THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

JEAN BOUFFARD

Sur les mouvements osculateurs au mouvement d'un projectile et leur application au calcul des trajectoires

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1942

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1942__250__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SÉRIE A, N° 1979
N° D'ORDRE : 2846

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean BOUFFARD
Agrégé de l'Université.

1re THÈSE. — Sur les mouvements osculateurs au mouvement d'un projectile et leur application au calcul des trajectoires.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1942, devant la Commission d'examen.

MM. CHAZY, *Président.*
VALIRON, BOULIGAND } *Examinateurs.*

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, rue de la Sorbonne

1942

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.
Doyen. . . . . G. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.
Émile PICARD.
Léon BRILLOUIN.
PÉCHARD.
FREUNDLER.
AUGER.
DANGEARD.
LESPIEAU.
VESSIOT.
PORTIER.
MOLLIARD.
LAPICQUE.
G. BERTRAND.
Ch. FABRY.
Léon BERTRAND.
WINTREBERT.
DUBOSCQ.
BOHN.
RABAUD.
CAULLERY.
J. PERRIN.
CARTAN.

PROFESSEURS

Emile BOREL. .	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
A. COTTON . . .	T	Recherches physiques.
J. DRACH. . . .	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ .	T	Zoologie.
M. GUICHARD. .	T	Analyse et mesures chimiques.
Paul MONTEL. .	T	Théorie des fonctions.
L. BLARINGHEM.	T	Botanique.
G. JULIA.	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN. . .	T	Minéralogie.
A. DENJOY . . .	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD . . .	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. BRUHAT . . .	T	Physique théorique et Physique céleste.
E. DARMOIS. . .	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE . .	T	Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR . . .	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER. . .		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique.
M. JAVILLIER . .	T	Chimie biologique.
Henri VILLAT. .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB. . . .	T	Géologie.
P. PASCAL. . . .	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET. . .	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON. .	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN . . .	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER. . .		Physique (P.C.B.).
De BROGLIE. . .	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN. . . .		Optique appliquée.
LABROUSTE . . .		Physique du Globe.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES.	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Application de l'analyse à la géométrie.
PÉRÈS.		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL . . .	T	Chimie minérale.
TOUSSAINT . . .		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD. . . .	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques.
DUPONT.	T	Théories chimiques.
LANQUINE. . . .	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON		Mathématiques générales.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN. . . .		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS . .		Calcul des probabilités et Physique mathématique.
CHATTON. . . .	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
J. BOURCART. .		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL . . .		Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES . . .		Enseignement de Physique.
GRASSÉ.	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
PRÉVOST		Chimie (P. C. B.).
BOULIGAND . . .		Mathématiques.
CHAUDRON . . .		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire..... A. PACAUD.
Secrétaire honoraire... D. TOMBECK

A Monsieur Georges VALIRON
Professeur à la Sorbonne

INTRODUCTION

Dans cet ouvrage, nous nous bornons à étudier le mouvement d'un projectile assimilé à un point matériel pesant, soumis à une résistance tangentielle, mouvement que, pour abréger, nous appelons « mouvement résistant ».

Les balisticiens ont souvent cherché à représenter la trajectoire par une courbe simple ; on a proposé par exemple : l'hyperbole ayant une asymptote verticale, la parabole cubique (trajectoire de PITON-BRESSANT) et nous montrons nous-mêmes, au Chapitre I, que la trajectoire peut, dans certains cas, coïncider presque exactement avec un arc de parabole à axe oblique.

C'est, d'autre part, un résultat classique que, si la trajectoire d'un projectile est connue, le mouvement est parfaitement déterminé : de la connaissance de la trajectoire on peut déduire la loi $R = F(v)$, toutefois cette loi a en général une expression très compliquée et peu intéressante ; nous avons obtenu des résultats beaucoup plus simples en étudiant l'hodographe de la résistance correspondant à une trajectoire donnée,et nous montrons aux Chapitres II, III, IV que, dans les cas où la trajectoire d'un mouvement résistant est l'une des trois courbes algébriques citées plus haut, l'hodographe de la résistance est une droite. Au chapitre V nous comparons ces droites hodographes avec l'hodographe du mouvement réel d'un projectile et ceci nous permet de prévoir quand la trajectoire pourra être représentée avec une certaine précision par l'une de ces trois courbes.

Aux Chapitres VI et VII nous étudions tous les mouvements

résistants dans lesquels l'hodographe de la résistance est une droite, et nous définissons les mouvements résistants osculateurs au mouvement d'un projectile.

Au Chapitre VIII nous déduisons de l'étude précédente une nouvelle méthode de calcul par arcs de la trajectoire, méthode présentant les avantages suivants : 1° on ne suppose pas que la loi de résistance ait une expression mathématique particulière ; 2° on ne suppose pas que, le long d'un arc, la pression et la température soient constantes et l'on élimine ainsi une cause d'erreur très sensible dès que la dénivellation entre les extrémités de l'arc atteint deux ou trois mille mètres.

Au Chapitre IX nous étudions les mouvements résistants ayant pour trajectoire un arc de conique, et nous déterminons la conique osculatrice à la trajectoire en un point.

Au Chapitre X nous expliquons quelques particularités remarquables des formules rencontrées dans le cours de notre étude, et nous généralisons certains résultats.

CHAPITRE I

REMARQUE SUR LA FORME DE CERTAINES TRAJECTOIRES

Ce travail a son point de départ dans des remarques faites sur la forme de trajectoires calculées, quand, l'angle de tir ne dépassant pas 45°, la vitesse initiale est assez faible pour que la résistance de l'air ne soit qu'une petite fraction du poids (1/5 au plus). Nous avons trouvé que la trajectoire se rapproche alors très sensiblement d'une parabole à axe incliné, jusqu'à une ordonnée négative égale à plusieurs fois la flèche.

1. **Rapports** r. — Pour faciliter la construction par points des trajectoires, on a déduit de leur calcul par arcs successifs les valeurs des rapports r ainsi définis :

Soient (fig. 1) une trajectoire $\mathfrak{T}$ de portée $\overline{OA} = x_o$, de flèche $\overline{sS} = f$, M (x, y) un de ses points et r le rapport $\frac{x}{x_o}$. On désigne par r_1, r_2, r_3 les valeurs de r quand y est égal à $\frac{f}{4}, \frac{f}{2}, \frac{3f}{4}$, M étant sur la branche montante ;

r_s la valeur de r quand M est au sommet ;

r', r'_2, r'_1 les valeurs de r quand y est égal à $\frac{3f}{4}, \frac{f}{2}, \frac{f}{4}$, M étant sur la branche descendante,

r''_4 la valeur de r quand y est égal à $-f$.

Valeur des rapports r pour une parabole à axe vertical. — Pour toutes ces paraboles, chacun des rapports a une valeur constante, puisque l'on peut passer d'une parabole à une autre par dilatation des abscisses et des ordonnées, transformations qui ne modi-

fient ni $\frac{x}{x_o}$, ni $\frac{y}{f}$. La parabole d'axe vertical, de portée x_o, de flèche f a pour équation :

$$y\, x_o^2 = 4\, f\, x\, (x_o - x)\ ;$$

coupons-la par la droite $y = n\,\frac{f}{4}$, et posons $\frac{x}{x_o} = \mathrm{R}$; nous obtenons l'équation :

$$\mathrm{R}^2 - \mathrm{R} + \frac{n}{16} = 0$$

qui a pour racines $\mathrm{R} = \frac{2 \pm \sqrt{4-n}}{4}$, c'est-à-dire :

pour $n = 1$	$\mathrm{R}_1 = 0{,}066987\ldots$	$\mathrm{R}'_1 = 0{,}933012\ldots$
pour $n = 2$	$\mathrm{R}_2 = 0{,}146446\ldots$	$\mathrm{R}'_2 = 0{,}853553\ldots$
pour $n = 3$	$\mathrm{R}_3 = 0{,}25$	$\mathrm{R}'_3 = 0{,}75$
pour $n = 4$	$\mathrm{R}_s = 0{,}5$	
pour $n = -4$	$\mathrm{R}''_4 = 1{,}207106\ldots$	

Comparaison des rapports r et R. — Considérons la trajectoire suivante :

$$c = 3.10^{-4}, \qquad v_o = 250 \text{ m/s}, \qquad \alpha = 20^o\ ;$$

comparons les rapports r_1, r_2,... résultant du calcul par arcs (loi de résistance de Gâvre) avec les rapports R_1, R_2,... en effectuant les différences $r_1 - \mathrm{R}_1$, $r_2 - \mathrm{R}_2$,... Nous obtenons le tableau :

y	$\frac{f}{4}$	$\frac{f}{2}$	$3\frac{f}{4}$	f	$3\frac{f}{4}$	$\frac{f}{4}$	$\frac{f}{2}$	$-f$
r	0,0699	0,1522	0,2587	0,5115	0,7586	0,8592	0,9359	1,1959
R	0,0670	0,1464	0,2500	0,5000	0,7500	0,8536	0,9330	1,2071
r—R	0,0029	0,0058	0,0087	0,0115	0,0086	0,0056	0,0029	—0,0112

Il est remarquable que les nombres de la dernière ligne soient à très peu près les nombres :

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad 4a, \quad 3a, \quad 2a, \quad a, \quad -4a,$$

avec $a = 0{,}0029$. Nous constatons donc le fait très curieux : $r - \mathrm{R}$ *est proportionnel à l'ordonnée y du point considéré.*

Si nous calculons les quantités $4\,\frac{r_n - \mathrm{R}_n}{n}$, nous trouvons les nombres presque égaux :

0,0116 0,0116 0,0116 0,0115 0,0115 0,0112 0,0116 0,0112

Le même fait se vérifie sur d'autres trajectoires, mais l'accord devient moins frappant à mesure que la vitesse initiale, le coefficient balistique ou l'angle de projection augmentent. Par exemple, pour la trajectoire :

$$c = 4.10^{-4}, \quad v_0 = 300 \text{ m/s}, \quad \alpha = 30^{\circ},$$

les différences r — R sont :

0,0066 0,0130 0,0190 0,0243 0,0178 0,0118 0,0058 —0,0243,

et les quantités $4\,\frac{r_n - R_n}{n}$ sont les nombres légèrement différents :

0,0264 0,0260 0,0253 0,0243 0,0237 0,0236 0,0232 0,0243.

2. **Nature de la trajectoire déduite de l'observation précédente.** — Supposons r — R rigoureusement proportionnel à

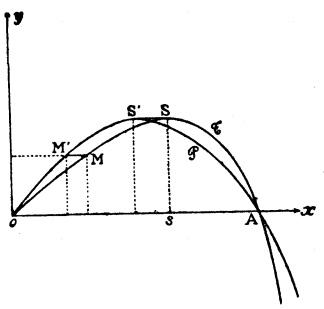

FIG. 1.

y. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'axe vertical de même portée x_0 et de même flèche f que la trajectoire $\mathcal{T}$ (fig. 1). Soit M un point de $\mathcal{T}$, M′ le point de $\mathcal{P}$ de même ordonnée, tous deux étant soit sur la branche montante, soit sur la branche descendante. Les abscisses de M et M′ sont :

$$x = r\,x_0, \qquad x' = R\,x_0\,;$$

puisque, par hypothèse, r — R est proportionnel à y, on a :

$$x - x' = ky\,;$$

on passe donc de M (x, y) à M′ (x', y') par la transformation :

$$x' = x - ky \qquad y' = y.$$

L'équation de la trajectoire est donc :

$$yx_0^2 = -4f\,(x - ky)\,(x - ky - x_0)\,;$$

c'est une *parabole d'axe parallèle à la droite* $x = ky$.

Précision des résultats observés. — En réalité, r — R n'est pas rigoureusement proportionnel à y. Dans le premier exemple, la proportionnalité serait parfaite si l'on modifiait certains rapports de 0,0002 au plus : pour que les points soient exactement sur une parabole, il suffirait d'en déplacer horizontalement quelques-uns d'une longueur égale au plus au $\frac{2}{10\,000}$ de la portée, c'est-à-dire puisque $x_o = 3\,700$ m. environ, de 0,75 m. au plus. Dans le second exemple, il suffirait de modifier les rapports r de 0,0007 au plus, et par suite de déplacer horizontalement les points de 4 m. au plus (pour une portée de plus de 5 000 m.).

3. **Conséquences de l'assimilation de la trajectoire à une parabole.** — Assimilons la trajectoire à une parabole. Les tan-

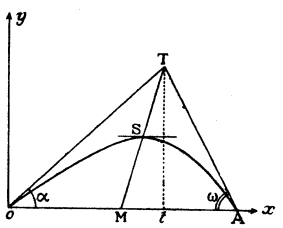

FIG. 2.

gentes en O et A se coupent en T (fig. 2). On sait que TS est parallèle à l'axe et coupe Ox au milieu M de OA ; S est le milieu de MT, donc, si t est la projection de T sur Ox, on a $\overline{t\mathrm{T}} = 2\,f$. Soient α et ω les angles de projection et de chute ; on a :

$$\overline{\mathrm{O}t} = \overline{t\mathrm{T}} \cot\mathrm{g}\,\alpha = 2\,f \cot\mathrm{g}\,\alpha,$$

$$\overline{t\mathrm{A}} = \overline{t\mathrm{T}} \cot\mathrm{g}\,\omega = 2\,f \cot\mathrm{g}\,\omega,$$

et, par suite, par addition et par soustraction :

$$(1) \qquad x_o = 2\,f\,(\cot\mathrm{g}\,\alpha + \cot\mathrm{g}\,\omega),$$

$$2\,\overline{\mathrm{M}t} = 2\,f\,(\cot\mathrm{g}\,\alpha - \cot\mathrm{g}\,\omega)\ ;$$

or, $\overline{\mathrm{M}t} = \overline{t\mathrm{T}}\,\mathrm{tg}\,\theta$, θ étant l'angle de l'axe de la parabole avec Oy, donc :

$$(2) \qquad 2\,\mathrm{tg}\,\theta = \cot\mathrm{g}\,\alpha - \cot\mathrm{g}\,\omega.$$

Confrontation de la formule (1) *avec les résultats du calcul par arcs.* Considérons les trajectoires :

$$c = 3.10^{-4}, \quad v_o = 200 \text{ m/s} \quad \alpha = 5^o\ 10^o,\ 15^o, \ldots\ 45^o.$$

Le tableau ci-dessous indique les valeurs de la flèche résultant du calcul par arcs (loi de Gâvre) et les valeurs de la flèche obtenues en appliquant la formule (1) :

α	ω	Flèche (Gâvre)	Flèche formule (1)
5°	5° 5′	15,35	15,35
10°	10°20′	60,32	60,32
15°	15°42′	133,09	133,13
20°	21° 8′	230,7	230,8
25°	26°35′	350,0	349,9
30°	32° 1′	487,0	487,1
35°	37°20′	637,6	637,6
40°	42°33′	797,3	797,2
45°	47°38′	961,3	961,4

l'accord est remarquable.

Confrontation de la formule (2) *avec les résultats du calcul par arcs.* L'angle de l'axe avec la verticale est donné aussi par :

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\overline{Mt}}{\overline{tT}} = \frac{2\,x_s - x_o}{2f}.$$

Le tableau ci-dessous indique les valeurs de tg θ calculées par les formules (2) et (3) pour les trajectoires :

$$c = 3.10^{-4}, \quad v_o = 250 \text{ m/s}, \quad \alpha = 5°, 10°, \ldots, 45°.$$

Nous verrons plus loin (n° 23) que tg θ est sensiblement égal à $\frac{2R_s}{3\,g}$ R_s étant l'accélération résistante au sommet. Nous avons fait figurer cette quantité dans le tableau.

α	tg θ formule (2)	tg θ formule (3)	$\frac{2\,R_s}{3\,g}$
5°	0,146	0,169	0,152
10°	0,144	0,152	0,145
15°	0,133	0,135	0,132
20°	0,120	0,120	0,121
25°	0,108	0,109	0,109
30°	0,095	0,094	0,094
35°	0,084	0,081	0,083
40°	0,073	0,069	0,072
45°	0,062	0,058	0,061

L'accord est en général très bon.

Pour des ordonnées négatives très grandes, la trajectoire s'écarte de la parabole, puisque celle-ci admet une tangente verticale. Dans tous les exemples précédents, le point à tangente verticale de la parabole se trouve très éloigné : par exemple, pour la parabole assimilée à la trajectoire ci-dessus : $v_0 = 250$ m/s, $c = 3.10^{-4}$, $\alpha = 30^o$, alors que la portée est environ 4 850 m. et la flèche 741 m., ce point a comme coordonnées (environ) $x = 23\,500$ m., $y = -220\,000$ m.

4. **Aperçu historique de la question.** — La ressemblance d'une trajectoire et d'une parabole à axe oblique avait déjà été signalée, mais dans des cas où elle était moins frappante.

Travaux du Chef d'escadron J. B. H. Lefèvre. — Dans un article paru dans la *Revue d'Artillerie* d'octobre 1879, « Note sur deux tracés empiriques de la trajectoire dans l'air et sur l'approximation qu'ils comportent », le Chef d'escadron Lefèvre cite les faits suivants :

« Le rapport n° 86 de la Commission d'expérience de Calais... fait ressortir un fait assez remarquable : c'est que les ordonnées d'une parabole du 2e degré, obtenues par un simple tracé graphique, pour une trajectoire d'une très grande étendue (9 280 m.) diffèrent fort peu de celles qu'on trouve par deux procédés plus ou moins laborieux (Formule de Piton-Bressant et méthode de M. Bashforth). »

Le Chef d'escadron Lefèvre expose ensuite ses expériences faites à l'aide d'un fusil de rempart se chargeant par la bouche, et tirant une balle cylindro-ogivale de 60 g., de calibre 14 mm., de vitesse initiale 425 m/s environ. Ayant disposé des panneaux de 100 m. en 100 m., pour un tir d'une portée de 1 000 m., il trouve les ordonnées suivantes :

Mètres :	4,45	8,17	11,13	13,16	14,11	13,95	12,54	9,78	5,62	0,00

les différences de ces ordonnées avec celles d'une parabole à axe oblique (ordonnée de la parabole — ordonnée expérimentale) sont :

+0,08	+0,09	—0,01	—0,10	—0,11	—0,11	—0,05	+0,05	+0,04	0,00

et les différences avec celles d'une courbe du 3e degré (trajectoire de Piton-Bressant) sont :

+0,03	+0,05	+0,01	—0,04	—0,03	—0,04	—0,03	+0,01	+0,04	0,00

Les écarts avec une parabole à axe oblique sont relativement plus sensibles que dans nos exemples, mais, ici, le coefficient balistique et la vitesse initiale sont beaucoup plus élevés.

Travaux du Commandant BATAILLER. — Dans un article de la *Revue d'Artillerie* de juillet 1907, « Les coniques comme courbes balistiques et le calcul des zones dangereuses », le Commandant BATAILLER examine la question suivante : la trajectoire d'un projectile peut-elle être représentée par une conique ?

Comme nous l'exposons dans le chapitre suivant, on peut, connaissant uniquement la trajectoire d'un projectile, calculer la résistance en chaque point. Le Commandant BATAILLER cherche donc quelle serait la loi de résistance $F(v)$ correspondant à une trajectoire conique. Sa conclusion est la suivante : sauf peut-être aux grandes vitesses, la trajectoire diffère sensiblement d'une conique.

Nous verrons plus loin que, aux grandes vitesses, la trajectoire se rapproche beaucoup, si l'angle de projection est très faible, d'un arc d'hyperbole ayant une asymptote verticale ; toutefois la conclusion du Commandant BATAILLER est en contradiction avec l'exposé que nous venons de faire ; il écrit :

« Dès le début de la balistique, le désir de ramener à une forme simple l'équation de la trajectoire conduisit à essayer de remplacer cette trajectoire par un arc de conique.

« NEWTON proposa d'adopter une hyperbole dont l'une des asymptotes était verticale. De nombreux auteurs, parmi lesquels INDRA et OEKINGHAUS ont repris à leur compte l'hypothèse de NEWTON en admettant que l'on pouvait, sans erreur sensible, remplacer la trajectoire réelle par un arc d'hyperbole. On a également proposé l'adoption d'un arc de parabole à axe oblique. Ces tentatives diverses n'ont pas eu un très grand retentissement ; pour une précision moindre, elles ne présentaient pas sur la méthode de Piton-Bressant alors universellement adoptée, l'avantage d'une plus grande précision de calcul. »

L'auteur écrit ensuite en note :

« On peut ajouter que les faibles vitesses usitées ne se prêtaient point à une telle substitution. Il semble de plus que le problème n'ait jamais été traité avec toute la généralité et l'ampleur désirables. »

Autres substitutions de coniques à la trajectoire. — Le Général CHAPEL remplace la trajectoire par une parabole bitangente à l'origine et au point de chute.

On a proposé aussi une conique bitangente à l'origine et au point de chute et ayant même flèche, mais il ne faut voir dans ces essais que des procédés empiriques, sans fondement mécanique.

5. **But des chapitres suivants.** — Nous allons étudier dans les chapitres suivants les circonstances du mouvement d'un projectile, en partant *a priori* de l'hypothèse que la trajectoire est, soit une parabole à axe oblique, soit une hyperbole d'asymptote verticale. Notre méthode différera de celle du Commandant BATAILLER, en ceci que nous attacherons moins d'importance à la loi $F(v)$ résultant de l'hypothèse faite qu'à la comparaison des hodographes de la résistance dans le cas du mouvement réel et dans le cas des trajectoires paraboliques et hyperboliques.

Avant d'aborder cette étude, nous allons reprendre le problème classique (appelé problème de LAGRANGE) de la recherche des circonstances du mouvement d'un projectile, quand la trajectoire est connue. La nouveauté introduite consiste dans l'étude de *l'hodographe de la résistance* et dans la définition de ce que nous appelons *l'indice du mouvement* en un point.

CHAPITRE II

MOUVEMENTS RÉSISTANTS DE TRAJECTOIRE DONNÉE

---

6. **Définition d'un « mouvement résistant ».** — Nous appellerons « mouvement résistant » le mouvement d'un point matériel soumis à la pesanteur $m\vec{g}$ et à une résistance tangentielle $m\vec{\mathbf{R}} = -m\lambda\vec{\mathbf{V}}$, $\vec{\mathbf{V}}$ étant le vecteur vitesse, et λ un facteur positif variable. Le vecteur $\vec{\mathbf{R}}$ est l'accélération résistante. Sa grandeur est $R = \lambda v$, v étant la grandeur de la vitesse. (Nous compterons toujours R positivement dans le sens opposé à la vitesse.)

7. **Généralités sur les mouvements résistants de trajectoire donnée.** — La détermination du mouvement résistant de trajectoire donnée est un problème classique.

Soit (C) une courbe donnée, siège d'un mouvement résistant ; les équations intrinsèques du mouvement sont :

$$(4) \qquad \begin{cases} v^2 \dfrac{d\tau}{ds} = -g\cos\tau, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{ds} = -R - g\sin\tau, \end{cases}$$

τ désignant l'angle de projection et s l'arc (le rayon de courbure est $\rho = -\dfrac{ds}{d\tau}$). La première équation montre que, la trajectoire étant donnée, v^2 est une fonction bien déterminée de s ; la seconde équation donne ensuite R en chaque point de la courbe. Si l'on connaît le sens du mouvement et la position du mobile à l'instant zéro, le mouvement est parfaitement déterminé.

A première vue, deux mouvements sont possibles, puisque le

signe de v est arbitraire ; toutefois, $\vec{R}$ étant déterminé en chaque point de (C), il est de sens contraire à la vitesse dans un seul des deux mouvements.

8. **Détermination du mouvement résistant de trajectoire** $y = y(x)$. — La première équation (4) peut s'écrire :

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{g\cos\tau}{v};$$

donc, dans un mouvement résistant quelconque, les éléments x, y, τ, v sont des fonctions de t vérifiant le système fondamental :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v\cos\tau, \\ \frac{dy}{dt} &= v\sin\tau, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{g\cos\tau}{v}, \\ \frac{dv}{dt} &= -R - g\sin\tau. \end{aligned}\right.$$

Supposons donnée la trajectoire $y = y(x)$. On a :

$$(6)\qquad y'(x) = \operatorname{tg}\tau.$$

Dérivons cette relation par rapport à x ; on obtient, en utilisant le système (5) :

$$(6')\qquad \left\{\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{g}{v^2\cos^2\tau}, \\ y'''(x) &= -\frac{2Rg}{v^4\cos^3\tau}, \\ y^{\text{IV}}(x) &= -2g\,\frac{v\dfrac{dR}{dt} + 4R^2 + Rg\sin\tau}{v^6\cos^4\tau}, \end{aligned}\right.$$

On pourrait continuer les dérivations, et obtenir $y^{(n)}(x)$ en fonction de τ, v, R, $\frac{dR}{dt}$, ..., $\frac{d^{n-3}R}{dt^{n-3}}$; les expressions se compliquent très rapidement.

Calcul de v et R *en fonction de x.* — Des équations donnant $y''(x)$ et $y'''(x)$, on tire :

$$(7)\qquad \begin{cases} v\cos\tau = \sqrt{g}\,(-y'')^{-\frac{1}{2}}, \\ \mathrm{R}\cos\tau = -\dfrac{g}{2}\dfrac{y'''}{y''^2}. \end{cases}$$

Ceci montre que, pour qu'un mouvement résistant de trajectoire $y = y(x)$ soit possible, le point se déplaçant dans le sens des x croissants, *il faut et il suffit* que $y''(x)$ et $y'''(x)$ soient négatifs.

Calcul de x en fonction du temps. — La première équation (5) devient en utilisant la première équation (7) :

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{g}\,(-y'')^{-\frac{1}{2}},$$

ou, en intégrant :

$$(8)\qquad t\sqrt{g} = \int_0^x (-y'')^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

ce qui détermine x en fonction de t.

Conditions initiales. — Supposons que, dans un mouvement résistant, on connaisse à l'instant zéro : la position du mobile (l'origine), les valeurs τ_0, v_0, R_0, $\left(\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}\right)_0$,... de τ, v, R, $\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}$,... La trajectoire sera soumise aux conditions suivantes (*conditions initiales*) :

$$(9)\qquad \begin{cases} y_0 = 0, \\ y'_0 = \operatorname{tg}\tau_0, \\ y''_0 = -\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\tau_0}, \\ y'''_0 = -\dfrac{2\,\mathrm{R}_0\,g}{v_0^4\cos^3\tau_0}, \\ y^{\mathrm{IV}}_0 = -2g\,\dfrac{v_0\left(\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}\right)_0 + 4\,\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_0\,g\sin\tau_0}{v_0^6\cos^4\tau_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

9. **Hodographe de la résistance. Indice** p. — Par l'origine, menons un vecteur $\overrightarrow{OA}$ équipollent au vecteur $\vec{\mathbf{R}}$; le lieu de A est l'hodographe de la résistance. Cette courbe jouera un rôle important dans la théorie des mouvements résistants.

Nous rapporterons toujours les *coordonnées polaires* de A à l'axe Ox changé de sens : elles seront donc R et τ. Les coordonnées cartésiennes sont (axes Ox, Oy) :

$$X = -R\cos\tau, \quad Y = -R\sin\tau.$$

Coordonnées de A *pour une trajectoire* $y = y(x)$. — La seconde équation (7) donne immédiatement :

$$(10) \qquad X = \frac{g}{2}\frac{y''}{y''^2}, \quad Y = \frac{g}{2}\frac{y'y'''}{y''^2}.$$

Indice p. — L'élément différentiel du premier ordre de la courbe hodographe qui présentera le plus d'intérêt dans la suite de cette étude est l'indice p défini de la façon suivante : la tangente à l'hodographe au point A rencontre Oy en P. Nous appellerons indice p le nombre :

$$p = \frac{g}{\overline{OP}}.$$

L'équation polaire classique de la tangente en A est :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos(\theta - \tau) + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{R}\right)\sin(\theta - \tau);$$

p s'obtient en faisant $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$:

$$(11) \qquad \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{p}{g} = -\frac{1}{R}\sin\tau - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\tau;$$

ou, en utilisant la troisième équation (5) :

$$(12) \qquad p = -\frac{g}{R}\sin\tau - \frac{v}{R^2}\frac{dR}{dt},$$

équation qui peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$(13) \qquad \frac{dR}{dt} = \frac{R}{v}(-pR - g\sin\tau).$$

L'utilisation de p à la place de $\dfrac{dR}{dt}$ donne des expressions plus

simples ; par exemple, la valeur de $y^{\text{IV}}(x)$ donnée par l'équation (6)', devient :

$$y^{\text{IV}}(x) = -2\,g\,\frac{(4-p)\,\mathrm{R}^2}{\rho^6\cos^4\tau}\,.$$

Expression de p pour une trajectoire $y = y(x)$. — Soient X et Y les coordonnées de A ; on a :

$$\overline{\mathrm{OP}} = \mathrm{Y} - \mathrm{X}\,\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\,,$$

on en déduit, en utilisant les équations (10) :

$$p = 4 - 2\,\frac{y''\,y^{\text{IV}}}{y'''^2}\,. \tag{14}$$

10. **Application à la trajectoire de Piton-Bressant.** — La trajectoire de Piton-Bressant a pour équation $y = y(x)$, $y(x)$ étant un polynôme du troisième degré ; par suite, $y^{\text{IV}}(x)$ est identiquement nul, p est constamment égal à 4. La tangente à l'hodographe de la résistance passe par le point fixe $\mathrm{P_B}\left(\mathrm{X}=0, \mathrm{Y}=\frac{g}{4}\right)$; *l'hodographe est donc une droite passant par ce point.* Réciproquement on voit facilement que toute droite passant par $\mathrm{P_B}$ est l'hodographe d'une infinité de trajectoires de Piton-Bressant.

CHAPITRE III

MOUVEMENT RÉSISTANT PARABOLIQUE

Nous allons étudier dans ce chapitre les circonstances d'un mouvement résistant dont la trajectoire est une parabole.

11. **Equations du mouvement.** — Soit une parabole passant par l'origine. Son équation est :

$$y = y(x) = ax - b + b(1 - cx)^{\frac{1}{2}}.$$

Calculons les trois premières dérivées :

$$y'(x) = a - \frac{bc}{2}(1 - cx)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y''(x) = -\frac{bc^2}{4}(1 - cx)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y'''(x) = -\frac{3bc^3}{8}(1 - cx)^{-\frac{5}{2}}.$$

Les conditions trouvées plus haut : $y'' < 0$, $y''' < 0$, exigent que b et c soient positifs.

La relation entre t et x est donnée par l'équation (8) :

$$t\sqrt{g} = \frac{c\sqrt{b}}{2}\int_0^x (1 - cx)^{-\frac{3}{4}}\,dx,$$

ce qui donne après intégration :

$$(t - t_0)\sqrt{g} = -2\sqrt{b}\,(1 - cx)^{\frac{1}{4}},$$

ou :

$$x = \frac{1}{c} - \frac{g^2}{16\,b^2c}(t - t_0)^4.$$

Les autres éléments du mouvement s'obtiennent à partir de l'équation de la parabole et des équations (7). On trouve :

$$\left\{\begin{aligned} y &= ax - b + \frac{g}{4}(t - t_0)^2, \\ \operatorname{tg}\tau &= a - \frac{2\,b^2c}{g}(t - t_0)^{-2}, \\ v &= -\frac{g^2}{4\,b^2c\cos\tau}(t - t_0)^3, \\ \mathrm{R} &= -3\,v\,(t - t_0)^{-1}. \end{aligned}\right.$$

Conditions initiales. — La parabole utilisée passe par l'origine Les trois paramètres dont elle dépend *seront déterminés sans ambi-*

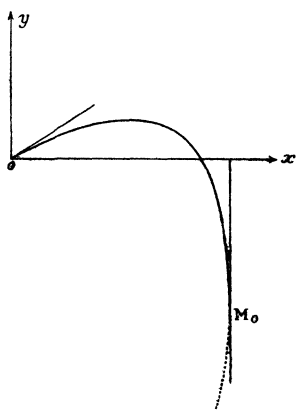

FIG. 3.

guïté si l'on écrit qu'à l'origine τ, v, R ont pour valeur τ_0, v_0, R_0. D'autre part, la constante t_0 sera déterminée par la condition que l'origine est atteinte à l'instant zéro. Le calcul ne présente aucune difficulté et donne :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} t_0 &= \frac{3\,v_0}{\mathrm{R}_0}, \quad a = \operatorname{tg}\tau_0 + \frac{3\,g}{2\,\mathrm{R}_0\cos\tau_0}, \\ b &= \frac{g t_0^2}{4}, \quad c = \frac{4}{v_0\,t_0\cos\tau_0}. \end{aligned}\right.$$

Remarque sur la constante t_0. — A l'instant t_0, $\operatorname{tg}\tau$ est infini. Le mobile est au point M_0 de la parabole où la tangente est verticale. M_0 est l'extrémité de l'arc que peut parcourir le mobile, car, au delà, y'' devient positif (fig. 3).

12. **Fonctions balistiques. Leurs expressions dans le mouvement parabolique.** — Nous mettrons toujours les équations d'un mouvement résistant d'éléments initiaux τ_0, v_0, R_0 sous la forme suivante :

$$x = v_0\, t \cos \tau_0 \,.\, A,$$

$$y = x \operatorname{tg} \tau_0 - \frac{1}{2} g t^2 \,.\, B,$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \tau_0 - \frac{g t}{v_0 \cos \tau_0} C,$$

$$v \cos \tau = v_0 \cos \tau_0 \,.\, D \,;$$

A, B, C, D, qui seraient égaux à l'unité dans le cas du mouvement dans le vide, sont ce que nous appellerons les *fonctions balistiques* : elles représentent l'influence de la résistance de l'air. *A priori*, elles dépendent des données initiales du mouvement et de la variable t ; si l'on effectue le calcul pour le mouvement parabolique, on trouve ce résultat curieux (que nous expliquerons au n° 51) : les fonctions A, B, C, D dépendent uniquement de la quantité $s = \frac{R_0 t}{v_0}$. Le calcul donne :

$$A = \left(1 - \frac{s}{6}\right)\left(1 - \frac{s}{3} + \frac{s^2}{18}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{s}{6}\right)^2,$$

$$C = \left(1 - \frac{s}{6}\right)\left(1 - \frac{s}{3}\right)^{-2},$$

$$D = \left(1 - \frac{s}{3}\right)^3.$$

D'autre part, on obtient pour R l'expression :

$$R = R_0 \frac{v}{v_0}\left(1 - \frac{s}{3}\right)^{-1}.$$

13. — **Interprétation de la seconde équation** (15). — Cette équation relie le coefficient angulaire a de l'axe de la parabole, τ_0 et R_0. Tout point de la parabole pouvant être pris comme origine du mouvement, on a, quel que soit t :

$$a = \operatorname{tg} \tau + \frac{3\, g}{2\, R \cos \tau}.$$

Or, considérons le vecteur $\vec{\mathbf{w}} = 2\,\vec{\mathbf{R}} + 3\,\vec{g}$, ses projections sur les axes étant respectivement $-2\,R\cos\tau$ et $-2\,R\sin\tau - 3\,g$, son coefficient angulaire est égal à a : le vecteur $\vec{\mathbf{w}}$ est donc parallèle à l'axe de la parabole. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un mouvement parabolique résistant, l'axe de la parabole est parallèle au vecteur* $2\,\vec{\mathbf{R}} + 3\,\vec{\mathbf{g}}$.

14. **Hodographe de la résistance. Indice** p. — Construisons les vecteurs $\overrightarrow{OR} = \vec{\mathbf{R}}$ puis $\overrightarrow{RS} = \dfrac{3\,\vec{g}}{2}$ (fig. 4). Le vecteur $\overrightarrow{OS}$, somme de ces deux vecteurs est, d'après le théorème précédent, parallèle

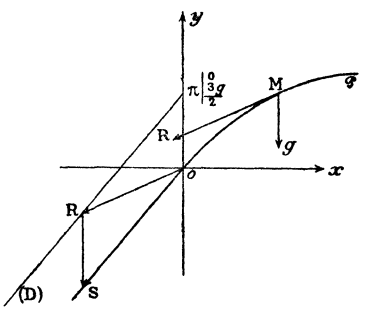

FIG. 4.

à l'axe de la parabole ; la droite OS est donc fixe et le point R décrit la droite (D) qui se déduit de OS par la translation $-\dfrac{3}{2}\vec{\mathbf{g}}$.

L'hodographe de la résistance *est donc une droite* parfaitement déterminée par le point π de Oy d'ordonnée $\dfrac{3\,g}{2}$ et par les conditions initiales qui en donnent un second point de coordonnées polaires τ_o, R_o.

Réciproquement toute droite passant par π est hodographe d'une infinité de mouvements paraboliques, puisque, la droite étant donnée, τ_o et v_o sont arbitraires.

Indice p. — L'hodographe de la résistance étant une droite, l'indice est constant et égal à $p = \dfrac{g}{\overline{O\pi}} = \dfrac{2}{3}$.

Calcul de $\frac{dR}{dt}$. — L'équation (13) donne :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R}{v}\left(-\frac{2}{3}R - g\sin\tau\right).$$

15. **Éléments d'une trajectoire parabolique.** — Soit une trajectoire parabolique *parfaitement déterminée* par les données initiales τ_o, v_o R_o. Les éléments de cette trajectoire, c'est-à-dire : la portée P, les coordonnées X_s, Y_s du sommet, la durée de trajet T, la tangente de l'angle de chute s'obtiennent aisément à partir de l'équation de la parabole et des équations du mouvement données au n° 11.

Nous nous contenterons de donner le résultat du calcul. Il est très curieux de constater que les rapports des valeurs de ces éléments à leurs valeurs dans le cas de la trajectoire du vide dépendent de la seule quantité :

$$k = \frac{R_o \sin\tau_o}{3g}.$$

On obtient, en désignant par $(P)_v$, $(X_s)_v$, $(Y_s)_v$, $(T)_v$ les éléments de la trajectoire du vide :

$$\left\{\begin{aligned} P &= (P)_v \frac{1}{(1+2k)^2}, \\ X_s &= (X_s)_v \frac{1+k}{(1+2k)^2}, \\ Y_s &= (Y\ )_v \frac{1}{1+2k}, \\ \operatorname{tg}\omega &= \operatorname{tg}\tau_o \frac{1+2k}{1-2k}, \\ T &= (T)_v \frac{2}{1+2k+\sqrt{1-4k^2}}\ ; \end{aligned}\right. \qquad \text{avec :} \qquad \left\{\begin{aligned} (P)_v &= \frac{v_o \sin 2\tau_o}{g}, \\ (X_s)_v &= \frac{1}{2}(P)_v, \\ (Y_s)_v &= \frac{v_o^2 \sin^2\tau_o}{2g}, \\ (T)_v &= \frac{2 v_o \sin\tau_o}{g}. \end{aligned}\right.$$

CHAPITRE IV

MOUVEMENT RÉSISTANT HYPERBOLIQUE

(L'hyperbole a une asymptote verticale.)

Nous étudions dans ce chapitre les circonstances d'un mouvement résistant dont la trajectoire est une hyperbole ayant une asymptote verticale. Nous appellerons ce mouvement : « mouvement résistant hyperbolique », sans préciser chaque fois que l'hyperbole a une asymptote verticale.

16. **Équations du mouvement.** — L'hyperbole passant par l'origine a pour équation :

$$y = ax - b + b\,(1 - cx)^{-1}.$$

Calculons les trois premières dérivées :

$$\begin{aligned} y' &= a + bc\,(1 - cx)^{-2}, \\ y'' &= 2\,bc^2\,(1 - cx)^{-3}, \\ y''' &= 6\,bc^3\,(1 - cx)^{-4}. \end{aligned}$$

Les conditions : $y'' < 0$, $y''' < 0$ exigent que b soit négatif et c positif.

La relation entre t et x est donnée par l'équation (8) :

$$t\sqrt{g} = c\sqrt{-2\,b}\int_0^x (1 - cx)^{-\frac{3}{2}}\,dx\ ;$$

on en tire, après intégration :

$$x = \frac{1}{c} + \frac{8b}{gc}\,(t - t_0)^{-2}.$$

Les autres éléments du mouvement s'en déduisent à partir de l'équation de l'hyperbole et des équations (7). On obtient :

$$y = ax - b - \frac{g}{8}(t - t_0)^2,$$

$$\operatorname{tg}\tau = a + \frac{g^2 c}{64\, b}(t - t_0)^4,$$

$$v \cos\tau = -\frac{16\, b}{gc}(t - t_0)^{-3},$$

$$R = 3v(t - t_0)^{-1}.$$

Conditions initiales. — Les trois paramètres dont dépend l'hyperbole *seront déterminés sans ambiguïté* par la connaissance de τ_0, v_0, R_0. La constante t_0 est déterminée par la condition que l'origine est atteinte au temps zéro. Le calcul donne :

$$(16)\quad \begin{cases} t_0 = -\dfrac{3v_0}{R_0}, \quad a = \operatorname{tg}\tau_0 + \dfrac{3\, g}{4\, R_0 \cos\tau_0}, \\ b = -\dfrac{g\, t_0^2}{8}, \quad c = -\dfrac{2}{v_0\, t_0 \cos\tau_0}, \end{cases}$$

Remarque sur la constante t_0. — A l'instant t_0, le point est à l'infini sur la branche oblique ($x = -\infty$). Quand t croît de t_0 à $+\infty$, x croît de $-\infty$ à $\frac{1}{c}$, abscisse de l'asymptote verticale : le point décrit toute la branche d'hyperbole.

17. Fonctions balistiques dans le mouvement hyperbolique. — Comme dans le cas du mouvement parabolique, les fonctions balistiques définies au n° 12 ne dépendent, pour le mouvement déterminé par les éléments initiaux τ_0, v_0, R_0, que de la quantité $s = \frac{R_0\, t}{v_0}$. Un calcul simple permet de tirer des équations du paragraphe précédent :

$$A = \left(1 + \frac{s}{6}\right)\left(1 + \frac{s}{3}\right)^{-2},$$

$$B = \left(1 + \frac{s}{6}\right)^2\left(1 + \frac{s}{3}\right)^{-2},$$

$$C = \left(1 + \frac{s}{6}\right)\left(1 + \frac{s}{3} + \frac{s^2}{18}\right),$$

$$D = \left(1 + \frac{s}{3}\right)^{-3}.$$

On trouve d'autre part pour R :

$$R = R_0 \frac{v}{v_0} \left(1 + \frac{s}{3}\right)^{-1}.$$

18. **Interprétation de la seconde équation** (16). — La seconde équation (16) donne une relation entre a, coefficient angulaire de l'asymptote oblique, τ_0 et R_0. Tout point pouvant être pris comme point origine, la relation est vraie quel que soit t, et l'on a :

$$a = \frac{4\,R \sin \tau + 3\,g}{4\,R \cos \tau}.$$

On voit donc que a est le coefficient angulaire du vecteur

$$\vec{\mathbf{w}} = 4\,\vec{\mathbf{R}} + 3\,\vec{\mathbf{g}}\,;$$

on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un mouvement hyperbolique résistant, l'asymptote oblique est parallèle au vecteur* $4\,\vec{\mathbf{R}} + 3\,\vec{\mathbf{g}}$.

19. **Hodographe de la résistance. Indice** p. — En raisonnant comme nous l'avons fait pour le mouvement parabolique, on déduit

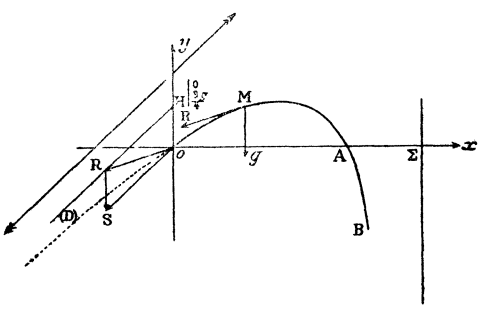

FIG. 5.

du résultat ci-dessus que l'hodographe de la résistance est une droite passant par le point H de Oy d'ordonnée $\frac{3g}{4}$, et parallèle à l'asymptote oblique (fig. 5).

Réciproquement, toute droite passant par H est l'hodographe d'une infinité de mouvements hyperboliques.

Indice p. — L'hodographe étant une droite, l'indice p est constant et égal à $p = \frac{g}{\overline{OH}} = \frac{4}{3}$.

Calcul de $\frac{dR}{dt}$. — L'équation (13) donne :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R}{v}\left(-\frac{4}{3}R - g\sin\tau\right).$$

20. — **Éléments de la trajectoire hyperbolique.** — Si l'on calcule les éléments d'une trajectoire hyperbolique déterminée par les éléments initiaux τ_o, v_o, R_o, on constate, comme dans le cas de la trajectoire parabolique, que les rapports des valeurs de ces éléments à leurs valeurs dans le cas de la trajectoire du vide ne dépendent que du nombre $k = \frac{R_o \sin\tau_o}{3g}$.

Les résultats du calcul sont [1] :

$$P = (P)_v \frac{1}{1+4k},$$

$$X_s = (X_s)_v \frac{2}{1+4k+\sqrt{1+4k}},$$

$$Y_s = (Y_s)_v \left(\frac{2}{1+\sqrt{1+4k}}\right)^2,$$

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\tau_o\,(1+4k),$$

$$T = (T)_v \frac{2}{1+\sqrt{1+4k}}.$$

Abscisse de l'asymptote verticale. — L'abscisse $\overline{O\Sigma} = \frac{1}{c}$ de l'asymptote verticale vérifie la relation simple suivante :

$$\frac{1}{\overline{O\Sigma}} = \frac{1}{P} - \frac{1}{(P)_v}.$$

1. Les formules données montrent immédiatement que si une trajectoire est représentable avec précision par une hyperbole ayant une asymptote verticale, le produit $P \operatorname{tg}\omega$ aura la même valeur que dans le cas de la trajectoire du vide ; il en sera de même de Y_s/T^2.

CHAPITRE V

APPLICATION DES THÉORIES DES MOUVEMENTS RÉSISTANTS PARABOLIQUE ET HYPERBOLIQUE AU MOUVEMENT DES PROJECTILES

---

21. **Mouvement résistant osculateur.** — Un projectile décrit une trajectoire $\mathfrak{T}$ sous l'action de la pesanteur et d'une résistance tangentielle du milieu.

Prenons comme origine un point O de la trajectoire, et soient τ_0, φ_0, R_0 les valeurs de τ, φ, R en ce point.

Nous appellerons « mouvement résistant parabolique osculateur en O » le mouvement parabolique résistant d'un point qui part de O en même temps que le projectile réel, avec les mêmes éléments initiaux τ_0, φ_0, R_0. (Nous appellerons parfois ce mouvement « le mouvement fictif » et celui du projectile « le mouvement réel »).

On définirait de la même façon le « mouvement résistant hyperbolique osculateur » l'hyperbole ayant bien entendu une asymptote verticale.

Nous avons vu que ces mouvements sont parfaitement déterminés par la connaissance de τ_0, φ_0, R_0.

22. — **Etude de l'osculation des deux mouvements.** — Pour faciliter le langage, nous supposerons qu'il s'agit du mouvement parabolique, mais il va de soi que les résultats s'étendent au mouvement hyperbolique.

Ordre du contact des trajectoires fictive et réelle. — Soient $y = f(x)$ et $y = h(x)$ les équations de la trajectoire $\mathfrak{T}$ et de la parabole $\mathfrak{P}$ trajectoire du mouvement osculateur en O. Si l'on se reporte aux

équations (9), on voit que, puisque τ_0, v_0, R_0 sont les mêmes dans les deux mouvements, on a :

$$f(0) = h(0),\ f'(0) = h'(0),\ f''(0) = h''(0),\ f'''(0) = h'''(0)\ ;$$

les deux courbes $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{R}$ ont donc, à l'origine un contact d'ordre 3.

Les paraboles du plan dépendant de 4 paramètres, la parabole trajectoire du mouvement fictif est la parabole osculatrice à la trajectoire réelle. Comme, dans un mouvement parabolique résistant, l'axe de la parabole est parallèle au vecteur $2\vec{\mathbf{R}} + 3\,\vec{\mathbf{g}}$, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La parabole osculatrice à une trajectoire en un point quelconque M a son axe parallèle au vecteur* $2\vec{\mathbf{R}} + 3\,\vec{\mathbf{g}}$.

Dans le cas de l'hyperbole, on aura le théorème analogue :

THÉORÈME. — *L'hyperbole d'asymptote verticale osculatrice à une trajectoire en un point quelconque M a son asymptote oblique parallèle au vecteur* $4\vec{\mathbf{R}} + 3\,\vec{\mathbf{g}}$.

Ordre infinitésimal de l'angle des deux vitesses. — Considérons la troisième équation (5) : $\dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{g\cos\tau}{v}$; en la dérivant par rapport à t, on obtient après réduction :

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{g\cos\tau}{v^2}\,(R + 2\,g\sin\tau).$$

Puisque τ, v, R ont la même valeur dans les deux mouvements à l'instant zéro, il en sera de même de $\dfrac{d\tau}{dt}$ et $\dfrac{d^2\tau}{dt^2}$. L'angle des deux vitesses sera donc un infiniment petit d'ordre 3 en t.

Ordre infinitésimal de la différence des vitesses. — A l'instant zéro, v et $\dfrac{dv}{dt}$ ont la même valeur dans les deux mouvements ; la différence de la grandeur des vitesses est donc un infiniment petit d'ordre 2 en t.

Ordre infinitésimal de la distance des deux mobiles. — A l'instant zéro, les deux mobiles ont même vitesse et même accélération, par suite, les différences des abscisses et des ordonnées sont des infiniment petits d'ordre 3 en t.

23. **Assimilation de certaines trajectoires avec une parabole ou avec une hyperbole d'asymptote verticale.** — Considérons par exemple la trajectoire suivante :

$$\tau_0 = 20^\circ, \quad c = 3.10^{-4}, \quad v_0 = 200 \text{ m/s}.$$

En nous appuyant sur le calcul de la trajectoire par arcs successifs, construisons l'hodographe de la résistance (fig. 6). L'arc ASC correspond à l'arc de trajectoire d'ordonnée positive, l'arc CB corres-

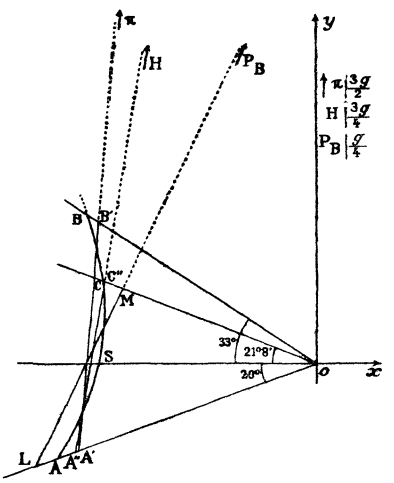

FIG. 6.

pond aux ordonnées négatives de 0 à — 400m. environ (la flèche est d'environ 230 m.). L'angle de chute est de 21°8'. Le point B correspond à $\tau = -33^\circ$. Les variations de R sont (en m/s/s) :

τ	20°		0		—4°		—33°
R	1,435	↘	1,148	↘	1,131	↗	1,405

Considérons d'autre part le mouvement parabolique correspondant aux mêmes valeurs de τ_0 et v_0, et admettant pour hodographe la droite A'B' (dont le prolongement passe naturellement par le point π de Oy d'ordonnée $\frac{3g}{2}$). Ce mouvement se rapprochera

sans aucun doute du mouvement réel, puisque, pour une même valeur de τ, la différence des accélérations résistantes est au plus de 0,1 m/s/s et cette différence est tantôt positive, tantôt négative. D'ailleurs, ce mouvement représentera mieux le mouvement réel dans son ensemble que le mouvement parabolique osculateur à l'origine, qui aurait pour hodographe la droite πA : la différence des accélérations résistantes atteindrait 0,2 m/s/s et jouerait toujours dans le même sens.

L'axe de la parabole, parallèle à la droite hodographe, est sensiblement parallèle à la droite Sπ ; il fait avec Oy un angle θ tel que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{OS}{O\pi} = \frac{2\,R_s}{3\,g},$$

R_s étant l'accélération résistante au sommet.

Considérons maintenant le mouvement hyperbolique ayant toujours pour éléments initiaux τ_0 et v_0 et dont l'hodographe est le segment de droite A'' C'' (dont le prolongement passe par le point H de Oy d'ordonnée $\frac{3\,g}{4}$). Il se rapprochera plus du mouvement réel que le mouvement parabolique, tout au moins pour la partie de la trajectoire d'ordonnée positive, puisque, pour une même valeur de τ, la différence des accélérations résistantes est au plus de 0,07 m/s/s, et ne joue pas toujours dans le même sens.

Remarquons que cette trajectoire sera mieux représentée par une parabole ou une hyperbole d'asymptote verticale que par une trajectoire de Piton-Bressant pour laquelle l'hodographe serait une droite telle que LM dont le prolongement passe par le point P_B de Oy d'ordonnée $g/4$.

24. — **Hodographe de la résistance pour R** $= kv^2$. — Aux vitesses faibles, les lois de résistance de l'air indiquent que, à pression et température constantes, la résistance est sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse. Or, si la vitesse initiale est faible, le projectile ne s'élève pas très haut, les conditions atmosphériques varient peu le long de la trajectoire.

Cherchons donc la forme de l'hodographe de R quand la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

Le calcul de R en fonction de τ revient au calcul de v en fonction de τ qui est un problème classique.

Divisons membre à membre les équations intrinsèques (4) d'un mouvement résistant ; on obtient :

$$\frac{g \cos \tau}{v^2} \frac{dv^2}{d\tau} = 2R + 2g \sin \tau,$$

ou, en remplaçant v^2 par $\frac{R}{k}$:

$$\frac{g \cos \tau}{R} \frac{dR}{d\tau} = 2R + 2g \sin \tau.$$

C'est l'équation différentielle de la famille d'hodographes que nous écrirons sous la forme :

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{R}\right) \cos \tau + \frac{2}{R} \sin \tau = - \frac{2}{g}.$$

L'intégration ne présente aucune difficulté et donne :

$$\frac{g}{R \cos^2 \tau} = - \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} - L \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{g}{R_s},$$

R_s étant l'accélération résistante au sommet.

Lieu des points d'inflexion. — En partant de l'équation différentielle, on obtient facilement :

$$\frac{1}{R} + \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} \frac{3 \sin^2 \tau - 1}{\cos^2 \tau} + \frac{2}{g} \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau};$$

le lieu des points d'inflexion, qui s'obtient en annulant le second membre est donc la courbe :

$$R = \frac{g}{2 \sin \tau} - \frac{3g}{2} \sin \tau;$$

c'est une cubique circulaire unicursale, conchoïde du cercle $R = \frac{3g}{2} \sin \tau$ et de la droite $R = \frac{g}{2 \sin \tau}$.

Branches infinies. — Pour $\tau = \pi/2$ et pour $\tau = 0$, $1/R$ prend les valeurs de signes contraires -1 et $1/R_s$. R devient donc infini pour une valeur de τ comprise entre 0 et $\pi/2$.

Indice en un point. — L'indice est donné par l'équation (11). En remplaçant $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{R}\right)$ par sa valeur tirée de l'équation différentielle, on trouve :

$$p = \frac{g}{\overline{OP}} = \frac{g \sin \tau}{R} + 2.$$

De cette égalité, nous tirons les conclusions suivantes :

1° Les tangentes aux hodographes aux points correspondant aux sommets des trajectoires coupent toutes Oy au même point A d'ordonnée $g/2$.

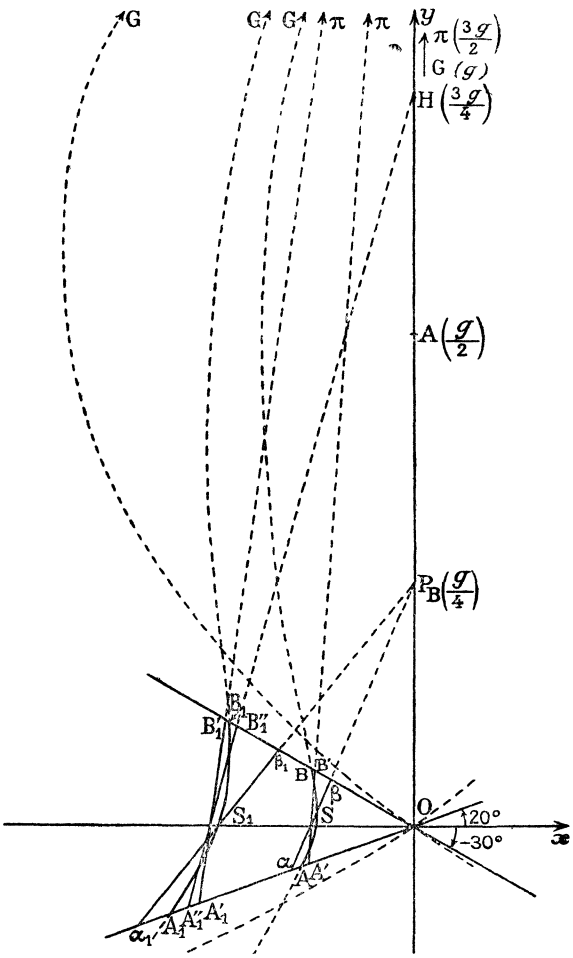

FIG. 7.

2° Si R devient infini, $\overline{OP}$ tend vers $g/2$: les asymptotes coupent toutes Oy en ce même point A.

Nous avons tracé (fig. 7) les hodographes correspondant à $R_s = g/10$ et $R_s = g/5$.

Soit ASB l'arc de la première courbe correspondant à $20° > \tau > -30°$. On voit que cet arc s'éloigne très peu du segment de droite A'B'

dont le prolongement passe par π, et qui est l'hodographe d'un mouvement parabolique. Un segment de droite passant par H serait aussi très voisin de l'arc ASB. La trajectoire sera fidèlement représentée par une parabole ou par une hyperbole d'asymptote verticale.

Considérons maintenant l'arc $A_1S_1B_1$ de la courbe $R_s = g/5$ correspondant aux mêmes valeurs de τ. Il s'écarte plus du segment de droite $A_1'B_1'$ dont le prolongement passe par π que du segment de droite $A_1''B_1''$ dont le prolongement passe par H. La trajectoire sera plus voisine d'une hyperbole que d'une parabole.

Dans les deux cas, la substitution à l'arc d'hodographe d'un segment de droite tel que $\alpha\beta$ ou $\alpha_1\beta_1$ dont les prolongements passent par P_B ne donne, surtout dans le second cas, qu'une approximation grossière. La représentation de la trajectoire par une courbe de Piton-Bressant sera très imparfaite.

25. **Hodographe de la résistance pour** $R = kv^n$. — Le calcul est analogue au précédent. L'équation différentielle est :

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\tau + \frac{n}{R}\sin\tau = -\frac{n}{g},$$

ce qui donne en intégrant :

$$\frac{g}{R\cos^n\tau} = -n\int_0^\tau \frac{dt}{\cos^{n+1}\tau} + \frac{g}{R_s}.$$

Lieu des points d'inflexion. — C'est la cubique circulaire unicursale :

$$R = \frac{n+1}{n}\, g\sin\tau - \frac{1}{n}\frac{g}{\sin\tau}.$$

Indice en un point. — L'indice en un point est :

$$p = \frac{g}{\overline{OP}} = n + (n-1)\frac{g}{R}\sin\tau;$$

de cette égalité on déduit :

1° Les tangentes aux hodographes aux points correspondant aux sommets coupent Oy au même point N ($x = 0$, $y = g/n$).

2° Les asymptotes coupent Oy en ce même point N.

26. **Expression de la résistance en fonction de la vitesse dans les mouvements paraboliques et hyperboliques.** — Eliminons s entre les équations donnant R et v, dans les équations

obtenues aux numéros 12 et 17 ; on trouve, pour le mouvement parabolique :

$$R = R_o \left(\frac{\varphi}{\varphi_o}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\cos\tau}{\cos\tau_o}\right)^{-\frac{1}{3}},$$

et pour le mouvement hyperbolique :

$$R = R_o \left(\frac{\varphi}{\varphi_o}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\cos\tau}{\cos\tau_o}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Si l'on suppose que τ reste suffisamment petit, on peut remplacer $\cos\tau$ et $\cos\tau_o$ par l'unité, et l'on a :

$$R = R_o \left(\frac{\varphi}{\varphi_o}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad R = R_o \left(\frac{\varphi}{\varphi_o}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

La première formule paraîtrait montrer, *a priori*, comme l'indiquait le Commandant Batailler dans l'ouvrage que nous avons cité, que la trajectoire d'un projectile ne peut, en aucun cas, être assimilée à une parabole, puisque, pour aucune valeur de la vitesse, le degré de la résistance de l'air ne descend au-dessous de l'unité. Mais, en réalité, quand la vitesse initiale et l'angle de tir sont faibles, la vitesse le long de la trajectoire varie peu, et il en est de même de la résistance. La forme de la loi de résistance a, en soi, moins d'importance que la valeur moyenne de cette résistance.

27. Approximation réalisée par le mouvement osculateur à l'origine.

1° *Cas d'une trajectoire de faible vitesse initiale et de faible coefficient balistique.* — L'approximation ne sera acceptable que si la résistance n'est qu'une faible partie de la pesanteur. Donnons quelques exemples :

τ_o	v_o m/s	$10^4 c$	Portée mouvement hyperbolique	Portée mouvement parabolique	Portée exacte (Gâvre)	Portée dans le vide
5°	250	3	1074,5	1074,3	1073,7	1106,5
15°	200	2	1972,6	1972,0	1972,5	2039,0
15°	250	2	3008,8	3006,3	3019,5	3185,9
30°	200	1	3420,5	3419,5	3429,8	3531,7

2° *Cas d'un tir très tendu, de très grande vitesse initiale.* — Quand la vitesse est supérieure à 700 m/s, le degré de la résistance de l'air varie de 1,4 à 1,2 environ. Nous avons vu au n° 25 que pour $R = kv^n$, l'indice du mouvement, si l'on néglige les variations atmosphériques, est donné par la formule :

$$p = n + (n - 1)\frac{g}{R}\sin\tau.$$

Si le tir est très tendu, et si la résistance est grande (ce qui est le cas aux grandes vitesses), on a sensiblement $p = n$; c'est-à-dire

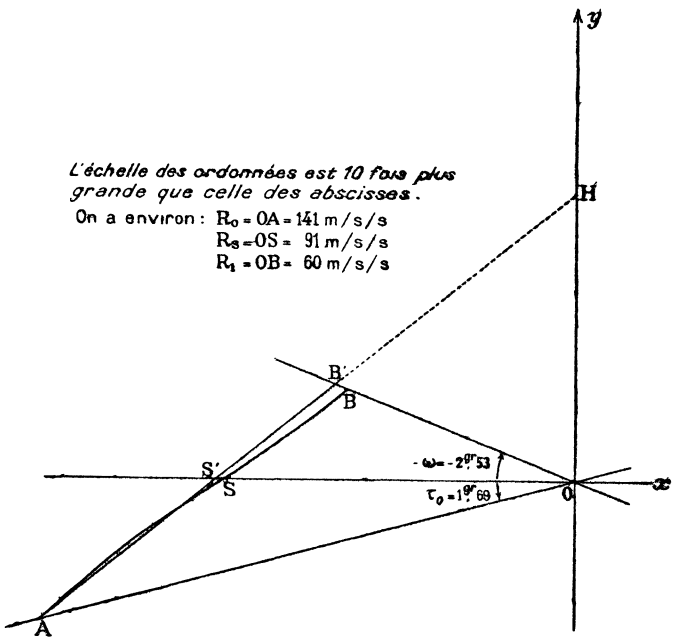

FIG. 8.

environ $p = 4/3$. La trajectoire sera donc fidèlement représentée par une hyperbole d'asymptote verticale. Nous avons tracé, sur la figure (8) l'hodographe de la trajectoire :

$c = 8{,}67.10^{-4}$, $v_0 = 852$ m/s, $\tau_0 = 1{,}69$ gr. (altitude du tir : 1 500 m.).

On voit que l'arc d'hodographe est très voisin du segment de droite AB′, hodographe du mouvement hyperbolique osculateur à l'origine. Voici les éléments comparés de cette trajectoire hyper-

bolique et de la trajectoire réelle calculée par arcs (nous avons ajouté les éléments de la trajectoire du vide) :

	Portée en m	Flèche en m	Angle de chute en gr.	Durée de trajet en s
Trajectoire réelle..	2608,0	21,00	2,53	4,136
Trajectoire hyperbolique.....	2606,3	21,03	2,55	4,143
Trajectoire du vide.	3930,8	26,09	1,69	4,615

L'accord est remarquable.

CHAPITRE VI

MOUVEMENTS RÉSISTANTS D'INDICE CONSTANT

Les formules trouvées dans l'étude des mouvements résistants parabolique et hyperbolique ont une analogie frappante : ce sont évidemment deux cas particuliers de mouvements résistants plus généraux. La propriété commune à ces deux mouvements la plus intéressante est, non pas que dans les deux cas la trajectoire soit une conique, mais que l'hodographe de la résistance est chaque fois une droite, ce qui revient à dire que l'indice est constant.

Nous nous proposons de chercher les propriétés des mouvements résistants dont l'indice est un nombre p déterminé : nous les appellerons « Mouvements (M_p) ».

28. **Équations des mouvements (M_p).** — Le mouvement est déterminé par les équations générales (5) des mouvements résistants auxquelles il faut joindre l'équation (13) donnant la valeur de p qui est ici constant. On obtient :

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v\cos\tau,\\ \frac{dy}{dt} &= v\sin\tau,\\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{g\cos\tau}{v},\\ \frac{dv}{dt} &= -\mathrm{R} - g\sin\tau,\\ \frac{d\mathrm{R}}{dt} &= \frac{\mathrm{R}}{v}(-p\mathrm{R} - g\sin\tau). \end{aligned}\right.$$

Transformons les trois dernières équations en prenant comme nouvelles inconnues, au lieu de v et R :

$$u = v \cos \tau, \qquad r = \mathrm{R} \cos \tau,$$

elles prennent la forme plus simple :

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{g \cos^2\tau}{u}, \\ \frac{du}{dt} &= -r, \\ \frac{dr}{dt} &= -p\,\frac{r^2}{u}. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de t entre les deux dernières donne :

$$\frac{dr}{r} = p\,\frac{du}{u},$$

c'est-à-dire, si $p \neq 0$:

$$r = \frac{r_o}{u_o^p}\, u^p.$$

La seconde équation (18) donne maintenant u en fonction de t :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{r_o}{u_o^p}\, u^p,$$

d'où l'on tire, si $p \neq 1$:

$$(19) \qquad \frac{u^{-p+1}}{-p+1} = -\frac{r_o}{u_o^p}\,(t - t_o),$$

la constante t_o étant obtenue en faisant $t = 0$:

$$t_o = \frac{u_o}{(1-p)\,r_o} = \frac{v_o}{(1-p)\,\mathrm{R}_o};$$

on tire de l'équation (19) :

$$u = u_o \left(1 - \frac{t}{t_o}\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

et, par suite :

$$r = r_o \left(1 - \frac{t}{t_o}\right)^{\frac{p}{1-p}}.$$

La valeur de τ est donnée par la première équation (18) :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -g\,\frac{dt}{u} = -\frac{g}{u_o}\left(1-\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{1}{p-1}} dt,$$

ce qui donne, après intégration :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\tau_o + \frac{gt_o}{u_o}\,\frac{p-1}{p}\left[\left(1-\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{p}{p-1}} - 1\right].$$

x et y se calculent à partir des deux premières équations (17) ; pour x, on obtient, si $p \neq 2$:

$$x = \int_o^t u\,dt = -u_o\,t_o\,\frac{1-p}{2-p}\left(1-\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{2-p}{1-p}},$$

et pour y :

$$y = \int_o^x \operatorname{tg}\tau\,dx = x\operatorname{tg}\tau_o - gt_o^2\,\frac{p-1}{p}\left[\frac{\left(1-\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{2-p}{1-p}} - 1}{\frac{2-p}{1-p}} - \frac{\left(1-\frac{t}{t_o}\right)^2 - 1}{2}\right].$$

Fonctions balistiques dans les mouvements (M_p), *si* $p \neq 0$, 1 *et* 2. — Nous venons de trouver, en fonction de t, les expressions de u, r, $\operatorname{tg}\tau$, x et y, et par suite aussi de v et R. Remplaçons la constante t_o par sa valeur, et faisons apparaître les fonctions balistiques définies au n° 12, nous obtenons comme expressions des éléments du mouvement d'indice p donné ($\neq 0$, 1, 2) d'éléments initiaux τ_o, v_o, R_o, en posant, comme nous l'avons déjà fait, $s = \frac{R_o t}{v_o}$:

$$\left\{\begin{aligned}
x &= v_o\,t\cos\tau_o\,A(s,p),\\
y &= x\operatorname{tg}\tau_o - \frac{1}{2}\,gt^2\,B(s,p),\\
\operatorname{tg}\tau &= \operatorname{tg}\tau_o - \frac{gt}{v_o\cos\tau_o}\,C(s,p),\\
v\cos\tau &= v_o\cos\tau_o\,D(s,p),
\end{aligned}\right.$$

les fonctions balistiques A, B, C, D ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} A(s, p) = \dfrac{[1 + (p-1)s]^{\frac{p-2}{p-1}} - 1}{(p-2)s}, \\ B(s, p) = 1 - \dfrac{2A(s, p) - 2 + s}{ps}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(s, p) = \dfrac{[1 + (p-1)s]^{\frac{p}{p-1}} - 1}{ps}, \\ D(s, p) = [1 + (p-1)s]^{\frac{1}{1-p}}; \end{cases}$$

d'autre part, R est donné par la relation :

$$R = R_o \frac{v}{v_o} [1 + (p-1)s]^{-1}.$$

On constate ce fait intéressant (que nous expliquerons au n° 51) : les fonctions balistiques ne dépendent que de $s = \dfrac{R_o t}{v_o}$ et de p.

29. **Cas particuliers d'intégration.** — Dans le courant de l'intégration, nous avons fait trois hypothèses : $p \neq 0$, $p \neq 1$ $p \neq 2$. Donnons les expressions des fonctions balistiques dans ces trois cas particuliers.

1° $p = 0$. La droite hodographe est parallèle à $0y$. On obtient :

$$\begin{cases} A(s, 0) = 1 - \dfrac{s}{2}, & B(s, 0) = \dfrac{2(1-s)^2 L(1-s) + 2s - s^2}{2s^2}, \\ C(s, 0) = -\dfrac{L(1-s)}{s}, & D(s, 0) = 1 - s. \end{cases}$$

2° $p = 1$. On obtient :

$$\begin{cases} A(s, 1) = \dfrac{1 - e^{-s}}{s}, & B(s, 1) = 2\dfrac{e^{-s} - 1 + s}{s^2}, \\ C(s, 1) = \dfrac{e^{s} - 1}{s}, & D(s, 1) = e^{-s}. \end{cases}$$

3° $p = 2$. On obtient :

$$\begin{cases} A(s,2) = \dfrac{L(1+s)}{s}, & B(s,2) = \dfrac{s(2+s) - 2L(1+s)}{2s^2}, \\ C(s,2) = 1 + \dfrac{s}{2}, & D(s,2) = (1+s)^{-1}. \end{cases}$$

L'expression donnée pour R, à la fin du paragraphe précédent, est valable pour toute valeur de p. Dans le cas $p = 1$ on aura donc : $R = \dfrac{R_o}{v_o} v$, la résistance est proportionnelle à la vitesse ; on retrouve des résultats classiques.

30. **Développement en série entière des fonctions balistiques.** — Les fonctions balistiques n'ont pas la même forme dans les trois cas particuliers et dans le cas général. Cette disparité est plus apparente que réelle : les développements en série entière de ces fonctions suivant les puissances croissantes de s ont des expressions valables quel que soit p. Voici les développements :

$$(20)\quad \begin{cases} A(s,p) = 1 - \dfrac{1}{2!} s + \dfrac{p}{3!} s^2 - \dfrac{p(2p-1)}{4!} s^3 + \dfrac{p(2p-1)(3p-2)}{5!} s^4 - \ldots, \\ B(s,p) = 1 - \dfrac{2}{3!} s + \dfrac{2(2p-1)}{4!} s^2 - \dfrac{2(2p-1)(3p-2)}{5!} s^3 + \dfrac{2(2p-1)(3p-2)(4p-3)}{6!} s^4, \ldots \\ C(s,p) = 1 + \dfrac{1}{2!} s - \dfrac{p-2}{3!} s^2 + \dfrac{(p-2)(2p-3)}{4!} s^3 - \dfrac{(p-2)(2p-3)(3p-4)}{5!} s^4 + \ldots, \\ D(s,p) = 1 - s + \dfrac{p}{2!} s^2 - \dfrac{p(2p-1)}{3!} s^3 + \dfrac{p(2p-1)(3p-2)}{4!} s^4 - \ldots ; \end{cases}$$

ces séries sont convergentes pour $|(p-1)s| < 1$.

31. **Equation des trajectoires résolue en y. Courbes balistiques** (B_p). — Nous appellerons « courbes balistiques (B_p) » les trajectoires des mouvements (M_p). Leur équation s'obtient en éliminant s entre les expressions de x et y. Le calcul donne :

1° *Cas général* :

$$(21)\qquad y = ax - b + b(1 - cx)^q,$$

avec :

$$a = \operatorname{tg} \tau_o + \frac{g}{p R_o \cos \tau_o}, \qquad b = \frac{1}{2p(1-p)} \frac{g v_o^2}{R_o^2},$$

$$c = (2-p) \frac{R_o}{v_o^2 \cos \tau_o}, \qquad q = 2 \frac{p-1}{p-2}.$$

2° $p = 0$:

$$y = a'x + b'(1 - cx)\,\mathrm{L}\,(1 - cx),$$

avec :

$$a' = \operatorname{tg}\tau_o - \frac{g}{2\mathrm{R}_o \cos\tau_o}, \qquad b' = -\frac{g\,v_o^2}{4\,\mathrm{R}_o^2}.$$

3° $p = 1$:

$$y = ax + b'\,\mathrm{L}\,(1 - cx), \quad \text{avec :} \quad b' = \frac{g v_o^2}{\mathrm{R}_o^2}.$$

4° $p = 2$:

$$y = ax - b + b\,e^{c'x}, \quad \text{avec :} \quad c' = \frac{2\,\mathrm{R}_o}{v_o^2 \cos\tau_o}.$$

Les valeurs des coefficients a, b, c non accentués sont données par les formules du cas général.

Coniques de la famille. — La famille de courbes contient deux coniques correspondant à $q = \frac{1}{2}$ et $q = -1$, donc à $p = \frac{2}{3}$ et $p = \frac{4}{3}$. Ce sont la parabole et l'hyperbole d'asymptote verticale déjà étudiées.

Cubiques de la famille. — La famille de courbes contient six cubiques correspondant aux valeurs de q :

$$-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3,$$

et par suite aux valeurs de p :

$$\frac{3}{2}, \frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, -2, 4.$$

Remarquons que la courbe (B_4) est une trajectoire de Piton-Bressant [1].

32. **Développement en série de y suivant les puissances croissantes de x.** — En développant par la formule du binôme l'expression de y donnée par l'équation (21), on trouve, après avoir remplacé a, b, c, q en fonction de τ_o, v_o, R_o, p :

1. La théorie exposée au n° 24 montre que la courbe transcendante B_2 donne une représentation très fidèle des trajectoires de petit angle initial, quand la vitesse est assez faible pour que la loi de résistance soit $\mathrm{R} = kv^2$. La cubique qui se rapproche le plus de la trajectoire est dans ce cas la courbe $\mathrm{B}_{\frac{3}{2}}$ d'équation :

$$y = ax - b + b\,(1 - cx)^{-2}.$$

$$y = x \operatorname{tg} \tau_o - \frac{g x^2}{2 v_o^2 \cos^2 \tau_o} - \frac{2 g}{3 ! \, v_o^4 \cos^3 \tau_o} - \frac{2 g R_o^2 (4-p) x^4}{4 ! \, v_o^6 \cos^4 \tau_o} - \frac{2 g R_o^3 (4-p)(6-2p) x^5}{5 ! \, v_o^8 \cos^5 \tau_o} - \ldots$$

On vérifierait facilement que ce développement convient aux cas particuliers $p = 0$, 1 ou 2.

Limité aux deux premiers termes, on trouve la parabole du vide ; limité aux trois premiers termes, on trouve la trajectoire de Piton-Bressant.

33. **Éléments des trajectoires** (B_p). — *Portée.* — En général, la portée ne s'exprime pas algébriquement en fonction des données initiales. Utilisons le développement en série précédent : la portée sera égale à la racine de l'équation $y = 0$ qui tendrait vers $(P)_v$ si R_o tendait vers zéro, $(P)_v$ désignant la portée dans le vide. Posons donc, dans l'équation $y(P) = 0$:

$$P = (P)_v \, u,$$

et nous obtenons pour calculer u l'équation :

$$0 = 1 - u - 4 k u^2 - 6 k^2 (4 - p) u^3 + \ldots,$$

k désignant la quantité déjà rencontrée : $\dfrac{R_o \sin \tau_o}{3 g}$; posons :

$$u = 1 + A k + B k^2 + \ldots,$$

et nous trouvons après identification :

$$P = (P)_v \, [1 - 4 k + 2 k^2 (4 + 3 p) + \ldots].$$

Coordonnées du sommet. — Les coordonnées du sommet peuvent s'obtenir explicitement en fonction des données initiales, puisque l'équation $y'(x) = 0$ est résoluble en x. Si l'on cherche les développements en série de ces quantités suivant les puissances de k, on trouve :

$$X_s = (X_s)_v \, [1 - 3 k + 3 (2 + p) k^2 + \ldots],$$

$$Y_s = (Y_s)_v \, [1 - 2 k + \frac{3}{2} (2 + p) k^2 + \ldots].$$

Angle de chute. — En remplaçant P par les premiers termes de son développement dans $-y'(P)$, on trouve :

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \tau_o [1 + 4 k + 4 k^2 (4 - 3 p) + \ldots].$$

Durée de trajet. — C'est la racine de l'équation $y(t) = 0$ qui tend vers $(T)_v$ quand R_o tend vers zéro. En opérant avec cette équation comme nous l'avons fait pour la portée, on obtient :

$$T = (T)_v \; [1 - k + 2\,k^2 + \ldots].$$

Vitesse restante. — Remplaçant t par l'expression précédente dans l'équation donnant $v \cos\tau$, on obtient :

$$v_R \cos\omega = v_o \cos\tau_o \; [1 - 6\,k + 6\,(1 + 3\,p)\,k^2 + \ldots].$$

Remarque. — Nous voyons que les rapports des valeurs de ces divers éléments à leurs valeurs dans le cas de la trajectoire du vide ne dépendent que des nombres p et k. Nous reviendrons sur cette question au numéro 50.

CHAPITRE VII

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES MOUVEMENTS D'INDICE CONSTANT AU MOUVEMENT DES PROJECTILES

34. **Mouvements (M_p) osculateurs et surosculateurs au mouvement réel.** — Soient τ, ρ, R les éléments en un point M de la trajectoire d'un projectile, A le point correspondant de l'hodographe $\mathcal{H}$ de la résistance. Considérons le mouvement (M_p), d'indice donné p, d'un point matériel qui part de M en même temps que le projectile, avec les mêmes éléments initiaux τ, ρ, R. Ce mouvement, parfaitement déterminé, sera, par définition, le mouvement (M_p), d'indice donné p, *osculateur* au mouvement réel en M. Il jouit des mêmes propriétés que les mouvements parabolique et hyperbolique osculateurs déjà étudiés. Il y a une infinité de mouvements osculateurs, puisque p est arbitraire.

Au voisinage immédiat de M, ce mouvement se rapproche d'autant plus du mouvement réel que sa droite hodographe se rapproche de la tangente à $\mathcal{H}$ en A ; le mouvement osculateur qui réalise la plus grande approximation est celui dont l'hodographe est la tangente en A à $\mathcal{H}$: c'est donc celui dont l'indice est égal à l'indice du mouvement réel en M. Nous l'appellerons le « *mouvement* (M_p) *surosculateur* » en M. Ceci nous conduit au calcul de l'indice du mouvement réel.

35. **Indice du mouvement réel.** — Le calcul de l'indice se ramène à celui de $\frac{dR}{dt}$, dont l'expression dépend de la loi de résistance choisie.

1° Effectuons les calculs avec la loi suivante :

$$R = c \frac{\Delta(y)}{\Delta_o} F(v) ;$$

$\Delta(y)$ représente la densité de l'air. En différentiant, on a :

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{F'(v)}{F(v)} dv,$$

et, en faisant intervenir les dérivées premières de $F(v)$ et $\Delta(y)$ par les fonctions :

$$n(v) = v \frac{F'(v)}{F(v)}, \quad M(y) = -\frac{\Delta'(y)}{\Delta(y)},$$

on trouve :

$$\frac{dR}{R} = n \frac{dv}{v} - M\, dy,$$

et finalement :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R^2}{v} \left(-n - n \frac{g}{R} \sin\tau - M \frac{v^2}{R} \sin\tau \right),$$

ce qui donne, d'après la relation (13) :

$$p = n + (n-1) \frac{g}{R} \sin\tau + M \frac{v^2}{R} \sin\tau.$$

2° Effectuons les calculs avec la loi Dupuis :

$$R = c \frac{H(y)}{H_o} F(\mathfrak{b}) \quad \text{avec:} \quad \mathfrak{b} = \frac{v}{\mathcal{V}}, \ \mathcal{V} = K\sqrt{\Theta};$$

$H(y)$ est la pression atmosphérique à l'altitude du projectile, $\mathfrak{b}$ est le rapport de sa vitesse à celle du son $\mathcal{V}$ (à la même altitude), Θ est la température absolue « corrigée de l'humidité ». M. l'Ingénieur Général Garnier a construit les tables numériques des fonctions $F(\mathfrak{b})$, $H(y)$, $\Theta(y)$ et en a calculé les dérivées premières qui sont données à l'aide des fonctions :

$$(22) \quad n(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \frac{F'(\mathfrak{b})}{F(\mathfrak{b})}, \quad k(y) = -10^4 \frac{H'(y)}{H(y)}, \quad l(y) = -10^4 \frac{\Theta'(y)}{2\,\Theta(y)}$$

En différentiant R et $\mathfrak{b}$ on obtient :

$$\frac{dR}{R} = \frac{dH}{H} + \frac{F'(\mathfrak{b})}{F(\mathfrak{b})} d\mathfrak{b},$$

$$\frac{d\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{d\Theta}{\Theta},$$

ou, en faisant intervenir les fonctions (22) et en remplaçant dy et dv par leurs valeurs (5) :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R}{v}\left[-n\,R - ng\sin\tau - 10^{-4}(k - nl)\,v^2\sin\tau\right].$$

On en déduit l'indice p :

$$p = n + (n-1)\frac{g}{R}\sin\tau + 10^{-4}\frac{v^2}{R}(k - nl)\sin\tau.$$

Remarques. — 1° n est le degré de la résistance de l'air; p a la même valeur que pour la loi de résistance $F(v) = kv^n$.

2° Dans la loi Dupuis, la fonction $n(\beta)$ subit une discontinuité pour $\beta = 1$: l'hodographe de la résistance présentera au point correspondant un point anguleux. Nous supposerons dans les applications que β ne devient pas égal à 1 sur la trajectoire ou l'arc de trajectoire étudiés.

36. — Étude de l'osculation des deux mouvements réel et surosculateur.

Ordre du contact des deux trajectoires. — Soient $y = f(x)$ et $y = h(x)$ les équations des deux trajectoires. Les équations (9) montrent que τ, v, R, $\frac{dR}{dt}$ ayant la même valeur dans les deux mouvements à l'instant zéro, les 4 premières dérivées de $f(x)$ et $h(x)$ sont égales pour $x = 0$. Les deux courbes ont un contact d'ordre 4. Il s'ensuit que, jusqu'aux termes en x^4 compris, le développement de l'ordonnée d'un point de la trajectoire suivant les puissances de x coïncide avec celui que nous avons donné au n° 32 pour la courbe (B_p).

Ordre infinitésimal de l'angle des vitesses, de la différence des abscisses, des ordonnées. — Nous avons donné (n° 22) l'expression de $\frac{d^2\tau}{dt^2}$: elle ne contient que τ, v, R. La dérivée troisième de τ s'exprime donc uniquement à l'aide de τ, v, R, $\frac{dR}{dt}$. Les trois premières dérivées de τ sont donc égales à l'instant zéro dans les deux mouvements: l'angle des vitesses est donc un infiniment petit d'ordre 4 en t.

Un raisonnement analogue montre qu'il en est de même de la différence des abscisses et de la différence des ordonnées.

Ordre infinitésimal de la différence des vitesses. — $\frac{dv}{dt}$ s'exprimant

à l'aide de τ et R, $\frac{d^2v}{dt^2}$ s'exprimera en fonction de τ, R, $\frac{dR}{dt}$. Les dérivées premières et secondes de v seront donc égales à l'instant zéro dans les deux mouvements : la différence des vitesses sera un infiniment petit d'ordre 3 en t.

37. **Remarques sur l'artifice de Didion et la méthode de Siacci.** — La résistance opposée par l'air à un projectile dépend de la densité de l'air, qui varie le long de la trajectoire. Pour éliminer cette complication dans le calcul d'un arc de trajectoire, on admet, en général, que l'on peut, sans erreur sensible, donner à la densité une valeur constante : la densité à l'altitude moyenne.

La loi de résistance s'écrira : $R = c\,F(v)$.

Un calcul simple permet de déduire de cette relation et des équations intrinsèques du mouvement une équation différentielle liant τ et v, et que l'on appelle « équation de l'hodographe » :

$$\frac{d\tau}{\cos\tau} = \frac{g}{c}\,\frac{du}{u\,F(v)}, \quad \text{avec : } u = v\cos\tau.$$

Cette équation n'est intégrable que pour des expressions particulières de $F(v)$. Pour se tirer d'affaire, avec une fonction $F(v)$ quelconque, on emploie « l'artifice de Didion » que nous allons rappeler sous la forme que lui a donnée Siacci.

L'équation de l'hodographe s'écrit, λ et μ étant des nombres arbitraires, pour l'instant non précisés :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\lambda}\,\frac{\lambda}{\cos\tau}\,\frac{d\left(\frac{u}{\mu}\right)}{\frac{u}{\mu}\,F\left(\frac{u}{\mu}\cdot\frac{\mu}{\cos\tau}\right)},$$

ou, en posant $\frac{u}{\mu} = w$:

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\lambda}\,\frac{\lambda}{\cos\tau}\,\frac{dw}{w\,F\left(w\,\frac{\mu}{\cos\tau}\right)}.$$

Tout, jusqu'ici, est parfaitement rigoureux. Supposons maintenant que, sur l'arc considéré, l'amplitude de la variation de $\cos\tau$ soit faible : on fera une erreur assez petite en remplaçant $\frac{\lambda}{\cos\tau}$ et $\frac{\mu}{\cos\tau}$ par l'unité, si l'on choisit pour λ et μ des valeurs différant peu

de la valeur moyenne de $\cos\tau$ le long de l'arc. L'équation devient alors à variables séparées :

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{g}{c\lambda}\frac{dw}{w\,\mathrm{F}(w)},$$

ce qui donne en intégrant :

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\tau_0 + \frac{g}{c\lambda}\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{w\,\mathrm{F}(w)}.$$

On calcule ensuite v, t, x, y en fonction de w par les équations :

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} v &= \frac{\mu}{\cos\tau}\,w,\\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{g\cos\tau}{v},\\ \frac{dx}{dt} &= v\cos\tau,\\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}\tau.\end{aligned}\right.$$

En résumé, on a substitué au mouvement réel du projectile un mouvement fictif vérifiant *en toute rigueur* le système (23).

La seconde équation de ce système montre que ce mouvement fictif est *un mouvement résistant* : c'est la première équation intrinsèque du mouvement ; elle exprime que la composante normale de l'accélération est $g\cos\tau$. L'accélération résistante de ce mouvement est déterminée par la seconde équation intrinsèque :

$$\frac{dv}{dt} = -\mathrm{R} - g\sin\tau,$$

ce qui donne, en effectuant les calculs :

$$\mathrm{R} = \frac{c\lambda}{\cos\tau}\,\mathrm{F}\left(\frac{v\cos\tau}{\mu}\right).$$

L'artifice de Didion revient donc à altérer la loi de résistance de l'air, en remplaçant la loi $\mathrm{R} = c\mathrm{F}(v)$ par :

$$\mathrm{R}_1 = \frac{c\lambda}{\cos\tau}\,\mathrm{F}\left(\frac{v\cos\tau}{\mu}\right).$$

Indice du mouvement fictif. — Calculons $\frac{d\mathrm{R}_1}{dt}$; on a :

$$\frac{dR_1}{R_1} = \operatorname{tg}\tau\, d\tau + \frac{1}{\mu}\frac{F'}{F}(\cos\tau\, dv - \sin\tau\, d\tau),$$

ce qui donne, en introduisant la fonction $n(v)$ déjà rencontrée :

$$\frac{dR_1}{R_1}\frac{dR_1}{dt} = -\frac{g\sin\tau}{v} - \frac{R_1}{v}\, n\left(\frac{v\cos\tau}{\mu}\right).$$

Il en résulte que l'indice du mouvement fictif, donné par :

$$p_1 = -\frac{g\sin\tau}{R_1} - \frac{v}{R_1^2}\frac{dR_1}{dt},$$

est égal tous calculs faits à :

$$p_1 = n\left(\frac{v\cos\tau}{\mu}\right).$$

Si l'on prend $\mu = \cos\tau_o$, l'indice à l'origine sera $p_1 = n(v_o) = n_o$; il diffère de l'indice du mouvement réel égal à :

$$p_o = n_o + \alpha_o + \beta_o,$$

avec : $\alpha_o = (n_o - 1)\dfrac{g}{R_o}\sin\tau_o, \qquad \beta_o = 10^{-4}\dfrac{v_o^2}{R_o}(k_o - n_o l_o)\sin\tau_o.$

Grandeurs relatives des termes n_o, α_o, β_o. — Si τ_o est *très petit*, p_o est sensiblement égal à n_o : l'artifice de Didion se justifie ; par contre, quand τ_o n'est pas très petit, et surtout quand R_o est faible (ce qui se produit pour les grandes portées dès que le projectile arrive dans les couches élevées de l'atmosphère), n_o n'est plus le terme prépondérant. Voici quelques exemples calculés avec la loi Dupuis :

τ_o	v_o en m/s	$10^4 c$	y_o en m	R_o en m/s/s	n_o	α_o	β_o	p_o
30°	600	2	0	22,734	1,423	0,116	1,132	2,671
40°	300	2	0	1,837	4,005	10,314	3,065	17,384
27°	540	1	6940	4,559	1,366	0,358	3,346	5,070
—36°	420	1	6090	3,452	1,688	— 1,150	—3,256	— 2,718
38°15′	826	0,75	19206	1,040	1,24	1,40	63,91	66,55

Le dernier exemple appartient à la trajectoire un peu exceptionnelle, d'éléments initiaux au sol : $v_o = 1200$ m/s, $\tau_o = 50°$.

On voit, par ces exemples, que n_o peut être très différent de p_o : l'artifice de Didion conduit à remplacer l'arc d'hodographe de la

résistance du mouvement réel par un autre arc de courbe qui peut faire avec lui un angle sensible.

On voit aussi l'importance pour certaines trajectoires de la variation de la constitution de l'atmosphère qui intervient par le nombre β_0 ; supposer celle-ci homogène sur un arc qui n'est pas très petit est peu justifié.

En résumé, le nombre qui « caractérise » la vitesse de variation de R le long d'un arc de trajectoire n'est pas le nombre n, degré de la résistance de l'air, mais l'indice p qui peut en être très différent : c'est p et non n qui détermine la tangente à l'hodographe de la résistance.

38. **Fonction** F(v) **dans un mouvement d'indice constant. Méthode du commandant Henry.** — En éliminant s entre les équations du numéro 28 donnant v et R dans un mouvement (M_p), on trouve :

$$R = R_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^p \left(\frac{\cos\tau}{\cos\tau_0}\right)^{p-1} = Kv^p \cos^{p-1}\tau;$$

c'est justement la loi de résistance fictive que l'on trouverait en appliquant l'artifice de Didion à la loi $R = kv^p$.

Méthode du Commandant Henry. — Le Commandant Henry remplace d'abord la loi de résistance réelle par la loi $R = kv^n$, n étant le degré de résistance de l'air, et lui applique ensuite l'artifice de Didion : il trouve donc comme courbes trajectoires les courbes que nous avons appelées (B_p), mais il en donne une expression compliquée ; comme courbes simples de la famille il ne voit que la trajectoire de Piton-Bressant et n'aperçoit ni la parabole, ni l'hyperbole d'asymptote verticale. Sa méthode, interprétée d'après notre théorie, revient à remplacer le mouvement réel par un mouvement résistant fictif (M_p) dont la droite hodographe n'est pas la tangente à l'hodographe réel : en effet l'indice choisi est n et non p qui peut en être très différent. De plus, la conception d'altération de la loi de résistance, suivie d'un « artifice », c'est-à-dire d'une petite « tricherie » dans l'intégration de l'équation de l'hodographe, est moins féconde que la conception de mouvement résistant osculateur qui nous permettra, par la théorie du « mouvement relatif » que nous verrons plus loin, de faire reculer de deux unités encore l'ordre infinitésimal de l'erreur commise dans le calcul d'un arc de trajectoire.

CHAPITRE VIII

APPLICATION DE LA THÉORIE DES MOUVEMENTS D'INDICE CONSTANT AU CALCUL PAR ARCS DES TRAJECTOIRES

Nous nous proposons d'appliquer la théorie des mouvements (M_p) au calcul des trajectoires par arcs successifs.

39. **Première approximation.** — Soit à calculer un arc de trajectoire d'éléments initiaux τ_o, v_o, R_o, p_o. Prenons comme variable le temps t. Le projectile partant de l'origine à l'instant zéro, donnons-nous l'instant T correspondant à l'extrémité de l'arc à calculer.

Notre méthode consiste à remplacer le mouvement réel par un mouvement fictif (M_p) aussi voisin que possible du mouvement réel.

D'une façon générale, nous désignerons par l'indice φ qui se rapporte au mouvement fictif, et par l'indice ρ ce qui se rapporte au mouvement réel.

a) *Utilisation d'un mouvement osculateur.* — Si l'on remplace le mouvement réel par un mouvement osculateur (M_p) d'indice donné p, les éléments de l'extrémité de l'arc seront donnés par les formules :

$$x_\varphi = v_o \, T \cos\tau_o . \, A\,(s,p),$$

$$y_\varphi = x_\varphi \operatorname{tg} \tau^o - \frac{1}{2} g \, T^2 \, B\,(s, p),$$

$$\operatorname{tg}\tau_\varphi = \operatorname{tg} \tau_o - \frac{g\,T}{v_o \cos \tau_o} \, C\,(s, p),$$

$$v_\varphi \cos\tau_\varphi = v_o \cos \tau_o . \, D\,(s, p),$$

$$R_\varphi \, v_o = R_o \, v_\varphi \, [1 + (p - 1)s\,]^{-1},$$

s désignant la quantité $\dfrac{R_o T}{v_o}$.

Les erreurs causées par la substitution du mouvement fictif au mouvement réel sont, T étant l'infiniment petit fondamental :

d'ordre 2 pour v,
d'ordre 3 pour x, y, τ.

b) *Utilisation du mouvement surosculateur.* — Si l'indice du mouvement fictif (M_p) est précisément l'indice p_o du mouvement réel à l'origine, ce mouvement fictif est surosculateur et les erreurs seront :

d'ordre 3 pour v,
d'ordre 4 pour x, y, τ ;

ce mouvement paraît à première vue plus avantageux qu'un mouvement osculateur quelconque.

c) *Utilisation d'un mouvement quasi-surosculateur.* — Soit AB l'arc d'hodographe correspondant à l'arc de trajectoire à calculer (fig. 9) ; quand on substitue au mouvement réel un mouvement

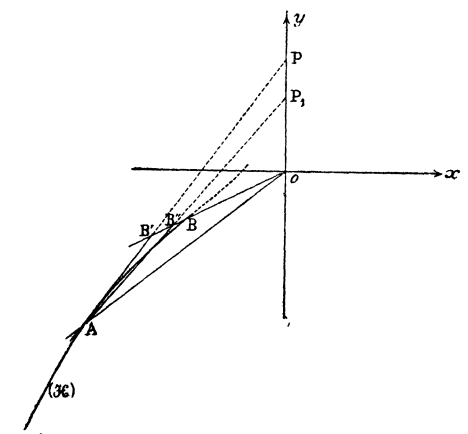

FIG. 9.

fictif osculateur, on remplace cet arc AB par un segment de droite passant par A ; or, de toutes les droites qui passent par A, la tangente en A (correspondant au mouvement surosculateur) n'est pas celle qui se rapproche le plus de l'arc AB : on conçoit facilement que le mouvement osculateur dont la droite hodographe est une sécante de l'arc AB telle que AB'' se rapprochera plus du mouvement réel que le mouvement surosculateur dont la droite hodographe est AB'. Nous dirons que le mouvement correspondant est *quasi-surosculateur.*

Nous allons voir maintenant comment on peut améliorer les résultats obtenus dans cette première approximation. Nous supposerons que le mouvement fictif utilisé est simplement osculateur : le calcul s'appliquera aux deux autres cas qui en sont des cas particuliers.

40. **Méthode du mouvement relatif.** — Considérons deux axes $M_\varphi\xi$, $M_\varphi\eta$ entraînés par le mobile fictif M_φ : le premier, tangent

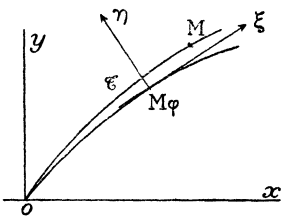

FIG. 10.

à la trajectoire fictive, le second, normal (fig. 10). Etudions le mouvement relatif du projectile M par rapport à ces axes.

Les accélérations résistantes $R_\rho(t)$ et $R_\varphi(t)$ dans les deux mouvements peuvent s'écrire :

$$R_\rho(t) = R_o + At + Bt^2 + Ct^3 + \ldots,$$
$$R_\varphi(t) = R_o + A't + B't^2 + C't^3 + \ldots,$$

et, par suite :

$$R_\varphi(t) - R_\rho(t) = a\,t + b\,t^2 + c\,t^3 + \ldots,$$

en posant

$$A' - A = a, \quad B' - B = b, \quad C' - C = c, \ldots.$$

Soit $-\omega$ la vitesse angulaire de rotation (négative) des axes mobiles ; elle s'écrit :

$$\omega = \omega_o + q\,t + r\,t^2 + \ldots,$$

avec :

$$\omega_o = -\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_o = \frac{g\cos\tau_o}{v_o}.$$

Soit enfin ε l'angle de la vitesse du projectile avec $M_\varphi\xi$; ε étant un infiniment petit d'ordre 3, on a :

$$\varepsilon = \tau_\rho - \tau_\varphi = \alpha\,t^3 + \beta\,t^4 + \ldots,$$

Le coefficient $a = A' - A$ est égal à $R'_\varphi(0) - R'_\rho(0)$; par suite, d'après l'équation générale (13) on a :

$$a = \frac{R_o^2}{\rho_o}(p_o - p).$$

Dans le cas du mouvement *surosculateur*, a est nul ; il en est de même de α (n° 36). Dans le cas du mouvement *quasi-surosculateur*, a et α ne sont pas nuls, mais doivent être considérés comme des infiniment petits du même ordre que T.

Equations du mouvement relatif. — Soient $\vec{\Gamma}_A$, $\vec{\Gamma}_E$, $\vec{\Gamma}_C$ les accélérations absolues, d'entraînement et de Coriolis. Les composantes de ces vecteurs suivant les axes mobiles sont :

$$\vec{\Gamma}_A \begin{cases} -R_\rho \cos\varepsilon - g\sin\tau, \\ -R_\rho \sin\varepsilon - g\cos\tau, \end{cases} \quad \vec{\Gamma}_E \begin{cases} -R_\varphi - g\sin\tau, \\ -g\cos\tau, \end{cases} \quad \vec{\Gamma}_C \begin{cases} 2\omega\dfrac{d\eta}{dt}, \\ -2\omega\dfrac{d\xi}{dt}. \end{cases}$$

L'égalité vectorielle classique $\vec{\Gamma}_R = \vec{\Gamma}_A - \vec{\Gamma}_E - \vec{\Gamma}_C$ fournit les équations différentielles du mouvement relatif :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -R_\rho \cos\varepsilon + R_\varphi - 2\omega\frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -R_\rho \sin\varepsilon + 2\omega\frac{d\xi}{dt}.$$

D'autre part, les développements en série de $R_\rho \cos\varepsilon$ et $R_\rho \sin\varepsilon$ sont :

$$R_\rho \cos\varepsilon = (R_o + At + Bt^2 + \ldots)\cos(\alpha t^3 + \beta t^4 + \ldots) = R_o + At + Bt^2 + Ct^3 + \ldots,$$
$$R_\rho \sin\varepsilon = (R_o + At + Bt^2 + \ldots)\sin(\alpha t^3 + \beta t^4 + \ldots) = \alpha R_o t^3 + (\beta R_o + \alpha A)t^4 + \ldots;$$

(jusqu'aux termes en t^6 le développement de $R_\rho \cos\varepsilon$ coïncide avec celui de R_ρ). Les équations du mouvement relatif deviennent donc :

$$(24) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = at + bt^2 + ct^3 + \ldots - 2(\omega_o + qt + rt^2 + \ldots)\dfrac{d\eta}{dt}, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \alpha R_o t^3 + (\beta R_o + \alpha A)t^4 + \ldots + 2(\omega_o + qt + rt^2 + \ldots)\dfrac{d\xi}{dt}. \end{cases}$$

Intégration. — A l'origine, les deux mobiles ont même vitesse et

même accélération : la vitesse et l'accélération relatives seront nulles pour $t = 0$; les développements de $\frac{d\xi}{dt}$ et $\frac{d\eta}{dt}$ seront donc de la forme :

$$\frac{d\xi}{dt} = Lt^2 + Mt^3 + \ldots,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = L't^2 + M't^3 + \ldots ;$$

en portant dans les équations (24) et en identifiant, on trouve :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{3}t^3 + \left(\frac{c}{4} - \frac{a\omega_o^2}{6}\right)t^4 + \left(\frac{d}{5} - \omega_o\frac{3\alpha R_o + 2b\omega_o + 7aq}{30}\right)t^5 + \ldots,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{a\omega_o}{3}t^3 + \frac{3\alpha R_o + 2b\omega_o + 3aq}{12}t^4 + \left(\frac{\beta R_o + \alpha A}{5} + \frac{3c\omega_o - 2a\omega_o^3 + 4qb + 6ra}{30}\right)t^5 + \ldots.$$

En intégrant, on obtiendra ξ et η.

41. **Expressions de** Δx, Δy, $\Delta\tau$, Δv. — Supposons connus les coefficients des développements précédents. Désignons par $x_\varphi + \Delta x$, $y_\varphi + \Delta y$, $\tau_\varphi + \Delta\tau$, $v_\varphi + \Delta v$ les éléments du mouvement réel à l'instant T. Calculons les expressions de Δx, Δy, $\Delta\tau$, Δv.

1° *Expression de* Δx, Δy. — Les coordonnées $\xi(T)$ et $\eta(T)$ de M à l'instant T sont :

$$\xi(T) = \frac{aT^3}{6} + \frac{bT^4}{12} + \left(\frac{c}{4} - \frac{a\omega_o^2}{6}\right)\frac{T^5}{5} + \ldots,$$

$$\eta(T) = \frac{a\omega_o}{12}T^4 + \frac{3\alpha R_o + 2b\omega_o + 3ap}{60}T^5 + \ldots ;$$

les expressions de Δx et Δy s'en déduiront par les formules :

$$\Delta x = \xi(T)\cos\tau_\varphi - \eta(T)\sin\tau_\varphi,$$
$$\Delta y = \xi(T)\sin\tau_\varphi + \eta(T)\cos\tau_\varphi.$$

2° *Expression de* $\Delta\tau$. — La vitesse de M est la somme de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement qui ont pour composantes par rapport aux axes mobiles :

$$\xi'(T),\ \eta'(T) \quad \text{et} \quad v_\varphi + \omega\eta(T),\ -\omega\xi(T) ;$$

par suite $\Delta\tau$, angle de cette vitesse avec $M_\varphi\xi$ est égal à :

$$\Delta\tau = \text{Arc tg}\,\frac{\eta'(T) - \omega\xi(T)}{\xi'(T) + v_\varphi + \omega\eta(T)} ;$$

les premiers termes du développement sont :

$$\Delta\tau = \frac{a\omega_o}{6\,v_\varphi}\,T^3 + \frac{3\alpha\,R_o + b\,\omega_o + aq}{12\,v_\varphi}\,T^4 + \ldots,$$

résultat que l'on aurait pu obtenir en développant par la formule de Mac-Laurin : $\varepsilon = \tau_\rho - \tau_\varphi$.

3° *Expression de* Δv. — La vitesse absolue de M a pour grandeur :

$$v_\varphi + \Delta v = \frac{v_\varphi + \omega\,\eta\,(T) + \xi'(T)}{\cos\Delta\tau}\,;$$

on en tire les premiers termes du développement de Δv :

$$(25)\quad \Delta v = \frac{a}{2}\,T^2 + \frac{b}{3}\,T^3 + \left(\frac{c}{4} - \frac{a\omega_o^2}{12}\right)T^4 + \left(\frac{d}{5} - \omega_o\,\frac{3\alpha\,R_o + 2b\,\omega_o + 6\,a\,q}{60}\right)T^5 + \ldots.$$

42. **Deuxième approximation.** — Pour appliquer la théorie du mouvement relatif au calcul d'un arc de trajectoire, il suffirait de connaître les divers coefficients a, b, c,... ; α, β,... ; q, r,... Théoriquement, il n'est pas impossible de les calculer jusqu'à un rang quelconque : il suffirait de connaître les dérivées successives de la fonction de résistance et des fonctions athmosphériques, mais la complication du calcul, dès qu'interviennent les dérivées secondes de ces fonctions lui ôtent tout intérêt. Nous avons donné plus haut la valeur de a. Le calcul de b nécessiterait la connaissance des dérivées secondes de R (t) dans les deux mouvements, calcul trop compliqué pour être utilisé dans une application numérique. Nous allons montrer que la consultation des tables de la fonction de résistance et des fonctions athmosphériques pour les valeurs de v et y correspondant à l'extrémité de l'arc permet de se passer de la connaissance exacte de b.

Posons $\gamma(t) = R_\varphi(t) - R_\rho(t)$, et supposons que l'on connaisse la valeur Γ de $\gamma(t)$ à l'instant T :

$$\Gamma = \gamma(T) = aT + bT^2 + c\,T^3 \ldots\,;$$

de cette équation, on tire :

$$(26)\qquad b = \frac{\Gamma - a\,T}{T^2} - c\,T - d\,T^2 \ldots,$$

et, en portant cette valeur de b dans (25), il vient :

$$\Delta v = \frac{a}{2}\,T^2 + \frac{\Gamma - a\,T}{3}\,T - \frac{c + a\omega_o^2}{12}\,T^4 + \ldots.$$

On voit que la connaissance de Γ, aussi bien que celle de b, permet de faire reculer l'erreur sur v jusqu'à l'ordre 4.

Calcul de Γ *et* v. — On calculera v et Γ par approximations successives. Partant d'une première valeur approchée de v :

$$v_1 = v_\varphi + a\frac{T^2}{2},$$

(ou simplement $v_1 = v_\varphi$ dans le cas d'un mouvement fictif surosculateur ou quasi-surosculateur), on calculera à l'aide de la table de résistance la valeur approchée R_1 de $R_\rho(T)$ correspondant à cette vitesse et à l'altitude du projectile (altitude suffisamment connue par le mouvement fictif). L'erreur commise sera d'ordre 3 comme celle entachant v.

De la valeur approchée de $R_\rho(T)$ on déduit une valeur approchée Γ_1 de Γ, et par suite une valeur plus précise de v :

$$v_2 = v_\varphi + \frac{a\,T^2}{2} + \frac{\Gamma_1 - a\,T}{3}\,T\,;$$

l'erreur sera d'ordre 4, puisque Γ_1 est multiplié par T. Avec cette nouvelle valeur de v on pourra améliorer l'approximation sur $R_\rho(T)$ et sur Γ, mais l'erreur sur v restera d'ordre 4 à cause des termes négligés. Quel que soit le mouvement fictif utilisé, l'erreur sur v sera d'ordre 4, mais l'emploi du mouvement surosculateur ou d'un mouvement quasi-surosculateur sera plus intéressant, car, la correction sur v étant moindre, le nombre d'approximations successives sera plus faible.

Corrections sur τ, x, y. — L'erreur d'ordre 4 sur v causera, sur les arcs suivants, une erreur de même ordre sur les valeurs ultérieures de τ, x, y. Il est donc peu utile, dans le calcul d'un arc, de pousser l'approximation sur τ, x, y plus loin que l'ordre 4.

Dans le cas d'un mouvement fictif *simplement osculateur*, on pourra se contenter d'effectuer sur τ la correction :

$$\Delta_1\tau = \frac{a\,\omega_o}{6\,v_\varphi}\,T^3 = \frac{a\cos\tau_o}{6\,v_o\,v_\varphi}\,g\,T^3,$$

et, sur x et y les corrections correspondant aux valeurs de $\xi(T)$ et $\eta(T)$:

$$\xi_1 = \frac{a\,T^3}{6}\,,\quad \eta_1 = 0.$$

Dans le cas d'un mouvement fictif *quasi-surosculateur*, on pourra ne faire aucune correction sur τ, x, y, puisque les erreurs sur ces éléments sont d'ordre 4. Toutefois, si l'on désire, pour l'arc en question, faire reculer l'erreur sur ces éléments jusqu'à l'ordre 5, on effectuera les corrections suivantes, obtenues en remplaçant dans les expressions exactes de $\Delta\tau$ et de ξ (T) le coefficient b par sa valeur (26), en considérant a et α comme des infiniment petits du premier ordre et en négligeant les termes d'ordre 5 et plus :

$$\Delta_1\tau = \frac{\Gamma + a\,\mathrm{T}}{12\,\rho_\varphi}\,\omega_0\,\mathrm{T}^2 = \frac{\Gamma + a\,\mathrm{T}}{12\,\rho_0\,\rho_\varphi}\,g\,\mathrm{T}^2\cos\tau_0,$$

$$\Delta x = \xi_1\cos\tau_\varphi, \qquad \Delta y = \xi_1\sin\tau_\rho,$$

avec :

$$\xi_1 = \frac{\Gamma + a\mathrm{T}}{12}\,\mathrm{T}^2.$$

Remarquons que η(T), qui représente l'écart entre les trajectoires réelle et fictive, écart compté normalement à cette dernière, est un infiniment petit d'ordre 5, de partie principale :

$$\frac{2\,\Gamma + 3\,a\,\mathrm{T}}{60}\,\omega_0\,\mathrm{T}^3.$$

Dans le cas du mouvement fictif *surosculateur*, les corrections sont les mêmes que dans le cas précédent, mais a est nul.

Remarque. — On sera sûr d'avoir utilisé un mouvement fictif *quasi-surosculateur* si a et Γ sont de signes contraires : l'examen des hodographes de la résistance montre qu'alors l'arc d'hodographe du mouvement réel traverse le segment de droite hodographe du mouvement fictif.

43. **Troisième approximation.** — Tout en ne faisant appel qu'aux dérivées premières de la fonction de résistance et des fonctions atmosphériques, on peut encore augmenter la précision. Nous supposerons que l'on a utilisé un mouvement fictif quasi-surosculateur. Désignons par a_1 la valeur de γ'(T) :

$$a_1 = \gamma'(\mathrm{T}) = \mathrm{R}'_\varphi\,(\mathrm{T}) - \mathrm{R}'_\rho\,(\mathrm{T}).$$

Si l'on désigne par τ, ρ, R, p_1 les éléments du mouvement réel à l'extrémité de l'arc (éléments sur lesquels l'erreur est d'ordre 4), on a :

$$a_1 = \frac{\mathrm{R}_\varphi}{\rho_\varphi}\,(-p\,\mathrm{R}_\varphi - g\sin\tau_\varphi) - \frac{\mathrm{R}}{\rho}\,(-p_1\,\mathrm{R} - g\sin\tau)\,;$$

l'erreur commise sur a_1 est donc d'ordre 4. Des deux égalités :

$$\Gamma = a\,T + b\,T^2 + c\,T^3 + \ldots,$$
$$a_1 = a + 2b\,T + 3\,c\,T^2 + \ldots,$$

tirons b et c ; on obtient :

$$b = \frac{3\,\Gamma - 2\,a\,T - a_1\,T}{T^2} + d\,T^2 + 2\,eT^3 + \ldots,$$

$$c = \frac{-2\,\Gamma + a\,T + a_1\,T}{T^3} - 2\,d\,T - 3\,eT^2 \ldots ;$$

portons ces valeurs dans l'expression (25) donnant Δv, on obtient :

$$\Delta v = \frac{\Gamma\,T}{2} + \frac{a - a_1}{12}\,T^2 - \frac{a\,\omega_0^2}{12}\,T^4 + \lambda\,T^5 ;$$

a étant un infiniment petit d'ordre 1, on a, à une erreur d'ordre 5 près :

$$\Delta\,v = \frac{\Gamma\,T}{2} + \frac{a - a_1}{12}\,T^2.$$

Il suffira donc de faire, sur la valeur de v calculée par la méthode précédente, une correction supplémentaire :

$$\Delta_2\,v = \frac{\Gamma\,T}{6} - \frac{a + a_1}{12}\,T^2.$$

Pour que les approximations soient cohérentes, il faudra faire sur x, y, τ les corrections jugées facultatives à la fin du paragraphe précédent, de manière à faire reculer l'erreur sur tous les éléments jusqu'à l'ordre 5.

Les résultats précédents s'appliquent au cas d'un mouvement fictif surosculateur : il suffira de supposer que a est nul.

44. **Exemple de calcul rapide d'une trajectoire.** — Nous donnons ci-après le calcul de la trajectoire :

$$v_0 = 800 \text{ m/s}, \quad \tau_0 = 40^\circ, \quad c = 1{,}5.\ 10^{-4}.$$

Nous utilisons un mouvement fictif quasi-surosculateur en nous contentant de la deuxième approximation ; nous négligeons les corrections (d'ordre 5) sur x, y, τ ; d'autre part, étant donné le but poursuivi dans cet exemple, nous avons jugé inutile de tenir compte de la sphéricité de la terre et nous avons pris pour g la valeur constante 9,81 m/s/s. Nous avons arrondi les valeurs de τ au multiple de 10″ le plus voisin. Nous avons utilisé la loi de résistance Dupuis (le coefficient j étant pris égal à 0,04).

Explication des notations.

Lignes 4, 5, 6, 7 : on a posé :

$$\alpha_o = \frac{(n_o - 1)\, g \sin \tau_o}{R_o}, \quad \beta_o = \frac{10^{-4}\, v_o^2\, (k_o - n_o l_o) \sin \tau_o}{R_o};$$

ces nombres peuvent être calculés à la règle, une erreur de 0,005 sur p_o causant sur la vitesse, par l'intermédiaire de la ligne 51, une erreur d'au plus 2 ou 3 cm/s.

Ligne 8 : p est l'indice du mouvement fictif utilisé.

Lignes 40, 44 : $\mathcal{V}$ est la vitesse du son et ζ la valeur de $\frac{H(y)}{H_o}$ à l'extrémité de l'arc.

Ligne 41 : v est la vitesse à l'extrémité de l'arc ; ayant pris d'abord $v = v_\varphi$, on a rectifié ensuite cette valeur, après avoir fait sur v les corrections indiquées aux lignes 51, 52.

Lignes 51, 52 : la correction sur v est : $\Delta v = \frac{aT^2}{6} + \frac{\Gamma T}{3}$; a étant égal à $\frac{R_o^2}{v_o} \Delta p$, on a : $\frac{a T^2}{6} = \frac{s^2 v_o \Delta p}{6}$.

Remarques. — *a*) On voit, d'après les lignes 4, 5, 6, 7 combien l'indice du mouvement réel est influencé par les variations des fonctions athmosphériques. Les lignes 44 et 45 montrent que log ζ varie, d'une colonne à l'autre, souvent plus rapidement que log $F(\beta)$; ceci montre qu'il n'est pas plus justifié pour une trajectoire analogue, de remplacer la pression variable par une pression moyenne constante qu'il ne le serait de remplacer la résistance variable par une résistance moyenne constante.

b) Les valeurs de p utilisées sont des valeurs « rondes » ; il en est de même des valeurs de s, sauf pour les arcs aboutissant au sommet et au point de chute. La possession des tables des fonctions A, B, C, D pour un nombre relativement réduit de valeurs de s et p permettrait d'éviter (sauf pour les deux arcs précités) tout calcul de ces fonctions dans le courant d'un calcul de trajectoire.

c) Nous n'avons pas reporté dans le tableau le calcul de R_o pour la première colonne ; on a $R_o = 26{,}026$ m/s/s.

Résultats. — Les éléments de la trajectoire sont donc :

$X_s = 16\,220$ m ; $Y_s = 7\,980$ m ; $v_s = 350$ m/s ; $T_s = 36{,}81$ s ;
$P = 28\,630$ m ; $v_R = 378$ m/s ; $\omega = 57°6'$; $T' = 80{,}56$ s.

1	φ_o	800,00	643,41	503,57	384,31	350,43	335,28	344,35	370,70
2	τ_o	40°	36°11′10″	28°32′10″	11°51′40″	0°0′0″	— 15°2′10″	— 32°28′50″	— 49°15′50″
3	s	0,2	0,2	0,2	0,07538	0,08	0,1	0,15	0,14044
4	n_o	1,240	1,634	1,403	1,784	1,928	2,026	2,021	1,955
5	α_o	0,058	0,260	0,258	0,423	0,000	— 0,896	— 1,482	— 1,197
6	β_o	1,760	1,851	1,847	0,902	0,000	— 1,067	— 1,817	— 2,000
7	p_o	3,058	3,745	3,508	3,109	1,928	0,063	— 1,278	— 1,242
8	p	3,2	3,7	3,5	2,8	1,5	— 0,5	— 1,25	— 1
9	$\Delta p = p_o - p$	— 0,142	+ 0,045	+ 0,008	+ 0,309	+ 0,428	+ 0,563	— 0,028	— 0,242
10	$\log \varphi_o$	2,90309	2,80849	2,70206	2,58468	2,54460	2,52541	2,53700	2,56875
11	colog R_o	$\bar{2}$,58460	$\bar{2}$,85010	$\bar{1}$,13641	$\bar{1}$,42821	$\bar{1}$,51709	$\bar{1}$,53591	$\bar{1}$,44051	$\bar{1}$,22676
12	$\log s$	$\bar{1}$,30103	$\bar{1}$,30103	$\bar{1}$,30103	$\bar{2}$,87726	$\bar{2}$,90309	$\bar{1}$,00000	$\bar{1}$,17609	$\bar{1}$,14749
13	log T	0,78872	0,95962	1,13950	0,89015	0,96478	1,06132	1,15360	0,94300
14	$\log \varphi_o$	2,90309	2,80849	2,70206	2,58468	2,54460	2,52541	2,53700	2,56875
15	$\log \cos\tau_o$	$\bar{1}$,88425	$\bar{1}$,90693	$\bar{1}$,94375	$\bar{1}$,99063	0,00000	$\bar{1}$,98487	$\bar{1}$,92612	$\bar{1}$,81463
16	log A	$\bar{1}$,96232	$\bar{1}$,96324	$\bar{1}$,96288	$\bar{1}$,98442	$\bar{1}$,98297	$\bar{1}$,97732	$\bar{1}$,96358	$\bar{1}$,96665
17	$\log x$	3,53838	3,63828	3,74819	3,44988	3,49235	3,54892	3,58030	3,29303
18	$\log tg\, \tau_o$	$\bar{1}$,92381	$\bar{1}$,86422	$\bar{1}$,73542	$\bar{1}$,32228		$\bar{1}$,42911	$\bar{1}$,80385	0,06487
19	$\log y'$	3,46219	3,50250	3,48361	2,77216		2,97803	3,38415	3,35790
20	$\log g/2$	0,69064	0,69064	0,69064	0,69064	0,69064	0,69064	0,69064	0,69064
21	2 log T	1,57744	1,91924	2,27900	1,78030	1,92956	2,12264	2,30720	1,88600
22	log B	1,97644	$\bar{1}$,97730	$\bar{1}$,97696	$\bar{1}$,98984	$\bar{1}$,98872	$\bar{1}$,98447	$\bar{1}$,97406	$\bar{1}$,97654
23	$\log y''$	2,24452	2,58718	2,94660	2,46078	2,60892	2,79775	2,97190	2,55318
24	colog $\varphi_o \cos \tau_o$	3,21266	3,28458	3,35419	3,42469	3,45540	3,48972	3,53688	3,61662
25	log T	0,78872	0,95962	1,13950	0,89015	0,96478	1,06132	1,15360	0,94300
26	log C	0,03867	0,03767	0,03806	0,01576	0,01726	0,02310	0,03762	0,03433
27	$\log g$	0,99167	0,99167	0,99167	0,99167	0,99167	0,99167	0,99167	0,99167
28	$\log \delta$	$\bar{1}$,03172	$\bar{1}$,27354	$\bar{1}$,52342	$\bar{1}$,32227	$\bar{1}$,42911	$\bar{1}$,56581	$\bar{1}$,71977	$\bar{1}$,58562
29	$tg\, \tau_o$	0,83909	0,73151	0,54378	0,21003	0,00000	0,26860	0,63657	1,16110
30	δ	0,10758	0,18773	0,33375	0,21002	0,26860	0,36797	0,52453	0,38514
31	$tg\, \tau$	0,73151	0,54378	0,21003	0,00001	0,26860	0,63657	1,16110	1,54624
32	τ	36°11′10″	28°32′10″	11°51′40″	0°0′0″	— 15°2′10″	— 32°28′50″	— 49°15′50″	— 57°6′30″

33	$\log \nu_0 \cos \tau_0$	2,78734	2,71542	2,64581	2,57531	2,54460	2,51028	2,46312	2,38338
34	colog $\cos \tau$	0,09307	0,05625	0,00937	0,00000	0,01513	0,07388	0,18537	0,26516
35	$\log D$	$\bar{1}$,92802	$\bar{1}$,93055	$\bar{1}$,92956	$\bar{1}$,96930	$\bar{1}$,96593	$\bar{1}$,95295	$\bar{1}$,92053	$\bar{1}$,92840
36	$\log \nu_\varphi$	2,80843	2,70222	2,58473	2,54461	2,52566	2,53711	2,56902	2,57694
37	$\log R_0/\nu_0$	$\bar{2}$,51231	$\bar{2}$,34141	$\bar{2}$,16153	$\bar{3}$,98711	$\bar{3}$,93831	$\bar{3}$,93868	$\bar{2}$,02249	$\bar{2}$,20449
38	colog $[1 + (p\text{-}1)s]$	$\bar{1}$,84164	$\bar{1}$,81248	$\bar{1}$,82391	$\bar{1}$,94474	$\bar{1}$,98297	0,07058	0,17881	0,14320
39	$\log R_\varphi$	1,16238	0,85611	0,57017	0,47646	0,44694	0,54637	0,77032	0,92463
40	colog ϑ	$\bar{3}$,47489	$\bar{3}$,48896	$\bar{3}$,50296	$\bar{3}$,50509	$\bar{3}$,50224	$\bar{3}$,49188	$\bar{3}$,47455	$\bar{3}$,46632
41	$\log \nu$	2,80849	2,70206	2,58468	2,54460	2,52541	2,53700	2,56875	2,57746
42	$\log \beta$	0,28338	0,19102	0,08764	0,04969	0,02765	0,02888	0,04330	0,04378
43	$\log c$	$\bar{4}$,17609	$\bar{4}$,17609	$\bar{4}$,17609	$\bar{4}$,17609	$\bar{4}$,17609	$\bar{4}$,17609	$\bar{4}$,17609	$\bar{4}$,17609
44	$\log \zeta$	$\bar{1}$,85835	$\bar{1}$,70518	$\bar{1}$,57872	$\bar{1}$,56024	$\bar{1}$,58500	$\bar{1}$,67784	$\bar{1}$,86295	0,00000
45	$\log F(\beta)$	5,11546	4,98232	4,81698	4,74658	4,70300	4,70556	4,73420	4,73516
46	$\log R_\rho$	1,14990	0,86359	0,57179	0,48291	0,46409	0,55949	0,77324	0,91125
47	R_φ	14,534	7,1798	3,7168	2,9954	2,7986	3,5186	5,8928	8,4068
48	R_ρ	14,122	7,3045	3,7307	3,0403	2,9113	3,6265	5,9325	8,1517
49	$\Gamma = R_\varphi - R_\rho$	+ 0,412	− 0,1247	− 0,0139	− 0,0449	− 0,1127	− 0,1079	− 0,0397	+ 0,2551
50	ν_φ	643,32	503,76	384,35	350,44	335,47	344,44	370,70	377,52
51	$s^2\nu_0\Delta p/6$	− 0,76	+ 0,19	+ 0,03	+ 0,11	+ 0,16	+ 0,32	− 0,04	− 0,30
52	$\Gamma T/3$	+ 0,85	− 0,38	− 0,07	− 0,12	− 0,35	− 0,41	− 0,19	+ 0,75
53	ν	643,41	503,57	384,31	350,43	335,28	344,35	370,47	377,97
54	y'	2898,6	3180,5	3045,2	591,8	0,00000	− 950,7	− 2421,9	− 2279,8
55	y''	175,6	386,5	884,3	288,9	406,4	627,7	937,3	357,4
56	$y = y'\text{-}y''$	2723,0	2794,0	2160,9	302,9	− 406,4	− 1578,4	− 3359,2	− 2637,2
57	Σy	2723,0	5517,0	7677,9	7980,8	7574,4	5996,0	2636,8	− 0,4
58	x	3454,5	4347,9	5600,0	2817,6	3107,1	3539,3	3804,5	1963,5
59	Σx	3454,5	7802,4	13402,4	16220,0	19327,1	22866,4	26670,9	28634,4
60	T	6,1478	9,1121	13,7880	7,7652	9,2210	11,5165	14,2430	8,7700
61	ΣT	6,1478	15,2599	29,0479	36,8131	46,0341	57,5506	71,7936	80,5636

CHAPITRE IX

MOUVEMENT CONIQUE RÉSISTANT

L'étude du mouvement d'un point qui décrirait une conique sous l'action de la pesanteur et d'une résistance tangentielle a été abordée par le Commandant BATAILLER qui a eu surtout en vue de chercher la relation entre R et v résultant de cette hypothèse.

Nous nous proposons de compléter son travail en cherchant l'hodographe de la résistance, et en cherchant aussi les éléments de la conique osculatrice à une trajectoire en un point.

45. **Possibilité d'un mouvement conique résistant.** — Cherchons quels sont les arcs d'une conique qui peuvent être trajectoires d'un mouvement résistant, le mobile se déplaçant dans le sens des x croissants. Nous savons qu'il faut et qu'il suffit que y'' et y''' soient négatifs.

Soit la conique (passant par l'origine) :

$$y = ax - b + \varepsilon b\,(1 + 2cx + dx^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon = \pm 1\,;$$

les deux valeurs de ε correspondent aux deux moitiés de la conique situées au-dessous et au-dessus de la droite (D) : $y = ax - b$, diamètre des cordes verticales.

Nature de la conique. — Un calcul élémentaire montre que :

a) Si $d < 0$, la conique est une *ellipse.*

b) Si $c^2 - d < 0$, la conique est une hyperbole n'admettant pas de tangentes verticales ; nous l'appellerons *hyperbole* (H_1).

c) Si $d > 0$, $c^2 - d > 0$, la conique est une hyperbole coupée en deux points réels à tangentes verticales par le diamètre (D). Nous l'appellerons *hyperbole* (H_2).

Nous ne considérerons pas le cas déjà étudié où la conique est une parabole ($d = 0$).

Calculons les 3 premières dérivées de $y(x)$. On a :

$$y' = a + \varepsilon\, b\,(c + dx)\,(1 + 2\,cx + dx^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y'' = \varepsilon\, b\,(d - c^2)\,(1 + 2\,cx + dx^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = -3\,\varepsilon\, b\,(d - c^2)\,(c + dx)\,(1 + 2cx + dx^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

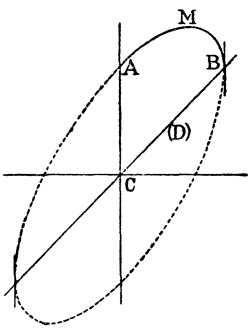

FIG. 11.

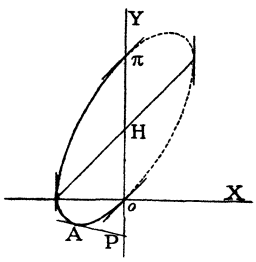

FIG. 11 *a*.

Les conditions $y'' < 0$, $y''' < 0$ donnent :

(27) $\qquad \varepsilon\, b\,(d - c^2) < 0, \quad c + dx < 0.$

Examinons les différentes coniques.

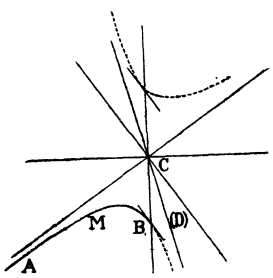

FIG. 12.

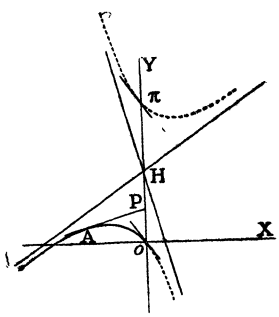

FIG. 12 *a*.

a) *Ellipse.* $d < 0$, $d - c^2 < 0$. Les conditions (27) deviennent :

$$x > -\frac{c}{d}, \qquad \varepsilon\, b > o\,;$$

or, $-\dfrac{c}{d}$ est l'abscisse du centre : l'arc qui convient est l'arc AMB au-dessus de (D) et à droite de la verticale du centre (fig. 11).

b) *Hyperbole* (H_1). $d - c^2 > 0$. Les conditions (27) deviennent :

$$x < -\frac{c}{d}, \quad \varepsilon\, b < 0;$$

l'arc convenant est l'arc AMB, au-dessous de (D) et à gauche de la verticale du centre (fig. 12).

c) *Hyperbole* (H_2). $d > 0$, $d - c^2 < 0$. On doit avoir :

$$x < -\frac{c}{d}, \quad \varepsilon\, b > o;$$

l'arc convenant est l'arc AMB, situé au-dessus de (D) et à gauche de la verticale du centre (fig. 13).

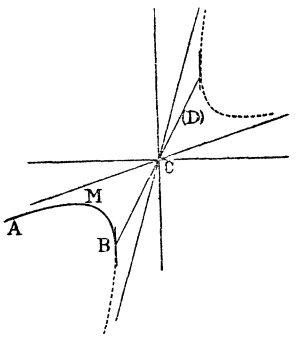

FIG. 13.

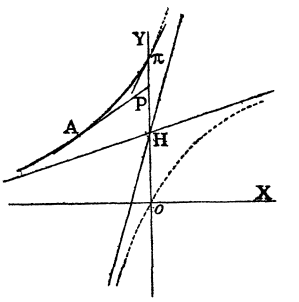

FIG. 13 *a*.

46. **Hodographe de la résistance.** — En appliquant les formules (10) donnant les coordonnées X et Y d'un point de l'hodographe, on trouve, après réduction :

$$X = -\frac{3\,\varepsilon\, g}{2}\,\frac{(c + dx)\,(1 + 2\,cx + d\,x^2)^{\frac{1}{2}}}{b\,(d - c^2)},$$

$$Y = a\,X - \frac{3\,g}{2}\,\frac{(c + dx)^2}{d - c^2}.$$

On peut éliminer facilement x entre ces deux équations : élevons la première au carré, en remarquant que

$$d\,(1 + 2\,cx + dx^2) = (c + dx)^2 + d - c^2,$$

il vient :

$$b^2 d\,X^2 = \frac{9\,g^2}{4}\,\frac{(c + dx)^4}{(d - c^2)^2} + \frac{9\,g^2}{4}\,\frac{(c + dx)^2}{d - c^2};$$

l'élimination de $(c + dx)^2$ donne l'équation de l'hodographe $\mathcal{H}$:

$$b^2 d\, X^2 = (Y - a\, X)^2 - \frac{3\, g}{2} (Y - a\, X) ;$$

l'hodographe est donc une *conique*. Son équation peut s'écrire :

$$\left(Y - a\, X - \frac{3\, g}{4}\right)^2 - X^2 b^2 d = \frac{9\, g^2}{16} .$$

Sous cette forme, on voit que son *centre* est le point H déjà rencontré : $X = 0$, $Y = \frac{3\, g}{4}$. $\mathcal{H}$ passant l'origine, son diamètre vertical, toujours réel, est le segment $O\pi$, π étant le point déjà rencontré aussi : $X = 0$, $Y = \frac{3\, g}{2}$.

Les *directions asymptotiques* sont données par les termes :

$$(Y - a\, X)^2 = X^2 b^2 d ;$$

ce sont les mêmes que celles de la conique trajectoire : les coniques sont donc *homothétiques*. On peut énoncer le théorème :

THÉORÈME. — *Dans un mouvement conique résistant, l'hodographe de la résistance est la conique homothétique à la trajectoire, dont le centre est le point* H $(X = 0, Y = \frac{3\, g}{4})$ *et qui passe par l'origine.*

Rapport d'homothétie. — Il est égal au rapport des diamètres verticaux ; un calcul simple donne comme valeur de ce rapport :

$$\frac{3\, g}{4\, b} \sqrt{\frac{d}{d - c^2}} ;$$

il est imaginaire dans le cas de l'hyperbole (H_2). $\mathcal{H}$ est alors homothétique de l'hyperbole conjuguée de (H_2).

Les figures $(11_a, 12_a, 13_a)$ représentent les hodographes correspondant aux différentes coniques ; un trait plein marque les parties utiles de ces courbes.

Les cas déjà étudiés de la parabole et de l'hyperbole d'asymptote verticale sont deux cas limites : la conique $\mathcal{H}$ dégénère en deux droites ; dans le cas de la parabole, on a deux droites parallèles passant respectivement par O et π, et dans le cas de l'hyperbole d'asymptote verticale, OY et une droite passant par H.

Indice d'un mouvement conique.— Reportons-nous aux figures 11_a, 12_a, 13_a donnant les différents hodographes coniques. La tangente en un point A rencontre OY en P, et l'on a : $p = \frac{g}{\overline{OP}}$. Les figures montrent que $\overline{OP}$ et par suite p restent compris dans les intervalles suivants :

a) *Ellipse* : $\overline{OP} > O\pi$, ou $\overline{OP} < 0$, donc $p < \frac{2}{3}$;

b) *Hyperbole* (H_1) : $0 < \overline{OP} < \overline{OH}$, donc $p > \frac{4}{3}$;

c) *Hyperbole* (H_2) : $\overline{OH} < \overline{OP} < \overline{O\pi}$, donc $\frac{2}{3} < p < \frac{4}{3}$.

On voit donc que pendant *tout* le parcours de la trajectoire conique, p reste compris dans l'un des intervalles suivants :

$$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ ou bien } \left(\frac{4}{3}, +\infty\right).$$

47. **Conique trajectoire d'un mouvement d'éléments initiaux donnés.** — Soient τ_o, v_o, R_o, p_o les éléments initiaux d'un mouvement résistant conique. Les équations (9) nous donnent, en fonction de ces quantités, les valeurs des dérivées de y pour $x = 0$. En reprenant l'équation de la conique donnée plus haut, on obtient :

$$y'(0) = a + bc = \operatorname{tg} \tau_o,$$
$$y''(0) = b(d - c^2) = -\frac{g}{v_o^2 \cos^2 \tau_o},$$
$$y'''(0) = -3\,bc\,(d - c^2) = -\frac{2\,R_o\,g}{v_o^4 \cos^3 \tau_o},$$
$$y^{\text{IV}}(0) = -3\,b\,(d - c^2)(d - 5\,c^2) = -\frac{2\,R_o^2\,g(4 - p_o)}{v_o^6 \cos^4 \tau_o}.$$

On en tire les valeurs de a, b, c, d :

$$28 \quad \begin{cases} a = \operatorname{tg} \tau_o - \dfrac{3\,g}{(3\,p_o - 4)\,R_o \cos \tau_o}, & b = -\dfrac{9\,g\,v_o^2}{2\,(3\,p_o - 4)\,R_o^2}, \\ c = -\dfrac{2\,R_o}{3\,v_o^2 \cos \tau_o}, & d = \dfrac{2\,(3\,p_o - 2)\,R_o^2}{9\,v_o^4 \cos^2 \tau_o}. \end{cases}$$

On voit que la conique est parfaitement déterminée. D'après

ce que nous avons vu au paragraphe précédent, le genre de la conique dépend uniquement de la valeur de p_o : *ellipse* pour $p_o < \frac{2}{3}$, *parabole* pour $p_o = \frac{2}{3}$, *hyperbole* pour $p_o > \frac{2}{3}$.

48. **Éléments de la trajectoire conique.** — La relation entre x et t ne s'exprime pas à l'aide des fonctions élémentaires ; l'équation (8) du n° 8 conduit en effet à l'intégrale :

$$v_o\, t \cos \tau_o = \int_o^x \left[1 - \frac{4\, R_o\, x}{3\, v_o^2 \cos \tau_o} + \frac{(6\, p_o - 4)\, R_o^2\, x^2}{9\, v_o^4 \cos^2 \tau_o}\right]^{-\frac{3}{4}} dx\ ;$$

l'intégrale ne s'exprime avec les fonctions élémentaires que pour $p = \frac{2}{3}$ où le coefficient de x^2 est nul (cas du mouvement parabolique) et pour $p = \frac{4}{3}$ où le trinôme est un carré parfait (cas du mouvement hyperbolique avec asymptote verticale). Nous verrons plus loin comment on peut exprimer $x\ (t)$ ainsi que tous les autres éléments du mouvement par une série entière en t.

Calcul de la portée, de l'angle de chute, etc... — Un simple calcul algébrique donne la portée, la tangente de l'angle de chute, les coordonnées du sommet, en fonction des données initiales. Comme dans tous les mouvements résistants étudiés précédemment, les rapports de ces éléments à leurs valeurs dans le vide ne dépendent que de p et du nombre déjà rencontré : $k = \frac{R_o \sin \tau_o}{3\, g}$.

On trouve :

$$P = \frac{(P)_v}{K}, \quad \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\tau_o \frac{K}{1 - 2r\, k^2},$$

$$X_s = (X_s)_v \frac{2 + r\, k}{(1 + rk)\sqrt{K} + K}, \; Y_s = (Y_s)_v \frac{2}{1 + 2\, k + \sqrt{K}},$$

en posant, pour simplifier l'écriture :

$$r = 4 - 3\, p, \quad K = 1 + 4\, k + 2\, r\, k^2.$$

49. **Application du mouvement conique au mouvement des projectiles.**

Mouvement conique surosculateur. — C'est le mouvement conique

d'un point ayant, au point d'osculation M, mêmes éléments τ, φ, R, p que le mouvement réel. Sa conique trajectoire est la conique *osculatrice* à la trajectoire en M (contact d'ordre 4). Nous savons la déterminer à l'aide du système (28) ; sa nature ne dépend que de la valeur de p.

On pourrait utiliser le mouvement conique surosculateur, comme on a utilisé les mouvements (M_p), pour le calcul d'arcs de trajectoires, mais nous ne voyons aucun avantage à cette substitution, les calculs étant nettement plus compliqués.

Si l'angle τ_0 est *très petit*, la substitution à la trajectoire de la conique osculatrice à l'origine peut donner une bonne approximation : les éléments de la trajectoire (sauf le temps) seront donnés par les formules du paragraphe précédent.

CHAPITRE X

FAMILLES DE TRAJECTOIRES (F_5).

50. Dilatation d'une trajectoire. Explication de la forme des expressions donnant les éléments des trajectoires (B_p) et coniques. — En donnant aux numéros 33 et 49 les éléments des trajectoires (B_p) et des trajectoires coniques, nous avons noté ce fait remarquable : le rapport de la valeur d'un élément de la trajectoire à sa valeur dans le cas du vide ne dépend que de k et p seuls. Nous allons expliquer ce fait.

Soit une trajectoire $\mathfrak{T}$ d'équation $y = y(x)$, siège d'un mouvement résistant ($\mathfrak{M}$) ; soit $\mathfrak{H}$ l'hodographe de la résistance.

Effectuons sur $\mathfrak{T}$ la transformation suivante :

$$x_1 = \lambda x, \qquad y_1 = \mu y, \qquad g_1 = \gamma g,$$

que nous appellerons « transformation (λ, μ, γ) ». Nous obtenons une nouvelle trajectoire $\mathfrak{T}_1$ siège d'un nouveau mouvement résistant ($\mathfrak{M}_1$), d'hodographe $\mathfrak{H}_1$.

Cherchons les transformations résultantes pour l'instant t de passage au point d'abscisse x, pour $v \cos \tau$, pour l'hodographe, pour k et pour p.

y', y'', y''', y^{IV}, sont multipliés respectivement par $\mu\lambda^{-1}$, $\mu\lambda^{-2}$, $\mu\lambda^{-3}$ et $\mu\lambda^{-4}$; $v \cos \tau = \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{g}\,(-y'')^{-\frac{1}{2}}$ est multiplié par $\gamma^{\frac{1}{2}} \lambda\mu^{-\frac{1}{2}}$ et, par suite, t est multiplié par $\gamma^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}}$.

Si nous nous reportons aux expressions de X, Y, p :

$$X = \frac{g}{2} \frac{y'''}{y''^2}, \qquad Y = \frac{g}{2} \frac{y' y'''}{y''^2}, \quad p = 4 - 2 \frac{y'' y^{\text{IV}}}{y'''^2},$$

nous voyons que X est multiplié par $\gamma \lambda \mu^{-1}$, Y par γ et que p reste *invariant*. Il en est de même de $k = \dfrac{v_0 \sin \tau_0}{3 g} = \dfrac{Y_0}{3 g}$, puisque Y_0 et g

sont multipliés par γ. L'hodographe $\mathcal{H}_1$ se déduit de $\mathcal{H}$ par une homothétie de centre O, de rapport γ, suivie d'une dilatation des abscisses dans le rapport $\lambda\mu^{-1}$.

Ceci posé, considérons une famille de trajectoires dépendant de 5 paramètres et admettant le groupe de transformations :

$$x_1 = \alpha + \lambda x, \qquad y_1 = \beta + \mu y,$$

(ce qui est le cas des trajectoires (B_p) et des coniques).

Imposons aux trajectoires de passer par O : elles ne dépendront plus que de 4 paramètres, par exemple les valeurs initiales τ_o, v_o, R_o, p_o. A la place de ces 4 paramètres, on peut choisir comme paramètres arbitraires les 4 quantités

$$m = \operatorname{tg} \tau_o, \quad l = v_o \cos \tau_o, \quad k, \quad p_o.$$

Raisonnons pour la portée. La portée du mouvement résistant correspondant peut toujours s'écrire :

$$P = \frac{2 v_o^2 \sin \tau_o \cos \tau_o}{g} \varphi (l, m, k, p_o, g),$$

φ étant une fonction définie par cette égalité qui s'écrit :

$$P = \frac{2 l^2 m}{g} \varphi (l, m, k, p_o, g).$$

Dans la transformation (λ, μ, γ), m et l sont multipliés respectivement par $\mu \lambda^{-1}$ et $\lambda \mu^{-\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}$ et par suite $\frac{2 l^2 m}{g}$ est multiplié par λ ; il en est de même de P, donc φ ne change pas dans la transformation et on a l'identité :

$$\varphi (l, m, k, p_o, g) \equiv \varphi (\gamma^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \lambda l, \mu \lambda^{-1} m, k, p_o, \gamma g).$$

En faisant $\gamma = 1$, $\mu = \lambda^2$, l'identité devient :

$$\varphi (l, m, k, p_o, g) \equiv \varphi (l, \lambda m, k, p_o, \gamma),$$

ce qui montre que φ est indépendant de m et s'écrit donc $\varphi (l, k, p_o, g)$.

La transformation $\gamma = 1$, $\mu = \lambda$ fournit l'identité :

$$\varphi (l, k, p_o, g) \equiv \varphi (l \lambda^{\overline{2}}, k, p_o, g)$$

et prouve que φ est indépendant de l et s'écrit $\varphi (k, p_o, g)$.

L'identité du début devient :

$$\varphi (k, p_o, g) \equiv \varphi(k, p_o, \gamma g),$$

nous voyons donc que φ est aussi indépendant de g et est une fonction de k et p_o seuls ; ceci explique la formule

$$P = (P)_v \, \varphi \, (k, p_o).$$

On expliquerait de la même façon la forme des expressions donnant les autres éléments de la trajectoire.

51. **Deuxième transformation des trajectoires. Explication de la forme des fonctions balistiques.** — Nous avons appelé fonctions balistiques les rapports des quantités x, $y - x \operatorname{tg} \tau_o$, $\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \tau_o$, $v \cos \tau$ à leurs valeurs dans le cas de la trajectoire du vide. Nous avons noté ce fait remarquable que, dans le cas des mouvements d'indice constant, ces fonctions balistiques ne dépendent que de $s = \dfrac{R_o t}{v_o}$ et p seuls. Expliquons ce fait.

Effectuons sur $\mathfrak{T}$ la transformation (λ, μ, γ). Nous avons vu que t est multiplié par $\gamma^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}}$, $R_o \cos \tau_o = X_o$ par $\gamma \lambda \mu^{-1}$ et $v_o \cos \tau_o$ par $\gamma^{\frac{1}{2}} \lambda \mu^{-\frac{1}{2}}$, par suite $s = t \dfrac{R_o \cos \tau_o}{v_o \cos \tau_o}$ est *invariant* dans la transformation.

On voit facilement qu'il en est de même des rapports des quantités x, $y - x \operatorname{tg} \tau_o$, $\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \tau_o$, $v \cos \tau$ à leurs valeurs dans le cas du vide, c'est-à-dire des fonctions balistiques A, B, C, D.

Le raisonnement du paragraphe précédent montre que ces fonctions qui, *a priori*, devaient dépendre de t, v_o, τ_o, R_o, p, g ou, ce qui revient au même, de s, l, m, k, p, g seront fonction de s, k, p seulement.

Effectuons maintenant sur la trajectoire la transformation :

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + \nu x,$$

ν étant un nombre arbitraire. La courbe transformée est encore une trajectoire (B_p). Cherchons ce que deviennent les fonctions balistiques A, B, C, D et les variables s, p, k.

y' devient $y' + \nu$; y'' n'est pas modifié, donc $v \cos \tau$ et t restent inchangés, leurs expressions ne contenant que y''. Les différences $y - x \operatorname{tg} \tau_o$ et $\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \tau_o$ ne sont pas modifiées, et par suite les fonctions balistiques conservent la même valeur après la transformation. Cherchons le nouvel hodographe ; les expressions de X et Y rappelées au paragraphe précédent montrent que l'on a :

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y + \nu X ;$$

l'hodographe subit la même transformation que la trajectoire. L'expression de p rappelée plus haut montre qu'il est invariant; $k = \frac{Y_o}{3g}$ devient $k_1 = k + \nu \frac{X_o}{3g}$.

Les fonctions balistiques vérifient donc des identités analogues à :

$$A(s, k, p) = A\left(s, k + \nu \frac{X_o}{3g}, p\right)$$

qui montrent qu'elles sont indépendantes de k.

52. **Famille de trajectoires** (F_5). — Les propriétés précédentes s'appliquent à toutes les familles de trajectoires admettant le groupe de transformations :

$$x_1 = \alpha + \lambda x, \qquad y_1 = \beta + \mu y + \nu x,$$

et dépendant de 5 paramètres. Ce sont ces familles de courbes que nous appellerons « familles (F_5) ». Les trajectoires (B_p), les coniques du plan, forment des familles (F_5).

Equation différentielle des familles de courbes (F_5). — Dans l'équation différentielle, qui est d'ordre 5, on peut faire figurer, au lieu de y^{iv} et y^v les quantités p et $\frac{dp}{dx}$. L'équation pourra toujours s'écrire sous la forme :

$$f\left(x, y, y', y'', \frac{y'''}{y''}, p, \frac{y''}{y'''}\frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

La transformation $x_1 = x + \alpha$, $y_1 = y + \beta$ ne devant pas modifier l'équation différentielle, x et y n'y figurent pas explicitement; la transformation $y_1 = y + \nu x$ montre ensuite que y' n'y figure pas; la transformation $y_1 = \mu y$ montre ensuite que y'' ne figure pas ailleurs que dans les rapports $\frac{y'''}{y''}$; la transformation $x_1 = \lambda x$ montre enfin que $\frac{y'''}{y''}$ figure uniquement dans le monôme $\frac{y''}{y'''}\frac{dp}{dx}$. L'équation prend donc la forme simplifiée :

$$f\left(p, \frac{y''}{y'''}\frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

ou, en résolvant par rapport à $\frac{dp}{dx}$:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{y'''}{y''}\, h(p);$$

la fonction $h(p)$ caractérisera la famille de courbes (F_5). Pour les courbes (B_p), on aura $h(p) = 0$.

Fonction $h(p)$ pour les coniques. — Les équations différentielles des paraboles du plan et des coniques du plan sont respectivement (Halphen) :

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0 \quad \text{et} \quad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Exprimons-les en fonction de y, y', y'', y''', p et $\frac{dp}{dx}$. On a :

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}\, y''^{-\frac{5}{3}}\, y''',$$

$$-\frac{3}{2}\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = -\frac{5}{3}\, y''^{-\frac{8}{3}}\, y'''^{2} + y''^{-\frac{5}{3}}\, y^{\text{IV}};$$

remplaçons y^{IV} en fonction de p (14) :

$$(29) \qquad -\frac{3}{2}\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = \frac{2-3p}{6}\, y''^{-\frac{8}{3}}\, y'''^{3};$$

on voit en passant que l'équation différentielle des paraboles du plan est $p = \frac{2}{3}$, ce que nous savions déjà. En dérivant encore une fois l'équation (29), il vient, après réduction :

$$-27\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = -9\frac{dp}{dx}\, y''^{-\frac{8}{3}}\, y'''^{2} + (2-3p)(4-3p)\, y''^{-\frac{11}{3}}\, y'''^{3}.$$

En égalant à zéro, on obtient comme équation différentielle des coniques :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(2-3p)(4-3p)}{9}\,\frac{y'''}{y''}.$$

On remarque l'intégrale particulière $p = \frac{4}{3}$ correspondant aux hyperboles ayant une asymptote verticale. La fonction $h(p)$ est donc, pour les coniques :

$$h(p) = p^2 - 2p + \frac{8}{9}.$$

Calcul de $\frac{dp}{dt}$ dans un mouvement résistant ayant pour trajectoire une courbe d'une famille (F_5). — On a immédiatement :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\,\cos\tau\,\frac{y'''}{y''}\,h(p),$$

et, en appliquant les formules (7), on obtient sans difficulté :

$$\frac{dp}{dt} = 2\,\frac{R}{\varphi}\,h\,(p). \tag{30}$$

53. **Étude du mouvement résistant ayant pour trajectoire une courbe d'une famille** (F_5). — Donnons-nous une famille de courbes (F_5) en nous donnant *à priori* la fonction $h\,(p)$. Le mouvement résistant ayant pour trajectoire une courbe de la famille est déterminé par ses éléments initiaux τ_o, φ_o, R_o, p_o.

Les éléments du mouvement à l'instant t seront donnés par le système d'équations différentielles (17), qui nous a servi dans la recherche des mouvements résistants d'indice p constant, auquel on joindra l'équation (30) ci-dessus.

L'intégration de ce système se ramène à des quadratures, et l'on exprime facilement x, y, $\operatorname{tg}\tau$, $\varphi\cos\tau$, $R\cos\tau$ et t en fonction de la variable p. Les expressions trouvées sont toutefois peu maniables si la fonction $h\,(p)$ n'a pas une forme particulière. Nous préférons donner les développements en série entière des éléments du mouvement en fonction de t. En faisant $h(p) = 0$, on retrouvera les développements donnés dans l'étude des mouvements (M_p), et en faisant $h(p) = p^2 - 2p + \frac{8}{9}$, on aura les développements en série des éléments du mouvement conique. Nous donnons aussi le développement en série de y en fonction de x.

Calcul de x en fonction du temps. — Le théorème fondamental de la dynamique donne :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'' = -\,R\cos\tau\,;$$

en dérivant par rapport à t, on obtient :

$$x''' = -\,\frac{dR}{dt}\cos\tau + R\sin\tau\,\frac{d\tau}{dt},$$

ou, en utilisant les équations (5) :

$$x''' = p\,\frac{R^2}{\varphi}\cos\tau.$$

Admettons que la dérivée d'ordre $n-1$ soit de la forme :

$$x^{(n-1)} = \frac{R^{n-2}}{\varphi^{n-3}}\cos\tau\,\varphi_{n-1}\,(p),$$

$\varphi_{n-1}(p)$ étant une certaine fonction de p. x'' et x''' vérifient cette hypothèse, avec $\varphi_2 = -1$, $\varphi_3 = p$. En utilisant les équations (5), (13), (30) on trouve :

$$x^{(n)} = \frac{R^{n-1}}{\rho^{n-2}} \cos\tau \; \varphi_n(p),$$

$\varphi_n(p)$ étant déterminé par la relation de récurrence :

$$\varphi_n(p) = [n - 3 - p(n-2)] \; \varphi_{n-1}(p) + 2h(p)\,\varphi'_{n-1}(p).$$

La loi de formation est donc exacte, et le développement en série de $x(t)$ s'en déduit par la formule de Mac-Laurin :

$$x = \rho_0 \, t \cos\tau_0 \left[1 - \frac{s}{2!} + \frac{s^2}{3!} p_0 + \frac{s^3}{4!} \varphi_4(p_0) + \dots\right].$$

Calcul de $u = y - x \operatorname{tg}\tau_0$ en fonction de t. — Des équations fondamentales de la dynamique :

$$x'' = -R\cos\tau, \quad y'' = -R\sin\tau - g,$$

on tire :

$$u'' = y'' - x'' \operatorname{tg}\tau_0 = -g - R\frac{\sin(\tau - \tau_0)}{\cos\tau_0}.$$

Un raisonnement par récurrence analogue à celui que nous avons fait pour x montre que l'on a :

$$u^{(n)} = g\frac{R^{n-2}}{\rho^{n-2}}\psi_n(p) + \frac{R^{n-1}}{\rho^{n-2}}\frac{\sin(\tau - \tau_0)}{\cos\tau_0}\varphi_n(p),$$

$\varphi_n(p)$ étant la fonction rencontrée dans l'expression de $x^{(n)}$, et $\psi_n(p)$ étant déterminé par la relation de récurrence :

$$\psi_n(p) = (n-3)(1-p)\psi_{n-1}(p) + 2h(p)\psi'_{n-1}(p) - \varphi_n(p),$$

avec $\psi_3 = +1$.

On en déduit le développement en série de $y - x\operatorname{tg}\tau$:

$$y = x\operatorname{tg}\tau_0 - \frac{1}{2}gt^2\left[1 - \frac{2}{3!}s - \frac{2s^2}{4!}(1 - 2p_0) - \frac{2s^3}{5!}\psi_5(p_0) - \dots\right].$$

Calcul de $\operatorname{tg}\tau$ *en fonction de t.* — Posons $\operatorname{tg}\tau = w$. Un raisonnement par récurrence montre que :

$$w^{(n)}(t) = g\frac{R^{n-1}}{\rho^n \cos\tau}\theta_n(p),$$

la fonction $\theta_n(p)$ étant déterminée par la relation récurrente :

$$\theta_n(p) = [n - 1 - p(n-2)] \; \theta_{n-1}(p) + 2h(p)\,\theta'_{n-1}(p),$$

avec $\theta_2 = -1$.

On en déduit le développement en série de tg τ:

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\tau_o - \frac{gt}{v_o \cos\tau_o}\left[1 + \frac{s}{2!} - \frac{s^2}{3!}\theta_3(p_o) - \frac{s^3}{4!}\theta_4(p_o) - \ldots\right].$$

Calculs de $v \cos\tau$, R $\cos\tau$, p en fonction de t. — En dérivant par rapport à t la série $x(t)$, on obtient :

$$v\cos\tau = \frac{dx}{dt} = v_o \cos\tau_o\left[1 - \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!}p_o + \frac{s^3}{3!}\varphi_4(p_o) + \ldots\right],$$

$$\mathrm{R}\cos\tau = -\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{R}_o\cos\tau_o'\left[1 - \frac{s}{1!}p_o - \frac{s^2}{2!}\varphi_4(p_o) - \ldots\right].$$

En dérivant encore par rapport à t, on pourra déduire de l'expression obtenue la valeur de p. Tous calculs faits, on a :

$$p = \frac{\mathrm{R}_o^2 v\cos\tau_o}{\mathrm{R}^2 v_o\cos\tau}\left[p_o + \frac{s}{1!}\varphi_4(p_o) + \frac{s^2}{2!}\varphi_5(p_o) + \ldots\right].$$

Calcul de $y(x)$ en fonction de x. — Un raisonnement analogue à ceux que nous avons fait plus haut montre que $y^{(n)}(x)$ a pour expression :

$$y^{(n)}(x) = \frac{g\,\mathrm{R}^{n-2}}{v^{2n-2}\cos^n\tau}\lambda_n(p),$$

$\lambda_n(p)$ étant déterminé par la relation récurrente :

$$\lambda_n(p) = [2n - 4 - p(n-3)]\lambda_{n-1}(p) + 2h(p)\lambda'_{n-1}(p),$$

avec $\lambda_3 = -2$.

On en déduit le développement de $y(x)$ en série entière :

$$y = x\operatorname{tg}\tau_o - \frac{g}{2!\,v_o^2\cos^2\tau_o}x^2 - \frac{2\mathrm{R}_o g}{3!\,v_o^4\cos^3\tau_o}x^3 + \frac{\mathrm{R}_o^2 g}{4!\,v_o^6\cos^4\tau_o}x^4\lambda_4(p_o) + \ldots$$

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	3
CHAPITRE I. — Remarque sur la forme de certaines trajectoires	5
CHAPITRE II. — Mouvements résistants de trajectoire donnée	13
CHAPITRE III. — Mouvement résistant parabolique	18
CHAPITRE IV. — Mouvement résistant hyperbolique (l'hyperbole a une asymptote verticale)	23
CHAPITRE V. — Application des théories des mouvements résistants parabolique et hyperbolique au mouvement des projectiles	27
CHAPITRE VI. — Mouvements résistants d'indice constant	37
CHAPITRE VII. — Applications de la théorie des mouvements d'indice constant au mouvement des projectiles	45
CHAPITRE VIII. — Application de la théorie des mouvements d'indice constant au calcul par arcs des trajectoires	52
CHAPITRE IX. — Mouvement conique résistant	64
CHAPITRE X — Familles de trajectoires (F_5)	71