = 0; \\ \lambda > \frac{r}{\sqrt{2}}, & \mu > \frac{r}{\sqrt{2}}, & G_1 = 1. \end{array}$$

On a donc pour J(F) l'inégalité :

$$(13) \quad J(F) \leq 4 \left\{ \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty F(\lambda) \lambda d\lambda \right\}^2 + \frac{8}{r} \left\{ \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} F(\lambda) \lambda^2 d\lambda \right\} \left\{ \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty F(\mu) \mu d\mu \right\}.$$

Majorons les intégrales figurant au second membre. Comme F est positive ou nulle, on a aussitôt :

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} F \lambda^2 d\lambda \leq \int_0^\infty F \lambda^2 d\lambda \leq A_1.$$

D'autre part, dans le domaine $\lambda \geq \frac{r}{\sqrt{2}}$, on a

$$(\sqrt{2})^{v-1} \frac{\lambda^{v-1}}{r^{v-1}} \geq 1,$$

d'où

$$\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} F \lambda \, d\lambda \leq \frac{(\sqrt{2})^{v-1}}{r^{v-1}} \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} F \lambda^v \, d\lambda$$

et, par suite,

$$\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} F(\lambda) \lambda \, d\lambda \leq \frac{(\sqrt{2})^{v-1}}{r^{v-1}} \int_0^{\infty} F \lambda^v \, d\lambda \leq \frac{(\sqrt{2})^{v-1}}{r^{v-1}} C_1.$$

Nous obtenons donc l'inégalité

$$(14) \quad J(F) \leq 4 \frac{(\sqrt{2})^{2v-2}}{r^{2v-2}} C_1^2 + \gamma \frac{(\sqrt{2})^{v-1}}{r^{v-1}} A_1 C_1.$$

On peut ainsi déduire de (13) une majorante utile au voisinage de $r=0$. En effet

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} F \lambda^2 \, d\lambda \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} F \lambda \, d\lambda \leq \frac{r}{\sqrt{2}} I_1.$$

On a donc d'après (13) :

$$(14') \quad J(F) \leq 4(\sqrt{2}+1)I_1^2 \quad (r \leq \rho).$$

En rapprochant (14) et (14'), on voit qu'il existe une constante h telle que

$$(14'') \quad J(F) < \frac{h}{(1+r)^2} \quad \text{pour } 0 < r < \infty \quad (0 \leq t \leq t_1).$$

Enfin, remarquons que les hypothèses (c) entraînent que la fonction $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$ est continue sur le champ $0 < r < \infty, 0 \leq k < k_1$: on le vérifie sans difficulté sur l'expression de $T(F)$, grâce à la convergence uniforme des intégrales A, I, K, B.

3. EXISTENCE DES INTÉGRALES PREMIÈRES. — Nous avons établi (Chap. I, § 6) que les intégrales

$$A = \int_0^\infty F r^2 dr \quad \text{et} \quad B = \int_0^\infty F r^4 dr$$

sont des intégrales premières de l'équation (E), c'est-à-dire conservent une valeur constante au cours du temps. Ceci sous la réserve que les intégrales qui s'introduisent dans les démonstrations soient uniformément convergentes. Étudions l'intégrale B : la démonstration vaudra *a fortiori* pour A. Nous allons montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial t} r^4 dr = \int_0^\infty T(F) r^4 dr$$

obtenue par dérivation sous le signe somme converge uniformément. On sait qu'elle représente bien, par suite, la dérivée de l'intégrale B. Il reste alors à vérifier la légitimité des calculs formels montrant que

$$\int_0^\infty T(F) r^4 dr = 0.$$

ce qui ne présente pas de difficulté.

Envisageons donc l'intégrale

$$\int_0^\infty T(F) r^4 dr = \int_0^\infty J(F) r^4 dr - \int_0^\infty F L(F) r^4 dr$$

L'inégalité (14'') montre aussitôt que $\int_0^\infty J(F) r^4 dr$, majorée par $\int_0^\infty \frac{h r^4}{(1+r)^2}$, est uniformément convergente.

Quant à $\int_0^\infty FL(F) r^4 dr$, elle est majorée, d'après (12), par

$$2A_1 \int_0^\infty F r^5 dr + 2K_1 \int_0^\infty F r^4 dr.$$

Elle est donc bien uniformément convergente. Nous pouvons donc énoncer :

THEOREME, — Sous les conditions fondamentales (c), l'équation réduite de Boltzmann admet les deux intégrales premières

$$A = \int_0^\infty F r^2 dr, \quad B = \int_0^\infty F r^4 dr.$$

6. LE H-THEOREME. — Nous avons vu (Chap. I), par un calcul formel, que l'intégrale

$$H = \int_0^\infty F \log F r^2 dr,$$

qui est liée à l'entropie du gaz, est une fonction non croissante du temps. Pour légitimer ce H-théorème, il nous faut encore établir l'uniforme convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty (1 + \log F) \frac{\partial F}{\partial t} r^2 dr = \int_0^\infty (1 + \log F) T(F) r^2 dr = \int_0^\infty T(F) \log F r^2 dr.$$

Il nous faut pour cela majorer $|\log F|$, ce qui exige que nous ayons une majorante et une minorante de F .

Étudions d'abord la minorante, en suivant une méthode due à T. Carleman.

Lemme 1. — Pour toute solution F satisfaisant aux conditions (c) et se réduisant pour $t = 0$ à une fonction $f(r)$ continue et non identiquement nulle, et pour tout nombre ε positif arbitrairement petit, il existe une constante k telle que

$$\log F > -k(1+r)^{2+\varepsilon} \quad (0 < t_0 \leq t < t_1).$$

Bien entendu k dépend de t_0 et peut tendre vers l'infini quand $t_0 \rightarrow 0$.

Partons de l'inégalité (12) : $L(F) < 2(A_1 r + K_1)$.

Il résulte de l'équation réduite que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2(A_1 r + K_1) F \geq J(F).$$

En intégrant, il vient :

$$F \geq f e^{-2(A_1 r + K_1)t} + \int_0^t e^{-2(A_1 r + K_1)(t-\tau)} J(F(r, \tau)) d\tau.$$

D'où les deux minorantes

$$(15) \quad F \geq f e^{-2(A_1 r + K_1)t},$$

$$(16) \quad F \geq e^{-2(A_1 r + K_1)t} \int_0^t J \{ F(r, \tau) \} d\tau.$$

La minorante (15) s'annule avec $f(r)$ pour $t=0$. En remplaçant dans (16) F pour la minorante (15), on obtient par un calcul simple

$$F \geq 4t e^{-2(A_1 r + K_1)t} \int_0^\infty \int_0^\infty G(r, \lambda, \mu) \lambda \mu f(\lambda) f(\mu) e^{-2(A_1 \lambda + K_1)t} e^{-2(A_1 \mu + K_1)t} d\lambda d\mu.$$

Introduisons, au lieu de G , le noyau minorant G_2 défini par les formules

$$\begin{aligned} \lambda < \frac{r}{\gamma} \quad \text{ou} \quad \mu < \frac{r}{\gamma}, & \quad G_2 = 0; \\ \lambda > \frac{r}{\gamma} \quad \text{et} \quad \mu > \frac{r}{\gamma}, & \quad G_2 = b, \end{aligned}$$

où γ désigne un nombre arbitraire compris entre 1 et $\sqrt{2}$, et où b est la borne inférieure de G dans l'angle droit $(\lambda \geq \frac{r}{\gamma}, \mu \geq \frac{r}{\gamma})$. On obtient ainsi :

$$F \geq 4bt e^{-2(A_1 r + K_1)t} \left\{ \int_{\frac{r}{\gamma}}^\infty e^{-2(A_1 \lambda + K_1)t} f(\lambda) \lambda d\lambda \right\}^2,$$

minorante qui ne s'annule plus toujours avec f . Comme $f(r)$ est continue, il existe au moins un intervalle $(r_0 \leq r \leq r_0 + d)$ dans lequel $f(r) \geq k > 0$.

On voit donc que $F(r, t)$ ne peut plus s'annuler pour

$$0 \leq r < \gamma(r_0 + d) \quad (\gamma > 1)$$

dans l'intervalle $(0, t_1)$. De là Carleman déduit, par un procédé d'itération, une borne inférieure non nulle quel que soit r ; on obtient ainsi

$$(17) \quad \log F > -k(1+r)^{2+\varepsilon} \quad (0 < t_0 \leq t \leq t_1),$$

ε et t_0 donnés arbitrairement petits.

Lemme II. — Toute solution F satisfaisant aux conditions (E) et se réduisant pour $t=0$ à une fonction $f(r)$ bornée pour $p \leq r < \infty$, est elle-même bornée quel que soit r .

Utilisant le fait que A est intégrale première, on a aussitôt

$$L(F) \geq 2Ar.$$

D'où l'inégalité

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2ArF \leq J(F)$$

et, par intégration

$$(18) \quad F(r, t) \leq f(r) e^{-2Ar t} + \int_0^t e^{-2Ar(t-\tau)} J(F(r, \tau)) d\tau.$$

Or, on a

$$J(F) < \frac{h}{(1+r)^2} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_1.$$

L'inégalité (18) donne alors

$$(19) \quad F(r, t) \leq f(r) + \frac{1}{2Ar} \frac{h}{(1+r)^2}.$$

Si donc la fonction $f(r)$ est bornée pour $p \leq r < \infty$, il résulte de l'inégalité (19) que la fonction F , supposée bornée au voisinage de $r=0$ [condition (c)] est bornée dans tout le domaine $0 \leq r < \infty$, ce qui démontre le lemme.

Il résulte donc de ces deux lemmes qu'à tout $\varepsilon > 0$, et à tout intervalle (t_0, t_1) ($t_0 > 0$) on peut associer une constante k telle que

$$|\log F| < k(1+r)^{2+\varepsilon} \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Nous pouvons maintenant établir la convergence absolue et uniforme des intégrales

$$I = \int_0^\infty F \log F r^2 dr, \quad \int_0^\infty J(F) \log F r^2 dr, \quad \int_0^\infty F L(F) \log F r^2 dr.$$

Pour l'intégrale H , il suffit d'observer qu'elle est majorée par

$$k \int_0^\infty F(1+r)^{2+\varepsilon} r^2 dr.$$

Grâce à l'inégalité $J(F) < \frac{h}{(1+r)^{\varepsilon}}$, on voit que $\int_0^{\infty} J(F) \log F \cdot r^2 dr$ est majorée par

$$h \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{(1+r)^{\varepsilon-2-\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon \leq x - 5$ pour avoir la convergence absolue et uniforme.

Enfin $\int_0^{\infty} FL(F) \cdot |\log F| r^2 dr$ est majorée par

$$2A_1 k \int_0^{\infty} F(1+r)^{2+\varepsilon} r^3 dr + 2k_1 k \int_0^{\infty} F(1+r)^{2+\varepsilon} r^2 dr.$$

Il suffit encore de choisir $\varepsilon < x - 5$. Nous pouvons donc énoncer :

THEOREME H. — *Pour toute solution F satisfaisant aux conditions (c) et se réduisant pour $t = 0$ à une fonction $f(r)$ continue, non partout nulle et bornée la fonction*

$$H = \int_0^{\infty} F \log F r^2 dr$$

associée à F est une fonction non croissante du temps.

7. UN AUTRE SYSTÈME DE CONDITIONS FONDAMENTALES. — Il est possible de remplacer le système des conditions (c) par un autre système d'une interprétation physique plus immédiate. Envisageons maintenant les solutions satisfaisant aux conditions (c') :

1° F est continue en r et t pour $0 < r < \infty$, $0 \leq t \leq t_1$. F est toujours positive ou nulle.

2° Il existe un nombre $x > 5$ tel que l'intégrale

$$G(t) = \int_0^{\infty} F r^2 dr$$

soit uniformément convergente pour $0 \leq t \leq t_1$.

3° L'intégrale $A = \int_0^{\infty} F \cdot r^2 dr$ est uniformément convergente.

Montrons que l'on a encore droit aux intégrales premières sous ces conditions (c'). D'abord une intégrale de la forme $\int_0^\infty F r^\alpha dr$ ($r \leq \alpha \leq x$) est uniformément convergente, d'après les inégalités

$$\int_0^\rho F r^\alpha dr < \rho^{\alpha-2} \int_0^\rho F r^2 dr,$$

$$\int_R^\infty F r^\alpha dr < \frac{1}{R^{\alpha-2}} \int_R^\infty F r^2 dr.$$

Elle représente donc une fonction de t continue pour $0 \leq t \leq t_1$, donc bornée supérieurement. L'existence des constantes précédemment désignées par A_1 , K_1 , B_1 en résulte, *mais non celle de I_1* . Nous avons donc droit aux majorations (12) pour $L(F)$, (13) et (14) pour $J(F)$, mais, non nulle à (14''). Mais reprenons l'inégalité (13), et remarquons que

$$\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty F(\lambda) \lambda d\lambda < \frac{\sqrt{2}}{r} \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^\infty F(\lambda) \lambda^2 d\lambda \leq \frac{\sqrt{2}}{r} A_1,$$

on obtient

$$J(F) < 8(\sqrt{2} + 1) \frac{A_1^2}{r^2}.$$

Rapprochant cette majorante de la majorante (14)

$$J(F) \leq 4 \frac{(\sqrt{2})^{2v-2}}{r^{2v-2}} C_1^2 + 8 \frac{(\sqrt{2})^{v-1}}{r^v} A_1 C_1.$$

On voit qu'il existe une constante h_1 telle que

$$(14'''), \quad J(F) \leq \frac{h_1}{r^2(1+r)^{v-2}}.$$

On vérifie aussitôt que notre démonstration de l'existence des intégrales premières subsiste si l'on substitue la nouvelle majoration (14''') à l'ancienne (14'')

$$J(F) \leq \frac{h}{(1+r)^v}.$$

THÉOREME. — *Sous les conditions fondamentales (c') l'équation réduite admet les intégrales premières A et B.*

8. LE H-THÉORÈME SOUS LES CONDITIONS (c'). — Montrons pour terminer que si l'on suppose, comme nous l'avons fait, $f(r)$ bornée, les conditions (c') entraînent les conditions (c). On a le théorème suivant :

Sous les conditions (c'), toute solution $F(r, t)$ se réduisant pour $t = 0$ à une fonction $f(r)$ bornée pour $0 \leq r \leq \varrho$ reste bornée pour $0 \leq r \leq \varrho$, $0 \leq t \leq t_1$.

Comme $L(F) > 0$, l'équation réduite entraîne que

$$(20) \quad \frac{\partial F}{\partial t} < J(F).$$

Reprenons l'inégalité

$$J(F) < \frac{\gamma(\sqrt{2} + 1)A^2}{r^2}$$

et utilisons un procédé dont le principe est dû à Carleman.

La relation (20) après multiplication par r^2 et intégration devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r F r^2 dr < 8(\sqrt{2} + 1)A^2 r.$$

On en déduit

$$\omega(r) = \int_0^r F r^2 dr < 8(\sqrt{2} + 1)A^2 r t,$$

soit

$$(21) \quad \omega(r) < b_1 r \quad (0 \leq t \leq t_1).$$

Majorons maintenant à nouveau $J(F)$ en utilisant l'inégalité (13)

$$(13) \quad J < \frac{8}{r} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} F \lambda^2 d\lambda \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} F \lambda d\lambda + \left\{ \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} F \lambda d\lambda \right\}^2$$

et introduisons la fonction

$$\omega_1(r) = \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\infty} F \lambda d\lambda.$$

Si l est un nombre supérieur à r , on peut écrire

$$(22) \quad \omega_1(r) = \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^l F \lambda d\lambda + \int_l^{\infty} F \lambda d\lambda.$$

La seconde intégrale est bornée par $\frac{A_1}{l}$, la première se ramène à $\omega(r)$ par une intégration par parties

$$(23) \quad \int_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^l F \lambda \, d\lambda = \left(\frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \right)_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^l + \int_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^l \frac{\omega(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda.$$

On en tire, grâce à (21),

$$\int_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^l F \lambda \, d\lambda < \text{const.} + b_2 \log \frac{1}{r} \quad (r < l).$$

D'où

$$\omega_1(r) < b_3 + b_2 \log \frac{1}{r}.$$

L'inégalité (13) permet alors de resserrer la majorante de J

$$J < \gamma b_1 \left(b_3 + b_2 \log \frac{1}{r} \right) + \left(b_3 + b_2 \log \frac{1}{r} \right)^2 < b_4 \frac{1}{r}.$$

Portons cette limitation de J dans (20), multiplions par r^2 et intégrons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &< b_5 \frac{r^2}{2}, \\ \omega &< b_5 r^2. \end{aligned}$$

Alors, d'après (22) et (23),

$$\omega_1 < \text{const.} + 2 b_5 \left(l - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) < b_6 \quad (r < l).$$

L'inégalité (13) montre alors que J est *borné*

$$J < \gamma r b_4 b_6 + 4 b_6^2 < b_7 \quad (r \leq \rho < l).$$

Reportant dans (21)

$$\frac{\partial F}{\partial t} < b_7.$$

Si donc $f(r)$ est borné pour $0 \leq r \leq \rho$, il vient par intégration

$$F < b_8 \quad (r < \rho).$$

Le théorème H en résulte donc aussitôt

THEOREME H'. — Si $F(r, t)$ désigne une solution satisfaisant aux conditions (C') se réduisant pour $t=0$ à une fonction bornée pour $(0 < r < \infty)$, l'intégrale

$$H = \int_0^\infty F \log F r^2 dr$$

est non croissante dans tout intervalle fini du temps.

B. LES THEOREMES D'EXISTENCE ET D'UNICITE. ALLURE ASYMPTOTIQUE. — Nous n'avons pu encore établir sous les seules conditions C', convergence uniforme de

$$\int_0^\infty F r^2 dr \quad \text{et} \quad \int_0^\infty F r^2 dr$$

l'existence d'une solution positive pour l'équation réduite.

A ce point de vue, les seuls résultats connus sont les théorèmes fondamentaux de Carleman (*op. cit.*).

Les solutions considérées sont celles qui vérifient l'inégalité plus restrictive que (C')

$$(24) \quad F(r, t) < \frac{C}{(1+r)^2} \quad (x > 6),$$

où C est une constante absolue. Carleman établit successivement les points suivants :

1° Toute solution positive satisfaisant à (24) et se réduisant pour $t=0$ à $f(r)$ admet les intégrales premières A et B et vérifie le H-théorème, ce que nous avons établi sous des hypothèses plus larges.

2° Étant donnée $f(r)$ positive ou nulle satisfaisant à la condition

$$f(r) < \frac{a}{(1+r)^2} \quad (x > 6),$$

il existe une solution de l'équation réduite satisfaisant à l'inégalité (1) se réduisant à $f(r)$ pour $t=0$. Cette solution est unique.

3° Quand t tend vers l'infini, la solution $F(r, t)$ tend uniformément vers la solution de Maxwell $\alpha e^{-\beta t^2}$, où α et β sont déterminées par les intégrales premières.

L'existence des solutions est obtenue par approximations successives.

Tout d'abord si $F(r, t)$ est une solution de l'équation réduite correspondant aux valeurs A et B des intégrales premières, satisfaisant à une restriction de la forme

$$(24 \text{ bis}) \quad 0 \leq F(r, t) < \frac{C}{(1+t)^r} \quad (x > 6, 0 \leq t \leq t_1)$$

et se réduisant pour $t = 0$ à la fonction $f(r)$ telle que

$$(25) \quad 0 \leq f(r) < \frac{a}{(1+r)^r}.$$

M. Carleman démontre l'existence d'une constante c , indépendante de C, c'est-à-dire dépendant uniquement de a , A, B, x telle que

$$(26) \quad 0 \leq F(r, t) \leq \frac{C}{(1+t)^r} \quad (0 \leq t \leq t_1).$$

Formons alors la suite d'approximations définies par

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + 2(F_{n-1})F_n = J(F_{n-1}),$$

la fonction d'approximation zéro étant définie par

$$F_0(r, t) = e^{\gamma t} f(r) \quad (\gamma > 0).$$

On démontre qu'il est possible de choisir γ et $t_1 > 0$ ne dépendant que de c , A, B, x de telle sorte que des approximations F_n satisfassent aux inégalités

$$0 \leq F_n < \frac{ce^{\gamma t}}{(1+t)^r}, \quad \left| \int_0^t F_n t^2 dt - A \right| < A \frac{\gamma}{2}$$

$$\left(\sigma = 1 - \frac{4}{x-2} \right) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_1.$$

On établit ensuite la convergence de la série $\Sigma |F_n - F_{n-1}|$ en la comparant à une progression géométrique. Il en résulte l'existence

d'une solution positive $F(r, t)$ pour $0 \leq t \leq t_1$ satisfaisant à la restriction de la forme (24)

$$F(r, t) \leq \frac{ce^{\gamma t_1}}{(1+r)^v}$$

et admettant les intégrales premières A et B. Par suite $F(r, t)$ vérifie l'inégalité (26); en particulier

$$F(r, t_1) \leq \frac{c}{(1+r)^v}.$$

On peut donc recommencer le même raisonnement à partir de l'instant t_1 pris comme instant initial et avec comme valeur initiale $F(r, t_1)$: d'où l'existence de la solution F dans l'intervalle $(t_1, 2t_1)$. En continuant ainsi, on démontre l'existence d'une solution continue $F(r, t)$ pour toute valeur positive de t , dont M. Carleman établit enfin l'unicité. Il semble malheureusement difficile d'étendre cette belle méthode aux solutions envisagées dans ce chapitre.

CHAPITRE III.

SOLUTIONS A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE. CAS D'UN CHAMP DE FORCES.

1. INTRODUCTION. — Dans ce chapitre, nous nous proposons d'exposer quelques résultats relatifs au cas où il existe un champ de forces extérieur. L'équation de Boltzmann correspondante a été antérieurement mise sous la forme

$$(E) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \int u \frac{\partial F}{\partial x} + \int x \frac{\partial F}{\partial u} = T(F).$$

Nous avons déjà étudié (chap. II) certains cas où la fonction de distribution est à *symétrie sphérique*, c'est-à-dire ne dépend de u, v, w , que par $r^2 = u^2 + v^2 + w^2$.

Nous allons maintenant rechercher sous quelles conditions l'équation (E) admet de telles solutions.

2. CONDITIONS NÉCESSAIRES. — Supposons que (E) admette une solution F à symétrie sphérique. Il en résulte que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{u}{r} \frac{\partial F}{\partial r}; \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{v}{r} \frac{\partial F}{\partial r}; \quad \frac{\partial F}{\partial w} = \frac{w}{r} \frac{\partial F}{\partial r}.$$

L'équation (E) prend alors la forme

$$(1) \quad u \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{X}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + v \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{Y}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + w \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{Z}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) = - \frac{\partial F}{\partial t} + T(F),$$

soient φ le second membre de (1), A, B, C les coefficients de u , v , w , au premier membre, les fonctions A, B, C sont à symétrie sphérique. Fixons x , y , z , et donnons à r une valeur constante r_0 : on doit alors avoir

$$A(r_0)u + B(r_0)v + C(r_0)w = \text{const.}$$

pourvu que

$$u^2 + v^2 + w^2 = r^2.$$

Ceci entraîne identiquement

$$A(r) = 0, \quad B(r) = 0, \quad C(r) = 0,$$

F doit donc satisfaire aux trois équations aux dérivées partielles suivantes, par rapport aux variables x , y , z ,

$$(2a) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{X}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

$$(2b) \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{Y}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

$$(2c) \quad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{Z}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

Intégrons la première équation, où l'on considère y et z comme des paramètres. Ses caractéristiques sont données par le système différentiel

$$X dx = r dr.$$

D'où

$$\frac{r^2}{2} - \int X dx - k(y, z) = C,$$

où $k(y, z)$ désigne une fonction arbitraire des variables y et z et C une constante.

La fonction F est par suite de la forme

$$F = \Phi \left[\frac{r^2}{2} - \int_0^x X dx - k(y, z) \right].$$

En tenant compte de cette forme nécessaire de la fonction F, l'équation (2 b) donne, après division par Φ ,

$$(3) \quad k'_y = Y - \int \frac{\partial X}{\partial y} dx.$$

L'équation (2 c) donne de même

$$(3') \quad k'_z = Z - \int \frac{\partial X}{\partial z} dx.$$

Les fonctions k'_y et k'_z ne dépendent pas de x : on a

$$k''_{yz} = k''_{zy} = 0.$$

De plus, les équations (3) et (3') étant compatibles,

$$k''_{yz} = k''_{zy}.$$

D'où les trois conditions sur X, Y et Z

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Elles expriment que le champ des forces extérieures dérive d'un potentiel.

Énonçons donc :

THÉORÈME. — *Pour que l'équation (E) admette une solution à symétrie sphérique, il faut que le champ des forces extérieures dérive d'un potentiel.*

Réciproquement, si le champ extérieur dérive du potentiel $U(x, y, z)$, le calcul précédent montre que les solutions (F) de (E) à symétrie sphérique, sont, si elles existent, de la forme $F(\varphi, t)$, où l'on a posé

$$\varphi = \frac{1}{2} r^2 - U(x, y, z).$$

Nous pouvons donc énoncer :

THÉOREME. — *Toute solution à symétrie sphérique de l'équation (E) est nécessairement de la forme $F(\varphi, t)$ avec*

$$\varphi = \frac{1}{2} r^2 - U(x, y, z),$$

où φ représente l'énergie totale d'une molécule de masse-unité.

3. CONSTRUCTION DES SOLUTIONS. — La méthode due à Carleman fournissant l'existence et l'unicité des solutions de l'équation à symétrie sphérique en l'absence du champ extérieur, dont nous avons rappelé le principe à la fin du Chapitre II, s'étend au problème actuel. Il suit en effet des résultats du numéro précédent que, si l'on se borne aux solutions à symétrie sphérique, l'équation générale E se réduit à

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = T(F),$$

où F est fonction des deux inconnues φ et t . Donc, en un point déterminé de l'espace (x, y, z) l'équation (E) se met sous la forme

$$(5) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -FL(F) + J(F),$$

J et L désignant les fonctionnelles introduites au Chapitre II. Dans cette équation x, y, z jouent le rôle de simples paramètres. Si donc $f(\varphi)$ est une fonction continue assujettie à la solution

$$(6) \quad 0 \leq f(\varphi) < \frac{a(x, y, z)}{(1+r)^2} \quad \text{pour } 0 \leq r \leq \infty \quad (r > 6).$$

On sait construire une solution à symétrie sphérique de l'équation (4), de la forme $F(r, V, t)$ se réduisant à $f(\varphi)$ pour $t = 0$. Mais cette solution ne satisfera à l'équation (2) que si elle est de la forme $F(r^2 - 2V, t)$. La méthode précédente n'établit donc pas l'existence de telles solutions, qui demeure incertaine, mais permet de les construire si elles existent.

4. NOUVELLES CONDITIONS NÉCESSAIRES. — Les relations établies au Chapitre I (pp. 15 et sqq.) vont nous fournir de nouvelles conditions néces-

saies. En effet la condition envisagée étant de la forme $F(r^2 - 2U, t)$, on voit aussitôt que, par raison de symétrie,

$$\begin{aligned}\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0; \quad \bar{u}\bar{v} = \bar{v}\bar{u} = \bar{u}\bar{w} = 0; \\ \overline{u \log F} = 0; \quad \overline{ur^2} = \overline{vr^2} = \overline{wr^2} = 0; \\ \overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{r^2}{3}.\end{aligned}$$

Les équations (11), (12), (13) du Chapitre I donnent alors

$$\begin{aligned}(11') \quad & \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \rightarrow n = A(x, y, z); \\ (12') \quad & \frac{\partial r^2}{\partial x} = 3nX, \quad \frac{\partial r^2}{\partial y} = 3nY, \quad \frac{\partial r^2}{\partial z} = 3nZ; \\ (13') \quad & \frac{\partial r^2}{\partial t} = 0 \rightarrow r^2 = B(x, y, z).\end{aligned}$$

La compatibilité des équations (12'), compte tenu des relations

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

exige que

$$A(x, y, z) \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = A dU$$

soit une différentielle exacte, donc que $A(x, y, z)$ ne dépende que de U : il existe donc une fonction Φ telle que

$$A(x, y, z) = \frac{d\Phi(U)}{dU}; \quad B(x, y, z) = 3\Phi(U).$$

On peut d'ailleurs retrouver aisément ceci en raisonnant sur l'équation (4).

On a donc pour $F(r^2 - 2V, t)$ les deux relations suivantes :

$$(7) \quad \int_0^\infty F r^2 dr = \frac{d\Phi}{dU},$$

$$(8) \quad \int_0^\infty F r^4 dr = 3\Phi.$$

D'ailleurs, si l'on remarque la relation $\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}$, on voit que l'égalité (8) se réduit à (7) par l'intégration par parties.

Enfin le raisonnement classique de T. Carleman appliqué à l'équation (4) montre que quand t augmente indéfiniment, $F(r^2 - 2U, t)$ tend vers $a(x, y, z)e^{-b(x, y, z)r^2}$. Cette fonction ne devant dépendre que de $r^2 - 2U$, elle est de la forme

$$\mathcal{F} = a e^{-b(r^2 - 2U)} \quad (b > 0),$$

où a et b sont des constantes absolues.

Dans la relation (7), remplaçons F par $\mathcal{F}$, il vient

$$\frac{d\Phi}{dU} = a_1 e^{b_1 U} \quad (b_1 > 0),$$

ainsi la solution $F(\varphi, t)$ doit vérifier la relation

$$(9) \quad \int_0^\infty F(\varphi, t) r^2 dr = a_1 e^{b_1 U}.$$

Donc pour qu'il existe une solution $F(\varphi, t)$ se réduisant à $f(\varphi)$ pour $t = 0$, il faut que $f(\varphi)$ satisfasse à l'équation intégrale

$$(10) \quad \int_0^\infty f(r^2 - 2U) r^2 dr = a_1 e^{b_1 U}.$$

On connaît deux sortes de solutions satisfaisant à ces conditions.

1° Si $U = \text{const.}$ (absence de champ extérieur), les solutions $F(r, t)$ de Carleman.

2° Si U est variable, les solutions indépendantes de t de la forme

$$F(\varphi, t) = a e^{-b\varphi} = a e^{-b(r^2 - 2U)} \quad (a, b, \text{ constantes absolues});$$

ce sont les solutions de Laplace.

Le changement de variables $r^2 = 2U + \lambda$ transforme l'équation (10) en une équation intégrale de première espèce, malheureusement à noyau singulier, en sorte qu'il est difficile de décider s'il existe ou non, en présence d'un champ extérieur, des solutions à symétrie sphérique *variable avec le temps*. En tout cas, si de telles solutions existent, elles sont données par la méthode du numéro 3.

CHAPITRE IV.

SOLUTIONS VOISINES DE CELLES DE MAXWELL.

1. M. Carleman a montré, en s'appuyant sur le H-théorème, que pour t tendant vers l'infini, la solution de l'équation (E) *dans le cas de la symétrie sphérique* tend vers une fonction de la forme $a e^{-bt}$ où a et b sont des constantes déterminées par les intégrales premières, et cela uniformément quand r demeure intérieur à un intervalle fini quelconque. Nous allons chercher à préciser l'allure de la fonction $F = a e^{-bt}$ pour $t \rightarrow \infty$, nous supposons $a = b = 1$, ce qui ne restreint évidemment pas la généralité.

Reprenons l'équation (E) sous la forme débarrassée du facteur N qui ne joue aucun rôle

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \iint_{\Omega_1 \Sigma} (F' F'_1 - F F_1) |\vec{W}| d\omega_1 d\sigma; \quad F = F(r, t) \quad (1)$$

et posons

$$(1) \quad F = e^{-t^2} (1 + f),$$

en tenant compte de $T(e^{-t^2}) = 0$, il vient

$$(2) \quad e^{-t^2} \frac{\partial F}{\partial t} = T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f) + T(e^{-t^2} f),$$

(1) Nous nous limitons encore aux solutions fonctions de r . Il y a cependant avantage pour la symétrie des calculs à garder la notation $\left(\vec{p}\right)$. Nous considérerons souvent des intégrales du type

$$\int_{\Omega_1} K(\vec{p}, \vec{p}_1) \cdot F(\vec{p}_1) du_1,$$

où K est un invariant orthogonal de $\vec{p}$ et p_1 , c'est-à-dire est insensible à une même rotation *arbitraire*, effectuée sur $\vec{p}$ et p_1 . Si $F(p_1)$ ne dépend que de r_1 , une telle intégrale ne dépend que de $r = \left(\vec{p}\right)$, car elle est invariante par une rotation quelconque effectuée sur $\vec{p}$.

Cette remarque évidente est essentielle pour toute la suite.

où $T(f, g)$ désigne la forme bilinéaire associée à la forme quadratique $T(f)$.

Négligeons pour l'instant les termes quadratiques en f . Nous avons à étudier l'équation

$$(3) \quad e^{-t^2} \frac{\partial f}{\partial t} = T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f).$$

2. PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE. — En utilisant toujours les notations du Chapitre I, on a

$$(4) \quad T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f) = \iiint_{\Omega_1 \Sigma} e^{-(t^2 + t_1^2)} (f' + f'_1 - f - f_1) \left| \vec{W} \right| d\omega_1 d\sigma.$$

Si f et g sont deux fonctions arbitraires, les changements de variables du Chapitre I permettent d'écrire

$$(5) \quad \begin{aligned} & \int T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f) g d\omega \\ &= -\frac{1}{4} \iiint_{\Omega_1 \Sigma} e^{-(t^2 + t_1^2)} (f' + f'_1 - f - f_1) (g' + g'_1 - g - g_1) \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma. \end{aligned}$$

L'opération linéaire $T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f)$ est donc *symétrique*

$$\int_{\Omega} T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f) g d\omega = \int_{\Omega} T(e^{-t^2}, e^{-t^2} g) f d\omega.$$

De plus (en prenant $f = g$), on a

$$(6) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f) f d\omega \\ &= -\frac{1}{4} \iiint_{\Omega_1 \Sigma} e^{-(t^2 + t_1^2)} (f' + f'_1 - f - f_1)^2 \left| \vec{W} \right| d\omega d\omega_1 d\sigma. \end{aligned}$$

Donc

$$(6') \quad \int_{\Omega} T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f) f d\omega \leq 0.$$

Le signe égale n'étant possible que si l'on a identiquement

$$f' + f'_1 - f - f_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$f = \alpha(t) + \beta(t)t^2.$$

3, FORME EXPLICITE DE L'ÉQUATION (3). — Hilbert, en calculant le second membre de (3) et en effectuant autant que possible les intégrations, a obtenu la formule fondamentale suivante

$$(7) \quad \Gamma(e^{-r^2}, e^{-r^2}f) = -e^{-r^2}k(r)f + \int_{\Omega_1} \Gamma(\vec{p}, \vec{p}_1) f(\vec{p}_1) d\omega_1,$$

où

$$(8) \quad k(r) = 4\pi^2 \left\{ \frac{e^{-r^2}}{2} + \left(r + \frac{1}{2r} \right) \int_0^r e^{-u^2} du \right\},$$

$$(8') \quad \Gamma(\vec{p}, \vec{p}_1) = \frac{4\pi}{\sqrt{\Sigma(\xi_1 - \xi)^2}} e^{-r^2 - \frac{\{\Sigma\xi_1(\xi_1 - \xi)\}^2}{\Sigma(\xi_1 - \xi)^2}} - 2\pi\sqrt{\Sigma(\xi_1 - \xi)^2} e^{-(r^2 + r^2)}.$$

La symétrie de Γ par rapport à ξ , η , ξ et ξ_1 , η_1 , ζ_1 est évidente. Notons de plus que

$$k(r) \geq 2\pi^2 > 0,$$

quel que soit r ($0 \leq r < \infty$).

L'équation (3) peut donc s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -k(r)f + \int_{\Omega_1} e^{r^2} \Gamma(\vec{p}, \vec{p}_1) f(\vec{p}_1) d\omega_1,$$

le noyau sous le signe $\int$ étant du type de Schmidt.

Pour avoir à nouveau sous le signe $\int$ un noyau symétrique, nous poserons

$$f = e^{\frac{r^2}{2}} \varphi$$

et l'équation prend la forme

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -k(r)\varphi + \int_{\Omega_1} K(\vec{p}, \vec{p}_1) \varphi(\vec{p}_1, t) d\omega_1 = L(\varphi)$$

avec

$$K(\vec{p}, \vec{p}_1) = e^{\frac{r^2 + r_1^2}{2}} \Gamma(\vec{p}, \vec{p}_1).$$

Telle est la forme que prend l'équation (E) si l'on pose

$$F(r, t) = e^{-r^2} + e^{-\frac{r^2}{2}} \varphi(r, t)$$

et que l'on néglige les termes quadratiques en φ .

4. PROPRIETES DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION (9). — Tout d'abord la formule (5), où l'on prend $g = 1$, puis $g = r^2$, montre que

$$(10) \quad \int_{\Omega} e^{-t^2} f d\omega = \text{const.}, \quad \int_{\Omega} e^{-r^2} f r^2 d\omega = \text{const.}$$

quand t varie. Ce sont deux intégrales premières de l'équation (3). Pour (9) les intégrales premières correspondantes sont

$$(10') \quad \int_{\Omega} e^{-\frac{t^2}{2}} \varphi d\omega = A; \quad \int_{\Omega} e^{-\frac{t^2}{2}} \varphi r^2 d\omega = B.$$

L'analogie du H-théorème s'obtient grâce à la formule (6)

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} e^{-t^2} |f|^2 d\omega \leq 0.$$

L'intégrale $\int_{\Omega} e^{-t^2} |f|^2 d\omega$ est donc non croissante.

Ces résultats sont acquis si les calculs formels exécutés au numéro **2** ont un sens. Examinons d'abord la formule (11). Nous devons nous assurer de la convergence uniforme de l'intégrale

$$\int_{\Omega} f T(e^{-t^2}, e^{-t^2} f) d\omega.$$

D'après (7), cette intégrale se décompose en deux parties :

La première

$$\int_{\Omega} e^{-t^2} k(r) |f|^2 d\omega,$$

dont la convergence uniforme est assurée si

$$\int_{\Omega} r e^{-t^2} |f|^2 d\omega = \int_{\Omega} r |\varphi|^2 d\omega \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} e^{-t^2} |f|^2 d\omega = \int_{\Omega} |\varphi|^2 d\omega$$

sont toutes deux supposées uniformément convergentes, puisque $\frac{k(r)}{r}$ demeure borné.

La seconde s'écrit

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\Omega} f(\vec{p}) \int_{\Omega_1} \Gamma(\vec{p}, \vec{p}_1) f(\vec{p}_1) d\omega_1 d\omega \\ &= \int_{\Omega} \varphi(\vec{p}) \int_{\Omega_1} K(\vec{p}, \vec{p}_1) \varphi(\vec{p}_1) d\omega_1 d\omega. \end{aligned}$$

Or, M. Hecke a étudié le noyau symétrique

$$K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) = \frac{K(\vec{p}, \vec{p}_1)}{\sqrt{k(r)} k(r_1)}.$$

Il a démontré ⁽¹⁾ :

1° Que le noyau K^* est du type de Fredholm : son cinquième itéré $K^{*(5)}$ est tel que l'intégrale double

$$\iint_{\Omega \Omega_1} |K^{*(5)}(\vec{p}, \vec{p}_1)|^2 d\omega d\omega_1$$

est convergente;

2° Que le noyau K^* est défini positif;

3° Qu'il est borné au sens de Hilbert, c'est-à-dire que

$$\iint_{\Omega \Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) k(\vec{p}) k(\vec{p}_1) d\omega d\omega_1 \leq M \left\{ \int_{\Omega} |k(\vec{p})|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega} |k(\vec{p})|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

D'ailleurs la borne M vaut un.

Revenons donc à l'intégrale I qui peut s'écrire

$$I = \int_{\Omega} \sqrt{k(r)} \varphi(\vec{p}) \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \sqrt{k(r_1)} \varphi(\vec{p}_1) d\omega_1 d\omega.$$

On voit sans peine qu'elle sera uniformément convergente si

$$\int_{\Omega} |\sqrt{k(r)} \varphi(\vec{p})|^2 d\omega$$

l'est aussi; c'est-à-dire si $\int_{\Omega} r |\varphi|^2 d\omega$ et $\int_{\Omega} |\varphi|^2 d\omega$ convergent uniformément. De cette discussion résulte donc le théorème suivant :

Pour toute solution φ de l'équation (9), telle que les intégrales

$$\int_{\Omega} |\varphi|^2 d\omega \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} r |\varphi|^2 d\omega$$

soient uniformément convergentes, on a

$$(11') \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |\varphi|^2 d\omega \leq 0.$$

(1) E. HECKE, *Mathematische Zeitschrift*, t. 12, p. 274-286.

De la même manière, on voit que, sous les mêmes conditions, on a les intégrales premières (10').

§. ALLURE DE φ POUR $t \rightarrow \infty$. — D'après ce qui précède, si pour $t \rightarrow +\infty$, $\varphi(r, t)$ admet une limite $\varphi_0(r)$, on l'obtiendra en cherchant la fonction $\varphi_0(r)$ satisfaisant aux relations (10') et rendant minimum l'intégrale $\int_{\Omega} |\varphi|^2 d\omega$.

La méthode usuelle du calcul des variations fournit aussitôt la relation

$$\int_{\Omega} \varphi \partial \varphi d\omega = 0$$

sous les conditions

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{2}} \partial \varphi d\omega = \int_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 \partial \varphi d\omega = 0.$$

D'où la solution

$$(12) \quad \varphi_0(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} (\alpha + \beta r^2),$$

les constantes α et β étant fixées par les relations (10') en fonction de A et B.

(Ce procédé rapide suppose l'existence de la fonction minimisante. Le raisonnement plus profond de Carleman (*loc. cit.*) permet de s'affranchir de cette hypothèse.)

En reprenant les raisonnements dus à T. Carleman (E. B., p. 113-143), on peut alors montrer que :

Le minimum de l'intégrale $\int_{\Omega} |\varphi|^2 d\omega$, où la fonction φ évidemment supposée mesurable vérifie les conditions (10'), est atteint pour une fonction φ de la forme

$$\varphi_0(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} (\alpha + \beta r^2).$$

Cette fonction φ_0 est unique.

Limitation de $|\varphi|$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. — Revenons d'abord à l'équation (9)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + k(r) \varphi = \int_{\Omega} \mathbf{k}(\vec{p}, \vec{p}_1) \varphi(\vec{p}_1) d\omega_1.$$

Il en résulte que d'après l'inégalité de Schwarz et l'existence de $\int_{\Omega} |\mathbf{K}(\vec{p}, \vec{p}_1)|^2 d\omega_1$

$$(13) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k(r) \varphi \right| < \left| \int_{\Omega_1} |\mathbf{K}(\vec{p}, \vec{p}_1)|^2 d\omega_1 \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int_{\Omega_1} |\varphi|^2 d\omega_1 \right|^{\frac{1}{2}}, \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k(r) \varphi \right| < M(\vec{p}), \end{cases}$$

la borne M dépend de $\vec{p}$, mais reste manifestement finie quand r est fini.

Posons $\varphi = e^{-\ell k(r)} \psi$ dans la relation (13). Il vient

$$e^{-\ell k(r)} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| < M.$$

d'où, puisque $\psi(r, 0) = \varphi(r, 0)$,

$$|\psi(r, t)| < \frac{M}{k(r)} e^{\ell k(r)} + |\varphi(r, 0)|$$

et enfin

$$(13') \quad |\varphi(r, t)| < \frac{M}{k(r)} + |\varphi(r, 0)| e^{-\ell k(r)} < \frac{M}{k(r)} + |\varphi(r, 0)| \quad \text{pour } t > 0.$$

Or,

$$k(r) \geq 2\pi^2 \quad \text{pour } 0 \leq r < \infty.$$

Faisons donc l'hypothèse que la fonction $\varphi(r, t)$ est bornée pour $t=0$. Il résulte alors de (13') et du fait que M est supérieurement borné sur tout intervalle $0 \leq r \leq R$ que $\varphi(r, t)$ est borné quel que soit t , uniformément sur $0 \leq r < R$. Il en est alors de même d'après (13) de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Continuité de $\varphi(r, t)$. — Pour aller plus loin, faisons une hypothèse supplémentaire : limitons-nous au cas où la fonction $\varphi(r, 0)$ est continue en r . Nous allons montrer qu'alors, la fonction $\varphi(r, t)$ est continue en r , pour $t \geq 0$, et cela uniformément dans tout intervalle

$$0 < R_1 \leq r \leq R_2.$$

En effet

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} + k(r) \varphi(r, t) = \int_{\Omega_1} \mathbf{K}(\vec{p}, \vec{p}_1) \varphi(\vec{p}_1) d\omega_1, \\ \frac{\partial \varphi(r', t)}{\partial t} + k(r') \varphi(r', t) = \int_{\Omega_1} \mathbf{K}(\vec{p}', \vec{p}_1) \varphi(\vec{p}_1) d\omega_1, \end{cases}$$

où grâce à l'invariance orthogonale de K , nous pouvons choisir $\vec{p}'$ colinéaire à $\vec{p}$.

Retranchons membre à membre en posant $\Phi = \varphi(r, t) - \varphi(r', t)$, il vient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + k(r)\Phi = [k(r') - k(r)]\varphi(r', t) + \int_{\Omega_1} [K(\vec{p}', \vec{p}_1) - K(\vec{p}, \vec{p}_1)]\varphi(\vec{p}_1) d\omega_1.$$

D'où l'inégalité fondamentale

$$(15) \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} + k(r)\Phi \right| < M |k(r) - k(r')| + M_1 \varepsilon(r, r');$$

si l'on remarque les inégalités

$$\begin{aligned} |\varphi(r', t)| &< M \quad (0 \leq r \leq R_2), \\ \left| \int_{\Omega_1} [K(\vec{p}, \vec{p}_1) - K(\vec{p}', \vec{p}_1)] \varphi(\vec{p}_1) d\omega_1 \right| \\ &\leq \left\{ \int_{\Omega_1} |\varphi(\vec{p}_1)|^2 d\omega_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega_1} |K(\vec{p}, \vec{p}_1) - K(\vec{p}', \vec{p}_1)|^2 d\omega_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq M_1 \varepsilon(r, r'), \end{aligned}$$

la fonction $\varepsilon(r, r')$ ne dépendant que du noyau $K^{(1)}$, donc étant indépendante de $\varphi(r, t)$ et telle que $\lim_{r' \rightarrow r} \varepsilon(r, r') = 0$, quel que soit r dans l'intervalle (R_1, R_2) ($0 < R_1 < R_2 < \infty$).

L'inégalité (15) traitée de la même manière que (13) donne alors

$$(16) \quad |\Phi| \leq \frac{1}{k(r)} \{ M |k(r) - k(r')| + M_1 \varepsilon(r', r) \} + |\varphi(r, 0) - \varphi(r', 0)|,$$

d'où il résulte que le module de continuité Φ de $\varphi(r, t)$ est borné indépendamment de t , quel que soit $t \geq 0$ les fonctions $\varphi(r, t)$ sont également continues en r dans tout intervalle $(0 < R_1 \leq r \leq R_2)$.

(1) Voici l'expression du noyau K

$$K = \frac{4\pi}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{4} - \frac{(\zeta_1^2 - \zeta^2)^2}{4\rho^2}} - 2\pi\rho e^{-\frac{\rho^2 - \zeta_1^2}{2}}$$

avec

$$\rho^2 = (\zeta_1 - \zeta)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \xi)^2.$$

Allure de $\varphi(r, t)$ pour $t \rightarrow \infty$. — Il suffit de continuer à adapter les raisonnements de T. Carleman (*loc. cit.*, p. 143-146). Il sera plus commode de raisonner sur $f = e^{\frac{r^2}{2}} \varphi$.

Reprenons l'intégrale

$$I(t) = \int_{\Omega} |\varphi|^2 d\omega = \int_{\Omega} e^{-r^2} |f|^2 d\omega$$

et sa dérivée

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} f T(e^{-r^2}, e f^{-r^2}) d\omega = -\frac{1}{4} \iiint_{\Omega \cup \Sigma} e^{-(r^2 + r'^2)} (f' + f'_1 - f - f_1)^2 |\vec{W}| d\omega d\omega_1 d\sigma.$$

L'intégrale $I(t)$ admet une borne inférieure finie; comme $\frac{dI}{dt} \leq 0$, il en résulte que $\overline{\lim} \frac{dI}{dt} = 0$. Il existe donc une suite $t_n \rightarrow \infty$ telle que

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{dI}{dt} = 0.$$

D'après l'égalité de continuité (en r) de $\varphi(r, t)$ on peut extraire de la suite t_n une suite partielle que nous désignerons encore par t_n pour alléger les notations telle que

$$1^\circ \quad \lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi(r, t_n) = \varphi_\infty(r)$$

ou bien

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} f(r, t_n) = f_\infty(r),$$

uniformément pour $0 < R_1 \leq r \leq R_2$, quels que soient R_1 et R_2 ,

$$2^\circ \quad \lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{dI}{dt} = 0.$$

On voit alors (*cf.* Carleman, p. 144) que

$$(17) \quad f_\infty(r') + f_\infty(r'_1) - f_\infty(r) - f_\infty(r_1) = 0.$$

Dans le cas contraire, en effet, on aurait

$$\frac{dI}{dt} < -k < 0,$$

ce qui contredirait la propriété 2° .

L'équation (17) n'a d'autre solution que

$$f(r) = \alpha + \beta r^2,$$

où les constantes α et β sont déterminées par les intégrales premières (10'). Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(r, t) = \alpha + \beta r^2.$$

Enfin, le raisonnement de Carleman (*op. cit.*, p. 145-146) s'applique sans modification et montre que, quelle que soit la façon dont t tend vers l'infini,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(r, t) = e^{-\frac{t}{2}} (\alpha + \beta r^2).$$

Énonçons le résultat acquis :

THÉORÈME. — Toute solution $\varphi(r, t)$ de l'équation (9) telle que $\int_{\Omega} r |\varphi|^2 d\omega$ soit convergente, se réduisant pour $t = 0$ à une fonction continue $\varphi(r, 0)$, tend uniformément pour $0 < R_1 \leq r \leq R_2$ (quels que soient R_1 et R_2) vers la limite $e^{-\frac{t}{2}} (\alpha + \beta r^2)$ lorsque t tend vers ∞ . Les constantes α et β sont déterminées par les intégrales premières et s'annulent avec les constantes A et B des équations (10'), c'est ce qui arrivera notamment si l'on prend pour donnée initiale

$$f(r, 0) = e^{t/2} F(r, 0) - 1.$$

Alors, la solution $\varphi(r, t)$ tendra vers zéro pour $t \rightarrow +\infty$.

6. UNICITÉ DES SOLUTIONS DE L'EQUATION (9). — Démontrons maintenant le théorème suivant :

L'équation (9) admet au plus une solution satisfaisant à la condition

$$\int_{\Omega} r |\varphi|^2 d\omega < \infty$$

se réduisant pour $t = 0$ à une fonction $\varphi(r)$.

Supposons en effet qu'il en existe deux $\varphi_1(r, t)$ et $\varphi_2(r, t)$, on a

$$\int_{\Omega} r |\varphi_1 - \varphi_2|^2 d\omega = \int_{\Omega} r |\varphi_1|^2 d\omega + \int_{\Omega} r |\varphi_2|^2 d\omega - 2 \int_{\Omega} r \varphi_1 \varphi_2 d\omega.$$

Les deux premières intégrales du second membre convergent par hypothèse, la troisième d'après l'inégalité de Schwarz. Il en est de même de l'intégrale du premier membre. D'après le caractère linéaire de l'équation (9), il suffit donc de montrer qu'une intégrale $\Phi(r, t)$ de cette équation, nulle pour $t=0$, et rendant convergente l'intégrale $\int_{\Omega} r |\Phi|^2 d\omega$, est identiquement nulle. Ceci est immédiat, car nous savons que sous ces hypothèses, l'intégrale $\int_{\Omega} |\Phi|^2 d\omega$ est une fonction non croissante du temps, comme elle est nulle pour $t=0$ et qu'elle reste toujours positive ou nulle, *elle est nulle pour $t>0$* ; $\Phi(r, t)$ est donc une fonction de r presque partout nulle pour toute valeur de $t>0$. Comme pour $t=0$, elle se réduit à la fonction continue zéro, elle est continue, donc *identiquement nulle*.

7. RÉDUCTION DE L'ÉQUATION (9) À UNE ÉQUATION DE FREDHOLM. — Voici un artifice indiqué par T. Carleman pour ramener l'équation (9) à une équation intégrale linéaire. Nous l'exposerons avec une légère modification.

Partons de l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = k(r) \varphi + \int_{\Omega} K(\vec{p}, \vec{p}_1) \varphi(\vec{p}_1) d\omega_1$$

et posons

$$\varphi(r, t) = \frac{f(r, t)}{\sqrt{k(r)}},$$

l'équation en f s'écrit

$$(18) \quad \frac{1}{k(r)} \frac{\partial f}{\partial t} + f = \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) f(\vec{p}_1) d\omega_1$$

où

$$K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) = \frac{K(\vec{p}, \vec{p}_1)}{\sqrt{k(r)k(r_1)}}$$

est le noyau symétrique borné de Hecke.

Multiplions les deux membres de l'équation (18) par $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$) et intégrons en t de 0 à ∞ en posant

$$(19) \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(r, t) dt = g(r, \lambda)$$

et en remarquant que,

$$f(r, 0) = \sqrt{k(r)} \varphi(r, 0) = h(r),$$

fonction connue, l'équation (18) devient,

$$(20) \quad \left(1 + \frac{\lambda}{k(r)}\right) g - \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) g(\vec{p}_1) d\omega_1 = \frac{h(r)}{k(r)}.$$

Je dis que cette équation est régulière pour $R(\lambda) > 0$ [dans toute la suite la notation $R(x)$ désigne la partie réelle du nombre complexe x], c'est-à-dire que 1 n'est pas valeur propre du noyau $\frac{k(r)}{k(r) + \lambda} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1)$. Pour cela, démontrons le résultat plus précis suivant : pour $R(\lambda) > 0$, la valeur caractéristique μ de module minima de l'équation

$$g(\vec{p}) - \mu \int_{\Omega_1} \frac{k(r)}{k(r) + \lambda} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) g(\vec{p}_1) d\omega_1 = \frac{h(r)}{k(r) + \lambda},$$

à un module supérieur à 1; d'après un théorème connu, il suffit d'établir ceci pour l'équation homogène associée :

$$g(\vec{p}) - \mu \int_{\Omega_1} \frac{k(r_1)}{k(r_1) + \lambda} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) d\omega_1 = 0.$$

Prenons comme inconnue $g^*(\vec{p})$ définie par

$$g(\vec{p}) = \frac{k(r) + \lambda}{k(r)} g^*(\vec{p}).$$

Cette équation s'écrit

$$(21) \quad \left(1 + \frac{\lambda}{k(r)}\right) g^*(\vec{p}) = \mu \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) g^*(\vec{p}_1) d\omega_1.$$

Remarquons que les fonctions $g(\vec{p})$ et $g^*(\vec{p})$ sont simultanément de carré sommable; multiplions alors les deux membres de l'équation (21)

par $\overline{g^*}(\vec{p})$ l'imaginaire conjuguée de $g^*(\vec{p})$ et intégrons dans Ω . Il vient

$$(22) \quad \int_{\Omega} |g^*(\vec{p})|^2 d\omega + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{k(r)} |g^*(\vec{p})|^2 d\omega \\ = \mu \iint_{\Omega \Omega_1}^* K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \overline{g^*(\vec{p})} g^*(\vec{p}_1) d\omega d\omega_1.$$

Cette égalité est impossible si $|\mu| \leq 1$. En effet le noyau K^* est symétrique, borné, de borne précise un. Donc, pour $|\mu| \leq 1$ le second membre de (22) a son module au plus égal à $\int_{\Omega} |g^*(\vec{p})|^2 d\omega$. Or, les intégrales du premier membre sont toutes deux positives. Si $R(\lambda) > 0$, ce premier membre est supérieur en module à $\int_{\Omega} |g^*(\vec{p})|^2 d\omega$; d'où l'impossibilité annoncée; le même raisonnement montre que si $R(\lambda) = 0$, l'équation (22) n'est possible que si $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, ou $\lambda = i\beta$, ($\beta \neq 0$) et $|\mu| > 1$ (égalité exclue). On voit que le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$ conduit à l'égalité

$$\int_{\Omega} |g^*(\vec{p})|^2 d\omega = \iint_{\Omega \Omega_1}^* K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \overline{g^*(\vec{p})} g^*(\vec{p}_1) d\omega d\omega_1,$$

qui admet deux solutions linéairement indépendantes, d'après les résultats de M. Hecke (*loc. cit.*).

Ainsi l'équation (21) est régulière pour $|\mu| \leq 1$, posons alors

$$k_1(r) = \frac{h(r)}{k(r) + \lambda}$$

et observons que

$$0 \leq a \leq |k_1(r)| < 1,$$

où a est une constante positive dépendant de λ . Si l'on pose

$$g(\vec{p}) = \sqrt{k_1(r)} G(\vec{p}),$$

il vient pour G l'équation | déduite de (20) |

$$(20') \quad G(\vec{p}) - \mu \int_{\Omega_1} \sqrt{k_1(r) k_1(r_1)} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) G(\vec{p}_1) d\omega_1 = \frac{h(r)}{\sqrt{k_1(r)} [k(r) + \lambda]}.$$

Si l'on se reporte maintenant aux calculs par lesquels M. Hecke établit que le $p^{\text{ème}}$ itéré de K^* est de carré sommable en $d\omega d\omega_1$, on constate que la présence du facteur complexe $\sqrt{k_1(r)k_1(r_1)}$, de module inférieur à 1 n'altère pas la démonstration. L'équation (20') est donc une *équation de Fredholm* régulière pour $|\mu| \leq 1$. La série des approximations successives converge donc à la manière d'une progression géométrique. Comme chacun de ses termes est holomorphe en λ , puisqu'il en est ainsi des fonctions $\frac{k(r)}{k(r+\lambda)}$ et $\frac{h(r)}{k(r)+\lambda}$ pour $R(\lambda) > -k(0)$, il résulte que :

Dans le demi-plan $R(\lambda) > 0$ (ouvert) la solution unique de l'équation (20) est une fonction holomorphe de λ . L'équation (19) détermine alors $f(r, t)$ comme nous allons le montrer.

8. ALLURE DE LA FONCTION $g(r, \lambda)$ POUR $\lambda \rightarrow \infty$ AVEC $R(\lambda) > 0$. — Reprenons l'équation (20)

$$\left(1 + \frac{\lambda}{h(r)}\right) g - \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) g(\vec{p}_1) d\omega_1 = \frac{h(r)}{k(r)}.$$

Multiplions les deux membres par $\bar{g}(\vec{p})$ et intégrons dans Ω ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(1 + \frac{\lambda}{h(r)}\right) |g|^2 d\omega - \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \bar{g}(\vec{p}) g(\vec{p}_1) d\omega d\omega_1 \\ = \int_{\Omega} \frac{h(r)}{k(r)} \bar{g}(\vec{p}) g(\vec{p}) d\omega, \end{aligned}$$

comme on a

$$0 \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \bar{g}(\vec{p}) g(\vec{p}_1) d\omega d\omega_1 \leq \int_{\Omega} |g|^2 d\omega.$$

(1) Pour être rigoureux il faudrait d'abord montrer que la solution $g(r, \lambda)$ est de carré sommable en $d\omega$, ce qui est immédiat. Si l'on transforme en effet l'équation (20) pour $\mu = 1$ de façon à faire apparaître le cinquième itéré du noyau $K^*(\vec{p}, \vec{p}_1)$, on trouve une équation du type

$$G(\vec{p}) - \int_{\Omega_1} \bar{K}(\vec{p}, \vec{p}_1) G(\vec{p}_1) d\omega_1 = \Phi(r, \lambda);$$

la solution de cette équation de Fredholm sera de carré sommable s'il en est

On peut décrire en désignant par α un nombre *positif ou nul* et en posant :

$$\lambda = \tilde{\varepsilon} + i\eta \quad (\tilde{\varepsilon} > 0),$$

$$\left\{ \alpha \int_{\Omega} |g|^2 d\omega + \tilde{\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega \right\} + i\eta \int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega = \int_{\Omega} \frac{h(r)}{k(r)} \bar{g}(r) d\omega.$$

D'où les deux inégalités suivantes, d'abord

$$|\eta| \int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega \leq \left| \int_{\Omega} \frac{h(r)}{k(r)} \bar{g}(r) d\omega \right| \leq \left\{ \int_{\Omega} \frac{h^2(r)}{k(r)} d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega \right\}^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(23) \quad \int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega < \frac{A_1}{\eta^2}$$

(A_1 étant une constante absolue), ensuite

$$(24) \quad \alpha \int_{\Omega} |g|^2 d\omega + \tilde{\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega \leq \left| \int_{\Omega} \frac{h(r)}{k(r)} \bar{g}(r) d\omega \right|,$$

ainsi de $\Phi(r, \lambda)$. Or

$$\int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \frac{h(r_1)}{(k(r_1) + \lambda) \sqrt{k_1(r_1)}} d\omega_1,$$

est de carré sommable si l'on suppose que $\frac{h(r)}{k(r)}$ l'est, puisque $K^*(\vec{p}, \vec{p}_1)$ est un noyau borné au sens de Hilbert. Il en est de même de

$$\frac{k(r)}{k(r) + \lambda} \int_{\Omega} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \frac{h(r_1)}{k(r) + \lambda} d\omega_1,$$

puisque le facteur $\frac{k(r)}{k(r) + \lambda}$ est de module inférieur à 1. Donc de proche en proche, il en est ainsi de $\Phi(r, \lambda)$.

Ainsi $G(r, \lambda)$ est bien de carré sommable sous l'hypothèse que

$$\frac{h(r)}{k(r)} = \frac{\Phi(r, 0)}{\sqrt{k(r)}} \quad [cf. (17')]$$

est de carré sommable, hypothèse *moins restrictive* que celle que nous avons été conduit à poser

$$\int_{\Omega} r |\Phi|^2 d\omega < \infty.$$

Comme G est de carré sommable, il en est de même de

$$g = \sqrt{k_1(r)} G.$$

et a fortiori

$$\int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega < \left| \int_{\Omega} \frac{h(r)}{k(r)} \bar{g}(r) d\omega \right|,$$

et enfin, par une nouvelle application de l'inégalité de Schwarz,

$$(24') \quad \int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega < \frac{A_1}{\xi^2}.$$

Les inégalités (23) et (24') montrent que, pour $R(\lambda) > \lambda_0 > 0$ (quel que soit λ), on a

$$\int_{\Omega} \frac{|g|^2}{k(r)} d\omega < A_2.$$

A_2 désignant une constante qui ne dépend que de λ_0 .

Revenons maintenant à l'équation (20), on en tire

$$\left| 1 + \frac{\lambda}{k(r)} \right| |g(r, \lambda)| \leq \left| \frac{h(r)}{k(r)} \right| + \left| \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \sqrt{k(r_1)} \frac{g(\vec{p}_1)}{\sqrt{k(r_1)}} d\omega_1 \right|.$$

Appliquons encore l'inégalité de Schwarz en remarquant que l'intégrale

$$\int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) k(r_1) d\omega_1 \leq A^2(r)$$

est convergente. Il vient

$$\left| 1 + \frac{\lambda}{k(r)} \right| |g| \leq \left| \frac{h(r)}{k(r)} \right| + A_2 A(r).$$

D'où enfin

$$(25) \quad |g| < \frac{B(r)}{|\lambda|},$$

$B(r)$ étant fonction uniquement de r et non de λ .

Il est maintenant aisé de déduire de l'équation (20) que $\lambda g(r, \lambda)$ admet une limite si $|\lambda| \rightarrow \infty$, $R(\lambda) > 0$. Nous ne pouvons pas transporter la majorante (25) dans (20) parce qu'il n'est pas certain que l'intégrale $\int_{\Omega} K_1(\vec{p}, \vec{p}_1) B(r_1) d\omega_1$ soit convergente. Mais soit Σ une sphère de centre origine de rayon arbitrairement grand dans Ω_1 .

Écrivons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \mathbf{K}^*(\vec{p}, \vec{p}_1) g(\vec{p}_1) d\omega_1 \\ &= \int_{\Sigma} \mathbf{K}^*(\vec{p}, \vec{p}_1) g(\vec{p}_1) d\omega_1 + \int_{\Omega-\Sigma} \mathbf{K}^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \sqrt{k(r_1)} \frac{g(r_1)}{\sqrt{k(r_1)}} d\omega_1. \end{aligned}$$

Au second membre l'intégrale $\int_{\Sigma}$ est majorée par

$$\frac{1}{|\lambda|} \int_{\Sigma} |\mathbf{K}^*(\vec{p}, \vec{p}_1)| B(r_1) d\omega_1,$$

quantité qui tend vers zéro si $|\lambda| \rightarrow \infty$.

L'intégrale $\int_{\Omega_1-\Sigma}$ est majorée en valeur absolue par

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_1-\Sigma} \mathbf{K}^{*2}(\vec{p}, \vec{p}_1) k(r_1) d\omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1-\Sigma} \frac{g^2}{k(r_1)} d\omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & < A_2 \left(\int_{\Omega_1} \mathbf{K}^{*2}(\vec{p}, \vec{p}_1) k(r_1) d\omega_1 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Fixons $\vec{p}$ (ou r), l'intégrale $\int_{\Omega_1-\Sigma} \mathbf{K}^{*2}(\vec{p}, \vec{p}_1) k(r_1) d\omega_1$ étant convergente, on pourra choisir le rayon de Σ assez grand pour que

$$\int_{\Omega_1-\Sigma} \mathbf{K}^{*2}(\vec{p}, \vec{p}_1) k(r_1) d\omega_1 < \varepsilon^2.$$

Finalement l'intégrale $\int_{\Omega_1-\Sigma}$ est majorée par $A_2 \varepsilon$, moyennant un choix convenable de Σ dépendant d'ailleurs de r . De là résulte que, pour toute valeur de r :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \mathbf{K}^*(\vec{p}, \vec{p}_1) g(\vec{p}_1) d\omega_1 = 0.$$

et comme

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} g(r, \lambda) = 0,$$

l'équation (20) montre que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda g(r, \lambda) = h(r).$$

On peut donc poser

$$(26) \quad \lambda g(r, \lambda) = h(r) + F(r, \lambda).$$

L'équation (20) donne alors :

$$(27) \quad \left(1 + \frac{\lambda}{k(r)}\right) F(r, \lambda) = \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) F(r_1, \lambda) d\omega_1 \\ = -h(r) + \int_{\Omega_1} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) h(r_1) d\omega_1.$$

Cette équation est identique à (20), sauf changement de second membre que nous désignerons par $H(r)$. Admettons pour l'instant la convergence de l'intégrale $\int_{\Omega} H^2(r) k(r) d\omega$. On peut alors reprendre sur l'équation (27) les raisonnements faits sur l'équation (20). On obtient alors

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda F(r, \lambda) = H(r).$$

Finalement on peut mettre les solutions $g(r, \lambda)$ sous la forme

$$(28) \quad g(r, \lambda) = \frac{h(r)}{\lambda} + \frac{g_1(r, \lambda)}{\lambda^2},$$

où pour chaque valeur de r , la fonction de $g_1(r, \lambda)$ est une fonction analytique de λ bornée en module dans tout demi-plan $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \lambda_0 > 0$.

Étudions maintenant l'intégrale $\int_{\Omega} H^2(r) h(r) d\omega$. Nous allons *supposer* que l'intégrale $\int_{\Omega} h^2(r) k(r) d\omega$ est convergente; autrement dit nous supposons la donnée initiale $\varphi(r, 0)$ telle que

$$\int_{\Omega} |\varphi(r, 0)|^2 d\omega < \infty, \quad \int_{\Omega} r^2 |\varphi(r, 0)|^2 d\omega < \infty.$$

Sous ces conditions l'intégrale $\int_{\Omega} H^2(r) k(r) d\omega$ converge. Il suffit pour cela de montrer que

$$(29) \quad \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega} K^*(\vec{p}, \vec{p}_1) \sqrt{k(r)} h(r_1) d\omega_1 \right)^2 d\omega \\ = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega} K(\vec{p}, \vec{p}_1) \frac{h(r_1)}{\sqrt{k(r_1)}} d\omega_1 \right)^2 d\omega < \infty.$$

Or, on a,

$$K(\vec{p}, \vec{p}_1) = \frac{4\pi}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{r} - \frac{(\rho - \rho_1)^2}{\rho}} - 2\pi\rho e^{-\frac{\rho^2 + \rho_1^2}{2}},$$

$$\rho^2 = |\vec{p} - \vec{p}_1|^2 \leq (\rho + \rho_1)^2.$$

L'intégrale

$$(30) \quad \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega_1} \rho e^{-\frac{\rho^2 + \rho_1^2}{2}} \frac{h(r_1)}{\sqrt{k(r_1)}} d\omega_1 \right)^2 d\omega,$$

majorée par l'intégrale convergente

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega_1} (\rho + r_1) e^{-\frac{\rho^2 + \rho_1^2}{2}} \frac{|h(r_1)|}{\sqrt{k(r_1)}} d\omega_1 \right)^2 d\omega$$

est convergente.

L'intégrale

$$(31) \quad \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{r} - \frac{(\rho - \rho_1)^2}{\rho}} \frac{h(r_1)}{\sqrt{k(r_1)}} d\omega_1 \right)^2 d\omega$$

est majorée par

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{r}} \frac{|h(r_1)|}{\sqrt{k(r_1)}} d\omega_1 \right)^2 d\omega.$$

Posons

$$\frac{|h(r_1)|}{\sqrt{k(r_1)}} = \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1).$$

La dernière intégrale s'écrit, après le changement de variables

$$\xi_1 = \xi + x, \quad \eta_1 = \eta + y, \quad \zeta_1 = \zeta + z,$$

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{r}} \Phi(\xi + x, \eta + y, \zeta + z) dx dy dz \right)^2 d\omega,$$

ou bien

$$(31') \quad \int_{\Omega} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{r}} e^{-\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{k}} \\ \times \Phi(\xi + x, \dots) \Phi(\xi + \lambda, \dots) dx dy dz dX dY dZ d\omega.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \Phi(\xi + x, \dots) \Phi(\xi + X, \dots) d\omega \right| \\ & \leq \left\{ \int_{\Omega} \Phi^2(\xi + x, \dots) d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega} \Phi^2(\xi + X, \dots) d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \int_{\Omega} \Phi^2(\xi, \eta, \zeta) d\omega \\ & \leq \int_{\Omega} \frac{h^2(r_1)}{k(r_1)} d\omega_1 = \text{const.} \end{aligned}$$

L'intégrale (31') majorée par

$$\text{const.} \left(\int_{\Omega_x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-\frac{t^2 + y^2 + z^2}{1}} dx dy dz \right)^2 = \text{const.}$$

est donc convergente.

La convergence de (30) et (31) entraîne celle de l'intégrale (29) que nous voulions établir.

La formule (28)

$$g(r, \lambda) = \frac{h(r)}{\lambda} + \frac{g_1(r, \lambda)}{\lambda^2}$$

nous permet de calculer $f(r, k)$. On sait en effet (*cf.* Nörlund, *Séries d'interpolations*, n° 87) que toute fonction analytique de λ holomorphe dans le demi-plan $\text{R}(\lambda) \geq \lambda_0 > 0$ et de la forme (28) dans ce domaine est représentable par une intégrale de Laplace. De l'équation :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(r, t) dt = g(r, \lambda),$$

on tire alors :

$$f(r, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_0 + i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{ut} g(r, u) du.$$

Bien entendu, la donnée initiale $h(r)$ étant réelle, $f(r, t)$ est réelle : on vérifie que pour des valeurs conjuguées de u , $g(r, u)$ prend des valeurs conjuguées. Si donc on pose :

$$\lambda = \lambda_0 + ix, \quad g(r, \lambda) = g_1(r, x) + i g_2(r, x),$$

on obtient

$$f(r, t) = \frac{1}{2\pi} e^{\lambda_0 t} \int_0^\infty \{ \cos tx g_1(r, x) - \sin tx g_2(r, x) \} dx.$$

Telle est la forme de la solution de l'équation (9) dont l'existence se trouve ainsi établie : la formule (28) permet d'établir l'existence de $\frac{\partial f}{\partial t}$ et l'on vérifie que $f(r, t)$ est bien solution de l'équation (18).

La méthode précédente n'est donc au fond que l'extension de la méthode de Laplace pour l'intégration des équations différentielles linéaires : l'équation (9) est l'analogue d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Si l'on revient à l'équation de Boltzmann (E), on peut chercher à imiter la méthode suivie dans l'étude des solutions asymptotiques des équations différentielles, c'est-à-dire à employer la méthode des approximations successives : l'analyse précédente permet de résoudre aussitôt les équations, toutes linéaires, qui se présentent. Mais la convergence des approximations successives semble délicate à établir et demeure douteuse. En dirigeant de façon un peu différente les approximations, M. Carleman a pu énoncer leur convergence.

Terminons en remarquant que nous n'avons fait l'étude de l'équation aux variations que dans le cas de la symétrie sphérique. *Mais, méthodes et résultats peuvent s'étendre au cas général (en l'absence du champ de force).*

10. SUR UNE EQUATION LINEAIRE INTEGRODIFFERENTIELLE. — Dans ce qui suit j'utiliserai quelques résultats de la théorie des opérateurs hermitiques dans l'espace de Hilbert, en renvoyant pour leur démonstration à un exposé de J. Leray (¹).

Considérons une équation du type (1) $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = L(\varphi)$, où la fonction inconnue φ dépend de deux arguments r et t . Pour nous rapprocher du cas de l'équation aux variations, admettons que l'opérateur L est linéaire, hermitique, hypermaximal, défini non positif et indépendant de t . Dans la suite, nous ne distinguerons pas deux fonctions de r , ne différant que sur un ensemble de valeurs r de mesure nulle. En admettant l'existence d'une solution $\varphi(r, t)$ de l'équation (1) se réduisant pour $t=0$ à $f(r)$ fonction de carré sommable telle que la

(¹) Cf. G. JULIA, *Séminaire de Mathématiques*, 1934-1935; *la théorie de Carleman*, exposé G, par J. LERAY.

fonction f soit, elle aussi, de carré sommable, nous allons montrer que $\varphi(r, t)$ est susceptible d'une expression très simple.

Soit en effet $\Theta(\lambda)$ un opérateur spectral attaché à L , c'est-à-dire un opérateur hermitique dépendant d'un paramètre tel que

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Theta(-\infty) = 0, & \Theta(+\infty) = E \text{ opérateur identique;} \\ [f, \Theta(\lambda)g] = [\Theta(\lambda)f, g], & \text{pour tout } f \text{ et tout } g \text{ de carré sommable;} \\ (f, \Delta\Theta f) \geq 0, & \text{si l'on pose } \Delta\Theta = \Theta(\lambda_2) - \Theta(\lambda_1); \\ & \|\Delta\Theta f\| \leq \|f\|, \end{array} \right.$$

et enfin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \alpha(\lambda) d\Theta(\lambda) f = L \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda) d\Theta(\lambda) f \right\},$$

pour toute fonction f de carré sommable, toutes les fois que $\alpha(L)$ et $\lambda \alpha(\lambda)$ sont continues et bornées.

Rappelons seulement que la notation $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda) d\Theta(\lambda) f$ ne représente pas une véritable intégrale. Son sens précis est le suivant : quels que soient f et g de carré sommable, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda) d[\Theta(\lambda)f, g]$$

est convergente et représente une fonctionnelle linéaire de g . Il existe donc une fonction de carré sommable f_α telle que cette fonctionnelle soit de la forme (f_α, g) . C'est une fonction f_α que nous représentons par le symbole

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda) d\Theta(L)f.$$

Remarquons enfin que l'opérateur L étant défini non positif, son spectre est tout entier sur la demi-droite $-\infty < \lambda \leq 0$. Les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ se réduisent donc à } \int_{-\infty}^0.$$

Considérons la fonction $\varphi(r, t)$ définie par le symbole

$$\int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} d\Theta(\lambda) f(r);$$

ce symbole a bien un sens, puisque pour $t \geq 0$, $e^{\lambda t}$ est bornée, ce qui assure la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} d[\theta(L)f, g],$$

quel que soit g . De même, on voit que pour $t > 0$ (égalité exclue) l'intégrale

$$\int_{-\infty}^0 \lambda e^{\lambda t} d[\theta(L)f, g]$$

est convergente, ce qui permet d'écrire (puisque la convergence est uniforme pour $t_0 \leq t > 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} d[\theta(\lambda)f, g] = \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\lambda t} d[\theta(L)f, g]$$

et comme

$$\int_{-\infty}^0 \lambda e^{\lambda t} d\theta(\lambda)f = L \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} d\theta(\lambda)f \right\} = L \{ \varphi(r, t) \}.$$

On a donc, quelle que soit g ,

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(r, t), g] = [L(\varphi), g],$$

pour tout $t > 0$ (égalité exclue). De plus, pour $t = 0$, le symbole définissant φ s'écrit

$$\int_{-\infty}^0 d\theta(L)f.$$

Il a un sens, car l'intégrale $\int_{-\infty}^0 d[\theta(\lambda)f, g]$ est manifestement convergente et vaut (f, g) , d'après la première équation (1). Donc

$$\varphi(r, 0) = f(r).$$

En prenant $g = \varphi(r, t)$, l'équation (2) montre que

$$\frac{d}{dt} \|\varphi(r, t)\|^2 = [L(\varphi), \varphi] \leq 0.$$

Donc, d'après un raisonnement déjà utilisé, *il n'y a qu'une* fonction φ satisfaisant aux équations (2) (quel que soit g) et se réduisant à $f(r)$ pour $t=0$. Si donc l'équation (1) admet une solution, elle coïncide avec φ :

Toute solution de l'équation (1) est donc représentable par la formule

$$\varphi(r, t) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} d\theta(\lambda) f(r) \quad (t \geq 0),$$

où l'opérateur $\theta(\lambda)$ ne dépend que de L .

Vu et approuvé :

Paris, le 6 octobre 1944.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.

