

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

JEAN LAMSON

Contribution géométrique à l'étude de l'action du vent

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1942

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1942__249__3_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1942__249__3_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D ORDRE :

76

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN LAMSON

PREMIÈRE THÈSE. — Contribution géométrique à l'étude de l'action
du vent.

DEUXIÈME THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le

1943 devant la Commission d'examen

MM. E. TURRIÈRE..... *Président.*

J. SOULA	}	<i>Examineurs.</i>
G. MALECOT		

MONTPELLIER
IMPRIMERIE DE LA CHARITÉ
(Pierre Rouge)

1943

FACULTÉ DES SCIENCES

DE

L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

MM.

Doyen P. MATHIAS, Professeur de Zoologie et Biologie générale.

Professeurs honoraires ... { E. FABRY, O. DUBOSQ. E. BATAILLON,
R. JACQUES, J. PAVILLARD, J. CABANNES
et E. CHATTON.

Maîtres de Conférences honoraires F. MOURGUES et L. MAURY.

MM.

Professeurs	{	G. REBOUL	Physique.
		E. TURRIÈRE	Mécanique rationnelle.
		P. HUMBERT	Mathématiques pures
		L. GAY	Chimie.
		J. SOULA	Mathématiques.
		E. CARRIÈRE	Chimie.
		M. MOUSSERON	Chimie.
		L. EMBERGER	Botanique.
		Ch. BOUHET	Physique.
		M. CASTERAS	Géologie.

MM.

Maîtres de Conférences. O. TUZET (Mlle) Zoologie
P. CHATELAIN Minéralogie.
P. REMY Chimie.
G. MALECOT (suppléant) Mathématiques.

MM.

Secrétaire M. BOSC

Secrétaire honoraire.. L. DUBOIS.

Membres du Jury :

MM. E. TURRIÈRE..... *Président.*

J. SOULA	}	Assesseurs.
G. MALECOT		



A MON MAÎTRE
MONSIEUR LE PROFESSEUR ÉMILE TURRIÈRE

Hommage de respectueuse reconnaissance.

A MON PÈRE ET A MA MÈRE

AVANT-PROPOS

Les progrès de la technique moderne ont permis d'entreprendre la construction d'édifices de grandes dimensions, soit en hauteur, soit en superficie. Les uns et les autres offrent prise, du fait même de ces dimensions, à l'action du vent d'une façon assez sensible pour que le problème mérite d'être envisagé. Il l'a d'abord été pour ceux de ces ouvrages qui furent réalisés les premiers : ceux dont les proportions élancées dépassent les dimensions habituelles. Le type de ces ouvrages est le phare. Les cheminées d'usine entrent également dans cette catégorie. Le problème qu'ils posent est essentiellement un problème dynamique : il s'agit de calculer l'amplitude des oscillations que l'édifice pourra supporter, du fait du vent, sans danger pour sa solidité (1).

Mais c'est un problème d'une autre sorte qu'a posé la construction d'ouvrages plus remarquables encore par leur superficie que par leur hauteur, et dont le type est le hangar d'aviation. Ici, la question principale est une question de statique : les vastes surfaces que l'ouvrage présente à l'action du vent auront à supporter des pressions considérables. Il s'agit d'évaluer ces pressions, de les représenter par une force, ou un système de forces, qui se prête facilement à l'étude. Tel est le premier point à étudier. Or, il semblait que, jusqu'ici, on se fût contenté à ce sujet d'approximations assez grossières.

(1) J. LAMOEN. *Sur la sollicitation dynamique des édifices élancés par le vent*. (Bruxelles, Marcel Hayez, 1932.)

Dans ces conditions, il paraissait intéressant de soumettre à la critique les méthodes de calcul employées et d'essayer d'en dégager de meilleures. Nous nous sommes efforcés de le faire dans la première partie de ce travail, pour les voûtes cylindriques. Notre examen a d'abord porté sur les formules qui ont été proposées pour le calcul des pressions ; un choix a été fait parmi elles. Puis les résultats donnés par les méthodes habituellement employées ont été comparés avec ceux auxquels conduisent un calcul plus rigoureux. Dans cette étude, nous avons essayé de ne pas perdre de vue qu'une plus grande rigueur dans les résultats ne doit pas être obtenue au prix de complications dans les calculs, qui en annuleraient la valeur pratique. Le choix des courbes d'intrados permet justement, on le verra, d'éviter cet inconvénient. Souvent le calcul direct, au moyen de l'équation de la courbe d'intrados, a été possible. Dans les autres cas une méthode d'approximation qui consiste à substituer à une courbe donnée une courbe voisine semble devoir donner de bons résultats. Ceci nous a amenés à comparer entre elles les courbes utilisées et à porter un jugement sur leur valeur respective, au point de vue qui nous intéresse.

Après avoir dégagé ces résultats pour une voûte cylindrique (hangars d'aviation) il paraissait normal de les étendre aux cas des voûtes de révolution, c'est-à-dire des dômes et des coupoles. Tel est le but de la II^e partie.

Ayant ainsi étendu aux surfaces de révolution les résultats obtenus, il était intéressant de pousser plus loin l'investigation sur les formes des surfaces qui peuvent être utilisées comme toitures. Le problème consiste à trouver la meilleure forme de surface. Pour cela nous avons recherché quelles étaient les surfaces obtenues en étendant à l'espace des propriétés géométriques rencontrées dans le cas des courbes planes. Cette recherche théorique est l'objet de la III^e partie. Mais ici on se heurte à des équations aux dérivées partielles non intégrables qui ne permettent de donner une réponse satisfaisante que dans des cas particuliers.

Dans ces trois premières parties, seules les forces extérieures agissant sur les surfaces, et les propriétés géométriques de ces surfaces avaient été étudiées. Il restait dès lors à examiner un deuxième point : la répartition des efforts internes, nés de l'action du vent, dans la voûte. Cette importante question a déjà été traitée avec une grande autorité par M. AÏMOND, directeur du Bureau d'Études du Service des Bases au Ministère de l'Air. Dans notre IV^e et dernière partie, nous avons précisément repris ses méthodes en les appliquant plus spécialement à la comparaison des voûtes qui avaient été rencontrées.

PREMIÈRE PARTIE

ETUDE COMPARATIVE DE L'ACTION DU VENT SUR LES COURBES D'INTRADOS DE VOUTES EN BERCEAU

INTRODUCTION

La construction des hangars d'aviation pose deux types de problèmes différents : d'une part ceux qui naissent de l'ampleur de leurs dimensions, tant en hauteur qu'en superficie ; d'autre part ceux qui naissent de l'influence des agents atmosphériques, neige et vent.

Pour les hangars à dirigeables, les dimensions sont imposées par celles mêmes de l'appareil ; pour les hangars d'avions, par la nécessité de pouvoir y abriter le plus grand nombre possible d'appareils. Entre ces deux catégories existe toutefois une différence : le hangar à dirigeables devra présenter une hauteur assez grande pour permettre la remise de l'aéronef, mais n'exigera pas un débouché d'une grande largeur. Le hangar d'avions devra présenter au contraire un débouché superficiel assez vaste pour la manœuvre aisée des appareils, sans qu'une hauteur donnée soit directement imposée par l'usage. Il résulte de ces remarques que le *surbaissement* $\sigma = \frac{f}{a}$, où f désigne la flèche et a la demi-portée, sera plus faible pour

les hangars d'avions que pour ceux de dirigeables. Pour répondre à ces exigences on a adopté dans la pratique deux types principaux de hangars :

1^o) Le hangar ordinaire, avec voûte bandée par un entrait porté sur des piliers. Citons comme exemple de ce type, le hangar de Montebourg.

2^o) Le hangar *en ferme cadre* ou *à culées perdues*, c'est-à-dire sans appuis verticaux, la voûte étant prolongée jusqu'au sol ; un exemple de ce type est le hangar d'Istres.

Le deuxième type de problèmes comprend ceux qui naissent de l'action du vent et de la neige. Les effets du vent sont particulièrement sensibles pour ce genre de constructions : les hangars ont des dimensions importantes et sont habituellement édifiés sur de vastes terrains découverts où les vents soufflent avec force et fréquence. Ceci explique l'intérêt d'une étude approfondie de l'action du vent.

Nous examinerons d'abord sur quelles hypothèses reposent les formules qui permettront de mesurer l'action du vent sur la voûte du hangar ; et, ensuite, comment peuvent être conduits les calculs et à quelles approximations ils donnent lieu.

CHAPITRE I

LE VENT ET SON INTRODUCTION DANS LES CALCULS.

Le vent est constitué par le déplacement d'une masse d'air, animée d'un mouvement d'ensemble, mais parcourue par des courants locaux dont la vitesse peut différer sensiblement de la vitesse moyenne. La masse d'air ne peut donc être regardée comme homogène, ni le déplacement continu : il y a des courants secondaires, des « pulsations ». Le vent n'est constant ni en vitesse, ni en direction. On aperçoit dès lors la difficulté du problème : la notion mathématique de continuité s'appliquera difficilement : on ne pourra pas représenter l'influence du vent par une fonction continue, si ce n'est d'une manière approximative.

En ce qui concerne la vitesse du vent, M. BRÉGUET formule les conclusions suivantes :

a) Toute masse d'air en mouvement possède par rapport au sol une vitesse moyenne V , horizontale qui est la vitesse du vent et une vitesse v définie par ses trois composantes : v_x , v_y , v_z .

b) Chacune de ces « pulsations » élémentaires est caractérisée par sa vitesse maxima et sa période. On peut représenter les vitesses des pulsations périodiques en fonction du temps par la somme algébrique d'une série de fonctions sinusoïdales, différant par leurs amplitudes, leurs fréquences et leurs phases :

$$V_x = \sum V_{x_n} \sin (n \omega t + \varphi_n) ,$$

où la période est : $T = \frac{2 \pi}{\omega}$; n est un entier variant à partir de l'unité ; φ_n est la phase à l'origine.

Les pulsations horizontales sont les plus importantes.

Mais ces considérations ne présentent pas une grande importance pour le problème qui nous occupe. Ce qu'il s'agit de calculer, ce sont les efforts qu'aura à supporter la voûte du hangar. Ils devront évidemment l'être pour les vents les plus violents, sans que les variations mêmes du vent dans le temps présentent un grand intérêt. C'est à ce point de vue que se placent les règlements administratifs. Nous pouvons donc écarter le problème des variations du vent dans le temps. Il suffira de connaître sa vitesse moyenne maxima en un lieu.

Nous sommes alors amené à nous demander, comment, la vitesse du vent étant supposée donnée, la pression exercée sur le hangar pourra être évaluée. C'est là un des deux problèmes fondamentaux de l'hydrodynamique : évaluer l'action d'un fluide en mouvement sur un corps immobile. Il semble que la seule solution rigoureuse consisterait à déterminer pour chaque profil de hangar, la forme des lignes de courant, la fonction de courant, le potentiel des vitesses qui permettraient une représentation mathématique du courant. On pourrait alors calculer la vitesse aux différents points de la surface du hangar et la pression s'en déduirait par le théorème de BERNOULLI. Encore faudrait-il pour cela que le mouvement ne soit pas tourbillonnaire.

Mais, étant données les formes des hangars et leurs dimensions, des tourbillons se produisent nécessairement. Or, les théories aérodynamiques, qui se proposent de calculer les vitesses d'un courant en ses différents points, supposent que ce courant contourne réellement l'obstacle qui s'y trouve placé. C'est ce qui a lieu par exemple pour les ailes d'avions. Il est légitime dans ce cas de chercher une solution aérodynamique en partant d'un cylindre fictif placé dans un courant fluide et en transformant ce profil par des opérations dans le champ complexe. Peu importe que, pour le cylindre initial, il n'y ait pas, dans la réalité, contournement des filets fluides. Il suffit que cette condition soit réalisée pour le profil final, ce qu'on vérifie expérimentalement. L'opération n'en est pas moins légitime puisqu'elle n'est qu'un artifice analytique.

Mais, dans la question qui nous occupe, cette méthode ne peut plus donner aucun résultat. Il s'agit d'obstacle pour lesquels il n'y a pas contournement par les filets fluides. Ceux-ci décollent. Il se produit des mouvements tourbillonnaires fort complexes. Il serait donc vain de vouloir déterminer par le calcul les lignes d'écoulement pour les profils de ce genre. La seule recherche possible est celle des lois *expérimentales* qui permettront d'établir entre la vitesse du vent et la pression qu'il exerce sur une surface donnée, une certaine relation. Il est clair que la forme du corps jouera un rôle important dans cette recherche. Il faudra dès lors, pour chaque type de hangar, expérimenter au tunnel sur un modèle réduit. Grâce à la théorie de la similitude, on pourra établir les résultats désirés pour le modèle en grandeur naturelle. A ce sujet une remarque doit être faite, qui a été signalée par M. ISSENMAN-PILARSKI : considérons trois hangars, H^1 et H^2 , dont les dimensions sont dans le rapport de similitude 2 et H^3 qui a même hauteur que H^2 mais dont la largeur est égale à celle de H^1 . Leurs dimensions respectives sont indiquées dans le tableau suivant :

	H^1	H^2	H^3
hauteur :	h	$2h$	$2h$
largeur :	a	$2a$	a

D'après la loi de similitude, la pression sera la même aux points homologues A et A' sur les parois de H^1 et H^2 . Mais elle ne sera plus la même en A'', de H^3 , situé à la même hauteur que A'. Il faut donc juger critiquable la règle administrative qui commande de calculer la pression à la hauteur h au dessus du sol par la formule :

$$P_0 = \frac{10 + 2,5 h}{20 + h} .$$

La grandeur qui doit intervenir est non pas h mais le rapport $\frac{h}{l}$ de la hauteur à la largeur du hangar, comme l'impose la règle de similitude. Des expériences de EIFFEL, et de nombreux essais postérieurs, confirment cette manière de voir.

Les expériences de EIFFEL ont permis d'établir les quatre lois suivantes :

1° — Au delà d'une limite inférieure, la pression est proportionnelle au carré de la vitesse de l'air et à un coefficient qui dépend de la forme du corps.

2° — Le coefficient est indépendant des dimensions absolues du corps. (Loi de similitude.)

3° — La limite inférieure est fonction de la forme du corps et de ses dimensions. Elle varie de 5 à 20 m/sec. Pour les bâtiments ordinaires elle est de 10 m/sec.

4° — Il y a une limite supérieure de vitesse à partir de laquelle la loi du carré de la vitesse cesse d'être vraie (150 m/sec.).

Les vitesses ordinaires du vent dans nos régions sont de 30 à 50 m/sec.

Ces lois se résument dans la formule :

$$P = K. S. V^2.$$

On pose parfois : $K = K_1 \frac{\hat{c}}{g}$. K_1 a fait l'objet de nombreuses mesures pour un plan frappé normalement (NEWTON, BERNOULLI, CORIOLIS, GRAMMONT, EIFFEL). Pour une surface illimitée (ce qui répond pratiquement au cas du hangar, les autres mesures ayant été faites pour des surfaces de 1 m²) les valeurs trouvées varient entre 1,5 (CORIOLIS) et 1,3 (DUPRÉ).

Pour un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale, la pression est une fonction de α :

$$P_n = P. f(\alpha).$$

De nombreuses formes ont été proposées pour $f(\alpha)$:

DUPRÉ et CORIOLIS avaient trouvé : $f(\alpha) = \sin^2 \alpha$;

$$\text{DUCHEMIN propose} \quad : f(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} ;$$

$$\text{pour HUTTON, on aurait} \quad : f(\alpha) = \sin \alpha^{(1,84 \cos \alpha)} ;$$

$$\text{enfin GRAMMONT donne} \quad : f(\alpha) = \sqrt{\sin \alpha}.$$

Toutes ces formules ont été établies pour des plans : leur variété montre l'incertitude de la solution, même dans ce cas simple.

Pour calculer la pression sur une voûte, la courbe de section par un plan vertical devra être considérée comme la limite d'un polygone inscrit, dont le nombre de côtés croît indéfiniment de façon que chacun d'eux tende vers zéro. La pression sur l'arc envisagé sera alors la somme des pressions élémentaires sur les éléments d'arcs : ceux-ci sont assimilés aux cordes qui les sous-tendent. On appliquera pour chaque élément la formule établie pour le plan et on calculera la pression totale par intégration. Si p_n ds est la pression sur un élément d'arc, la pression totale sera :

$$p = \int_0^s p_n \cdot ds .$$

Sans doute n'est-ce là qu'une approximation : nous avons vu que le problème est en réalité beaucoup plus complexe. Mais ce qui importe surtout, c'est de trouver des formules pratiques, se rapprochant suffisamment de la réalité. Et si, d'une manière absolue, elles ne sont pas inattaquables, elles permettent de comparer les avantages des courbes utilisées dans la pratique.

Quelle est dès lors, en se plaçant à ces deux points de vue, la formule à retenir entre toutes celles qui ont été proposées ?

Nous écarterons d'abord la formule de HUTTON : $f(\alpha) = \sin \alpha (1,84 \cos \alpha)$. Elle introduit dans les calculs une complication inutile. Pour les petits angles elle se rapproche de $f(\alpha) = \sin^2 \alpha$, et pour les angles plus grands, soit de $f(\alpha) = \sin \alpha$, soit de $f(\alpha) = \sqrt{\sin \alpha} = \sin \alpha^{0.5}$.

Pour apprécier les résultats auxquels conduisent les autres formules citées, nous calculerons les pressions sur un arc de chaînette présentant les caractéristiques suivantes, qui se rapprochent de celles du hangar de Montebourg :

Angle aux naissances : 60° ;

Profondeur du hangar : $L = 50$ m. ; flèche : $f = 12$ m.

On calculera les composantes horizontale, et verticale de la pression résultante.

L'équation intrinsèque d'une chaînette de paramètre m est :

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{m}{\cos^2 \alpha}.$$

R est le rayon de courbure et α l'angle de la demi-tangente directe avec la direction positive de ox .

$$1^o \text{ — } \textit{Emploi de } p_n = p \cdot \sin \alpha$$

Les composantes suivant les axes de la pression élémentaire sont :

$$dX_n = -p \cdot ds \cdot \sin^2 \alpha, \quad dY_n = p \cdot ds \cdot \sin \alpha \cos \alpha.$$

Prenons pour variable l'angle α et intégrons de 0 à $\frac{\pi}{3}$:

$$X = -p \cdot L \int_0^{\frac{\pi}{3}} R(\alpha) \sin^2 \alpha \, d\alpha,$$

$$Y = p \cdot L \int_0^{\frac{\pi}{3}} R(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha,$$

Avec les données choisies, on a : $m = f$.

$$|X| = m p L \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \, d\alpha = 0,685 \cdot p L f.$$

$$Y = m p L \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \, d\alpha = 0,693 \cdot p L f.$$

$$2^o. \text{ — } \textit{Emploi de } p_n = p \cdot \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}.$$

$$|X| = 2 m p L \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 \alpha \, d\alpha}{\cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha)} = 0,638 \cdot p L f.$$

$$Y = 2 m p L \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 \alpha \, d\alpha}{\cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha)} = 0,614 \cdot p L f.$$

3° — *Emploi de* $p_n = p \sin^2 \alpha$:

$$|X| = p L f \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 \alpha d \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0,50 \cdot p L f .$$

$$Y = p L f \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 \alpha d \alpha}{\cos \alpha} = 0,450 \cdot p L f .$$

4° — *Emploi de* : $p_n = p \sqrt{\sin \alpha}$.

$$|X| = p L f \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} \alpha d \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0,829 p L f .$$

(Le calcul est un peu plus laborieux ; on intègre par parties et on est conduit à une intégrale elliptique.)

$$Y = p L f \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos \alpha} d \alpha = 0,813 \cdot p L f .$$

(prendre pour nouvelle variable $\sqrt{\sin \alpha} = t$).

Voici, résumés en un tableau, les résultats précédents et les différences absolues et relatives sur les composantes de la pression suivant qu'on emploie la formule $p_n = p \sin \alpha$ ou l'une des autres :

p_n	X	Y	ΔX	$\frac{\Delta X}{X}$	ΔY	$\frac{\Delta Y}{Y}$
$p \cdot \sin \alpha$.	0,685	0,693	0	0	0	0
$p \cdot \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$	0,638	0,614	0,05	$\frac{1}{12}$	0,08	$\frac{1}{8}$
$p \cdot \sin^2 \alpha$.	0,50	0,45	0,18	$\frac{1}{4}$	0,24	$\frac{1}{3}$
$p \cdot \sqrt{\sin \alpha}$.	0,829	0,813	0,14	$\frac{1}{5}$	0,12	$\frac{1}{6}$

Les formules : $p_n = p \sin \alpha$ et $p_n = p \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ occupent donc une position moyenne parmi celles qui ont été proposées. Pour pousser plus loin notre investigation nous allons construire les courbes figuratives des variations de la pression avec l'angle d'incidence, pour les diverses formules indiquées $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

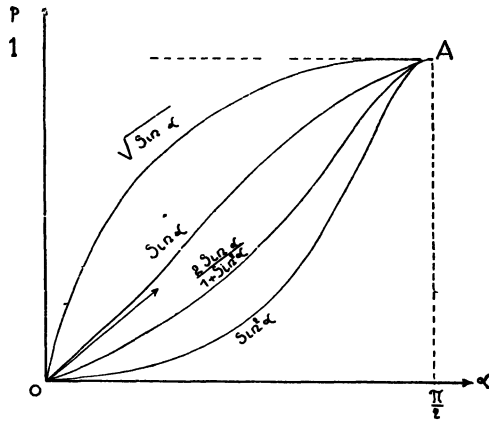


FIG 1

Pour $p_1 = p \sin \alpha$, on a la sinusoïde.

Pour $p_2 = p \cdot \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$, la courbe est au-dessous de la sinusoïde : car $p_1 - p_2 = \sin \alpha \cdot \frac{(\sin \alpha - 1)^2}{1 + \sin^2 \alpha} > 0$. Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ les tangentes sont horizontales.

Pour $p_3 = p \cdot \sin^2 \alpha$, la courbe est au-dessous de la sinusoïde et de la précédente : $p_3 < p_2 < p_1$; pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ les tangentes sont horizontales.

Pour $p_4 = p \sqrt{\sin \alpha}$, la courbe est au-dessus de la sinusoïde ; pour $\alpha = 0$: tangente verticale ; pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$: tangente horizontale.

Représentons alors les variations des différences $p_2 - p_1$, $p_3 - p_1$, $p_4 - p_1$, entre la pression donnée par la formule $p_n = p \sin \alpha$ et celles données par les autres formules, quand l'angle α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

$$D_1 = p_1 - p_2 = \sin \alpha \frac{(\sin \alpha - 1)^2}{1 + \sin^2 \alpha};$$

$$\text{Maximum : } \frac{1}{10}, \quad \text{pour : } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

$$D_2 = p_1 - p_3 = \sin \alpha (1 - \sin \alpha);$$

$$\text{Maximum : } \frac{1}{4}, \quad \text{pour : } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

$$D_3 = p_4 - p_1 = \sqrt{\sin \alpha} - \sin \alpha;$$

$$\text{Maximum : } \frac{1}{4}, \quad \text{pour : } \alpha_0 = 14^\circ 29'.$$

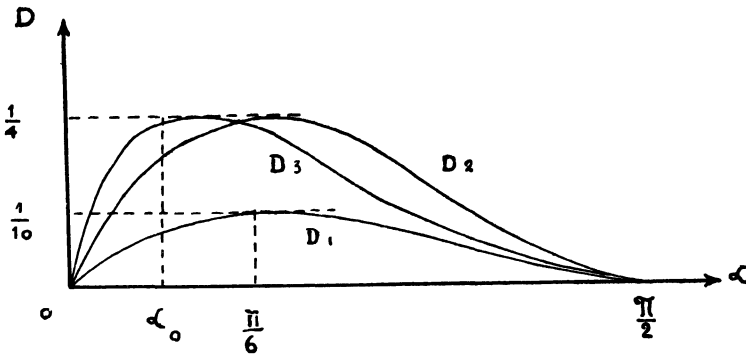


FIG 2

Il résulte de ces remarques que la formule $p_n = p \sin \alpha$ est, une formule moyenne. La formule : $p_n = p \sin^2 \alpha$ est celle qui conduit aux résultats les plus éloignés de la précédente. Elle est très généralement considérée aujourd'hui comme erronée et on la remplace de plus en plus par : $p_n = p \sin \alpha$ qui fut pour la première fois proposée par EULER. Cependant les

règlements administratifs imposent encore à l'ingénieur la formule : $p_n = p \sin^2 \alpha$. L'inconvénient est grave : elle donne en effet des pressions inférieures à celles fournies par les autres formules. On risquerait donc en l'adoptant de sous-estimer les efforts auxquels les voûtes seront soumises. Mais cet inconvénient est peut-être plus théorique que pratique : ces formules empiriques ne doivent être, quelles qu'elles soient, employées qu'avec une marge suffisante de sécurité. Le fait mérite cependant d'être signalé.

Quant à la formule : $p_n = p \sqrt{\sin \alpha}$, elle n'encourt pas le reproche précédent, puisqu'au contraire c'est elle qui conduit aux pressions les plus élevées. Mais on peut critiquer sa forme irrationnelle : elle compliquerait singulièrement les calculs. L'expérience ne l'imposant nullement, elle doit, elle aussi, être écartée.

Il ne reste dès lors que les formules : $p_n = p \sin \alpha$ et $p_n = p \cdot \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ entre lesquelles l'hésitation serait possible. Nous nous rallierons à la première en raison de sa simplicité. Elle a en outre l'avantage d'avoir une signification mathématique précise : si, sur une paroi normale, un courant fluide exerce une pression p , il paraît logique d'admettre que la pression normale sur la paroi inclinée sera la projection de p sur la normale à cette paroi. Or, c'est ce qu'exprime la formule :

$$p_n = p \sin \alpha.$$

Cette interprétation permet de généraliser la formule pour une paroi inclinée d'un angle α sur l'horizontale, et dont la trace horizontale fait l'angle β avec la direction du courant fluide.

On aura :

$$p_n = p \sin \alpha \sin \beta.$$

Pour terminer il nous paraît intéressant de signaler les ordres de grandeur des pressions qui peuvent s'exercer sur les toitures de hangars, ainsi que les vitesses des vents qui les provoquent.

Les prescriptions administratives, édictées par le Service des Travaux Publics, admettent une pression de 120 kgs par m² de surface frappé normalement.

Voici, d'après COULOMB et BORDA, le tableau des vents, tels qu'ils soufflent, en général, dans nos régions, avec leurs appellations, leurs vitesses, et la pression qu'ils exercent sur 1 m² de surface frappé normalement.

Désignation	Vitesse	Pression
A peine sensible	1 m./sec.	0,14 kgs
Brise légère	2 »	0,54 »
Brise	4 »	2,17 »
Bon frais	6 à 9 »	4,87 à 10,97 »
Grand frais	10 à 12 »	13,54 à 19,50 »
Très fort	15 »	30,47 »
Impétueux	20 »	54,16 »
Tempête	24 »	78,00 »
Tempête violente	30 »	122,28 »
Ouragan	36 »	176,96 »
Grand ouragan	45 »	277,87 »

CHAPITRE II

LES PROCÉDÉS EMPLOYÉS POUR LE CALCUL DES PRESSIONS.

Erreurs auxquelles ils conduisent.

Le premier problème que pose l'action du vent sur un hangar est celui de la détermination de la résultante des pressions sur l'arc frappé, en grandeur et en direction. Pour une voûte cylindrique il suffit de raisonner sur un plan de

section vertical : pour obtenir la grandeur de la résultante relative au hangar entier on multipliera le résultat obtenu par la longueur L . Pour simplifier l'écriture nous ne la rétablirons qu'à la fin des calculs.

Jusqu'ici, pour résoudre le problème, les constructeurs, et en particulier M. LOSSIER, pour le hangar de Montebourg, ont adopté les règles suivantes :

1^o — Les pressions ont une résultante normale à la corde sous-tendant le demi-arc frappé.

2^o — Les pressions sont supposées uniformément réparties. Dans le calcul la corde est substituée à l'arc.

3^o — Toute la partie soustraite à l'action du vent est soumise à une pression négative ou succion. On ne commettra pas d'erreur sensible en la négligeant.

Nous ne retiendrons dans ce chapitre que les deux premières règles. Elles paraissent a priori beaucoup trop simplificatrices. Si la complexité du problème de l'action du vent justifie certaines approximations, il paraît exagéré d'adopter sans examen des normes trop simples : elles risquent de conduire à des résultats trop éloignés de la réalité, à surestimer les efforts, et ainsi à effectuer des dépenses inutiles de métal et de béton. Nous essaierons ici de préciser les erreurs auxquelles donnent lieu ces méthodes et de leur substituer de nouveaux procédés.

Nous effectuerons les calculs en prenant comme courbes les *paraboloïques primaires* dont l'emploi a été préconisé par M. TURRIÈRE, c'est-à-dire les courbes de Ribaucour d'indice — 3, — 2, — 1, 0, 1 et 2.

L'équation intrinsèque générale de ces courbes est :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0 .$$

Leurs caractéristiques sont résumées par le tableau suivant (1) :

(1) Thèse de S.A.R. Le Prince SISOWATH Youtévong (p. 28).

K	R	Courbes
— 3	$R_0 \cos^2 \alpha$	développante d'astroïde
— 2	$R_0 \cos \alpha$	cycloïde
— 1	R_0	Cercle
0	$\frac{R_0}{\cos \alpha}$	chaînette d'égale résistance
1	$\frac{R_0}{\cos^2 \alpha}$	chaînette
2	$\frac{R_0}{\cos^3 \alpha}$	parabole

Le choix comme variable de l'angle α de la tangente avec l'horizontale est indiqué puisqu'il intervient dans les formules donnant les composantes de la pression du vent ; simultanément, il y aura parfois intérêt à introduire dans les calculs l'argument u associé à α par les formules connues :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{th} \frac{u}{2}, \quad \sin \alpha = \operatorname{th} u, \quad \cos \alpha \operatorname{ch} u = 1.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sh} u, \quad \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = du, \quad \frac{du}{\operatorname{ch} u} = d\alpha.$$

Ceci posé, on a vu que les composantes de la pression élémentaire sont :

$$dX = -p \cdot ds \cdot \sin^2 \alpha, \quad dY = p \cdot ds \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

avec : $p = 150$ kgs par m^2 , suivant les règlements administratifs.

Une intégration donne les composantes de la pression résultante sur l'arc frappé :

$$X = -p \cdot \int_0^{\alpha_0} R(\alpha) \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha,$$

$$Y = p \cdot \int_0^{\alpha_0} R(\alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha,$$

α_0 étant l'angle aux naissances.

On désignera par P la résultante des pressions et par β l'angle qu'elle fait avec l'horizontale.

Pour les courbes de Ribaucour :

$$X = - p R_o \int_0^{\alpha_0} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^{k+1} \alpha} \cdot d \alpha ,$$

$$Y = p R_o \int_0^{\alpha_0} \frac{\sin \alpha \, d \alpha}{\cos^k \alpha} .$$

La deuxième intégrale se calcule immédiatement :

$$Y = p R_o \frac{1}{1 - k} \left(\frac{1}{\cos^{k-1} \alpha_0} - 1 \right) .$$

Pour calculer X , on introduit l'argument u :

$$X = p R_o \int_0^{u_0} (\operatorname{ch}^k u - \operatorname{ch}^{k-2} u) \, du .$$

Si, $k = 2p + 1$, on appliquera la formule :

$$\int_0^u \operatorname{ch}^{2p+1} u \, du = \operatorname{sh} u + \frac{C_p^1}{3} \operatorname{sh}^3 u + \dots + \frac{\operatorname{sh}^{2p+1} u}{2p+1} .$$

Si, $k = 2p$:

$$\int_0^u \operatorname{ch}^{2p} u \, du = \frac{1}{2^{p-1}} \left[\frac{\operatorname{sh} 2p u}{2p} + \frac{C_{\frac{1}{2}p}^1}{2p-2} \operatorname{sh} (2p-2) u + \dots + \frac{C_{\frac{1}{2}p}^p}{2} u \right] .$$

On voit que, pour les courbes de Ribaucour, la pression normale pourra toujours être calculée par fonctions élémentaires et il en sera de même toutes les fois que l'équation intrinsèque de la courbe sera de la forme :

$$R(\alpha) = F(\sin \alpha, \cos \alpha) ,$$

où F est fonction rationnelle de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

L'intégration est aussi possible par fonctions élémentaires pour les *courbes de direction de Laguerre* (1), pour lesquelles $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ et ds s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre t . On aura avantage à utiliser ces types de courbe.

(1) Thèse Prince SISOWATH Youtévong (p. 21).

Nous effectuerons les calculs numériques sur les données suivantes, qui se rapprochent de celles du hangar de Montebourg :

flèche : $f = 12$ m. ; longueur L : 50 m. ;

angle aux naissances : $\alpha_0 = 60^\circ$.

Nous avons fait les calculs pour les paraboloïques primaires et nous résumons les résultats dans un tableau où on trouvera indiqué les erreurs absolues ou relatives auxquelles conduit le calcul de la pression par la méthode de substitution de la corde à l'arc. Les premiers chiffres indiqués sont ceux donnés par le calcul direct, les seconds par le calcul au moyen de la corde. (Voir tableau p. 30).

Ce tableau montre que, d'une façon générale, l'erreur sur la grandeur de la résultante est de 3 %. Elle est évidemment faible et la simplification qu'entraîne la substitution de la corde à l'arc pourrait faire accepter cette erreur. Mais pour les projections de la résultante, les erreurs relatives sont graves : elles varient, en gros, de 10 à 30 %. Les erreurs absolues sont plus fortes pour la composante verticale, exception faite pour la développante d'astroïde. On trouve pour la direction de la résultante une erreur relative assez grave de 15 % à 20 %. On verra ultérieurement, lors de l'étude du moment de renversement, l'importance de cette remarque.

Cette première étude permet donc déjà de formuler une critique contre la méthode employée d'habitude : les calculs directs sont peu compliqués ; ils ne comportent que des, calculs d'intégrales où interviennent seules des fonctions élémentaires. Ils apportent une précision appréciable. Nous estimons par suite, que rien ne justifie l'emploi d'hypothèses trop simplificatrices et le rejet des courbes.

Nous n'avons, jusqu'ici, envisagé comme courbes d'intrados, que les paraboloïques primaires qui, en fait, sont les plus employées dans la pratique. Il est intéressant d'examiner si, d'autres courbes conduiraient aux mêmes résultats. Le prince SISOWATH YOUTÉVONG a signalé (1), suivant les principes posés

(1) Thèse Prince SISOWATH Youtévong (p. 85).

TABLEAU RÉSUMÉ

Courbes	$\frac{X}{pLf}$	$\frac{\Delta X}{pLf}$	$\frac{\Delta X}{X}$	$\frac{Y}{pLf}$	$\frac{\Delta Y}{pLf}$	$\frac{\Delta Y}{Y}$	$\frac{P}{pLf}$	$\frac{\Delta P}{P}$	β	$\Delta\beta$	$\frac{\Delta\beta}{\beta}$
Parabole	0,710	$\frac{6}{100}$	$\frac{6}{71}$	0,660	$\frac{9}{100}$	$\frac{9}{66}$	$\frac{0,969}{1}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{42^{\circ} 59'}{49^{\circ} 4'}$	$6^{\circ} 5'$	$\frac{6}{43}$
	0,655			0,755							
Chainette ordinaire	0,685	$\frac{7}{100}$	$\frac{7}{68}$	0,693	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{69}$	$\frac{0,975}{1}$	$\frac{2,5}{100}$	$\frac{45^{\circ} 19'}{52^{\circ} 47'}$	$7^{\circ} 28'$	$\frac{7}{45}$
	0,612			0,790							
Chainette d'égale résistance	0,660	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{66}$	0,720	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{72}$	$\frac{0,976}{1}$	$\frac{2,5}{100}$	$\frac{47^{\circ} 26'}{56^{\circ} 30'}$	$9^{\circ} 4'$	$\frac{9}{47}$
	0,562			0,825							
Cercle	0,614	$\frac{11}{100}$	$\frac{11}{61}$	0,750	$\frac{11}{100}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{0,969}{1}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{50^{\circ} 41'}{60^{\circ}}$	$9^{\circ} 19'$	$\frac{9}{50}$
	0,500			0,866							
Cycloïde	0,577	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{57}$	0,777	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{77}$	$\frac{0,968}{1}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{53^{\circ} 25'}{63^{\circ} 7'}$	$9^{\circ} 42'$	$\frac{9}{53}$
	0,452			0,890							
Développante d'Astroïde	0,560	$\frac{16}{100}$	$\frac{16}{56}$	0,790	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{79}$	$\frac{0,970}{1}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{54^{\circ} 44'}{66^{\circ} 11'}$	$11^{\circ} 27'$	$\frac{11}{54}$
	0,403			0,915							

par M. TURRIÈRE, l'emploi des courbes de Ribaucour dites élastiques et contractiles. Elles s'obtiennent par l'addition (au sens proposé par l'abbé d'Aoust) de deux courbes de Ribaucour ordinaires et successives. Leur équation naturelle générale est :

$$R = m \cos^{-k-1} \alpha + m \mu \cdot \cos^{-k-2} \alpha ,$$

où m et μ sont deux constantes.

Nous avons effectué le calcul pour la chaînette ($k = 1$).

Posant : $\mu = 2c$ et $\cos \alpha = \frac{1}{\text{ch } \varphi}$, on a :

$$R = m \text{ch}^2 \varphi (1 + 2c \text{ch } \varphi) .$$

Les équations paramétriques de la courbe sont :

$$x = m (\varphi + 2c \text{sh } \varphi) , \quad y = m [(\text{ch } \varphi - 1) + c (\text{ch}^2 \varphi - 1)] .$$

Cette courbe est le lieu du milieu d'un segment dont les extrémités décrivent une parabole et une chaînette, de façon que les pentes des tangentes aux deux courbes en des points associés soient égales.

Pour déterminer le nouveau paramètre c nous supposons donné le surbaissement : $\frac{f}{a} = \frac{1}{2}$. On a alors : $c = -0,269$; la chaînette est contractile.

$$X = -m p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2c}{\cos \alpha} \right) d\alpha = -0,559 \text{ p L f} .$$

$$Y = m p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{2c}{\cos \alpha} \right) d\alpha = 0,800 \text{ p L f} .$$

Par la méthode de la corde on trouve :

$$X = -0,447 \text{ p L f} , \quad \frac{\Delta X}{X} = \frac{11}{100} .$$

$$Y = 0,897 \text{ p L f} , \quad \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{9}{100} .$$

Si nous appelons P la pression résultante, β son inclinaison sur l'horizontale calculée directement, et β' cette même inclinaison calculée par la méthode de la corde :

$$\begin{aligned}
 P &= 0,983 \, p \, L \, f, & \frac{\Delta P}{p \, L \, f} &= \frac{2}{100}. \\
 \beta &= 55^\circ \, 8' & \frac{\Delta \beta}{\beta} &= \frac{1}{7}. \\
 \beta' &= 63^\circ \, 26'
 \end{aligned}$$

Les résultats sont donc analogues à ceux qui ont été formulés, comme il fallait s'y attendre, puisque ces courbes ne sont que des additions de paraboloïques primaires.

D'autres courbes d'intrados ont encore été proposées. Pour beaucoup d'entre elles le calcul des pressions introduit des fonctions elliptiques : ces courbes sont à rejeter. Pour un problème posé dans des conditions aussi discutables que celui qui nous occupe il est essentiel de ne pas compliquer l'analyse des calculs : il importe de se rapprocher de la réalité, tout en n'introduisant pas de vaines complications. Le choix des courbes d'intrados qui s'offre au constructeur est assez vaste pour qu'il puisse éviter ces calculs ardu et pénibles. C'est ainsi que nous écarterons l'arche elliptique, la chaînette projetée ou caténoïde, l'élastique harmonique ($R \sqrt{\cos \alpha} = R_0$) employée par VILLARCEAU.

Pour terminer nous examinerons encore la parabole semicubique. En effet le docteur AMANS a rencontré, en 1923, dans ses recherches sur les turbines aériennes, une courbe empirique qu'il appelle *griffoïde* et qui se rapproche de la parabole semicubique. Celle-ci pourrait donc présenter un intérêt du point de vue aérodynamique. Ses équations paramétriques sont :

$$x = \frac{1}{K} t^2, \quad y = \frac{1}{K} t^3.$$

La courbe a un rebroussement à l'origine avec tangente horizontale. Elle peut être employée comme courbe de voûte en prenant la branche inférieure et sa symétrique par rapport à oy.

Le paramètre t est lié à la pente de la tangente par la relation : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} t$.

$$X = \frac{8p}{9k} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha = 0,769 p L f, \quad \frac{\Delta X}{X} = \frac{1}{100}.$$

$$\text{avec : } f = \frac{8\sqrt{3}}{9k}.$$

$$Y = \frac{8p}{9k} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0,620 p L f, \quad \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{3}{100}.$$

$$P = 0,987 p L f, \quad \frac{\Delta P}{p L f} = \frac{2}{100}.$$

$$\beta = 5107', \quad \frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{1}{5}.$$

On obtient donc une meilleure approximation pour les composantes qu'avec les paraboliques primaires. Mais l'erreur sur l'inclinaison reste très sensible.

L'emploi de nouvelles courbes n'infirme donc pas nos conclusions antérieures, qui peuvent leur être étendues.

CHAPITRE III

ESSAI DE CLASSEMENT

DES PARABOLOIQUES PRIMAIRES

AU POINT DE VUE DE L'ACTION DU VENT.

Il paraît normal de se demander quelle est la meilleure courbe au point de vue de l'action du vent parmi celles qui ont été envisagées. Nous ne pourrions répondre entièrement à cette question qu'après l'étude des moments de renversement qui jouent en la matière le rôle principal. Mais il est intéressant de présenter, dès maintenant, certaines remarques.

Une constatation fondamentale résulte de l'examen du tableau des valeurs de X, Y et β : X est une fonction croissante de l'indice k des courbes de Ribaucour, Y et β des fonctions

décroissantes, la flèche f et l'inclinaison aux naissances α_0 étant données. Nous étudierons d'abord, dans ces conditions, les variations du rayon de courbure à la clef R_0 :

$$R_0 = f \cdot \frac{k \cos^k \alpha_0}{1 - \cos^k \alpha_0} .$$

Posons : $\cos \alpha_0 = u$,

$$\frac{d R_0}{d k} = \frac{f u^k}{(1 - u^k)^2} \cdot (1 + L u^k - u^k) .$$

Construisons les courbes représentatives des fonctions L, x et $x - 1$, où $x = u^k$. On voit qu'on a constamment : $x - 1 > Lx$, c'est-à-dire : $1 + L u^k - u^k < 0$. Par suite $\frac{dR_0}{dk}$ est négatif et R_0 est fonction décroissante de k , Voici un tableau donnant les valeurs de R_0 pour l'exemple numérique choisi :

Courbes	K	R_0
Parabole	2	$\frac{2 f}{3}$
Chaînette ordinaire	1	f
Chaînette d'égale résistance	0	$\frac{f}{\text{Log } 2}$
Cercle ,	— 1	$2 f$
Cycloïde	— 2	$\frac{8 f}{3}$
Développante d'Astroïde	— 3	$\frac{24 f}{7}$

Les variations de la composante Y peuvent s'étudier directement :

$$Y = \frac{R_0}{(k-1) \cos^{k-1} \alpha_0}.$$

Posant $\cos \alpha_0 = u$, et remplaçant R_0 par sa valeur, on a :

$$Y = f \cdot u \cdot \frac{k}{(k-1)(1-u^k)},$$

$$\frac{dY}{dk} = \frac{f \cdot u}{(k-1)^2 (1-u^k)^2} \cdot \left[k(k-1) u^k L u - (1-u^k) \right].$$

Considérons les courbes représentatives des fonctions :

$$y_1 = k(k-1) L u \quad (\text{parabole d'axe vertical})$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{u} \right)^k - 1 \quad (\text{fonction puissance}).$$

Leur tangente commune à l'origine a pour pente $L u$, et on a constamment : $y_2 > y_1$ c'est-à-dire : $k(k-1) L u < \frac{1-u^k}{u^k}$;

donc : $\frac{dY}{dk} < 0$, et Y est fonction décroissante de k.

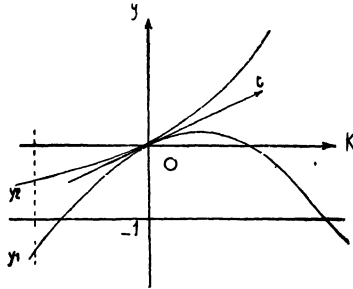


FIG. 3

La forme non intégrée de la composante X ne permet pas d'étudier directement ses variations. Mais on peut raisonner par approximation : Quand k décroît, f restant constante, R_0 croît, donc aussi la demi-portée a . Si nous substituons la

corde à l'arc, l'inclinaison de la résultante des pressions a pour valeur approchée :

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{a}{f}.$$

Donc β' est fonction décroissante de k .

Et la valeur approchée de X étant : $X = p L f \sin \beta'$, X est aussi fonction décroissante de k . La substitution de la corde à l'arc est ici justifiée car il n'est pas question de valeurs absolues des composantes mais simplement d'un sens de variation : or celui-ci est évidemment le même pour la valeur approchée et la valeur vraie.

Cette variation continue des composantes de la pression résultante est un fait capital : elle montre bien l'intérêt de l'emploi des paraboliques primaires comme courbes d'intrados. Elles forment une famille de courbes présentant des liens étroits et on passe de l'une à l'autre d'une façon continue. Remarquons d'autre part que les différences entre les valeurs des composantes X et Y pour deux courbes successives sont faibles et ne dépassent jamais $\frac{5}{100}$. Dès lors pour une courbe d'intrados

quelconque, il suffira de l'insérer entre deux courbes successives de la famille : on pourra ainsi calculer simplement, et avec une meilleure approximation qu'en substituant la corde à l'arc, les valeurs de la pression. Ce procédé est d'autant plus indiqué, que, dans la pratique, les courbes d'intrados sont toujours voisines des courbes de Ribaucour d'indice k comprise entre -3 et 3 .

La considération des paraboliques primaires d'axe vertical, osculatrices à une courbe donnée, qui ont déjà été signalées par le Prince SISOWATH (1), pourra être très utile. Soient les équations de cette parabolique :

$$X = x_0 + p \int_0^u \operatorname{ch}^{k-1} u \, du, \quad Y = y_0 + p \frac{\operatorname{ch}^k u}{k},$$

(1) Thèse Prince SISOWATH YOUTÉVONG, p. 179.

où x_0 et y_0 sont les coordonnées de son sommet. La condition d'osculation s'écrira :

$$x = x_0 + p \int_0^\varphi \text{ch}^{k-1} u \, du, \quad y = y_0 + p \frac{\text{ch}^k \varphi}{k},$$

avec : $\text{sh} \varphi = \text{tg} \alpha$, $p = R \cos^{k+1} \alpha$, et α étant l'angle de la tangente à la courbe envisagée avec ox , au point d'osculation.

On a donc :

$$X = x + p \int_\varphi^u \text{ch}^{k-1} u \, du, \quad Y = y + \frac{p}{k} (\text{ch}^k u - \text{ch}^k \varphi),$$

où x et y sont exprimés en fonction de α et φ lié à α par la relation habituelle : $\text{sh} \varphi = \text{tg} \alpha$.

Appliquons ces notions au problème qui nous occupe : soit un arc de courbe AB . En A : $R = R_1$, $\alpha = \alpha_1$; en B : $R = R_2$, $\alpha = \alpha_2$.

Considérons la paraboloïque d'indice k osculatrice en A à AB . La condition d'osculation détermine p . La présence de k permet d'imposer une autre condition.

1° — La paraboloïque passera par B :

$$x_2 = x_1 + p \int_{\varphi_1}^u \text{ch}^{k-1} u \, du, \quad y_2 = y_1 + \frac{p}{k} (\text{ch}^k u - \text{ch}^k \varphi_1).$$

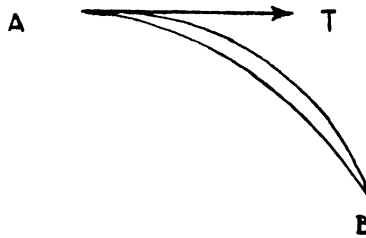


FIG. 4

2° — Au point où la paraboloïque coupe l'horizontale, les valeurs de α sont les mêmes sur les deux courbes.

$$y_2 = y_1 + \frac{p}{k} (\text{ch}^k \varphi_2 - \text{ch}^k \varphi_1).$$

φ_2 et φ_1 étant les arguments associés à α_2 et α_1 .

3° — Au point où les tangentes sont également inclinées les courbes ont même rayon de courbure :

$$R_1 \cos^{k+1} \alpha_1 = R_2 \cos^{k+1} \alpha_2 ,$$

formule qui donne k par logarithme :

$$k + 1 = \frac{\log R_2 - \log R_1}{\log \cos \alpha_1 - \log \cos \alpha_2} .$$

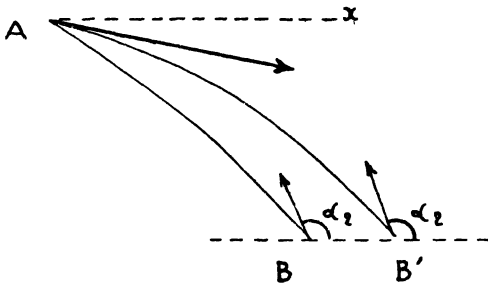


FIG. 5

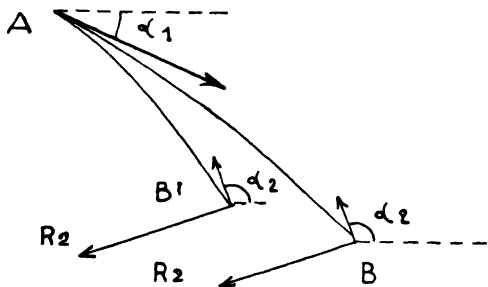


FIG. 6

Le paramètre k sera déterminé par l'une de ces trois conditions. Supposons qu'on ait trouvé k compris entre 2 valeurs entières k' et k'' : la courbe osculatrice à l'arc donné sera comprise entre les courbes de Ribaucour d'indice k' et k''. Si X', X'', Y' et Y'' sont les composantes de la pression pour ces dernières, on pourra prendre comme valeurs approchées pour l'arc donné :

$$X = \frac{X' + X''}{2} , \quad Y = \frac{Y' + Y''}{2} .$$

Nous avons appliqué cette méthode au bel ouvrage construit à Istres sur les plans de M. FREYSSINET. Ses caractéristiques sont les suivantes : gabarit d'ouverture : largeur, 36 m. ; hauteur, 5 m. 5. La courbe d'intrados est une courbe à 7 centres de 46 m. de portée et de 11 m. 5 de flèche. Les arcs qui la définissent ont pour caractéristiques en partant de la clef :

Développement :	8 m. 8	6 m.	4 m. 8	6 m. 5
Rayon :	28 m. 75	30 m. 6	28 m. 75	25 m.
Ouverture :	17° 32'	11° 14'	9° 31'	14° 54'.

L'angle aux naissances est : $\alpha = 53^{\circ} 12'$.

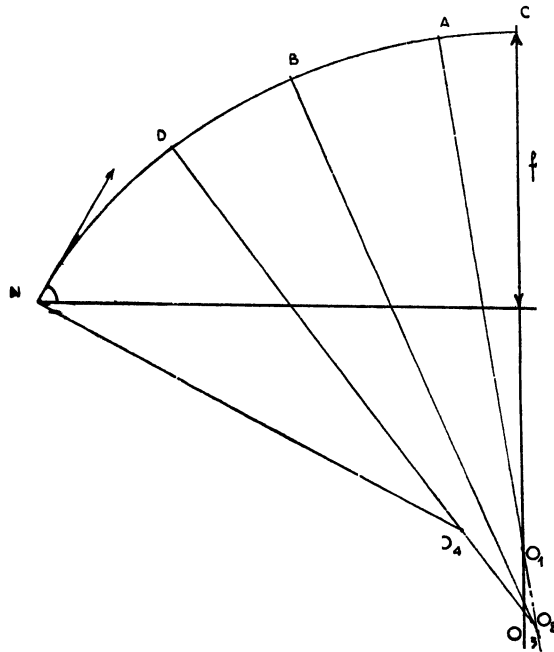


FIG. 7

Courbe à 7 centres du hangar d'Istres.

Les arcs AB, AC, BD, DN sont des arcs de cercle.

Appliquons la formule :

$$k + 1 = \frac{\log R_2 - \log R_1}{\log \cos \alpha_1 - \log \cos \alpha_2} .$$

$$k + 1 = -0,27 .$$

$$-2 < k < -1 .$$

La paraboloïque osculatrice est comprise entre la cycloïde et le cercle. Les formules précédemment établies pour ces courbes donnent, avec les conditions actuelles ($R_0 = 28 \text{ m. } 75$, $f = 11 \text{ m. } 5$) :

$$X' = 0,560 \text{ p L f} ; Y' = 0,800 \text{ p L f} ;$$

$$X'' = 0,595 \text{ p L f} ; Y'' = 0,757 \text{ p L f} .$$

$$X = \frac{X' + X''}{2} = 0,577 \cdot \text{p L f} , \quad Y = \frac{Y' + Y''}{2} = 0,778 \cdot \text{p L f} .$$

En calculant directement sur les arcs de la courbe à 7 centres, on trouve :

$$X = 0,522 \cdot \text{p L f} . \quad Y = 0,769 \cdot \text{p L f} .$$

$$\text{Donc : } \Delta X = \frac{55}{1000} \text{ p L f} , \quad \Delta Y = \frac{9}{1000} \text{ p L f} .$$

En substituant la corde à l'arc, on trouve :

$$X = 0,447 \cdot \text{p L f} . \quad Y = 0,894 \cdot \text{p L f} .$$

$$\Delta X = \frac{75}{1000} \text{ p L f} , \quad \Delta Y = \frac{125}{1000} \text{ p L f} .$$

Pour l'inclinaison, la valeur exacte est : $\beta = 55^\circ 50'$.

La méthode d'osculation donne : $\beta = 53^\circ 26'$ $\Delta \beta = 2^\circ 24'$.

La méthode de substitution de la corde : $\beta = 63^\circ 27'$ $\Delta \beta = 10^\circ 1'$.

L'approximation est donc bien meilleure. On conviendra que de tels résultats justifient des calculs peut-être un peu plus longs, mais dont la complication n'est pas telle qu'elle neutralise leurs avantages évidents.

Afin de faciliter ces calculs, voici les expressions de X , Y et de $\text{tg } \beta = \frac{Y}{X}$ lorsque la flèche f et l'inclinaison aux naissances sont données, pour les différentes courbes de Ribaucour utilisées :

Courbes	K	$\frac{X}{f}$	$\frac{Y}{f}$	$\operatorname{tg} \beta$
Parabole	2	$\frac{\operatorname{sh} u \operatorname{chu} - u}{\operatorname{sh}^2 u}$	$\frac{2 \operatorname{chu} - 1}{\operatorname{sh}^2 u}$	$\frac{2 \operatorname{chu} - 1}{\operatorname{sh} u \operatorname{chu} - u}$
Chaînette	1	$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{\operatorname{chu} - 1}$	$\frac{\operatorname{Log} \cos \alpha }{1 - \operatorname{ch} u}$	$\frac{\operatorname{Log} \cos \alpha }{\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$
Chaînette d'égale résistance	0	$\frac{u - \operatorname{thu}}{\operatorname{Log} \operatorname{chu}}$	$\frac{\cos \alpha - 1}{\operatorname{Log} \cos \alpha }$	$\frac{1 - \cos \alpha}{u - \operatorname{thu}}$
Cercle	— 1	$\frac{2 \alpha - \sin 2 \alpha}{4 (1 - \cos \alpha)}$	$\frac{\sin^2 \alpha}{2 (1 - \cos \alpha)}$	$\frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \alpha - \sin 2 \alpha}$
Cycloïde	— 2	$\frac{4 \sin^3 \alpha}{3 (1 - \cos 2 \alpha)}$	$\frac{4 (1 - \cos^3 \alpha)}{3 (1 - \cos 2 \alpha)}$	$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha}$
Développante d'astroïde	— 3	$\frac{3 (4 \alpha - \sin 4 \alpha)}{32 (1 - \cos^3 \alpha)}$	$\frac{3 (1 - \cos^4 \alpha)}{4 (1 - \cos^3 \alpha)}$	$\frac{8 (1 - \cos^4 \alpha)}{4 \alpha - \sin 4 \alpha}$

Il est possible de donner une autre interprétation de cette méthode de calcul.

Les formules : $X = \frac{X_1 + X_2}{2}$, $Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$, sont en effet équivalentes à :

$$X = p \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \alpha \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right) d \alpha ,$$

$$Y = p \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right) d \alpha .$$

On prend donc, pour X et Y, les valeurs qu'elles auraient si on envisageait la courbe définie par :

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} .$$

Cette courbe est une courbe de Ribaucour élastique : c'est le lieu du milieu d'un segment dont les extrémités décrivent les courbes d'indice k et $k + 1$ de façon qu'en des points correspondants, les tangentes soient parallèles. La méthode proposée revient donc à substituer à l'arc réel un arc de courbe de Ribaucour élastique, osculatrice à la clef.

Ce résultat repose sur la théorie de l'addition des courbes présentée par l'abbé d'Aoust, et mise à la base de la théorie des paraboloïques élastiques.

Dans l'exemple du hangar d'Istres, la courbe est une cycloïde élastique, qui est d'ailleurs une parallèle de cycloïde.

Nous allons nous proposer maintenant d'étudier le lien qui peut exister entre l'indice de la courbe et l'erreur occasionnée par la substitution de la corde à l'arc. Pour cela nous étudierons successivement le rayon de courbure moyen et la courbure moyenne, puis la flèche caractéristique de l'arc.

I. — Rayon de courbure moyen. Courbure moyenne.

On a aperçu dans les pages précédentes l'importance de la courbure dans les questions qui nous occupent.

On appelle rayon de courbure moyen d'un arc l'expression :

$$\rho = \frac{1}{u - u_0} \int_{u_0}^u R \, du ,$$

u étant le paramètre de représentation de cet arc.

On appelle courbure moyenne l'expression :

$$\varphi = \frac{1}{u - u_0} \int_{u_0}^u \frac{1}{R} \, du .$$

Pour les courbes de Ribaucour on a donc :

$$\rho = \frac{R_0}{u} \int_0^u \operatorname{ch}^{k+1} u. \, du, \quad \frac{d\rho}{dk} = \frac{R_0}{u} \int_0^u \operatorname{ch}^{k+1} u \operatorname{Log} \operatorname{ch} u. \, du.$$

Tous les éléments de l'intégrale sont, ainsi que u , positifs. Donc $\frac{d\rho}{dk}$ est positif : le rayon de courbure moyen est une fonction croissante du paramètre k .

Pour la courbure moyenne, on a :

$$\varphi = \frac{1}{R_0} u \int_0^u \operatorname{ch}^{-(k+1)} u \, du = \frac{1}{R_0} \alpha \int_0^\alpha \cos^{k+1} \alpha \, d\alpha .$$

$$\frac{d\varphi}{dk} = \frac{1}{R_0} \alpha \int_0^\alpha \cos^{k+1} \alpha \, \operatorname{Log} \cos \alpha \, d\alpha .$$

Les éléments de l'intégrale sont négatifs : $\frac{d\varphi}{dk}$ est négatif. La courbure moyenne est fonction décroissante de k .

On constate alors que :

1^o) La composante X croît, la composante Y et l'inclinaison β décroissent quand le rayon de courbure moyen de l'arc croît. On aperçoit ainsi un lien entre les variations de la pression et la courbure de la courbe.

2^o) La courbure moyenne étant fonction décroissante de k , l'arc se rapproche d'autant plus d'une droite que k est plus grand : l'erreur occasionnée par la méthode de la corde sera d'autant plus faible. Elle est minima pour la parabole, ce qui confirme et explique les résultats antérieurs.

II. — Étude de la flèche.

Elle va nous conduire à des résultats analogues. La notion de flèche a été précisée par M. TURRIÈRE dans ses études sur les câbles aériens. La flèche en un point M d'un arc est la différence des ordonnées entre ce point de l'arc et le point correspondant de la corde.

La flèche caractéristique est la valeur maximum de la flèche ; au point correspondant de l'arc la tangente est

parallèle à la corde. Si H est la projection du point M sur la corde, on a en tout point :

$$MH = e = d \cdot \cos \beta,$$

où d représente la flèche en un point ; e peut être appelé « l'épaisseur » de l'arc ; β étant constant, e sera maximum au même point que d.

Voici le tableau résumé des valeurs de la flèche caractéristique et de l'épaisseur maximum, pour les paraboliques primaires, en prenant les données : $f = 12$ m., $\alpha_0 = 60^\circ$, déjà utilisées.

Courbes	K	d_M	e_M
Parabole	2	3 m. 004	2 m. 26
Chaînette	1	3 m. 08	2 m. 35
Chaînette d'égale résistance ...	0	3 m. 60	2 m. 99
Cercle	— 1	3 m. 71	3 m. 21
Cycloïde	— 2	3 m. 8	3 m. 38
Développante d'astroïde	— 3	3 m. 9	3 m. 56

On voit donc que la flèche et l'épaisseur augmentent quand k diminue. La parabole est la courbe qui se rapproche le plus

de sa corde, la développante d'astroïde celle qui s'en rapproche le moins. C'est pour la première que l'erreur du calcul par substitution de la corde sera la plus faible ; c'est pour la seconde qu'elle sera la plus forte.

Pour terminer ce chapitre, nous examinerons encore deux règles qui sont formulées par le colonel ESPITALIER dans son « Cours de Béton armé ».

Première règle : C'est une règle d'expérience, d'après laquelle la hauteur de la résultante (autrement dit la composante verticale) est égale à la moitié de la hauteur frappée.

Il est clair que cette approximation est assez grossière : la valeur de Y dépend de la nature de la courbe d'intrados, et de l'inclinaison aux naissances, pour une flèche donnée. Les valeurs que nous avons trouvées pour Y oscillent entre 0,6 et 0,8. Écartons donc cette règle empirique.

Deuxième règle : L'expérience montre que les toitures à faible pente sont aspirées et non refoulées par le vent ce qui augmente la stabilité de l'ouvrage. Cela revient à dire que $\frac{Y}{X}$ est plus grand pour les pentes faibles : le vent tend à écraser l'ouvrage plutôt qu'à le déporter. Nous avons représenté par des courbes les variations de X , Y et $\frac{Y}{X}$ en fonction de α_0 , la flèche étant donnée, pour les diverses paraboloïques primaires, Dans tous les cas, on trouve que X est fonction croissante de α , Y et $\frac{Y}{X}$ fonctions décroissantes de α . Un fait, cependant doit être signalé : pour $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, X prend la valeur $p L f$ pour les trois premières courbes de la famille ($k = 2$, $k = 1$, $k = 0$) et pour les autres on a :

Cercle	: $X = 4 p L f$.
Cycloïde	: $X = 3 p L f$.
Développante d'astroïde	: $X = 16 p L f$.

Cela tient à ce que, pour les trois premières, l'angle aux naissances ne peut être égal à $\frac{\pi}{2}$ que si la portée est nulle : on retrouve alors la formule de la pression sur un plan. Au contraire, pour les trois dernières, l'angle aux naissances peut être égal à $\frac{\pi}{2}$. On peut ainsi établir une distinction dans la famille des paraboliques suivant que les courbes peuvent ou non être utilisées pour des arcs à retombées verticales.

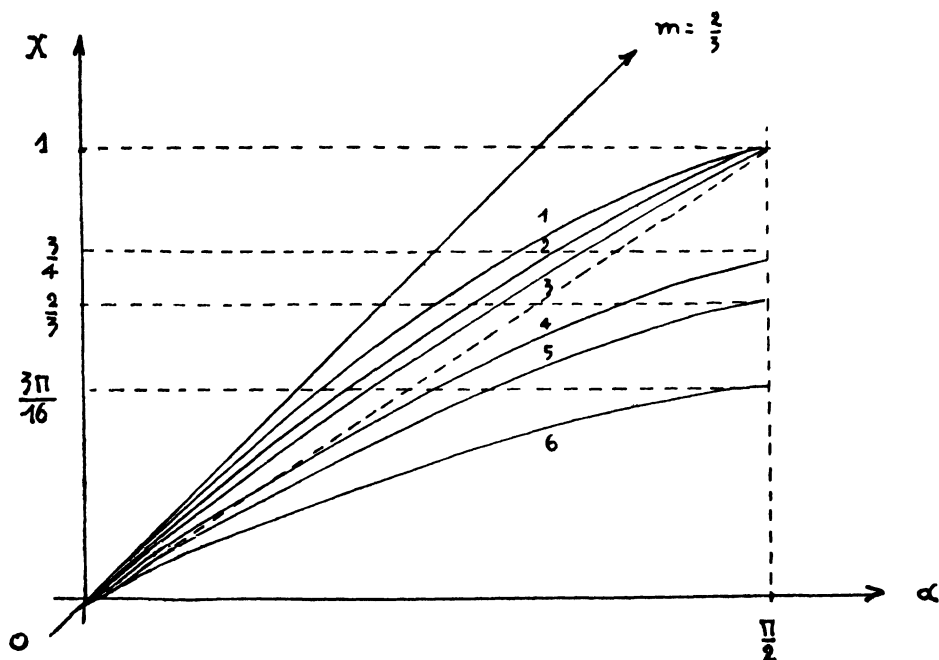


FIG. 8

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------|
| 1 = Parabole. | 4 = Cercle. |
| 2 = Chaînette. | 5 = Cycloïde. |
| 3 = Chaînette d'égale résistance. | 6 = Développante d'astroïde. |

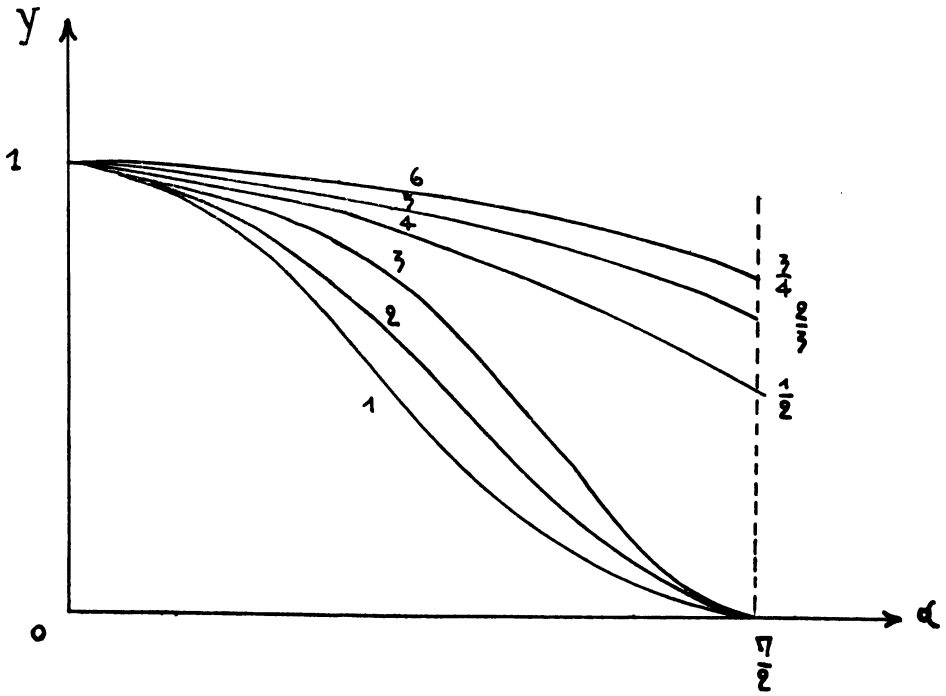


FIG. 9

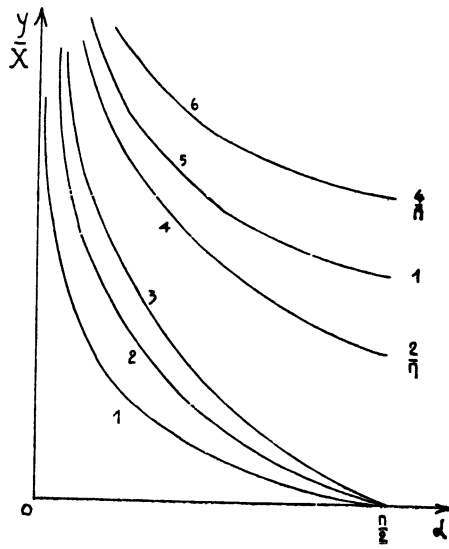


FIG. 10

L'examen de ces courbes confirme le résultat expérimental cité par M. ESPITALIER : pour les toitures à faible pente $\frac{Y}{X}$ est voisin de l'infini. L'effort vertical de poussée est plus grand que l'effort horizontal de déportement. L'édifice devra présenter une résistance suffisante à l'écrasement, mais il risquera moins d'être déporté.

CHAPITRE IV

NOUVEAUX EFFETS DE L'ACTION DU VENT.

Les règlements administratifs prescrivent de prendre la direction du vent inclinée de 10^0 sur l'horizontale. Ce sont les conséquences et les fondements de cette règle que nous examinerons d'abord.

Les conséquences dans les calculs seraient de deux sortes :

1^o) On doit remplacer la formule : $p_n = p \sin \alpha$ par :

$$p_n = p \sin (\alpha + 10^0).$$

2^o) L'arc frappé n'est plus limité à la clef, mais au point C de l'arc OB non soumis à l'action du vent où la tangente est inclinée de 10^0 sur l'horizontale.

On aura :

$$X = - p \int_{-10^0}^{\alpha_0} (\sin^2 \alpha \cos 10^0 + \sin 10^0 \cdot \sin \alpha \cos \alpha) R(\alpha) d\alpha,$$

$$Y = p \int_{-10^0}^{\alpha_0} (\sin \alpha \cos \alpha \cos 10^0 + \sin 10^0 \cos^2 \alpha) R(\alpha) d\alpha.$$

Ces intégrales se décomposent en d'autres, parmi lesquelles une seule n'a pas encore été calculée :

$$s = \int R. d\alpha ;$$

c'est l'intégrale de la rectification des courbes d'intrados.

Pour les courbes de Ribaucour :

$$s = R_0 \int \cos^{-(k+1)} \alpha \, d\alpha.$$

Cette intégrale se calculera aisément, en distinguant les cas où $k + 1$ est positif ou négatif et, pour chacun de ces cas, s'il est pair ou impair : aucune difficulté théorique nouvelle n'est introduite par l'hypothèse d'un vent à 10^0 .

On trouvera ci-après, résumées en un tableau, les valeurs de X, Y et β dans cette hypothèse.

Courbes	K	$\frac{X}{pLf}$	$\frac{\Delta X}{pLf}$	$\frac{Y}{pLf}$	$\frac{\Delta Y}{pLf}$	β	$\Delta\beta$
Parabole	2	0,817	$\frac{10}{100}$	0,817	$\frac{15}{100}$	45°	2° 1'
Chaînette	1	0,792	$\frac{10}{100}$	0,879	$\frac{18}{100}$	47° 58'	2°39'
Chaînette d'égale résistance	0	0,762	$\frac{10}{100}$	0,946	$\frac{20}{100}$	51° 9'	3°40'
Cercle	— 1	0,730	$\frac{11}{100}$	1,024	$\frac{25}{100}$	54° 30'	3°49'
Cycloïde	— 2	0,696	$\frac{12}{100}$	1,104	$\frac{30}{100}$	60°	6°25'
Développante d'Astroïde	— 3	0,681	$\frac{13}{100}$	1,248	$\frac{45}{100}$	61° 23'	6°35'

De ces résultats on peut tirer les conclusions suivantes :

1° — Les variations de X, Y, β en fonction de l'indice k sont les mêmes qu'avec un vent horizontal. Ceci est évident car cette propriété résulte des caractères intrinsèques de la courbe et non de la direction du vent.

2° — Les valeurs données au tableau sont celles relatives à tout l'arc AC, frappé par le vent. En détaillant le calcul on s'aperçoit qu'on peut négliger la partie d'arc OC, ce qui revient à dire que le deuxième effet signalé au début du chapitre est négligeable, si l'on se contente de l'approximation donnée par la méthode de substitution de la corde à l'arc. L'erreur ainsi commise est en effet de l'ordre de $\frac{1}{1000}$ pour X et de $\frac{5}{100}$ pour Y.

3° — Les valeurs trouvées pour les composantes sont supérieures à celles obtenues pour le vent horizontal.

4° — On remarquera que les différences ΔX et ΔY calculées par rapport au cas du vent horizontal sont assez importantes, de l'ordre de $\frac{10}{100}$ pour X et de $\frac{25}{100}$ pour Y.

Ceci nous amène à envisager si la règle est justifiée. Il semble qu'il n'en soit rien : le déplacement des couches d'air, qui constitue le vent, se fait parallèlement au sol. Il est évident que les filets d'air sont, en avant du hangar, parallèles au terrain. Il suffit donc de considérer le vent comme parallèle au sol et il n'y a aucune raison pour faire intervenir une inclinaison de 10° . La règle étant imposée par les règlements, il nous a cependant paru intéressant d'en montrer rapidement les conséquences.

Nous avons supposé jusqu'ici que le vent frappait le hangar transversalement. Il se peut que la direction du vent, en azimuth, soit différente. Si β est l'angle de la direction du vent avec l'axe longitudinal du hangar, nous admettrons, ainsi qu'il a été dit dans le chapitre I, que la pression normale élémentaire sur un élément $d\sigma$ est :

$$p_n = p \sin \alpha \sin \beta d\sigma.$$

Il suffira donc de multiplier les résultats déjà obtenus par la constante $\sin \beta$.

Mais le vent ainsi dirigé exercera maintenant son action sur les parois planes des extrémités du hangar. La pression sur ces parois est donnée par la formule :

$$P = KSV^2 \cos \beta.$$

Ce sont ces efforts qui s'exercent en particulier sur les portes du hangar : on a essayé d'éviter leur transmission à la charpente par un système de portes « autostables », dressées comme un écran devant l'ouverture d'accès et indépendantes de la charpente.

La surface S que nous cherchons est donnée par la formule :

$$S = 2af - 2 \int_0^a y \, dx.$$

Si α et f sont données, la demi-portée sera :

$$a = \int_0^\alpha \frac{R_0 \, d\alpha}{\cos k\alpha}.$$

Si a et f sont données, le calcul de α est aisé pour les courbes algébriques de la famille, cercle et parabole. Pour les autres, on aboutira à des équations transcendantes qu'il faudra résoudre par approximations successives ou par formule approchée.

Ainsi dans le cas de la chaînette où $\alpha = \frac{f}{a} = \frac{\text{chu} - 1}{u}$, M. TUR-

RIÈRE a montré (1) que, pour des angles aux naissances inférieures à 25° , cette équation peut être remplacée par la suivante :

$$\sigma = \frac{3 \, \text{sh} u}{\text{chu} + 5}$$

Il reste à calculer l'intégrale :

$$\int_0^a y \, dx = \frac{R_0^2}{k} \int_0^\alpha \frac{1 - \cos k\alpha \, d\alpha}{\cos^2 k\alpha}.$$

Elle est calculable par fonctions élémentaires, sauf dans le cas où $k = 0$, où elle devient :

$$I = - R_0^2 \int_0^\alpha \text{Log} \left| \cos \alpha \right| d\alpha,$$

(1) Cf. E. TURRIÈRE : Formules canoniques pour les calculs mécaniques des lignes aériennes dans le cas des portées symétriques. (*Revue générale d'Electricité*, 9 novembre 1935, t. XXXVIII, p. 623.)

qu'on ramène par changement de variable à :

$$J = \int_0^t \frac{Lt \, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots 2p-1}{2 \cdot 4 \dots 2p} \cdot \frac{t^{p+1}}{(p+1)^2} \left[1 - (p+1) Lt \right],$$

avec : $t = \cos \alpha < 1$.

Pour $\alpha = 45^\circ$, on trouve, en calculant les 5 premiers termes de la série, une erreur de $\frac{1}{100}$.

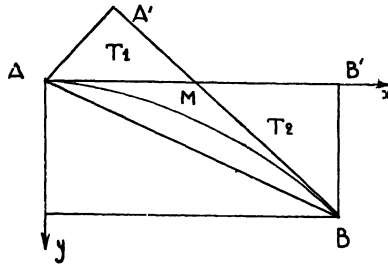


FIG. 11

Pour les valeurs faibles de α , il y aura souvent intérêt à appliquer la formule approchée due à HERMITTE (1) :

$$S = \frac{T_1 + T_2}{6} + \epsilon$$

où S est l'aire comprise entre AB et l'arc AMB , et où T_1 et T_2 sont les aires des triangles ABA' et ABB' . Soient en effet :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p(\alpha)$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p'(\alpha),$$

les équations de la tangente et de la normale à la courbe. $p(\alpha)$ et $p'(\alpha)$ s'annulent pour $\alpha = 0$. Donc le développement de $p(\alpha)$ est de la forme :

$$p(\alpha) = A \alpha^2 + B \alpha^3 + C \alpha^4 + \dots$$

(1) Cf. E. TURRIÈRE : Sur l'aire d'un segment de courbe convexe. (*Annals de Academia polytechnica do Porto*, 1916, t. XI, pp. 129-140.)

On a :

$$2 T_1 = p_0 p'_0 = 2 A^2 \alpha^3 + 5 AB \alpha^4 + (3 B^2 + 6 AC) \alpha^5 + \dots$$

D'autre part :

$$2 T_2 = xy = (p \sin \alpha + p' \cos \alpha) (-p \cos \alpha + p' \sin \alpha)$$

et, en utilisant les développements :

$$2 T_2 = 2 A_2 \alpha^3 + 7 AB \alpha^4 + \left(6 B^2 + 10 AC + \frac{A^2}{3} \right) \alpha^5 + \dots$$

D'autre part, M et M' étant deux points voisins de AB, l'aire du secteur AMM' est donnée par la relation :

$$2 dS = x dy - y dx.$$

ou :

$$2 dS = p R d\alpha.$$

Donc

$$2 S = \int p (p + p'') d\alpha.$$

En utilisant les développements, on a :

$$2 S = \frac{2 A^2}{3} \alpha^3 + 2 AB \alpha^4 + \frac{14 AC + A^2 + 6 B^2}{5} \alpha^5 + \dots$$

et par suite :

$$6 S - (T_1 + T_2) = \frac{1}{10} \left[4 AC - 9 B^2 + \frac{13}{3} A^2 \right] \alpha^5.$$

D'autre part si R_0 , R_1 , R_2 sont les rayons de courbure en A de la courbe et de ses deux premières développées :

$$R_0 = (p + p'')_0 = 2 A, \quad R_1 = (p' + p''')_0 = 6 B$$

$$R_2 = (p'' + p^{IV})_0 = 2 A + 4 C.$$

D'où :

$$6 S - (T_1 + T_2) = \frac{R_0 R_2 + 12 R_0^2 - 3 R_1^2}{120} \alpha^5.$$

Si la courbe admet oy comme axe de symétrie : $R_1 = 0$ et on a :

$$S = \frac{T_1 + T_2}{6} + \varepsilon, \quad \text{avec: } \varepsilon = \frac{R_0}{720} (R_2 + 12 R_0) \alpha^5.$$

Voici, pour l'exemple : $\alpha_0 = 60^\circ$, $f = 12$ m., les résultats numériques :

Courbes	K	$\frac{S}{2}$ m ²
Parabole	2	110,9
Chânette	1	129,58
Chânette d'égale résistance	0	175,5
Cercle	— 1	176,4
Cycloïde	— 2	214,33
Développante d'Astroïde	— 3	236,37

On constate que l'aire du débouché est une fonction décroissante de k , comme la portée $2a$.

Nous terminerons ce chapitre en examinant deux autres facteurs, qui ne posent pas de problèmes de calcul, mais sont importants dans la pratique.

1° — **Pression intérieure.** — C'est une pression statique, uniforme dans tout l'intérieur du hangar. Si celui-ci ne communique avec l'extérieur que par un seul orifice, la pression inté-

rieure qui s'établira sera égale à celle qui existe à l'intérieur, au voisinage de l'orifice. S'il y a un courant d'air qui traverse le hangar, la pression intérieure ne sera plus uniforme : il y a un écoulement et la pression dépendra des pertes de charge aux orifices.

2° — **Succion.** — L'expérience (1) montre que, derrière un obstacle placé dans un courant fluide, règne une zone de dépression qui exerce sur l'obstacle une pression négative ou succion. On admet en général qu'elle est égale au $\frac{1}{3}$ de la pression et elle se calculera par les mêmes formules. Ses consé-

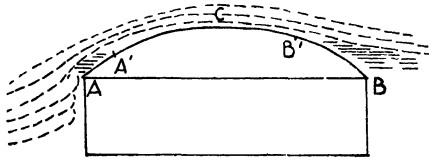


FIG. 12

quences peuvent être importantes : c'est à elle que tient cette constatation courante que les toitures sont soulevées par l'ouragan et non seulement déportées. Ce phénomène tient à ce qu'il y a frottement sur la surface du hangar, et surtout à ce que les filets fluides décollent. Mais ils ne décollent pas dès le sommet C du hangar : l'arc abrité du vent n'est donc pas soumis tout entier à une succion. Seule l'expérience pourra éclairer ces phénomènes. Remarquons aussi qu'il pourra se produire des dépressions même sur l'arc exposé au vent ; les filets étant déviés par l'obstacle, on pourra avoir, en AA' par exemple, une petite zone de pression.

Ce phénomène doit être particulièrement bien étudié, si l'on place à la file plusieurs hangars : l'un d'eux peut se trouver dans la zone de dépression de l'autre et être soumis à une

(1) Cette expérience fut faite pour la première fois par DUBUAT.

succion importante. Il ne faut donc pas toujours croire que tout obstacle placé au voisinage d'un édifice coupe le vent et diminue les efforts à supporter : sans doute les pressions seront plus faibles. Mais elles seront remplacées par des dépressions. Celles-ci donneront lieu à des efforts d'arrachement auxquels il est souvent plus difficile de résister qu'aux efforts d'écrasement ou de déportement, résultant de la pression du vent.

CHAPITRE V

MOMENT DE RENVERSEMENT.

CENTRE DE POUSSÉE.

Nous avons précédemment déterminé la grandeur et la direction de la résultante des pressions. Pour apprécier les effets du vent sur la toiture du hangar, il importe de connaître en outre, avec une approximation suffisante, la droite d'action de cette résultante. Les pressions qui s'exercent le long de l'arc d'intrados constituent un système plan de vecteurs, qui, comme tel, est réductible à un vecteur résultant unique, ayant même moment que le système par rapport à un point arbitraire du plan.

Sans doute une force à point d'application unique n'est qu'une fiction. Mais il est intéressant d'introduire cette notion de centre de poussée, parce que le système pourra être remplacé par une force unique fictive produisant des effets mécaniques identiques à ceux du système réel.

Exprimons donc que la résultante générale a même moment que le système par rapport à un point du plan, l'origine pour fixer les idées :

$$xY - yX = N.$$

X et Y ayant leur signification habituelle, x et y étant les coordonnées du centre de poussée, et N le moment résultant du système par rapport à l'origine.

Rappelons que la pression qui s'exerce sur un élément d'arc a pour composantes :

$$dX = -p \sin^2 \alpha \, ds, \quad dY = p \sin \alpha \cos \alpha \, ds.$$

Le moment élémentaire est donc :

$$dN = x \, dY - y \, dX = p \sin \alpha (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \, ds,$$

ou, en employant l'équation normale de la courbe :

$$\begin{aligned} x \sin \alpha - y \cos \alpha &= \tilde{\omega}(\alpha), \\ dN &= p \sin \alpha \, \tilde{\omega}'(\alpha) R(\alpha) \, d\alpha, \end{aligned}$$

et par suite :

$$N = p \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha \, \tilde{\omega}(\alpha) R(\alpha) \, d\alpha,$$

ou :

$$N = p \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha \, \tilde{\omega}(\alpha) [\tilde{\omega}'(\alpha) + \tilde{\omega}''(\alpha)] \, d\alpha.$$

Examinons les cas où N pourra se calculer par fonctions élémentaires.

1° — *Pour les courbes algébriques de direction.*

$\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, c'est-à-dire $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, sont alors fonctions rationnelles des coordonnées x et y du point courant. Il est immédiat que x , y , $\frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds}$ et $\frac{ds}{dt}$ se calculent rationnellement en fonction d'un paramètre t .

On a :

$$\frac{ds}{dt} = f(t),$$

f étant une fonction rationnelle. Posons : $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

$$\frac{ds}{dt} = (1 + t^2) F'''(t),$$

F''' étant la dérivée troisième d'une fonction connue $F(t)$:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

D'où :

$$x = \int (1 - t^2) F'''(t) dt,$$

$$y = \int 2t F'''(t) dt.$$

par suite :

$$x = (1 - t^2) F''(t) + 2t F'(t) - 2F(t).$$

$$y = 2t F''(t) - 2F'(t).$$

2° — Pour les courbes pour lesquelles $\tilde{\omega}(\alpha)$ est fonction rationnelle de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

Pour ces courbes x et y sont fonctions rationnelles de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$. Cela résulte des formules :

$$x = \tilde{\omega} \sin \alpha + \tilde{\omega}' \cos \alpha,$$

$$y = -\tilde{\omega} \cos \alpha + \tilde{\omega}' \sin \alpha.$$

La signification géométrique de cette propriété est immédiate : sur ces courbes x et y sont bien déterminés quand α l'est. Donc il n'y a qu'un point de contact et par suite qu'une tangente ayant une direction donnée.

La podaire de ces courbes a pour équation polaire :

$$\rho(\alpha) = F(\sin \alpha, \cos \alpha)$$

où F est une fonction rationnelle. Elle possède donc la même propriété que la courbe elle-même.

Le rayon de courbure $R = \tilde{\omega}(\alpha) + \tilde{\omega}''(\alpha)$ est, lui aussi, fonction rationnelle de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$: la radiale de la courbe possède donc la propriété de la courbe elle-même.

Comme exemples de cette catégorie de courbes, citons :

Le cercle :

$$x = R_0 \sin \alpha, \quad y = R_0 \cos \alpha.$$

La parabole :

$$x = R_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \frac{R_0}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

La développante d'astroïde :

$$x = R_0 \left(\sin \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right), \quad y = \frac{R_0}{3} (1 - \cos^3 \alpha).$$

Pour la cycloïde, au contraire, la propriété n'est pas vérifiée car, si on se donne la direction d'une tangente, le point de contact est indéterminé. Il en est de même pour toutes les courbes périodiques se déduisant par translation d'elles-mêmes, et pour toutes les spirales.

Ces courbes généralisent les courbes de direction : elles s'en déduisent par une transformation par polaires réciproques autour du cercle : $x^2 + y^2 = 1$ (corrélation). En effet soit Γ une courbe de direction ; u et v les paramètres directeurs de la tangente au point (x, y) : x et y sont fonctions rationnelles de u et v . A Γ correspond dans la corrélation une courbe Γ' ; à la tangente (u, v) correspond le point (u, v) , et au point (x, y) la tangente (x, y) à Γ' . Pour Γ' , les coordonnées du point courant sont donc bien des fonctions rationnelles des paramètres directeurs de la tangente. Partant de cette idée, on pourrait appeler les courbes jouissant de cette propriété, « courbes d'antidirection ». On peut dès lors, par corrélation, déduire les propriétés des courbes d'antidirection de celles des courbes de direction.

L'équation tangentielle des courbes de direction est :

$$(u^2 + v^2) f^2(u, v) = g^2(u, v),$$

où f et g sont des fonctions rationnelles.

L'équation ponctuelle des courbes d'antidirection sera :

$$(x^2 + y^2) f^2(x, y) = g^2(x, y).$$

Elle exprime que la distance de l'origine à un point quelconque de la courbe est une fonction rationnelle des coordonnées de ce point, et par suite des cosinus directeurs de la tangente. Cette propriété généralise celle des foyers des coniques.

On sait que l'inverse d'une courbe de direction est une autre courbe de direction. Si nous transformons une courbe d'antidirection par la transformation de contact :

$$U = \frac{a^2 u}{u^2 + v^2}, \quad V = \frac{a^2 v}{u^2 + v^2},$$

nous obtiendrons donc une nouvelle courbe d'antidirection.

Cherchons les foyers de ces courbes.

L'équation de la tangente s'écrit :

$$x \operatorname{tg} \alpha - y = \frac{\bar{\omega}(\alpha)}{\cos \alpha} = F(\sin \alpha, \cos \alpha).$$

où F est, par définition, une fonction rationnelle de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ ou :

$$x \operatorname{tg} \alpha - y = \Phi \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right),$$

Φ étant aussi fonction rationnelle.

Pour les tangentes isotropes : $\operatorname{tg} \alpha = \pm i$; et, en vertu de

$$\text{la relation : } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm i. \quad \Phi \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \text{ peut donc}$$

s'écrire, pour $\operatorname{tg} \alpha = \pm i$:

$$\Phi \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{a \pm bi}{c \pm di},$$

a, b, c, d étant des nombres entiers, qu'on obtient en remplaçant dans $\Phi \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$ les puissances paires de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ par ± 1 , et les puissances impaires par $\pm i$. Les tangentes isotropes satisfont donc à :

$$iX - Y = \frac{a + bi}{c + di}.$$

$$-iX - Y = \frac{a - bi}{c - di}.$$

Elles se coupent en F dont les coordonnées, réelles, sont :

$$X = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \quad Y = -\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}.$$

Il y a donc toujours un foyer réel. Par exemple pour la parabole :

$$x = R_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \frac{R_0}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

on a :

$$iX - Y = -\frac{R_0}{2} \quad -iX - Y = \frac{R_0}{2}$$

on trouve le foyer : $Y = \frac{R_0}{2}, X = 0$.

3° — Pour les courbes de Ribaucour d'indice $k < -1$.

On a alors en effet :

$$\bar{\omega} + \bar{\omega}'' = R_0 \cos^{-(k+1)} \alpha,$$

et $k + 1 < 0$. On a donc à résoudre une équation linéaire du 2^e ordre d'un type connu.

Seules la chaînette et la chaînette d'égale résistance donneront lieu à des calculs qui ne peuvent s'effectuer à l'aide des fonctions élémentaires.

Voici le tableau des expressions de N pour les 6 paraboliques habituelles :

Courbes	K	$\frac{N}{pL}$
Parabole	2	$\frac{R_0^2}{2} \left[\frac{\text{sh } 4u}{32} + \frac{\text{sh } 2u}{4} - \frac{5u}{8} \right]$
Chaînette	1	$R_0^2 \left[\text{chu} - 1 + (u - 1) \text{Log chu} - \int_0^u \text{Log chu} du \right]$
Chaînette d'égale résistance	0	$R_0^2 \left[\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + (u - \text{thu}) (1 - \text{Log chu}) \right. \\ \left. - u \text{Log chu} + \int_0^u \text{Log chu} du \right]$
Cercle	-1	$\frac{R_0^2}{4} [\sin 2\alpha - 2\alpha]$
Cycloïde	-2	$\frac{R_0^2}{2} \left[\frac{2}{9} \sin^3 \alpha + \frac{\sin \alpha}{3} - \frac{\alpha \cos^3 \alpha}{3} \right]$
Développante d'Astroïde	-3	$\frac{2 R_0^2}{3} \left[\frac{\sin^3 \alpha}{3} - \frac{\sin^5 \alpha}{5} \right] + \frac{R_0^2}{24} \left[\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right]$

On voit que, pour les deux chaînettes, la présence de la transcendante $\int_0^u \text{Log} \text{ch} u$ empêche des calculs simples. Nous proposons donc une méthode de calcul approchée : elle consiste à substituer à la chaînette sa parabole osculatrice au sommet :

$$x = R_0 u, \quad y = R_0 \frac{u^2}{2};$$

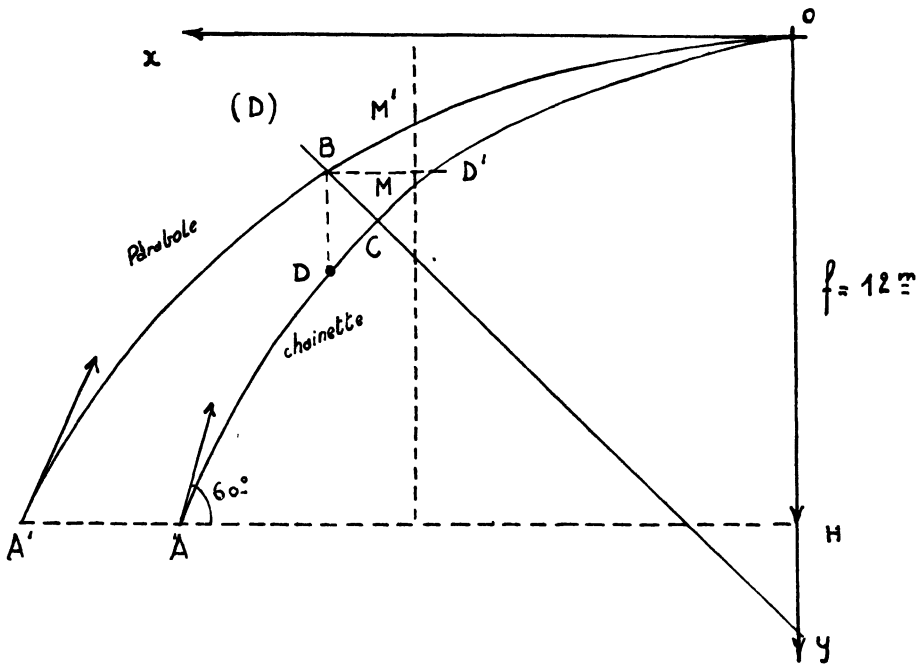


FIG. 13

et nous limiterons l'arc de parabole ainsi substitué au point qui a pour ordonnée la flèche f . On remarquera que la parabole est au-dessus de la chaînette, la différence des ordonnées :

$$y' - y = R_0 \left[\frac{u^2}{2} - (\text{ch} u - 1) \right], \text{ étant négative et l'axe des } y$$

dirigé vers le bas. La parabole coupe la droite AH au point A'

tel que :
$$u_0 = \sqrt{\frac{2 f}{R_0}} .$$

L'angle aux naissances de la parabole, α_0 , est alors déterminé par : $u_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$. Avec les données numériques employées précédemment on trouve que $AA' = 1 \text{ m. } 2$. Les deux courbes sont donc très voisines même dans l'hypothèse défavorable d'un angle aux naissances assez grand (60°).

En effectuant le calcul, on trouve pour valeur approchée du moment pour la chaînette :

$$N = 11,04 \text{ p L f.}$$

Un procédé analogue peut être employé pour la chaînette d'égale résistance. Le principe de la méthode consiste à substituer à la courbe envisagée la courbe de Ribaucour d'indice immédiatement supérieur ou inférieur et osculatrice à la clef : à la chaînette d'égale résistance, on substituera le cercle osculateur pour lequel le calcul est facile. On limitera l'arc de cercle au point qui a pour ordonnée la flèche f.

Les équations du cercle sont :

$$x = R_0 \sin \alpha , \quad y = R_0 (1 - \cos \alpha).$$

L'angle aux naissances pour le cercle est : $\alpha_0 = 72^\circ 17'$. Le cercle est au-dessous de la chaînette, comme on le voit en formant la différence $x - x' = R_0 (\alpha - \sin \alpha)$ qui est positive. La distance AA' est de $1 \text{ m. } 5$.

La valeur du moment est :

$$N = 12,2 \text{ p L f.}$$

Pour les autres courbes de Ribaucour, le calcul direct est, ainsi qu'on l'a vu, aisé. Nous résumons dans le tableau ci-après les résultats numériques :

Courbes	K	$\frac{N_0}{pLf}$	$\frac{\Delta N_0}{N_0}$
Parabole	2	$\frac{10,5}{9,16}$	$\frac{10}{100}$
Chaînette	1	$\frac{11,04}{9,9}$	$\frac{10}{100}$
Chaînette d'égale résistance	0	$\frac{12,2}{10,8}$	$\frac{11}{100}$
Cercle	— 1	$\frac{14,73}{12}$	$\frac{20}{100}$
Cycloïde	— 2	$\frac{16,6}{13,3}$	$\frac{22}{100}$
Développante d'Astroïde	— 3	$\frac{18,56}{14,8}$	$\frac{25}{100}$

Le premier chiffre est le chiffre exact (sauf pour les deux chaînettes), le second celui obtenu quand on substitue la corde à l'arc.

Un certain nombre d'observations résultent de l'examen de ce tableau :

1^o — On voit d'abord que, selon une propriété générale, il y a variation continue du moment quand on passe d'une courbe à la suivante. Le moment est fonction décroissante de l'indice k : il est aisé de le voir en prenant pour valeur approchée de N, $pLf \frac{C}{2}$, où C est la longueur de la corde qui augmente quand k diminue.

2^o — Les erreurs augmentent quand k diminue. Cela tient au fait signalé que l'arc s'éloigne de plus en plus de sa corde.

3° — L'erreur est très sensible dans l'évaluation des moments comme dans celle des composantes : les erreurs relatives sont toujours de l'ordre de 10 % à 25 %. Les critiques à l'égard de la méthode de la corde sont donc les mêmes que celles qui ont déjà été formulées.

Nous remarquerons enfin qu'étant donnée la loi de croissance des erreurs, les erreurs de $\frac{10}{100}$ et $\frac{11}{100}$ qui ont été trouvées pour les deux chaînettes montrent que les valeurs approchées données sont certainement voisines des valeurs exactes, les erreurs étant au maximum de l'ordre de $\frac{6}{100}$ à $\frac{7}{100}$. Ceci justifie donc la méthode proposée.

Après avoir calculé la grandeur du moment résultant, nous allons passer au problème de la détermination du centre de poussée. Celui-ci est à l'intersection de l'arc d'intrados et de la droite D d'équation :

$$xY - yX = N.$$

La solution de ce problème donne lieu en général à des calculs pénibles et sans intérêt. Seuls la parabole et le cercle permettent d'obtenir simplement le résultat. Toutes les autres paraboliques conduisent à des équations transcendantes. On pourra résoudre celles-ci par approximation ou, employant un procédé déjà signalé pour les chaînettes, substituer à la courbe envisagée une courbe voisine osculatrice à la clef.

1° — Pour la chaînette ordinaire, la parabole osculatrice a pour équations :

$$x = R_0 u, \quad y = \frac{R_0}{2} u^2.$$

Le point B, où la droite $D \equiv xy - yX = N$, la coupe, correspond à la valeur $u = 0,94$ et ses coordonnées sont :

$$x = 11 \text{ m. } 28, \quad y = 5 \text{ m. } 37.$$

Le point D, qui a même abscisse sur la chaînette, a pour coordonnées :

$$x_1 = 11 \text{ m. } 28, \quad y_1 = 5 \text{ m. } 71.$$

Le point D', qui a même ordonnée sur la chaînette, a pour coordonnées :

$$x_2 = 10 \text{ m. } 97, y_2 = 5 \text{ m. } 37.$$

On pourra donc prendre pour valeurs approchées des coordonnées du centre de poussée :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 11 \text{ m. } 12, \quad \Delta x < 0 \text{ m. } 15.$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = 5 \text{ m. } 54, \quad \Delta y < 0 \text{ m. } 17.$$

Nous emploierons le même procédé pour la chaînette d'égale résistance et pour la cycloïde en leur substituant le cercle osculateur à la clef. Les résultats numériques sont portés au tableau résumé.

2° — Pour la développante d'astroïde, la courbe osculatrice que nous proposons sera, non plus une courbe de Ribaucour, mais une cubique. Soient :

$$x = R_0 \left(\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right), \quad y = \frac{R_0}{3} (1 - \cos^3 \alpha).$$

les équations paramétriques de la développante d'astroïde. Posons $\sin \alpha = u$, elles s'écrivent :

$$x = R_0 \left(u - \frac{u^3}{3} \right),$$

$$y = \frac{R_0}{3} \left[1 - (1 - u^2)^{\frac{3}{2}} \right].$$

En limitant le développement de $(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}$ au terme du 2^e ordre on a :

$$x' = R_0 \left(u - \frac{u^3}{3} \right),$$

$$y' = \frac{R_0}{2} u^2,$$

équations de la cubique cherchée. On voit que : $y - y' = u^4 \varepsilon(u)$. Le contact des courbes est donc du 3^e ordre : elles sont suroscultrices. La cubique est située au-dessous de la développante d'astroïde. Le calcul se poursuit ensuite de la même manière qu'au paragraphe précédent en calculant les

coordonnées des points B, D et D' et en prenant pour celles du centre de poussée C les moyennes arithmétiques de celles de ces deux derniers points.

Courbes	K	x	$\frac{\Delta x}{x}$	y	$\frac{\Delta y}{y}$
Parabole	2	9,73	0	5,91	0
Chaînette	1	11,12	$\frac{15}{1000}$	5,54	$\frac{34}{1000}$
Chaînette d'égale résistance	0	12,79	$\frac{24}{1000}$	5,25	$\frac{36}{1000}$
Cercle	— 1	14,12	0	5,37	0
Cycloïde	— 2	17,01	$\frac{10}{1000}$	5,07	$\frac{34}{1000}$
Développante d'Astroïde	— 3	19,13	$\frac{10}{1000}$	5,02	$\frac{34}{1000}$

Les erreurs inscrites au tableau sont celles occasionnées par les méthodes approchées indiquées. On voit donc que cette détermination du centre de poussée donne lieu à des calculs assez longs. Pour justifier leur emploi il faut que nous examinions l'erreur à laquelle donne lieu la substitution de la corde à l'arc. Dans ce but nous avons cherché les coordonnées du point d'application de la résultante des pressions, non plus sur l'arc mais sur la corde. On peut alors comparer le résultat à celui que fournit la méthode du calcul par la corde.

Enfin nous avons calculé le moment par rapport à la naissance A qui, au point de vue du renversement, est le seul important. On trouvera les résultats résumés dans le tableau ci-après :

Courbes	K	x	Δx	y	Δy	$\frac{N_A}{pLf}$	ΔN_A
Parabole	2	8,26	1,33	7,10	1,10	— 7,2	1,96
		6,93		6		— 9,16	
Chaînette	1	9,5	1,6	7,21	1,21	— 7,6	2,3
		7,9		6		— 9,9	
Chaînette d'égale résistance	0	10,95	1,9	7,25	1,25	— 8	2,8
		9,06		6		— 10,8	
Cercle	— 1	13,36	2,96	7,7	1,7	— 8,2	3,8
		10,4		6		— 12	
Cycloïde	— 2	15,66	3,33	7,83	1,83	— 9,3	4
		12,33		6		— 13,3	
Développante d'Astroïde	— 3	17,89	4,3	7,88	1,88	— 9,6	5,2
		13,59		6		— 14,8	

On voit donc que la substitution de la corde à l'arc conduit à admettre que le point d'application de la résultante est plus rapproché de la clef qu'il ne l'est en réalité.

Nous retrouvons une fois de plus la constatation que l'erreur va en augmentant de la parabole à la développante d'astroïde, la courbe s'éloignant de plus en plus de sa corde.

Au point de vue de la grandeur du moment de renversement par rapport à la naissance, on voit que le calcul approché donne

une valeur plus forte que le calcul direct. Il ne présente donc pas le danger de sous-évaluer les efforts à supporter. Mais en surestimant le couple de renversement il peut conduire à des dépenses de matériaux plus élevées que celles réellement nécessaires. On constatera aussi que l'approximation est très mauvaise pour le moment N_A puisqu'elle varie de 30 à 50 %.

DEUXIÈME PARTIE

ETUDE COMPARATIVE DE L'ACTION DU VENT SUR LES DOMES ET LES COUPOLES

CHAPITRE I

LA RÉSUŁTANTE DES PRESSIONS. MÉRIDIENNES DE PRESSION MINIMA.

Nous rapporterons la surface à trois axes rectangulaires ox, oy, oz , l'axe oz étant vertical et dirigé vers le bas, o le sommet de la coupole. On pourra toujours prendre l'axe des x parallèle à la direction du vent puisque la surface est de révolution. Les équations paramétriques de la surface sont de la forme :

$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = f(\rho),$

$z = f(\rho)$ est l'équation de la méridienne et φ l'angle de son plan avec le plan zox ; $f(\rho)$ satisfait aux conditions :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface sont alors :

$$A = \frac{f' \cos \varphi}{\sqrt{1 + f'^2}}, \quad B = \frac{f' \sin \varphi}{\sqrt{1 + f'^2}}, \quad C = \frac{-1}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

Nous admettons que la pression exercée par le vent sur un élément de surface est égale à la projection sur la normale à cet élément de la pression normale exercée par le vent sur un élément de surface. Cette règle étend la loi $p_n = p \sin \alpha$, admise dans le cas des voûtes cylindriques. Elle se traduit par la formule :

$$p_n = A p.$$

La pression élémentaire sur l'élément $d\sigma$ est donc :

$$d p_n = - p \frac{f' \cos \varphi}{\sqrt{1 + f'^2}} d \sigma = - p f' \rho \cos \varphi. d \rho d \varphi.$$

En projetant sur les trois axes, on a :

$$d X = - p. \rho \frac{f'^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 + f'^2}} \cdot d \rho d \varphi,$$

$$d Y = - p. \rho \frac{f'^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 + f'^2}} \cdot d \rho d \varphi,$$

$$d Z = p. \rho \frac{f' \cos \varphi}{\sqrt{1 + f'^2}} \cdot d \rho d \varphi.$$

En intégrant pour la moitié de la coupole exposée au vent, il vient :

$$(1) \quad \begin{aligned} X &= - \frac{\pi p}{2} \int_{(C)} \frac{\rho f'^2}{\sqrt{1 + f'^2}} d \rho, \\ Y &= 0, \quad Z = 2 p \int_{(C)} \frac{\rho f'}{\sqrt{1 + f'^2}} d \rho. \end{aligned}$$

La résultante est évidemment dans le plan xoy . Il suffit donc de raisonner dans le plan. Posons $\rho = x$, et introduisons l'angle α de la tangente à la méridienne avec l'axe ox . Les formules (1) deviennent :

$$\begin{aligned} X &= - \frac{p\pi}{2} \int_0^{\alpha_0} x \sin^2 \alpha. R. d \alpha, \\ Z &= 2 p \int_0^{\alpha_0} x \sin \alpha \cos \alpha. R. d \alpha, \end{aligned}$$

où α_0 est l'inclinaison à la naissance, et où R et x seront exprimés en fonction de α .

Les formules se déduisent donc de celles établies pour les voûtes cylindriques en remplaçant ds par $x ds$: elles sont les mêmes que pour un arc de voûte cylindrique dont l'équation se déduirait de celle de la méridienne de la coupole par la relation : $ds' = x ds$, où s est l'arc de la méridienne, et s' celui

de la section de la voûte cylindrique. En deux points de telles courbes où l'inclinaison de la tangente est la même, les rayons de courbure sont liés par la relation :

$$R' = R x.$$

Soit C' la courbe ainsi déduite de la méridienne C, x' et y' les coordonnées d'un de ses points. On a :

$$x' = \int_0^{\alpha} R' \cos \alpha \, d\alpha = \int_0^{\alpha} R x \cos \alpha \, d\alpha.$$

En intégrant par parties il vient :

$$x' = \left[x^2 \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x x \, dx = \frac{x^2 - x_0^2}{2},$$

et si on prend pour origine le point où $\alpha = 0$, on a $x_0 = 0$; d'où :

$$x' = \frac{x^2}{2}.$$

Pour y' on aura :

$$y' = \int_0^{\alpha} R' \sin \alpha \, d\alpha = \int_0^{\alpha} R x \sin \alpha \, d\alpha,$$

$$y' = xy - \int_0^x y \, dx.$$

c'est-à-dire que y' est *numériquement* égal à l'aire comprise entre oy, la courbe et la parallèle à l'axe des x menée par un point de la courbe C.

Comme exemple de cette transformation, on peut citer la courbe élastique $R x = C^{\text{te}}$, qui se transforme en un cercle.

Si, pour courbe C, on prend le cercle :

$$x = R \sin \alpha, \quad y = R (1 - \cos \alpha),$$

la transformée est une cycloïde :

$$x' = \frac{R^2}{4} (1 - \cos 2\alpha), \quad y' = \frac{R^2}{4} (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

Si on veut que la courbe C' soit une courbe de Ribaucour, la courbe C devra satisfaire à la relation :

$$x^2 = R_0 \int_0^{\alpha} \cos^{-k} \alpha \, d\alpha.$$

Les composantes X et Z peuvent se calculer par fonctions élémentaires dans les cas suivants :

1^o — *Pour les courbes telles que les coordonnées d'un point courant soient fonctions rationnelles de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.* Il suffit même que x seul satisfasse à cette condition. Ces courbes ont déjà été étudiées.

2^o — *Pour les courbes algébriques de direction.*

Nous avons effectué les calculs pour les paraboloïques primaires, avec les données numériques suivantes :

flèche : $f = 6$ m., inclinaison aux naissances : $\alpha_0 = 60^\circ$.

Le rayon de base correspondant varie évidemment avec la courbe, mais est de l'ordre d'une dizaine de mètres : ce sont les dimensions habituelles dans la pratique. Citons par exemple le Planétarium d'Iéna : $R = 12$ m. 5, la salle du Gouvernement général d'Algérie : $R = 15$ m. ; l'immeuble de la Société Mulhousienne : $R = 10$ m. 75. Dans les calculs, on a souvent avantage à introduire l'argument u associé à l'angle α .

On trouvera, résumées dans le tableau ci-après, les expressions générales de X et Z pour les courbes de Ribaucour habituelles, et leurs valeurs numériques pour l'exemple choisi (Voir tableau p. 75).

Ce tableau appelle certaines observations.

1^o — Les intégrales qui y figurent peuvent se calculer exactement sauf pour la chaînette, et, pour la composante X , pour la chaînette d'égale résistance : dans ces deux derniers cas, nous avons eu recours au procédé plusieurs fois utilisé déjà : A la chaînette, on substitue la parabole osculatrice en la limitant à l'ordonnée qui est égale à la flèche de la chaînette. A la chaînette d'égale résistance on substitue le cercle osculateur qu'on limite de la même façon.

2^o — On remarque que les composantes X et Z varient d'une manière continue : toutes les deux sont fonctions décroissantes de l'indice k , ce qui constitue une différence avec le cas des voûtes cylindriques. On peut le voir aisément en ad-

Courbes	K	$\frac{-2 X}{p \pi R o^2}$	$\frac{-2 X}{p \pi f^2}$	$\frac{Z}{2 p R o^2}$	$\frac{Z}{2 p f^2}$	β
Parabole	2	$\int sh^3 u \, du$	0,592	$\int sh^2 u \, du$	0,477	45° 38'
Chaînette	1	$\int u \, th u \, chu \, du$	0,66	$\int u \, th u \, du$	0,65	51° 15'
Chaînette d'égale résistance	0	$\int \alpha \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \, d\alpha$	0,768	$\int \alpha \sin \alpha \, d\alpha$	0,714	49° 45'
Cercle	-1	$\int \sin^3 \alpha \, d\alpha$	0,833	$\int \sin^2 \alpha \cos \alpha \, d\alpha$	0,866	52° 50'
Cycloïde	-2	$\frac{I}{4} \int (2\alpha + \sin 2\alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha \, d\alpha$	0,906	$\frac{I}{4} \int (2\alpha + \sin 2\alpha) \sin \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha$	1,038	55° 29'
Développante d'Astroïde	-3	$\int \left(\sin \alpha - \frac{I}{3} \sin^3 \alpha \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha$	0,963	$\int \left(\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right) \sin \alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha$	1,23	56° 46'

mettant pour valeurs approchées de X et de Z celles qu'on obtient en substituant la corde à l'arc. Nous verrons que ce procédé est encore moins admissible pour les coupoles lorsqu'il s'agit de calculer les composantes. Mais, ici, nous voulons seulement connaître leurs variations et la substitution est alors légitime.

L'équation de la corde est : $y = x \sin \beta$, et les formules donnant X et Z sont :

$$X = - \frac{p\pi f^2}{4} \cos \beta, \quad Z = p f^2 \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta}.$$

Nous avons vu précédemment que l'angle β est fonction croissante de l'indice k , la flèche f étant donnée. X est donc fonction décroissante de k comme $\cos \beta$.

Pour Z , on a :
$$\frac{dZ}{d\beta} = - \frac{\cos \beta (1 + \sin^2 \beta)}{2 \sin^2 \beta};$$

$\frac{dZ}{d\beta}$ est négatif : Z est fonction décroissante de k .

Reste la variation de l'inclinaison : le tableau présente une anomalie ; la variation n'est pas continue. Cela tient au fait que les valeurs trouvées pour les deux chaînettes ne sont que des valeurs approchées : il faudrait donc pour la chaînette ordinaire prendre une valeur plus faible de β , et par suite de Z , et pour la chaînette d'égale résistance une valeur plus forte. Mais les autres valeurs trouvées montrent bien que, comme cela doit être, β est fonction décroissante de l'indice k .

Demandons-nous alors si la substitution de la corde à l'arc donne pour le calcul un résultat acceptable : si nous prenons la parabole, nous trouvons pour valeur de X et Z :

$$X = - \frac{\pi p f^2}{2} 0,37, \quad Z = 2 p f^2. 0,87.$$

L'erreur relative sur X est de $\frac{30}{100}$, sur Z de $\frac{100}{100}$.

L'examen des autres courbes conduit à des résultats analogues. Il ne saurait donc être question d'employer ici ce procédé de calcul : il est encore plus nettement à rejeter que pour le cas des voûtes cylindriques. Il suffira, pour obtenir une

approximation satisfaisante, de substituer une courbe osculatrice dans les deux cas indiqués où le calcul direct n'est pas possible.

Détermination des méridiennes de pression minima.

Nous nous proposons maintenant de chercher les courbes pour lesquelles l'une ou l'autre des composantes X et Z est minima. Nous allons donc chercher les courbes extrémales des intégrales donnant X et Z . Ces courbes devront avoir une inclinaison aux naissances et à la clef données. Lorsqu'il s'agissait des voûtes cylindriques, ce problème n'admettait pas de solution : en effet si on cherche à rendre extrémum les intégrales $\int \sin \alpha \, ds$, et $\int \sin \alpha \cos \alpha \, ds$, on trouve des droites : elles ne répondent pas à la condition d'avoir une inclinaison donnée à la naissance et à la clef. Un fait analogue se présente quand on cherche la courbe la plus courte qui joint deux points donnés, A et B , et qui a en ces points des tangentes données, AT et BT' . L'intégrale admet une borne inférieure mais qui n'est jamais atteinte. On peut par exemple joindre AB par un arc d'ellipse : $P^2 - \lambda QR = 0$, où $P = 0$ est l'équation de AB , $Q = 0$ et $R = 0$ celles des tangentes en A et B . λ est un paramètre qui peut être aussi petit qu'on veut mais qui est différent de 0. AB est la borne cherchée : mais elle ne satisfait pas elle-même à la condition d'avoir pour tangente en A et B , AT et BT' .

Au contraire, dans le cas des coupoles, le problème est intéressant. Cherchons l'extrémum de Z :

$$Z = 2p \int \frac{x z'}{\sqrt{1+z'^2}} \, dx,$$

où $z = z(x)$ est l'équation de la méridienne. L'équation d'Euler se simplifie, z ne figurant pas sous le signe $\int$; elle devient :

$$x \frac{d}{dz'} \left(\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} \right) = C ,$$

où C est une constante arbitraire. Or : $z' \doteq \operatorname{tg} \alpha$, donc :

$$\frac{d}{dz'} \left(\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} \right) = \frac{d \sin \alpha}{d \operatorname{tg} \alpha} = \cos^3 \alpha .$$

L'équation d'Euler s'écrit donc : $x \cos^3 \alpha = C$.

On en déduit immédiatement l'équation naturelle de la courbe :

$$R = \frac{R_0 \sin \alpha}{\cos^5 \alpha} .$$

Les équations paramétriques de la courbe s'obtiennent aisément par les formules : $dx = R \cos \alpha d\alpha$, $dy = R \sin \alpha d\alpha$.

Introduisons l'argument u ; elles s'écrivent, en prenant pour origine le point de la courbe où $u = 0$ (tangente horizontale) :

$$x = \frac{R_0}{3} \left(\operatorname{ch}^3 u - 1 \right), \quad y = \frac{R_0}{3^2} \left(\operatorname{sh} 4 u - 4 u \right).$$

La courbe est symétrique par rapport à ox ; elle présente un point de rebroussement à l'origine et n'a pas de point d'inflexion à distance finie.

Exprimons l'arc s en fonction de α :

$$\frac{ds}{d\alpha} = R_0 \frac{\sin \alpha}{\cos^5 \alpha}, \quad s = \frac{R_0}{4 \cos^4 \alpha} + s_0 .$$

En prenant l'origine des arcs en o , on a :

$$s = \frac{R_0}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

En posant $\operatorname{tg} \alpha = t$, on obtient les équations paramétriques de la courbe de Mannheim de la courbe C :

$$s = \frac{R_0}{4} t^2 (2 + t^2), \quad R = R_0 t (1 + t^2)^2 .$$

C'est une courbe unicursale du 5^e degré. L'équation intrinsèque obtenue par élimination de t est :

$$4s(4s + R_0)^4 = R_0 R^2 [2(4s + R_0)^2 + R^2].$$

Cette courbe peut être rattachée aux courbes de Ribaucour ; On a en effet :

$$R = R_0 \frac{\sin \alpha}{\cos^5 \alpha} = \frac{1}{4} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{R_0}{\cos^4 \alpha} \right) .$$

Si nous considérons alors l'enveloppe de la famille de droites à un paramètre : $D(\alpha) = x \sin \alpha - y \cos \alpha = p(\alpha)$;

e rayon de courbure de l'enveloppe E est : $R = p + p''$.
La développée de E est l'enveloppe des droites :

$$D'(\alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha = p'(\alpha).$$

Son rayon de courbure est : $R_1 = p' + p''' = \frac{dR}{d\alpha}$.

La courbe qui nous occupe est donc la développée de la courbe d'équation intrinsèque :

$$R \cos^4 \alpha = \frac{R_0}{4},$$

c'est-à-dire de la courbe de Ribaucour d'indice $K = 3$.

Le calcul numérique effectué pour cette courbe, avec les données indiquées, fournit les résultats suivants :

$$X = -\frac{p \pi R_0^2}{6} \int_0^{u_0} (\operatorname{ch}^3 u - 1) \operatorname{ch} u \operatorname{sh}^3 u \, du = -\frac{p \pi f^2}{2} \cdot 0,205.$$

$$Z = \frac{2 p R_0^2}{3} \int_0^{u_0} (\operatorname{ch}^3 u - 1) (\operatorname{ch}^2 u - 1) \operatorname{ch} u \, du = 2 p f^2 \cdot 0,222.$$

Ces valeurs sont bien inférieures à celles trouvées précédemment.

Le problème qu'on vient de résoudre peut être généralisé : Au lieu d'adopter pour expression de la pression la formule : $p_n = A p$, on peut poser plus généralement : $p_n = A^k p$, où k est une constante. On a alors :

$$Z = -p \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^k \varphi \, d\varphi \int_{(c)} \frac{x z'^k}{(1 + z'^2)^{\frac{k}{2}}} \, d\mathbf{x}.$$

La première intégrale est une constante égale, suivant la parité de k , à $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \cdot \frac{\pi}{2}$, si k est pair, ou à $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)} \cdot \frac{1}{2m+1}$, si k est impair. Il suffit donc de rendre extremum :

$$J = \int \frac{x z'^k}{(1 + z'^2)^{\frac{k}{2}}} \, d\mathbf{x}.$$

L'équation d'Euler s'écrit :

$$x \frac{d}{dz'} \left(\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} \right)^k = C,$$

ou :

$$x \cos^3 \alpha \sin^{k-1} \alpha = C.$$

On en déduit l'équation naturelle :

$$R = R_0 \left[\frac{3}{\cos^5 \alpha \sin^{k-2} \alpha} - \frac{k-1}{\sin^k \alpha} \right].$$

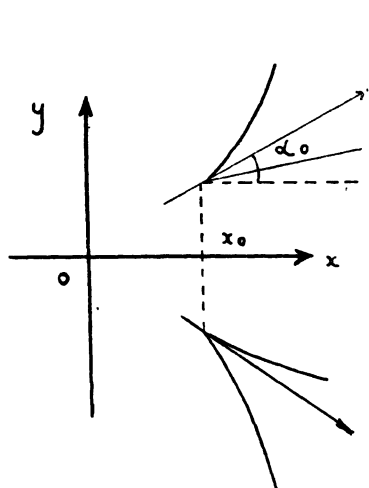


FIG. 14. — K impair.

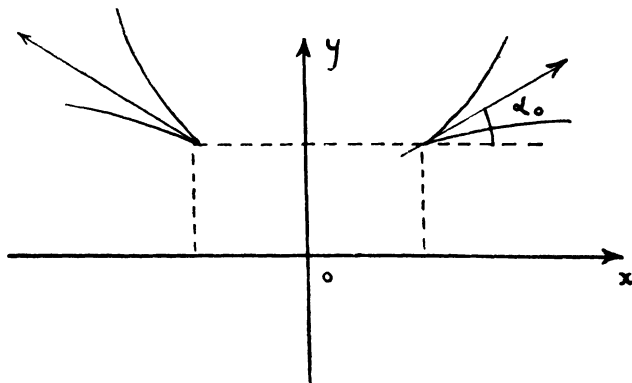


FIG. 15. — K pair.

Les équations paramétriques sont :

$$x = \frac{R_0}{\cos^3 \alpha \sin^{k-1} \alpha},$$

$$y = 3 R_0 \int \operatorname{ch}^4 u \operatorname{th}^{k-3} u \, du - R_0 (k-1) \int \frac{du}{\operatorname{th}^{k-1} u \operatorname{ch} u};$$

x ne peut jamais être nul. Il est minimum pour la valeur α_0 de α satisfaisant à $\frac{dx}{d\alpha} = 0$, soit :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0) = \frac{k-1}{3}.$$

Suivant la parité de k , la courbe aura un des deux aspects indiqués.

Il y a un rebroussement pour la valeur $\alpha = \alpha_0$ qui annule $\frac{dx}{d\alpha}$.

Le maximum de pression correspond aux parties concaves, le minimum aux parties convexes.

Géométriquement ces courbes C peuvent être étudiées de la façon suivante : la courbe C_1 d'équation naturelle :

$$R_1 = \frac{(k-1) R_0}{\sin^k \alpha} \text{ est une courbe de Ribaucour.}$$

Considérons la courbe C_2 d'équation naturelle :

$$R_2 = \frac{R_0}{\cos^5 \alpha \sin^{k-2} \alpha}.$$

D'autre part, soit la courbe d'équation naturelle $\rho = R_0 \cos^5 \alpha \sin^{k-2} \alpha$. Si k est pair, elle résulte de l'addition d'Aoust de plusieurs courbes de Ribaucour ; si k est impair, de l'addition de plusieurs développées de courbes de Ribaucour. La première courbe a pour radiale l'inverse de la radiale de la deuxième, le module d'inversion étant R_0^2 .

Les courbes C s'obtiennent par l'addition des courbes C_1 et C_2 . Ces considérations n'ont évidemment qu'un intérêt théorique : ces courbes sont trop compliquées pour pouvoir jouer un rôle dans la pratique.

Par un procédé analogue, nous allons maintenant déterminer la méridienne pour laquelle la composante X est minima. Pour cela nous chercherons l'extrémale de l'intégrale :

$$J = \int \frac{x z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} dx.$$

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{d}{dz'} \left(\frac{x z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) = C;$$

d'où, en introduisant l'angle α :

$$x \sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = C.$$

On en déduit l'expression du rayon de courbure :

$$R = - \frac{R_0 (3 \cos^2 \alpha - 1)}{\sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)^2}.$$

Les équations paramétriques de la courbe sont :

$$x = \frac{R_0}{\sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha)},$$

$$z = R_0 \left[\frac{1}{2} \operatorname{Log} \cotg \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \right].$$

La courbe admet oz pour axe de symétrie; x ne peut s'annuler et sa valeur extremum est obtenue pour la valeur α_0 de α qui satisfait à : $\frac{dx}{d\alpha} = 0$, c'est-à-dire :

$$3 \cos^2 \alpha_0 - 1 = 0, \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

La courbe admet en ce point un rebroussement. Ses coordonnées sont : $x_0 = 0,91 R_0, z_0 = -0,366 R_0$.

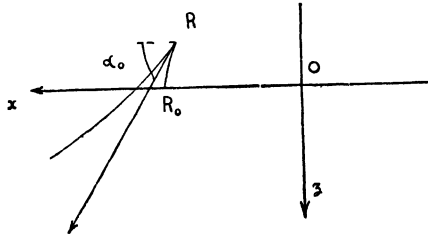


FIG. 16

La partie concave correspond au maximum de pression, la partie convexe au minimum.

Comme méridienne de coupole, la courbe peut être utilisée par révolution autour de l'axe oz ; on remarquera, qu'au point où elle coupe ox, la tangente est verticale : la coupole pourra donc être à retombée verticale. Mais l'équation compliquée de la courbe lui ôte tout intérêt, du point de vue pratique.

CHAPITRE II

MOMENT RÉSULTANT — CENTRE DE POUSSÉE.

Les pressions normales sont représentées par des vecteurs dont les droites d'action rencontrent l'axe de révolution de la coupole. Le moment résultant par rapport à oz est donc nul. Par raison de symétrie il en est de même du moment résultant par rapport à ox. Le moment résultant des forces est donc un vecteur porté par oy et dont l'effet est de faire basculer la coupole dans le sens de la direction du vent. Soit M ce vecteur. La pression sur un élément de surface a pour moment par rapport à oy :

$$dM = - p \cos^2 \varphi. \frac{zz'^2 \rho + z' \rho^2}{\sqrt{1 + z'^2}} d\rho d\varphi.$$

En intégrant pour la demi-coupole exposée au vent, on a :

$$M = - \frac{p\pi}{2} \int_{(c)} \frac{\rho z' (zz' + \rho)}{\sqrt{1 + z'^2}} d\rho.$$

Le système de vecteurs constitué par les pressions satisfaisant ainsi à la relation : $LX + MY + NZ = 0$, sera équivalent à une force unique dirigée suivant la droite d'équation : $zX - xZ = M$, qui coupe la méridienne du plan zox en un point C qui est le centre de poussée.

En introduisant l'angle α , et en considérant la méridienne comme l'enveloppe d'une famille de droite :

$$D(\alpha) \equiv x \sin \alpha - y \cos \alpha = p(\alpha),$$

l'expression du moment prend la forme :

$$M = - \frac{p\pi}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} x \sin \alpha. p' (p + p'') d\alpha.$$

M se calculera par fonctions élémentaires pour les courbes telles que les coordonnées d'un point courant soient fonctions rationnelles de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$: il en est alors de même de p et de ses dérivées.

Courbes	K	Expression générale de $M. p \pi R_0^3$	Valeur numérique de $-\frac{p \pi f^3}{2M}$	Valeur numérique de $-\frac{p \pi f^3}{2M_0}$
Parabole	2	$\frac{I}{4} \int \frac{1 - \cos^4 \alpha}{\cos^6 \alpha} d(\cos \alpha)$	0,787	0,175
Châînette	1	$\frac{I}{2} \int u \operatorname{th} u \left[u + \operatorname{sh} u (\operatorname{ch} u - 1) \right] du$	1,057	0,327
Châînette d'égle résistance	0	$-\frac{I}{2} \int \alpha \operatorname{tg} \alpha \left[\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{Log} \cos \alpha \right] d\alpha$	1,10	0,34
Cercle	-1	$-\frac{I}{2} \int \sin^3 \alpha \cdot d\alpha$	1,666	0,833
Cycloïde	-2	$-\frac{I}{16} \int (2\alpha + \sin 2\alpha) (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) \cos \alpha d\alpha$	2,16	1,25
Développante d'Astroïde	-3	$-\frac{I}{6} \int \left(\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right) (\sin 2\alpha + \sin \alpha) \cos^2 \alpha d\alpha$	3,54	2,58

On a ci-contre, résumées dans un tableau, les valeurs, pour les paraboliques primaires, de M , moment par rapport à la clef et de M_0 , moment par rapport au centre du cercle de base.

Des expressions qui figurent à ce tableau, seules celles relatives à la chaînette ordinaire et à la chaînette d'égale résistance ne peuvent être calculées par fonctions élémentaires : le résultat numérique indiqué est celui qu'on obtient en substituant à la courbe donnée, la courbe osculatrice voisine dans la classification des courbes de Ribaucour, parabole pour la première, cercle pour la seconde. On voit que le moment par rapport à la clef, comme celui par rapport au centre du cercle de base, sont des fonctions décroissantes de l'indice k . Le sens de variation est donc le même que pour les composantes X et Z . Il en résulte que la méridienne la plus recommandable paraît être la parabole : elle est même moins discutable que dans le cas des voûtes cylindriques, puisqu'ici ce n'est pas seulement le moment de renversement, mais aussi les composantes de la résultante qui ont, pour elle, la valeur la plus faible.

Remarquons d'autre part que les moments sont négatifs : donc la coupole tend à se renverser dans le sens de la direction du vent.

La détermination du centre de poussée ne pose pas de nouvelles questions intéressantes : il s'agit, comme dans le cas des voûtes cylindriques, de déterminer l'intersection d'une droite, l'axe central du système des pressions, avec les différentes courbes de Ribaucour. Cette détermination ne conduit à une équation algébrique que pour la parabole et pour le cercle ; on a une équation transcendante pour toutes les autres courbes. On leur substitue alors, comme il a été expliqué, une courbe convenable, osculatrice au sommet : parabole pour la chaînette ordinaire, cercle pour la chaînette d'égale résistance et la cycloïde, cubique pour la développante d'astroïde.

TROISIÈME PARTIE
RECHERCHE THÉORIQUE
DE CERTAINES CLASSES DE SURFACES
GÉNÉRALISANT LES COURBES DE RIBAUOUR

Les toitures de hangar n'ont pas nécessairement la forme d'une voûte cylindrique. Les travaux de M. AIMOND, qu'on trouvera exposés dans la quatrième partie, ont mis en évidence l'intérêt qu'il y a, au point de vue de la répartition des efforts dans un voile mince, à utiliser une toiture en forme de *paraboloïde hyperbolique*. L'inconvénient de telles surfaces par rapport à l'action du vent, c'est qu'elles sont à courbures opposées et présentent par suite des concavités où la pression risque d'atteindre des valeurs importantes. Nous avons essayé, dans cette partie, de chercher à déterminer des surfaces convexes présentant une forme qui puisse les rendre utilisables comme toitures. Nous n'avons pu en trouver qui soient utilisables dans la pratique, mais nous avons été conduits à certaines observations qui, du point de vue théorique, nous ont paru assez intéressantes pour être signalées.

On a vu, dans la première et la deuxième parties, tout l'intérêt des courbes de Ribaucour, soit comme sections de voûtes cylindriques, soit comme méridiennes de coupôles. L'extension naturelle à l'espace des propriétés de ces courbes pose le problème de la recherche de surfaces possédant une propriété analogue à celle des courbes de Ribaucour qui s'exprime par la relation bien connue :

$$R = k. MN,$$

où MN est la portion de normale comprise entre un point et l'axe des x, R le rayon de courbure, k une constante donnée.

Parmi les formes possibles d'une formule généralisant la précédente, celle qui conduit aux calculs les plus remarquables est la suivante :

$$R_1 + R_2 = k \cdot MN,$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface ; $\frac{R_1 + R_2}{2}$ est le segment compris entre un point de

la surface et le milieu des points focaux ; MN est la portion de normale comprise entre un point de la surface et un plan fixe qu'on prendra pour plan x oy.

Cette étude peut se faire en utilisant soit les coordonnées ponctuelles soit les coordonnées tangentielles. Nous emploierons d'abord les premières qui permettent de mettre en évidence une catégorie de surfaces qui se rattachent intimement aux courbes de Ribaucour.

CHAPITRE I

ÉTUDE EN COORDONNÉES PONCTUELLES.

L'équation aux dérivées partielles du 2^e ordre qui détermine les surfaces (S) s'écrit :

$$(1) \quad r(1 + q^2) - 2pqz + t(1 + p^2) = k z (rt - s^2).$$

C'est une équation du type de Monge-Ampère. La détermination des intégrales de ces équations est le plus souvent impossible. Mais il est aisé de déterminer les intégrales particulières qui satisfont à la condition : $s = 0$. Ce procédé, employé par SCHERK pour l'équation des surfaces minima, le conduisit à la découverte de la surface d'équation :

$$e^z = \frac{\cos x}{\cos y}.$$

z devra donc être de la forme :

$$z = X + Y,$$

où X est une fonction de x seul et Y de y seul.

L'équation (1) s'écrit alors :

$$X''(1 + Y'^2) + Y''(1 + X'^2) = k X'' Y'' (X + Y),$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{1 + Y'^2}{Y''} + \frac{1 + X'^2}{X''} = k (X + Y),$$

ou encore :

$$\frac{1 + X'^2}{X''} - k X + \frac{1 + Y'^2}{Y''} - k Y = 0.$$

Les variables étant séparées, les fonctions X et Y satisfont nécessairement aux deux équations :

$$\frac{1 + X'^2}{X''} - k X = -C, \quad \frac{1 + Y'^2}{Y''} - k Y = +C,$$

où C est une constante arbitraire.

La forme de ces équations différentielles est la même que celle de l'équation qui détermine dans le plan les courbes de Ribaucour. En intégrant on a :

$$1 + Y'^2 = b^2 (C + kY)^{\frac{2}{k}},$$

où b^2 est une constante d'intégration positive.

Il vient ensuite :

$$y - y_0 = \int \frac{dY}{\sqrt{b^2 (C + kY)^{\frac{2}{k}} - 1}};$$

En posant : $b^2 (C + kY)^{\frac{2}{k}} = \text{ch}^2 v$, on obtient :

$$y - y_0 = \frac{1}{b^k} \int \text{ch}^{k-1} v. dv.$$

On aura de même :

$$x - x_0 = \frac{1}{a^k} \int \text{ch}^{k-1} u. du.$$

Finalement les équations paramétriques de la surface sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = \frac{1}{a^k} \int \operatorname{ch}^{k-1} u. du , \\ y - y_0 = \frac{1}{b^k} \int \operatorname{ch}^{k-1} v. dv , \\ z = \frac{1}{k} \left[\frac{\operatorname{ch}^k u}{a^k} + \frac{\operatorname{ch}^k v}{b^k} \right] . \end{array} \right.$$

Les courbes $u = C^{\text{te}}$ et $v = C^{\text{te}}$ sont des courbes de Ribaucour, situées dans des plans parallèles aux plans de coordonnées, rapportées à des axes convenablement choisis. Pour chaque famille, elles se déduisent l'une de l'autre par translation et chaque courbe d'une famille s'appuie sur toutes les courbes de l'autre famille. Soit par exemple un point $M_0 (u_0, v_0)$ de la surface. La section $v = v_0$ est située dans le plan mené par M_0 parallèle à xoz et ses équations sont :

$$x = \frac{1}{a^k} \int \operatorname{ch}^{k-1} u. du , \quad z - z_1 = \frac{1}{k a^k} \operatorname{ch}^k u .$$

avec : $z_1 = \frac{1}{k b^k} \operatorname{ch}^k v_0$. C'est donc une courbe de Ribaucour d'indice k , la base étant la parallèle à ox menée par le point du plan de section de cote z_1 . La section $u = u_0$ serait de même une courbe de Ribaucour située dans le plan menée par M_0 parallèle à $yo z$, et dont la base serait la parallèle à oy de cote $z_2 = \frac{1}{k a^k} \operatorname{ch}^k u_0$. On remarquera qu'au point M_0

on a : $z = z_1 + z_2$.

On peut démontrer géométriquement cette propriété des surfaces (S) qu'elles sont engendrées par deux courbes de Ribaucour situées dans des plans rectangulaires, les cotes de leurs bases satisfaisant à la relation $z = z_1 + z_2$. Soient C_u et C_v deux courbes répondant à la question, et se coupant en un point μ , de cote z . Soit N le point où la normale à C_v coupe la base de cette courbe, et L le point correspondant pour C_u . Soient M et M' les points où la verticale de μ coupe

les plans des deux bases, P et P' les points où la normale en μ à la surface rencontre ces mêmes plans. On a :

$$\mu M = z - z_1 \quad \mu M' = z - z_2.$$

Désignons par α l'angle de la normale avec la verticale de μ , par β et γ les angles de μL avec μP et avec la verticale de μ ; β' et γ' sont les angles analogues pour μN .

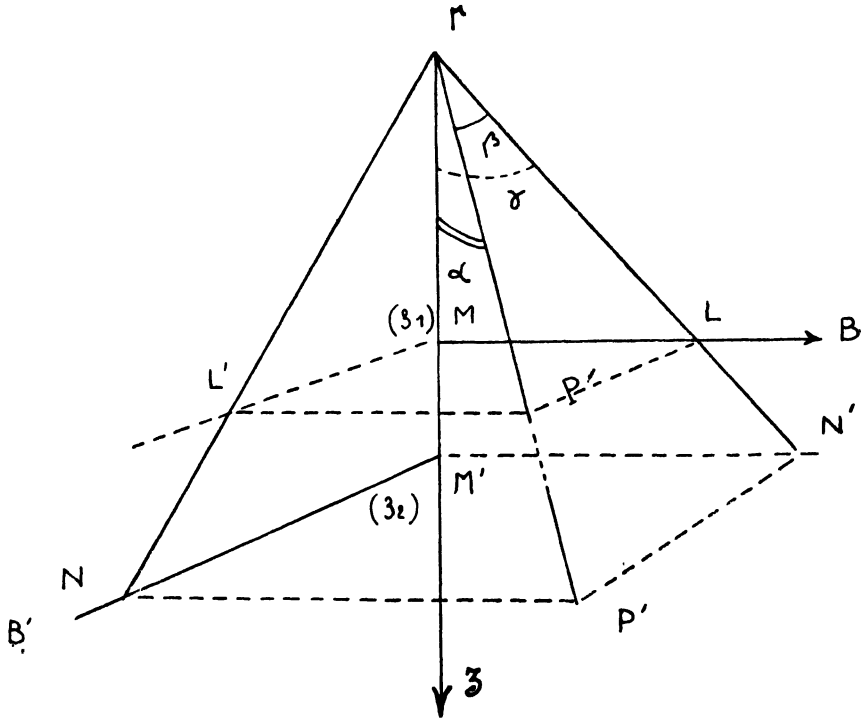


FIG. 17

Soient R et R' les rayons de courbure des courbes C_u et C_v , ρ et ρ' les rayons de courbure des sections normales tangentes en μ à C_u et à C_v . D'après le théorème de MEUSNIER, on a :

$$\rho = \frac{R}{\cos \beta} \quad , \quad \rho' = \frac{R'}{\cos \beta'}.$$

C_u et C_v étant des courbes de Ribaucour d'indice k , on a par ailleurs :

$$R = \frac{k(z - z_1)}{\cos \gamma}, \quad R' = \frac{k(z - z_2)}{\cos \gamma}.$$

Exprimons alors β en fonction de γ et γ' : μL et μP sont perpendiculaires à la tangente en μ à la courbe C_u . Donc le plan μPL est perpendiculaire au plan de cette courbe et PL est perpendiculaire à ML . De même PL' est perpendiculaire à ML' ; les quadrilatères $MLPL'$ et $M'N'P'N$ sont des rectangles ; on a par suite :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{PL}{\mu L} = \frac{M\mu \cdot \operatorname{tg} \gamma'}{\frac{M\mu}{\cos \gamma}} = \operatorname{tg} \gamma' \cdot \cos \gamma.$$

D'où :

$$\rho = R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma' \cdot \cos^2 \gamma} = k(z - z_1) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma'}.$$

On a de même :

$$\rho' = k(z - z_2) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma'},$$

D'où :

$$\rho + \rho' = k z \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma'}.$$

Or :

$$\cos \alpha = \frac{M\mu'}{\mu P} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma'}},$$

D'où :

$$\rho + \rho' = \frac{k z}{\cos \alpha}.$$

Mais les courbes $u = C^{\text{te}}$ et $v = C^{\text{te}}$ forment un réseau conjugué puisque les coordonnées x, y, z d'un point de la surface

satisfont à la même équation aux dérivées partielles : $\frac{d^2 \theta}{du dv} = 0$;

ρ et ρ' sont donc les rayons de courbure de deux sections normales tangentes à des directions conjuguées. Le premier théorème d'Apollonius, appliqué à l'indicatrice, permet donc d'écrire :

$$\rho + \rho' = R_1 + R_2,$$

et on a finalement :

$$R_1 + R_2 = \frac{k z}{\cos \alpha}.$$

On retrouve donc la propriété caractéristique des surfaces (S) qui peut s'énoncer ainsi :

Toute surface qui admet pour courbes conjuguées situées dans des plans parallèles aux plans de coordonnées des courbes de Ribaucour d'indice k jouit de la propriété :

$$R_1 + R_2 = k \text{ MN.}$$

On remarquera que les courbes C_u et C_v forment un réseau conjugué orthogonal en projection.

L'équation des lignes asymptotiques des surfaces (S) est :

$$b^k \operatorname{ch}^k u \, du^2 + b^k \operatorname{ch}^k v \, dv^2 = 0.$$

Si a et b sont de même signe, ces lignes sont imaginaires : la surface est convexe.

L'expression de la courbure totale est :

$$\frac{1}{R_1 R_2} = a^k b^k \cdot \frac{\operatorname{ch}^{2-k} u \cdot \operatorname{ch}^{2-k} v}{(1 + \operatorname{sh}^2 u + \operatorname{sh}^2 v)^2}.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\cos \alpha = \frac{-\operatorname{sh} u}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u + \operatorname{sh}^2 v}}, \quad \cos \beta = \frac{-\operatorname{sh} v}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u + \operatorname{sh}^2 v}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u + \operatorname{sh}^2 v}}.$$

Ils sont indépendants de k.

Donc en deux points de deux surfaces d'indice différent correspondant aux mêmes valeurs de u et v les plans tangents sont parallèles.

Les coordonnées du milieu du segment focal, c'est-à-dire les équations paramétriques de la surface médiane sont :

$$X = a^{-k} \int \operatorname{ch}^{k-1} u \cdot du - \frac{\operatorname{sh} u}{2} \left[\frac{\operatorname{ch}^k u}{a^k} + \frac{\operatorname{ch}^k v}{b^k} \right],$$

$$Y = b^{-k} \int \operatorname{ch}^{k-1} v \cdot dv - \frac{\operatorname{sh} v}{2} \left[\frac{\operatorname{ch}^k u}{a^k} + \frac{\operatorname{ch}^k v}{b^k} \right],$$

$$Z = \frac{1}{k} \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \left(\frac{\operatorname{ch}^k u}{a^k} + \frac{\operatorname{ch}^k v}{b^k} \right).$$

Cette surface dégénère en un plan pour $k = -2$: la surface (S) correspondante est engendrée par des cycloïdes.

On remarquera que les normales le long d'une courbe C_u ou C_v restent parallèles à un plan fixe. D'une manière générale, on sait que si par un point m , projection sur le plan xoy d'un point M d'une surface, on mène une parallèle à la normale, la condition déterminant les développables de cette congruence est identique à celle exigée pour que deux courbes de la surface forment un réseau conjugué orthogonal en projection. Ici, nous sommes dans cette dernière hypothèse, mais la congruence des parallèles aux normales se transforme en un plan et dans ce plan les parallèles aux normales restent perpendiculaires à une droite fixe. Cette propriété est d'ailleurs commune à toutes les surfaces satisfaisant à la condition : $s = 0$.

Nous avons figuré ci-après l'aspect de la surface d'indice $k = -1$ engendrée par des cercles.

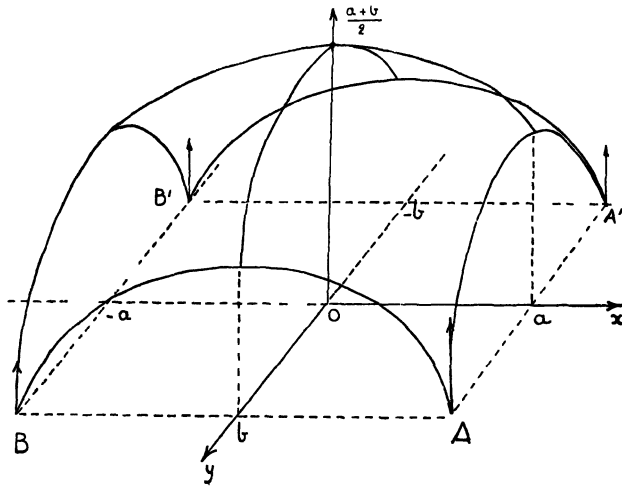


FIG. 18

Cas particulier correspondant à la chaînette d'égale résistance :

Pour $k = 0$, l'équation aux dérivées partielles qui détermine les surfaces (S) n'est autre que celle des surfaces minima. Mais alors la propriété géométrique qui a permis de définir les

surfaces (S) s'évanouit. On peut cependant, par analogie avec la géométrie plane, chercher pour ce cas une propriété géométrique nouvelle ; on sait que la courbe de Ribaucour d'indice $k = 0$ est la chaînette d'égale résistance. Or, la propriété caractéristique de cette courbe, c'est que la projection du rayon de courbure sur l'axe des y est constante. Si nous transposons cette propriété dans l'espace, nous sommes amenés, comme l'a fait M. TURRIÈRE (1), à chercher une surface (S) telle que le segment MA, qui joint M au milieu des points focaux, se projette sur oz suivant un segment de longueur constante. Ceci s'exprime par la relation :

$$R_1 + R_2 = a \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

ou :

$$(1) \quad r(1 + q^2) - 2pq + t(1 + p^2) = a(rt - s^2).$$

Si nous cherchons celle de ces surfaces qui satisfait à la condition $s = 0$, nous aurons :

$$Z = X + Y,$$

$$\frac{1 + X'^2}{X''} + \frac{1 + Y'^2}{Y''} = a.$$

Les variables sont séparées et il vient :

$$\frac{1 + X'^2}{X''} = a \cdot \frac{1 + \lambda}{2}, \quad \frac{1 + Y'^2}{Y''} = a \cdot \frac{1 - \lambda}{2}.$$

où λ est une constante arbitraire. L'intégration donne ensuite :

$$X = -a \frac{1 + \lambda}{2} \cdot \text{Log} \left[\cos \frac{2(x - x_0)}{a(1 + \lambda)} \right] + X_0,$$

$$Y = -a \frac{1 - \lambda}{2} \cdot \text{Log} \left[\cos \frac{2(y - y_0)}{a(1 - \lambda)} \right] + Y_0.$$

En faisant un changement d'origine, l'équation de la surface est :

$$-z = a \frac{(1 + \lambda)}{2} \text{Log} \cos \frac{2x}{a(1 + \lambda)} + a \frac{(1 - \lambda)}{2} \text{Log} \cos \frac{2y}{a(1 - \lambda)}.$$

(1) Cf. E. TURRIÈRE : Sur certaines surfaces généralisant la chaînette de Coriolis. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, t. XI, 1911, pp. 385 394.)

Les lignes conjuguées orthogonales en projection sont des chaînettes d'égale résistance. Les lignes asymptotiques ont pour équation différentielle :

$$\frac{dx^2}{\cos^2 \frac{2x}{a(1+\lambda)}} + \frac{dy^2}{\cos^2 \frac{2y}{a(1-\lambda)}} = 0 ;$$

elles sont imaginaires.

L'équation différentielle des lignes de courbure n'est à variables séparées que pour $\lambda = 0$. On a alors :

$$e^{-\frac{2z}{a}} = \cos \frac{2x}{a} \cdot \cos \frac{2y}{a} ,$$

surface qui présente une grande analogie avec la surface minima de SCHERK. L'équation différentielle des lignes de courbure est alors :

$$\frac{dx^2}{\cos^2 x} = \frac{dy^2}{\cos^2 y} .$$

On remarquera que cette surface rentre dans la classe des surfaces d'équation :

$$e^z \cos x \cdot \cos y = C^te ,$$

qui appartiennent à un des systèmes triples orthogonaux connus. La construction des lignes de courbure en résulte par le théorème de DUPIN.

Cherchons maintenant les surfaces de révolution satisfaisant à l'équation (1) ; on doit avoir, si $z = F(\rho)$ est l'équation de la méridienne, et en posant $F'(\rho) = f(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\frac{df}{d\rho} (a f - \rho) = f (1 + f^2) .$$

Cette équation est linéaire par rapport à ρ considéré comme fonction de f :

$$\frac{d\rho}{df} = - \frac{\rho}{f(1+f^2)} + \frac{a}{1+f^2} ;$$

l'intégrale est :

$$\rho = - \frac{a}{f} + \frac{2 A \sqrt{1+f^2}}{f} .$$

D'où l'expression de z :

$$z = \text{Log} \left[f^a \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + f^2} + 1}{\sqrt{1 + f^2} - 1} \right)^A \right].$$

Si on prend $a = 0$, on retombe sur les surfaces minima et on retrouve l'équation de l'alysséide :

$$f = \frac{1}{\text{sh} \frac{z}{A}}, \quad \rho = 2 A \cdot \text{ch} \frac{z}{A}.$$

Si on prend $A = 0$, on a la surface :

$$- \frac{z}{a} = \text{Log} \left(- \frac{\rho}{a} \right),$$

qui est homothétique de :

$$z = \text{Log} \rho.$$

La méridienne est la courbe exponentielle.

Si on prend $A = \pm \frac{1}{2}$, on obtient une surface très simple :

$$- z = a \text{Log} \left(\sqrt{1 + f^2} + 1 \right),$$

qui conduit à :

$$- \frac{z}{a} = \text{Log} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right).$$

Elle est homothétique de la surface :

$$z = \text{Log} (1 - \rho^2).$$

Si nous revenons au cas général des surfaces satisfaisant à :

$$r(1 + q^2) - 2 pqs + t(1 + p^2) = kz(rt - s^2),$$

nous pouvons également nous proposer de déterminer celles de ces surfaces qui sont de révolution. En posant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, et $z = f(\rho)$ étant l'équation de la méridienne, z doit satisfaire à l'équation différentielle du 2^e ordre :

$$- z'' (kzz' + \rho) = z' (1 + z'^2).$$

En général, cette équation ne peut pas s'intégrer. Elle le pourra exceptionnellement pour $k = 2$. On a alors :

$$\begin{aligned} - (2zz'z'' + z'^3) &= z' + \rho z'', \\ d(zz'^2) + d(\rho z') &= 0, \\ zz'^2 + \rho z' &= A. \end{aligned}$$

On remarquera que toutes les courbes intégrales de cette équation sont homothétiques des intégrales de :

$$zz'^2 + \rho z' = 1,$$

qui s'écrit :

$$z \frac{dz}{d\rho} + \rho = \frac{d\rho}{dz},$$

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 - \rho \frac{d\rho}{dz} = z.$$

en posant $\frac{d\rho}{dz} = \operatorname{tg} \varphi$, on obtient les équations paramétriques de la méridienne :

$$\rho = a \cos \varphi + b \left[\operatorname{tg} \varphi - \cos \varphi \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$z = a \sin \varphi + b \sin \varphi - \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

Pour $b = 0$, on a un cercle. La courbe méridienne possède la propriété suivante : C_1 étant le centre de courbure, et C_2 l'intersection de la normale avec oy , au point M , on a :

$$MC_1 + MC_2 = 2 MP,$$

P étant la projection de M sur ox .

CHAPITRE II

ÉTUDE EN COORDONNÉES TANGENTIELLES.

Cette étude peut se faire soit en utilisant les coordonnées géographiques d'EULER, soit la représentation par les génératrices imaginaires de la sphère d'OSSIAN BONNET. Nous ne dirons qu'un mot des premières qui ne conduisent pas à une équation simple.

Soient en effet p_1, p_2, p_3 les cosinus directeurs de la normale à la surface :

$$p_1 = \cos \varphi \cos \psi, \quad p_2 = \cos \varphi \sin \psi, \quad p_3 = \sin \varphi.$$

L'équation du plan tangent est :

$$X \cos \varphi \cos \psi + Y \cos \varphi \sin \psi + Z \sin \varphi = \tilde{\omega},$$

où $\tilde{\omega}$ est la distance de ce plan à l'origine.

L'expression de la courbure moyenne avec cette représentation est :

$$R_1 + R_2 = 2 \tilde{\omega} - \frac{d \tilde{\omega}}{d \varphi} \operatorname{tg} \varphi + \frac{d^2 \tilde{\omega}}{d \varphi^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d^2 \tilde{\omega}}{d \psi^2}.$$

Les surfaces qui nous occupent sont caractérisées par :

$$R_1 + R_2 = \frac{k z}{\sin \varphi}.$$

avec : $z = \tilde{\omega} \sin \varphi + \frac{d \tilde{\omega}}{d \varphi} \cos \varphi.$

En désignant par p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de $\tilde{\omega}$ par rapport à φ et à ψ , on a :

$$(1) \quad r + \frac{t}{\cos \varphi} - p \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{k}{\operatorname{tg} \varphi} \right) + \tilde{\omega} (2 - k) = 0.$$

Cherchons les surfaces de révolution répondant à la question : $\tilde{\omega}$ est alors indépendant de ψ . Il doit vérifier l'équation différentielle ordinaire :

$$(2) \quad \tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}' \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{k}{\operatorname{tg} \varphi} \right) + \tilde{\omega} (2 - k) = 0.$$

Cette équation se ramène à une équation de RICCATI en posant :

$$\omega = e^{\omega} z;$$

ω est une fonction de φ qu'on détermine de façon que l'équation vérifiée par la nouvelle fonction z n'ait pas de terme en z .

On a :

$$(3) \quad \frac{d^2 \omega}{d \varphi^2} + \left(\frac{d \omega}{d \varphi} \right)^2 + \frac{d \omega}{d \varphi} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{k}{\operatorname{tg} \varphi} \right) + 2 - k = 0;$$

et en posant : $\frac{d \omega}{d \varphi} = \Omega$, Ω vérifie bien une équation de RICCATI.

Si $k = 0$, par exemple, l'équation (3) admet la solution particulière $\Omega_1 = -2 \operatorname{tg} \varphi$, $\omega_1 = \cos^2 \varphi$ qui conduit à l'alysséide, pour laquelle on trouve :

$$\tilde{\omega} = C [u (1 - \operatorname{th}^2 u) + \operatorname{th} u],$$

u étant l'argument associé à φ .

Si $k = 2$, on a immédiatement :

$$\tilde{\omega} = C_2 - C_1 \sin \varphi + C_1 \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

On obtient ainsi une famille de surfaces parallèles. Il est évident, géométriquement, qu'il doit en être ainsi pour $k = 2$. Portons en effet sur la normale en M à la surface (S) une longueur $MM' = h$; M' décrit une surface (S') qui a pour rayons de courbures principaux :

$$\begin{aligned} R'_1 &= R_1 + h, & R'_2 &= R_2 + h, \\ R'_1 + R'_2 &= (R_1 + R_2) + 2h. \end{aligned}$$

D'autre part les segments de normales compris entre M, M' et le plan xoy sont tels que : $M'A = MA + h$. Si on avait :

$$R_1 + R_2 = k MA,$$

on aura : $R'_1 + R'_2 = k(M'A - h) + 2h = k M'A$, si $k = 2$.

Les coordonnées d'Euler permettent enfin d'étudier le cas, de la surface généralisant la chaînette d'égale résistance. Pour ces surfaces, l'équation aux dérivées partielles est :

$$(1) \quad 2\tilde{\omega} - \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} + \frac{d^2\tilde{\omega}}{d\varphi^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d^2\tilde{\omega}}{d\psi^2} = \frac{a}{\sin \varphi}.$$

L'équation sans second membre est celle des surfaces minima. Il est clair que si $\tilde{\omega}_1$ est une solution particulière de (1) et $\tilde{\omega}_2$ la solution générale pour les surfaces minima, la solution générale de (1) sera : $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 + \omega_2$, puisque l'équation est linéaire, et que le deuxième membre est indépendant de $\tilde{\omega}$.

L'interprétation géométrique de ce fait est la suivante : soient Π , Π_1 et Π_2 les podaires de la surface générale cherchée, de la solution particulière, et de la surface minima générale. Soient μ , μ_1 et μ_2 trois points correspondants sur Π , Π_1 et Π_2 , alignés avec o. La relation $\omega = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2$ se traduit par :

$$o\mu = o\mu_1 + o\mu_2.$$

D'où la construction de μ connaissant μ_1 et μ_2 .

Cette propriété est générale pour toutes les surfaces satisfaisant à une condition :

$$R_1 + R_2 = f(p_1, p_2, p_3),$$

où f est une fonction quelconque, donnée, des cosinus directeurs de la normale.

Or nous avons vu précédemment qu'on peut déterminer une surface (S) particulière : le problème est donc entièrement résolu. Reprenons par exemple la détermination des surfaces de révolution en coordonnées tangentielles : $\tilde{\omega}$ est indépendant de φ . Posons : $\tilde{\omega} = \Phi \sin \varphi$, où Φ est une fonction de φ seul. On a alors :

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\sin^2 \varphi \cos \varphi \cdot \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) = \frac{a}{\sin \varphi} ,$$

$$\sin^2 \varphi \cos \varphi \cdot \frac{d\Phi}{d\varphi} = a \sin \varphi + b ,$$

$$\Phi = a \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} + b \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} ,$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 ,$$

où $\Phi_1 = -a \operatorname{Log} (\operatorname{tg} \varphi)$, et où Φ_2 est la fonction relative à la surface minima de révolution. On pourra donc prendre pour solution particulière :

$$\tilde{\omega}_1 = -a \sin \varphi \cdot \operatorname{Log} (\operatorname{tg} \varphi)$$

Coordonnées de Bonnet.

Je rappellerai d'abord, qu'en prenant pour paramètres de représentation de la surface les variables x et y de BONNET, les cosinus directeurs de la surface ont pour expression :

$$p_1 = \frac{x+y}{1+xy} , \quad p_2 = i \cdot \frac{y-x}{1+xy} , \quad p_3 = \frac{xy-1}{1+xy} .$$

L'équation du plan tangent est alors :

$$x(X-iY) + y(X+iY) + (xy-1)Z = u ,$$

en posant :

$$u = z(1+xy) ,$$

z est la distance de l'origine au plan tangent. X, Y, Z sont les coordonnées d'un point courant du plan.

En dérivant par rapport à x et à y , on obtient les coordonnées d'un point de la surface :

$$Z = \frac{x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} - 1}{1+xy} ,$$

ou :

$$Z = x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} + \frac{xy - 1}{1 + xy} z.$$

$$X + i Y = \frac{u x + \frac{du}{dy} - x^2 \frac{du}{dx}}{1 + xy} = \frac{dz}{dy} - x^2 \frac{dz}{dx} + \frac{2 x z}{1 + xy}.$$

$$X - i Y = \frac{u y + \frac{du}{dx} - y^2 \frac{du}{dy}}{1 + xy} = \frac{dz}{dx} - y^2 \frac{dz}{dy} + \frac{2 y z}{1 + xy}.$$

Les rayons de courbure principaux se calculent au moyen de la formule d'OLINDE RODRIGUES :

$$\frac{dX}{dp_1} = \frac{dY}{dp_2} = \frac{dZ}{dp_3} = R.$$

D'où :

$$R = \frac{d(X + i Y) + x d Z}{d(p_1 + i p_2) + x d p_3} = \frac{d(X - i Y) + y d Z}{d(p_1 - i p_2) + y d p_3}.$$

En dérivant les équations du plan tangent, on a :

$$X - i Y + y Z = \frac{du}{dx},$$

$$X + i Y + x Z = \frac{du}{dy},$$

$$d(X - i Y) + y d Z = -Z dy + d\left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$d(X + i Y) + x d Z = -Z dx + d\left(\frac{du}{dy}\right).$$

On a, d'autre part :

$$\frac{1}{2} (1 + xy)^2 \cdot d(p_1 + i p_2) = dx - x^2 dy,$$

$$\frac{1}{2} (1 + xy)^2 \cdot d(p_1 - i p_2) = dy - y^2 dx,$$

$$\frac{1}{2} (1 + xy)^2 \cdot d p_3 = x dy + y dx.$$

D'où :

$$\frac{2 R}{1 + xy} = \frac{-Z dx + d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx} = \frac{-Z dy + d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}.$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre ces deux équations, on voit que R_1 et R_2 sont les racines de l'équation :

$$4 R^2 - 4 R (1 + xy) \left(\frac{d^2 u}{dx dy} - Z \right) + (1 + xy)^2 \left[\left(\frac{d^2 u}{dx dy} - Z \right)^2 - \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^2 u}{dy^2} \right] = 0,$$

$$\text{avec : } Z = \frac{x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} - u}{1 + xy}.$$

On en tire :

$$R_1 + R_2 = (1 + xy) \frac{d^2 u}{dx dy} + u - x \frac{du}{dx} - y \frac{du}{dy}.$$

La condition du problème est alors :

$$R_1 + R_2 = k MA;$$

$$MA = \frac{Z}{p_3} = \frac{1}{xy - 1} \left(x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} - u \right).$$

L'équation aux dérivées partielles du 2^e ordre à laquelle doit satisfaire la fonction u est donc :

$$(1) \quad (1 - x^2 y^2) \frac{d^2 u}{dx dy} + (xy - 1 + k) \left(x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} - u \right) = 0$$

C'est une équation de LAPLACE dont les invariants sont égaux. Posons alors : $u = e^{\omega \varphi}$, où φ est une nouvelle fonction, et où ω est défini par :

$$a = - \frac{d\omega}{dy}, \quad b = - \frac{d\omega}{dx}.$$

$$\text{avec : } a = \frac{x(xy - 1 + k)}{1 - x^2 y^2}, \quad b = \frac{y(xy - 1 + k)}{1 - x^2 y^2}.$$

ω satisfait donc à l'équation aux différentielles totales :

$$- d\omega = \frac{(x y - 1 + k)}{1 - x^2 y^2} (x dy + y dx),$$

dont la solution est :

$$\omega = \text{Log } (1 + xy)^{1 - \frac{k}{2}} (1 - xy)^{\frac{k}{2}}.$$

On aura donc :

$$u = \varphi (1 + xy)^{1 - \frac{k}{2}} (1 - xy)^{\frac{k}{2}},$$

et la distance de l'origine au plan tangent, z , est liée à φ par la relation :

$$z = \varphi \left(\frac{1 - xy}{1 + xy} \right)^{\frac{k}{2}}.$$

φ satisfait alors à l'équation :

$$\frac{d^2 \varphi}{dx dy} = h \varphi,$$

où h est l'invariant de l'équation (1); c'est-à-dire :

$$(2) \quad \frac{d^2 \varphi}{dx dy} = \frac{xy [3 + (1 - k)^2] - 2 (1 - k) (1 + x^2 y^2)}{(1 - x^2 y^2)^2} \cdot \varphi.$$

Cherchons les solutions de cette équation qui correspondent aux surfaces de révolution : la distance z est alors une fonction de p_3 , donc de xy . Posons : $xy = \theta$. L'équation (2) devient une équation différentielle ordinaire du 2^e ordre :

$$(3) \quad \theta \varphi'' + \varphi' = H(\theta) \varphi$$

$$\text{avec : } H(\theta) = \frac{\theta [3 + (1 - k)^2] - 2 (1 - k) (1 + \theta^2)}{(1 - \theta^2)^2}.$$

Elle s'écrit :

$$\theta \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi} = H(\theta).$$

Posons : $\text{Log } \varphi = \Phi$. L'équation (3) devient :

$$(3)' \quad \theta \left[\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + \left(\frac{d\Phi}{d\theta} \right)^2 \right] + \frac{d\Phi}{d\theta} = H(\theta);$$

et en posant : $\frac{d\Phi}{d\theta} = t$,

$$\theta \cdot \frac{dt}{d\theta} + t = H(\theta) - \theta t^2.$$

enfin posons : $\theta t = v$, il vient :

$$\frac{dv}{d\theta} = H(\theta) - \frac{v^2}{\theta}.$$

La détermination des surfaces de révolution se ramène à l'intégration d'une équation de RICCATI : elle ne peut donc se faire que si on connaît une solution particulière.

Le fait que les surfaces (S) de révolution sont déterminées par une équation de RICCATI entraîne une propriété de ces surfaces. On sait que l'intégrale générale de l'équation de RICCATI est une fonction homographique de la constante d'intégration C. Ici on aura donc :

$$v = \frac{A + C\alpha}{B + C\beta},$$

où A, B, α , β sont des fonctions de la variable θ . Or v était lié à φ par la relation :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{v}{\theta}.$$

Par suite $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est aussi fonction homographique de C ; or z, distance de l'origine au plan tangent, a pour expression :

$$z = \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta} \right)^{\frac{k}{2}} \varphi,$$

D'où :

$$\frac{z'}{z} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{k}{2} \frac{d}{d\theta} \left[\text{Log} \frac{1 - \theta}{1 + \theta} \right]$$

Donc $\frac{z'}{z}$ est aussi fonction homographique de C.

En revenant à la notation d'EULER, on a :

$$\frac{z'}{z} = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{d\alpha}{d\theta},$$

α étant l'angle de la normale à la méridienne avec oz, angle qui est lié à $xy = \theta$, par la formule :

$$\cos \alpha = p_3 = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}.$$

$$\theta = \cotg^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Donc $\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$ est fonction homographique de C. Mais : $\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \operatorname{tg} i$,
i étant l'angle du rayon vecteur et de la tangente à la méridienne.

D'où le résultat :

Pour 4 courbes (Γ), méridiennes des surfaces (S) de révolution d'indice k, le rapport anharmonique des 4 valeurs de $\operatorname{tg} i$, en des points où l'inclinaison de la tangente est la même, est constant.

Nous voyons ainsi que, même dans le cas particulier des surfaces de révolution, le problème ne peut être résolu dans toute sa généralité. A fortiori l'équation (1) ne pourra pas, en général, s'intégrer. On peut le voir directement pour la valeur 1 de l'indice k. L'équation (2) s'écrit alors :

$$(E_0) \quad \frac{d^2 \varphi}{dx dy} = \frac{3 xy}{(1 - x^2 y^2)^2} \cdot \varphi.$$

L'invariant est : $h_0 = \frac{3 xy}{(1 - x^2 y^2)^2}$. En posant, suivant LAPLACE,

$\frac{d\varphi}{dy} = z_1$ on a, pour z_1 , une nouvelle équation :

$$(E_1) \quad \frac{d^2 z_1}{dx dy} - \frac{1 + 3 x^2 y^2}{y (1 - x^2 y^2)} \cdot \frac{d z_1}{d x} - \frac{3 xy}{(1 - x^2 y^2)^2} \cdot z_1 = 0.$$

Les invariants de (E_1) sont :

$$h_1 = -\frac{5 xy}{(1 - x^2 y^2)^2}, \quad k_1 = h_0 = \frac{3 xy}{(1 - x^2 y^2)^2}.$$

Suivant la méthode de LAPLACE, les invariants de l'équation (E^n) se calculent au moyen de la suite de formules :

$$h_1 = 2 h_0 - k_0 - \frac{d^2 \operatorname{Log} h_0}{dx dy}, \quad k_1 = h_0$$

$$h_2 = 2 h_1 - k_1 - \frac{d^2 \operatorname{Log} h_1}{dx dy}, \quad k_2 = h_1$$

.....

Ici, on a :

$$\operatorname{Log} h_0 = \operatorname{Log} \frac{xy}{1 - x^2 y^2} + \operatorname{Log} 3,$$

D'une manière générale :

$$\frac{d^2 \text{Log} \frac{k xy}{1 - x^2 y^2}}{dx dy} = \frac{d^2 \text{Log} \frac{xy}{1 - x^2 y^2}}{dx dy},$$

$$\frac{d^2 \text{Log} h_0}{dx dy} = \frac{8 h_0}{3},$$

On voit que h_1 sera de la forme $m h_0$, de même h_2 , et ainsi de suite. On a constamment :

$$\frac{d^2 \text{Log} h_n}{dx dy} = \frac{8 h_0}{3}$$

D'où on déduit la loi de récurrence :

$$h_{n+1} = 2 h_n - h_{n-1} - \frac{8}{3} h_0.$$

En additionnant, il vient :

$$h_{n+1} = h_n - (n+1) \frac{8}{3} h_0.$$

et en additionnant à nouveau les formules précédentes où on a fait $n = 1, 2, 3, \dots, n$, on a :

$$h_{n+1} = \frac{h_0}{3} \left[3 - 4 (n+1) (n+2) \right]$$

La suite des équations ($-E_n$) donnerait les mêmes résultats puisque les invariants de (E_0) étaient égaux. Pour que la méthode de LAPLACE permette d'intégrer on devrait avoir :

$$3 - 4 (n+1) (n+2) = 0,$$

dont les racines $\frac{1}{3}$ et $-\frac{3}{2}$ ne sont pas des nombres entiers. La méthode ne permet donc pas d'intégrer.

Puisque l'intégration dans le cas général est impossible, nous nous bornerons à rechercher des valeurs particulières de k pour lesquelles on pourra intégrer : l'expression $H(\theta)$ peut en effet se simplifier si un des facteurs qui figurent au dénominateur apparaît aussi au numérateur, c'est-à-dire si on a :

$$\theta [3 + (1-k)^2] - 2 (1-k) (1+\theta^2) = \alpha (1 \pm \theta)^2.$$

En prenant le signe $+$ on trouve : $k = 2$, $k = 4$, et en prenant le signe $-$: $k = 0$, $k = -2$. En réalité, ces quatre cas d'intégration se ramènent à deux. Effectuons, en effet, sur l'équation (1) la transformation de BONNET, définie par :

$$x_1 = i x, \quad y_1 = i y.$$

L'équation devient :

$$(1 - x^2 y^2) \frac{d^2 u}{dx dy} + (xy + 1 - k) \left(x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} - u \right) = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (1) où on a fait $k = 2 - k$.

Les surfaces (S) d'indice k et $2 - k$ se déduisent l'une de l'autre par la transformation de Bonnet.

On pourra donc n'envisager que les valeurs positives de l'indice k . Ainsi la surface $k = 2$ est la surface associée de la surface minima ($k = 0$). De même la surface $k = -2$ est associée de la surface $k = 4$. La première est la surface de BONNET pour laquelle on a :

$$\varphi = X' + Y' + 2 \cdot \frac{x Y + y X}{1 - x y}.$$

Étudions le cas de $k = 4$. L'équation (2) s'écrit alors :

$$(4) \quad \frac{d^2 \varphi}{dx dy} = \frac{6 \varphi}{(1 - x y)^2}.$$

Les invariants sont : $h_0 = k_0 = \frac{6}{(1 - xy)^2}$.

L'application de la méthode de LAPLACE conduit à une suite d'équations $(E_1) \dots (E_n)$, et comme précédemment on a :

$$\frac{d^2 \text{Log } h_n}{dx dy} = \frac{d^2 \text{Log } h_0}{dx dy} = \frac{2}{(1 - x y)^2}.$$

Si nous posons : $h_n = \frac{A_n}{(1 - xy)^2}$, $k_n = \frac{B_n}{(1 - xy)^2}$, on a alors les relations successives :

$$A_n = 2 A_{n-1} - A_{n-2} - 2,$$

Par addition : $A_n = A_{n-1} - 2n$,

$$A_n = A_0 - n(n+1), \text{ avec : } A_0 = 6.$$

L'invariant h_n sera nul si :

$$6 - n^2 - n = 0.$$

dont les racines sont : $n = -3$, $n = 2$. La méthode de LAPLACE permet donc d'intégrer. On posera successivement :

$$z_1 = \frac{d\varphi}{dy} ; z_1 \text{ vérifie :}$$

$$\frac{d^2 z_1}{dx dy} - \frac{2x}{1 - xy} \cdot \frac{dz_1}{dx} - \frac{6z_1}{(1 - xy)^2} = 0.$$

$$\text{Puis : } z_2 = \frac{dz_1}{dy} - \frac{2x z_1}{1 - xy} ; z_2 \text{ vérifie :}$$

$$\frac{d^2 z_2}{dx dy} - \frac{4x}{1 - xy} \cdot \frac{dz_2}{dx} - \frac{4z_2}{(1 - xy)^2} = 0,$$

dont l'invariant h est nul, et qui s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dz_2}{dy} - \frac{4x}{1 - xy} z_2 \right] = 0,$$

$$\frac{dz_2}{dy} - \frac{4x}{1 - xy} z_2 = Y.$$

où Y est une fonction de la seule variable y . On peut considérer Y comme la dérivée cinquième d'une fonction de y seul, et il vient, X étant une fonction de x seul :

$$z_2 = Y^{(IV)} + \frac{4x Y'''}{1 - xy} + \frac{12x^2 Y''}{(1 - xy)^2} + \frac{24x^3 Y'}{(1 - xy)^3} + \frac{24x^4 Y}{(1 - xy)^4} + \frac{24X}{(1 - xy)^4}.$$

En remontant à z_1 et φ , on trouve successivement :

$$z_1 = Y''' + \frac{6x Y''}{1 - xy} + \frac{18x^2 Y'}{(1 - xy)^2} + \frac{24x^3 Y}{(1 - xy)^3} + \frac{6X'}{(1 - xy)^2} + \frac{24yX}{(1 - xy)^3}$$

$$\varphi = Y'' + X'' + 6 \frac{xy' + yX'}{1 - xy} + 12 \frac{x^2 Y + y^2 X}{(1 - xy)^2}.$$

Si on se reporte à l'expression de la distance de l'origine au plan tangent, on a ici :

$$z = \left(\frac{1 - xy}{1 + xy} \right)^2 (X'' + Y'') + 6 \frac{1 - xy}{(1 + xy)^2} (xY' + yX') + 12 \frac{x^2 Y + y^2 X}{(1 + xy)^2}.$$

En portant cette valeur de z dans les expressions des coordonnées de la surface, on obtiendra ses équations paramétriques. Cette surface généralise pour l'espace la propriété de la parabole :

$$MA = \frac{R_1 + R_2}{2} = 2 \cdot MN.$$

Les surfaces seront réelles si z l'est : on prendra pour x et y deux variables imaginaires conjuguées $u \pm i v$, et pour X et Y deux fonctions arbitraires imaginaires conjuguées $P \pm i Q$. Les paramètres de représentation de la surface seront alors u et v .

Remarques :

Il existe des cas de dégénérescence de la surface. Pour $X = x$ et $Y = y$, ainsi que pour $X = x^3$ et $Y = y^3$, la surface est l'enveloppe du plan :

$$2 u X + 2 v Y + Z (u^2 + v^2 - 1) = 12 u.$$

C'est le point : $X = 6$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Pour $X = 1$, $Y = 1$ on a le plan $Z = 0$.

Les surfaces de révolution s'obtiennent en remarquant que φ doit être fonction de xy . On peut prendre ainsi : $X = x^2$, $Y = y^2$. Et en posant $x = u + i v$, $y = u - i v$, on a la représentation réelle de la surface :

$$X = -48 \frac{u (u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^3}, \quad Y = -48 \frac{v (u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^3},$$

$$Z = \frac{4 (u^2 + v^2 - 1) [1 + (u^2 + v^2)^2]}{(u^2 + v^2 + 1)^3}.$$

L'étude de cette surface semble malaisée. Nous allons voir qu'elle a une forme très simple en reprenant son étude à partir de l'équation de RICCATI qui définit les surfaces de révolution dans le cas le plus général. Cette équation était :

$$\theta \frac{d v}{d \theta} + v^2 = \theta \frac{\theta (3 + h^2) - 2 h (1 + \theta^2)}{(1 - \theta^2)^2},$$

avec : $h = 1 - k$, et $v = \theta \frac{\varphi'}{\varphi}$, φ étant intégrale de l'é-

quation : $\frac{d^2 \varphi}{d x d y} = h_0 \varphi$.

Dans le cas de $k = 4$, on a :

$$\varphi = \frac{1 + \theta^2 + 4 \theta}{(1 - \theta)^2}, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = 6 \cdot \frac{1 + \theta}{(1 - \theta) (1 + \theta^2 + 4 \theta)},$$

$$v = 6 \cdot \frac{\theta + \theta^2}{(1 - \theta) (1 + \theta^2 + 4 \theta)}.$$

A partir de cette solution particulière, on pourrait résoudre l'équation de RICCATI. Nous ne reproduirons pas ce calcul qui n'offre pas d'intérêt. Étudions au contraire la solution particulière. Pour elle, on a :

$$z = \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta} \right)^2 \varphi = \frac{1 + \theta^2 + 4\theta}{(1 + \theta)^2},$$

et en introduisant l'angle α et la notation d'EULER :

$$\bar{\omega} = \frac{1 + \cotg^4 \frac{\alpha}{2} + 4 \cotg^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(1 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{2}.$$

La méridienne (Γ) de la surface est donc l'enveloppe des droites :

$$D(\alpha) \equiv x \sin \alpha - y \cos \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{2}.$$

Le rayon de courbure a pour expression :

$$R = 2 - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha.$$

Les équations paramétriques sont :

$$x = \sin \alpha \left[2 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right], \quad y = \cos \alpha \left[\frac{\sin^2 \alpha}{2} - 1 \right].$$

On remarquera que ces expressions sont rationnelles en $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$. D'après une remarque antérieure, le calcul de la pression pourra donc se faire aisément pour la coupole engendrée par rotation de (Γ). Les coordonnées du centre de courbure sont :

$$\xi = x - R \sin \alpha, \quad \eta = y + R \cos \alpha.$$

En remplaçant R par sa valeur on a :

$$\xi = \sin^3 \alpha, \quad \eta = \cos^3 \alpha.$$

La courbe (Γ) est donc une *développante d'astroïde*. C'est une parallèle de la courbe de Ribaucour d'indice $k = -3$. Soit en effet l'équation normale d'une tangente à une astroïde :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = R_0 \cos \alpha \sin \alpha,$$

La tangente à la développante a pour équation :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = R_0 \frac{\sin^2 \alpha}{2} + h$$

son rayon de courbure est : $R = R_0 + h - \frac{3 R_0}{2} \sin^2 \alpha$; les coordonnées d'un de ses points sont :

$$x = \sin \alpha \left(h + R_0 - \frac{R_0}{2} \sin^2 \alpha \right), \quad y = \cos \alpha \left(\frac{R_0}{2} \sin^2 \alpha - h \right).$$

Pour la courbe de Ribaucour : $R = -\frac{3 y}{\cos \alpha}$, donc : $h = \frac{R_0}{2}$.

Dans le cas qui nous occupe : $h = R_0$. Les deux courbes sont donc parallèles à la distance $\frac{R_0}{2}$.

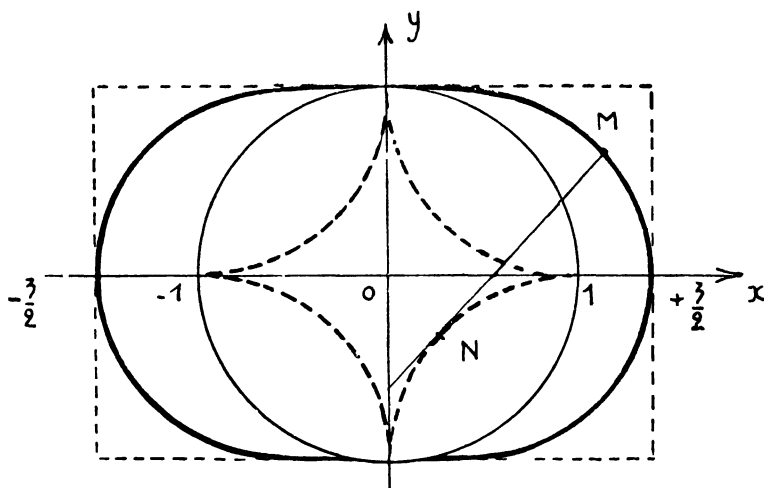


FIG. 19

Les propriétés de la courbe se déduisent d'une construction géométrique très simple : considérons le cercle trigonométrique et un de ses points μ , défini par l'angle $x o \mu = \alpha$. Il se projette en P et Q. Soit OH la perpendiculaire abaissée de O sur PQ. On a :

$$OQ = \sin \alpha, \quad OP = \cos \alpha, \quad OH = \sin \alpha \cos \alpha = \omega'.$$

La normale à la courbe est donc la symétrique de QP par rapport à ox : QP enveloppant une astroïde il en est de même

où φ_1 est relatif à la solution particulière. En multipliant par le facteur $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^2$, on a la même relation pour la distance z de l'origine au plan tangent :

$$z = z_1 e^{\int \frac{v_2}{\theta} d\theta}.$$

et en remplaçant θ par $\cotg^2 \frac{\alpha}{2}$ il vient :

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 f(\alpha).$$

La solution générale se déduit donc de la solution particulière en multipliant, pour chaque valeur de α , la distance de l'origine à la tangente par l'expression $f(\alpha)$.

Effectuons le calcul numérique pour la développante d'astroïde trouvée, avec un angle aux naissances de 60° . On trouve :

$$R_0 = \frac{16}{11} f.$$

$$X = -p \frac{\pi}{2} f^2. 0,933 \quad , \quad Z = 2 p f^2. 1,121.$$

$$M = -p \frac{\pi}{2} f^3. 0,958.$$

Le moment de renversement est donc faible : il est supérieur à celui de la parabole, mais inférieur à celui de la chaînette dans la classification des courbes de Ribaucour. On pourra employer utilement cette nouvelle méridienne.

QUATRIÈME PARTIE

RÉPARTITION DES EFFORTS DUS A L'ACTION DU VENT DANS UN VOILE MINCE

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES VOILES MINCES.

On désigne sous le nom de voile mince toute surface mince porteuse. L'emploi du ciment armé avait permis la réalisation de voûtes de faible épaisseur pour lesquelles il n'était plus nécessaire, grâce à l'armature, que la courbe des pressions passe à l'intérieur du noyau central de la voûte. Ces voûtes étaient formées par des arcs nervures réunis par un hourdis : celui-ci transmettait les efforts aux nervures à la façon d'un hourdis de plancher. Mais on s'aperçut bientôt que cette conception était erronée et que le hourdis transmettait à lui seul, en raison de sa forme, la presque totalité des charges. On espaça alors davantage les arcs nervures, qui ne jouaient plus qu'un rôle secondaire, et on en vint à la conception actuelle du voile mince. Ce qui la caractérise, c'est que le phénomène de la flexion du hourdis est un phénomène accessoire qui permet pratiquement d'en réduire l'épaisseur et théoriquement de considérer que les efforts qui s'exercent sur le hourdis sont situés dans le plan tangent à la surface porteuse.

Soient dès lors ox et oy deux axes rectangulaires dans le plan tangent en un point o de la surface, et AB un petit élément du plan tangent faisant avec oy l'angle α . Sur ox et oy s'exercent des efforts provenant de l'action des portions voisines de la surface. Ils se décomposent en un effort normal σ sur ox et τ sur oy et en deux cisaillements θ suivant ox , η suivant oy . σ , τ , η et θ sont des efforts par unité de longueur.

Remarquons immédiatement que $\theta = \eta$; si, en effet, nous considérons un rectangle élémentaire dans le plan tangent, les cisaillements qui s'exercent sur ses côtés opposés sont, à un infiniment petit du 2^e ordre près, $-\eta dy$ et ηdy d'une part, $-\theta dx$ et θdx d'autre part. En écrivant que le rectangle est en équilibre, le moment des forces par rapport au centre du rectangle est nul, donc : $\theta = \eta$.

Soit alors R.ds l'effort qui s'exerce sur AB et qui se décompose en N.ds, normal à AB, et T.ds le long de AB. Écrivons les équations d'équilibre du triangle élémentaire OAB. On a, en projetant successivement sur AB et sur la normale à AB :

$$\begin{aligned} (\eta dy + \sigma dx) \cos \alpha - (\tau dy + \eta dx) \sin \alpha + T ds &= 0, \\ (\eta dy + \sigma dx) \sin \alpha + (\tau dy + \eta dx) \cos \alpha + N ds &= 0. \end{aligned}$$

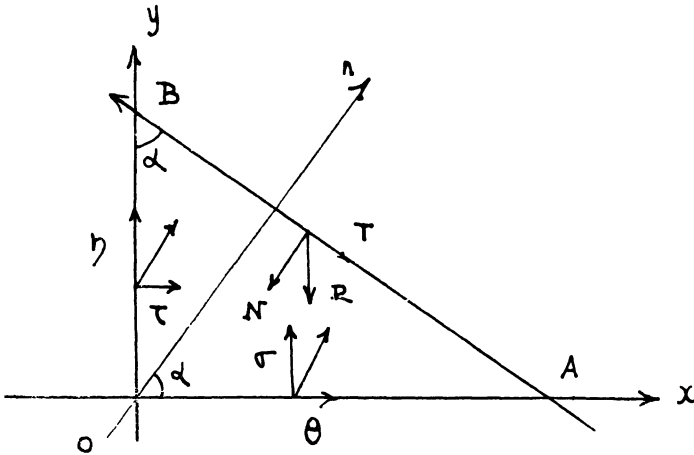


FIG. 21

En remarquant que : $dx = \sin \alpha ds$, $dy = \cos \alpha ds$, il vient :

$$-N = \frac{\tau + \sigma}{2} + \frac{\tau - \sigma}{2} \cos 2\alpha + \eta \sin 2\alpha,$$

$$-T = \frac{\sigma - \tau}{2} \sin 2\alpha + \eta \cos 2\alpha.$$

Telles sont les formules qui donnent les valeurs de N et T sur un élément du plan tangent de direction α .

L'extremum de N est atteint pour $\frac{dN}{d\alpha} = 0$,

$$(\sigma - \tau) \sin 2\alpha + 2\eta \cos 2\alpha = 2T = 0.$$

Donc quand N est maximum ou minimum, T est nul et on a :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\eta}{\tau - \sigma}.$$

On appelle *directions isostatiques* celles définies par la relation précédente. On voit qu'elles sont perpendiculaires, car l'équation : $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha_0$ admet les 2 solutions :

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{2}, \text{ et } \alpha = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

On appelle *lignes isostatiques* les courbes de la surface qui sont en chaque point tangentes à une direction isostatique.

Soient N_1 et N_2 les valeurs de N pour les directions isostatiques ; soient X et Y les projections sur ox et oy de la réaction R qui s'exerce sur AB. On a, si ox et oy sont les directions isostatiques :

$$N_1 dx = -Y ds, \quad N_2 dy = -X ds.$$

D'où :

$$\frac{X^2}{N_1^2} + \frac{Y^2}{N_2^2} = 1.$$

Si à partir de o nous portons un vecteur équipollent à R, l'extrémité de ce vecteur décrira donc une ellipse appelée *ellipse de Lamé*.

Étudions la relation qui existe entre la direction de R et celle de AB.

Le coefficient angulaire de R est : $a = \operatorname{tg} \alpha$;

celui de AB est : $a' = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. Donc :

$$aa' = -\frac{N_1}{N_2}.$$

Les directions R et AB sont donc conjuguées dans la conique :

$$\frac{x^2}{N_2} + \frac{y^2}{N_1} = 1.$$

Étudions la relation liant N et T. Pour cela, considérons dans un plan deux axes ON et OT, et menons par O un vecteur

OV dont les projections sur les axes sont N et T. Si nous supposons que M_x et M_y sont les directions isostatiques en M, η est nul et l'extrémité V de ce vecteur décrit un cercle d'équations paramétriques :

$$N = \frac{\tau + \sigma}{2} + \frac{\tau - \sigma}{2} \cos 2\alpha$$

$$T = \frac{\sigma - \tau}{2} \sin 2\alpha$$

Son centre est sur ON à la distance $\frac{\tau + \sigma}{2}$. Son rayon est $\frac{\tau - \sigma}{2}$

Ce cercle est appelé cercle de Mohr.

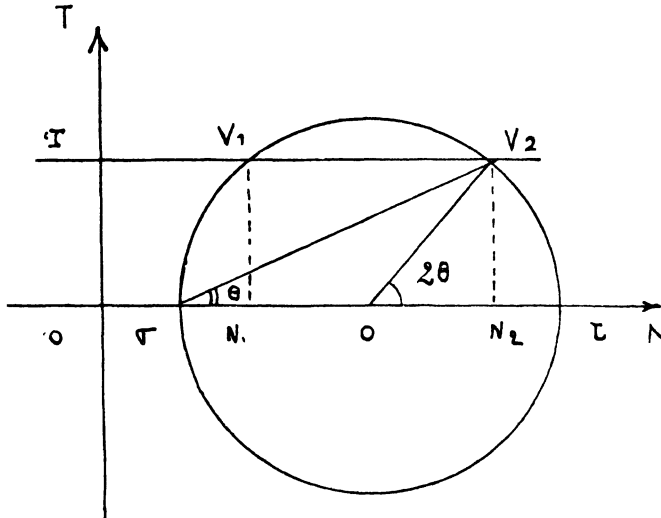


FIG. 22

Donnons-nous un cisaillement T . Il lui correspond deux points V_1 et V_2 du cercle de Mohr qui donnent deux valeurs N_1 et N_2 , et on a :

$$N_1 + N_2 = \tau + \sigma, \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2T}{N_1 - N_2}.$$

θ est donc l'angle que fait la direction sur laquelle le cisaillement est T avec les lignes isostatiques, car la première relation, montre que les directions correspondant aux efforts N_1 et N_2 sont perpendiculaires.

Envisageons le cas d'une direction de cisaillement pur : alors $N = 0$. Le cercle de Mohr a son centre en O ; $\theta = 45^\circ$, les valeurs de σ et τ sont opposées. On en déduit ce résultat que les directions de cisaillement pur sont les bissectrices des directions isostatiques.

CHAPITRE II

ÉTUDE DES EFFORTS DANS UN VOILE MINCE CYLINDRIQUE.

Rapportons le cylindre à trois axes : oz est vertical et dirigé vers le bas ; oy est la génératrice de clef ; ox complète le trièdre. Découpons dans le voile un petit élément ABCD, AB et CD parallèles au plan tangent, AD et BC parallèles à oy . On a :

$$AB = CD = ds, \quad AD = BC = dy.$$

Sur AB s'exerce un effort normal τdx , et un cisaillement ηdx ; sur BC un effort normal σdy et un cisaillement ηdy ; sur CD s'exerceront les réactions $-\left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy\right) ds$, $-\left(\eta + \frac{d\eta}{dy} dy\right) ds$; sur AD : $-\left(\sigma + \frac{d\sigma}{ds} ds\right) dy$, et $-\left(\eta + \frac{d\eta}{ds} ds\right) dy$.

σ, τ, η , sont des fonctions des variables y et s , s étant l'arc de la courbe section du cylindre par un plan perpendiculaire à l'axe. Sur l'élément ABCD s'exerce enfin une force extérieure $F dy ds$, qui se décompose en trois forces : $N dy ds$ normale au cylindre, $B dy ds$ suivant oy , et $A dy ds$ suivant la tangente à la courbe section. A et B sont comptés positivement dans le sens des axes, N dans le sens de la normale intérieure au cylindre. Projignons alors sur la normale ; nous aurons :

$$-\sigma \cdot dx \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - (\sigma + d\sigma) dx \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + N ds \cdot dx = 0$$

En confondant $\sin \frac{d\alpha}{2}$ et $\frac{d\alpha}{2}$, il vient :

$$N = \sigma \frac{d\alpha}{ds}, \quad \sigma = NR,$$

où R est le rayon de courbure de la section du cylindre.

Projetons maintenant suivant la tangente à la courbe section et suivant les génératrices. On a les deux équations :

$$\sigma \cdot dy - \left(\sigma + \frac{d\sigma}{ds} \cdot ds \right) dy + \eta \cdot ds - \left(\eta + \frac{d\eta}{dy} \cdot dy \right) ds + A \, dy \cdot ds = 0,$$

$$\tau \cdot ds - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} \cdot dy \right) ds + \eta \cdot dy - \left(\eta + \frac{d\eta}{ds} \cdot ds \right) dy + B \, dy \cdot ds = 0.$$

$$\text{D'où : (1) } A = \frac{d\sigma}{ds} + \frac{d\eta}{dy}, \quad B = \frac{d\tau}{dy} + \frac{d\eta}{ds},$$

qu'on peut encore écrire, en introduisant le rayon de courbure et l'angle α de la tangente à la courbe section avec ox :

$$(2) \quad A = \frac{d\sigma}{R \cdot d\alpha} + \frac{d\eta}{dy},$$

$$(3) \quad B = \frac{d\tau}{dy} + \frac{d\eta}{R \cdot d\alpha}.$$

Ces équations jointes à : $\sigma = NR$ permettent de déterminer σ , τ , η .

Nous effectuerons les calculs dans le cas où la force extérieure est la pression du vent, et en prenant pour sections du cylindre les courbes de Ribaucour : $R \cos^{k+1} \alpha = R_0$.

On a alors : $A = 0$, $B = 0$, $N = p \cdot \sin \alpha$.

Donc :

$$\sigma = R_0 p \cdot \sin \alpha \cos^{-(k+1)} \alpha.$$

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = R_0 p \cdot \cos^{-(k+2)} \alpha [1 + k \sin^2 \alpha].$$

En portant cette valeur de $\frac{d\sigma}{d\alpha}$ dans l'équation (2) il vient :

$$\frac{d\eta}{dy} = -\frac{p}{\cos \alpha} [1 + k \sin^2 \alpha], \quad \eta = -\frac{p y}{\cos \alpha} [1 + k \sin^2 \alpha].$$

Il n'est pas nécessaire d'ajouter une constante d'intégration : il suffit de choisir convenablement le plan xoz : prenons le passant par le milieu du voile cylindrique. Alors pour $y = 0$ on a nécessairement $\eta = 0$. Supposons en effet que η soit différent de 0 : la partie OIMA exercerait sur OINB un cisaillement η . Par raison de symétrie OINB exercerait le même cisaillement η sur OIMA : il ne peut y avoir équilibre que si ces deux cisaillements sont nuls.

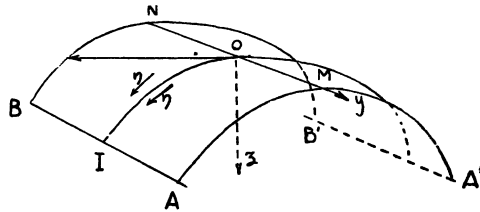


FIG. 23

$$\text{On a ensuite : } \frac{d\eta}{d\alpha} = - \frac{py \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} (1 + k + k \cos^2 \alpha) ,$$

En portant dans (3), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dy} &= - \frac{py \sin \alpha}{R_0 \cdot \cos^{1-k} \alpha} (1 + k + k \cos^2 \alpha) , \\ \tau &= - \frac{py^2 \sin \alpha}{2 R_0 \cos^{1-k} \alpha} \cdot (1 + k + k \cos^2 \alpha) + \tau_0 . \end{aligned}$$

Si la toiture est constituée par une voûte unique, τ doit être nul sur les rives AMA' et BNB' puisque aucune force ne peut l'équilibrer. Si l est la demi-longueur du hangar, on aura alors :

$$\tau = \frac{p(l^2 - y^2) \sin \alpha}{2 R_0 \cos^{1-k} \alpha} (1 + k + k \cos^2 \alpha) .$$

Il en est autrement dans le cas de plusieurs voûtes accolées. Supposons, par exemple, que τ soit nul sur les rives et négatif en o et sur toute la génératrice MN. Celle-ci a ainsi subi une traction : elle s'est allongée. Or il ne peut en être ainsi pour

tous les cylindres accolés. Il faut donc admettre que τ a sur les rives une valeur non nulle τ_0 . On écrira, pour déterminer τ_0 , que l'allongement de la génératrice considérée est nul ; si E est le module d'élasticité, on aura :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \tau(x) \cdot dx = 0, \tau_0 = -\frac{1}{l} \int_0^l \tau(x) \cdot dx,$$

τ_0 sera donc égal, pour chaque génératrice, à la valeur moyenne, changée de signe de τ le long de cette génératrice.

$$1^o \text{ — Etude de } \sigma. \quad \sigma = R_0 p \cdot \sin \alpha \cos^{-(k+1)} \alpha.$$

Pour une valeur donnée de l'indice k , on a :

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = p R_0 \cdot \cos^{-k} \alpha \left[1 + (k+1) \operatorname{tg}^2 \alpha \right],$$

$\frac{d\sigma}{d\alpha}$ ne s'annulera que si : $k < -1$. Donc, pour la parabole, les deux chaînettes et le cercle, σ est fonction croissante de α . Pour la cycloïde et la développante d'astroïde, σ passe par un maximum pour la valeur α_M de α satisfaisant à :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_M = -\frac{1}{k+1}.$$

Pour la cycloïde : $\alpha_M = 45^\circ$, $\sigma_M = 1920 \text{ kg/m}$.

Pour la développante d'astroïde :

$$\alpha_M = 35^\circ 16', \quad \sigma_M = 1898,56 \text{ kg/m}.$$

Pour une flèche donnée, la variation de σ d'une courbe à la suivante dépend de la valeur de α . On a en effet :

$$\frac{d\sigma}{dk} = p f \cdot \sin \alpha \cos^{-(k+1)} \alpha \left[\frac{dR_0}{dk} + R_0 \operatorname{Log} \cos \alpha \right],$$

avec : $R_0 = \frac{k \cos^k \alpha_0}{1 - \cos^k \alpha_0}$, où α_0 est l'inclinaison aux naissances.

Pour chaque valeur de α , la variation de σ dépendra du signe de la quantité : $\frac{dR_0}{dk} + R_0 \operatorname{Log} \cos \alpha$.

Voici le tableau des valeurs de σ pour quelques valeurs particulières de α :

Ces valeurs sont calculées pour : $f = 12 \text{ m.}$, $\alpha_0 = 60^\circ$,
 $p = 120 \text{ kgs/m}^2$. Elles sont en kilogs par mètre.

α	0	30°	45°	60°
Parabole	0	738,24	1920	6650,88
Chaînette	0	960	2036,16	4072,32
Chaînette d'égale résistance	0	1198,54	2077,2	3597,71
Cercle	0	1440	2036,16	2494,08
Cycloïde	0	1662,72	1920	1662,72
Développante d'Astroïde	0	1850,5	1744,2	1068,55

On voit qu'à la clef il ne s'exerce aucune compression. Sur les rives, σ prend une valeur bien déterminée, indépendante des modes de liaison, qu'on obtient en faisant dans la formule $\alpha = \alpha_0$. Au point de vue des réactions, la parabole présente l'inconvénient de rendre σ plus fort pour les valeurs importantes de α_0 .

$$2^\circ \text{ — Etude de } \eta. \quad \eta = - \frac{p y}{\cos \alpha} [1 + k \sin.^2 \alpha] .$$

On voit immédiatement que η peut s'annuler à la condition :
 $k < -1$; η est donc toujours négatif pour la parabole et les deux chaînettes. Pour le cercle, η s'annule quand : $\alpha = 90^\circ$;
pour la cycloïde, quand $\alpha = 45^\circ$; pour la développante d'as-

troïde, quand $\alpha = 35^{\circ} 16'$. Ces valeurs sont celles pour lesquelles σ est maximum, ce qui correspond bien à la propriété générale rappelée au chapitre I.

Pour une valeur donnée de k , on a :

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = -p y \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} (1 + k + k \cos^2 \alpha) .$$

Pour les valeurs de α inférieures à 90° , $\frac{d\eta}{d\alpha}$ est toujours négatif, et

η fonction décroissante de α si $k > -\frac{1}{2}$, croissante si $k < -\frac{1}{2}$.

Quand on passe d'une courbe à l'autre η est fonction décroissante de k . Voici le tableau numérique des valeurs remarquables de $\frac{\eta}{y}$.

α	0	30°	45°	60°
Parabole	— 120	— 207,84	— 409,68	— 600
Chaînette	— 120	— 173, 1	— 289,68	— 420
Chaînette d'égale résistance	— 120	— 138,48	— 169,68	— 240
Cercle	— 120	— 103,92	— 84,84	— 60
Cycloïde	— 120	— 69,24	0	120
Développante d'Astroïde	— 120	— 34,64	84,84	300

$$3^o - \text{Etude de } \tau. \quad \tau = \frac{p(1^2 - y^2)}{2R_0} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^{1-k} \alpha} \cdot (1 + k + k \cos^2 \alpha).$$

Nous voyons que τ est du signe contraire à $\frac{d\eta}{d\alpha}$; donc τ sera positif pour $k > -\frac{1}{2}$, négatif dans le cas contraire, c'est-à-dire pour le cercle, la cycloïde et la développante d'astroïde.

k étant donné on a :

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{p(1^2 - y^2)}{2R_0} \cos^{k-2} \alpha [\cos^4 \alpha (k^2 + 2k) + 1 - k^2].$$

Le crochet est constamment négatif pour le cercle, la cycloïde et la développante d'astroïde : τ est fonction décroissante de α . Il est constamment positif pour les deux chaînettes : τ est fonction croissante de α . Enfin, pour la parabole il s'annule pour la valeur α_0 , racine de :

$$8 \cos^4 \alpha_0 - 3 = 0, \quad \alpha_0 = 38^o 30'$$

τ est alors maximum et on a : $\tau_M = 15,408 (1^2 - y^2)$.

Quand on passe d'une courbe à l'autre, τ est fonction croissante de

k , d'après le tableau suivant des valeurs numériques de $\frac{\tau}{1^2 - y^2}$.

α	0°	30°	45°	60°
Parabole	0	14,6	15,	11,36
Chaînette	0	6,875	8,84	9,74
Chaînette d'égale résistance	0	2	3,465	6
Cercle	0	—1,25	— 1,77	— 2,16
Cycloïde	0	—3,6	— 7,5	— 19,48
Développante d'Astroïde	0	—6,35	— 20,412	— 111,11

Les valeurs positives de τ correspondent à des compressions, les valeurs négatives à des tractions. Dans ce dernier cas les armatures du ciment devront être plus résistantes.

Les valeurs les plus élevées de η et de τ , comme celles de σ , sont obtenues pour la parabole. Les courbes les meilleures sont plutôt le cercle et la cycloïde. Mais la conclusion qui semble s'imposer, c'est qu'aucune courbe ne réunit à elle seule toutes les qualités : telle qui, comme la parabole, paraissait se recommander, présente à d'autres points de vue qu'on vient de préciser, des inconvénients réels. Le mieux sera donc d'adopter une courbe qui, sans posséder d'avantages signalés, n'aura pas non plus de trop graves défauts : le cercle paraît réunir ces conditions. C'est à lui que nous nous rallierons.

Pour terminer cette étude des voûtes cylindriques, nous allons maintenant rechercher les figures théoriques d'équilibre de ces voûtes sous l'action du vent : c'est ce qu'on pourrait appeler *l'arc anémostatique*.

Les équations d'équilibre sont :

$$\sigma = N R, \quad \frac{d\sigma}{R \cdot d\alpha} = T.$$

Avec : $N = p \sin \alpha$, $T = 0$. La compression σ est donc constante, égale à σ_0 et on a :

$$R = \frac{\sigma_0}{p \sin \alpha}, \quad R \sin \alpha = R_0.$$

Les équations paramétriques de la courbe sont :

$$x = R_0 \text{Log} \sin \alpha, \quad y = R_0 \alpha$$

C'est la courbe dont la projection horizontale du rayon de courbure reste constante, propriété caractéristique de la chaînette d'égale résistance. La courbe est une chaînette d'égale résistance de base oy.

D'une manière plus générale, cherchons la courbe d'équilibre pour une voûte soumise simultanément à son propre poids et à l'action du vent. On a alors :

$$F_N = p \sin \alpha + \bar{\omega} \cos \alpha, \quad F_T = \bar{\omega} \sin \alpha.$$

Les équations d'équilibre deviennent en posant : $\omega = a p$,

$$p R (a \cos \alpha + \sin \alpha) = \sigma, \quad a p R \sin \alpha = \frac{d\sigma}{d\alpha}.$$

En tirant $\frac{d\sigma}{d\alpha}$ de la première par dérivation, et en le portant dans la seconde il vient :

$$\frac{dR}{d\alpha} (a \cos \alpha + \sin \alpha) = R (2a \sin \alpha - \cos \alpha).$$

Cette équation à variables séparées s'intègre aisément et donne l'équation naturelle de la courbe cherchée :

$$R = \frac{R_0 e^{k' \alpha}}{(a \cos \alpha + \sin \alpha)^k},$$

k et k' étant deux constantes respectivement égales à $\frac{1 + 2a^2}{1 + a^2}$

et à $\frac{a}{1 + a^2}$; en posant $a = \operatorname{tg} \alpha_0$, et $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$, on pourra donner à R la forme :

$$R = R'_0 \frac{e^{k' \alpha'}}{\sin^k \alpha'}.$$

L'ordre de grandeur de k est 2, celui de k' est $\frac{1}{10}$; mais leurs valeurs exactes dépendent évidemment de la force du vent envisagé : les valeurs 2 et $\frac{1}{10}$ correspondent à une pression de 250 kgs due au vent, ce qui est le maximum généralement admis. La courbe est donc assez voisine d'une chaînette de base oy.

CHAPITRE III
ÉTUDE DES EFFORTS
POUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION
ET LES SURFACES QUELCONQUES.

Les surfaces à double courbure présentent sur les surfaces cylindriques l'avantage de mieux résister au flambage lorsqu'elles sont mises en charge. Leur étude est donc intéressante du point de vue de la pratique aussi bien que de celui de la théorie : elle est le but de ce chapitre.

I. — Surfaces de révolution.

Nous établirons d'abord les équations générales qui permettent de déterminer les efforts dans une coupole de révolution sous l'action d'une force quelconque. Pour cela nous supposerons la surface rapportée à ses méridiens et à ses parallèles. Nous appellerons σ et τ les efforts normaux sur un parallèle et sur un méridien. Ce seront des efforts par unité de longueur. Nous désignerons par η les cisaillements suivant ces mêmes courbes : d'après une remarque déjà faite on sait en effet que les cisaillements sont les mêmes le long de deux directions rectangulaires du plan tangent. Soit d'autre part F_M , F_P , F_N les projections de la force extérieure rapportée à l'unité de surface, sur la tangente au méridien, sur la tangente au parallèle, et sur la normale à la surface. Nous envisagerons un petit élément de surface et nous écrirons que la somme des projections des forces, qui lui sont appliquées, sur chacune de ces directions est nulle. Nous choisirons comme origine le sommet de la coupole. La direction positive de la tangente sera celle des arcs croissants ; la normale positive sera alors la normale intérieure à la surface. Nous désignerons par α l'angle de la tangente au méridien avec ox , par R le

rayon de courbure du méridien, par ρ le rayon d'un parallèle. Une première équation très simple s'obtient en projetant sur la normale ; on a : $\frac{\sigma}{R} + \frac{\tau \sin \alpha}{\rho} = F_N$.

En effet, les deux efforts de compressions σ et $-(\sigma + d\sigma)$ ont pour projection sur la normale $-\frac{\sigma}{R}$. Les efforts τ et $-(\tau + d\tau)$, qui s'exercent le long du parallèle, ont pour résultante sur la normale à celui-ci la force $-\frac{\tau}{\rho}$, qui se projette sur la normale à la surface suivant $-\frac{\tau}{\rho} \sin \alpha$.

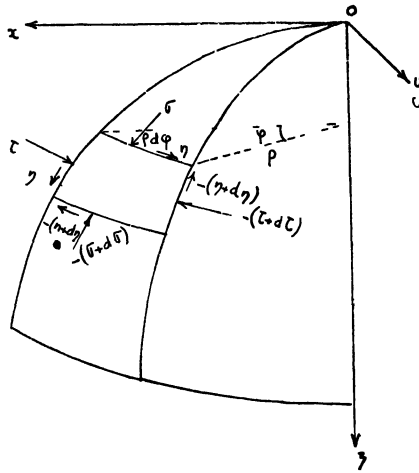


FIG. 24

Projetons ensuite suivant la tangente au méridien : nous avons d'abord la force unitaire $\frac{\tau}{\rho} \cos \alpha$ provenant des compressions le long du parallèle. Ensuite on a les deux forces : $\sigma \rho d\phi$, et $-\left(\sigma \rho + \frac{d\sigma \rho}{R d\alpha} R d\alpha\right) d\phi$, qui ont pour résultante : $-\frac{d\sigma \rho}{R d\alpha} R d\alpha d\phi$.

Enfin, les cisaillements : $\eta R d\alpha$ et $-\left(\eta R + \frac{d\eta R}{\rho d\varphi} \rho d\varphi\right) d\alpha$,

dont la résultante est : $-R \frac{d\eta}{d\varphi} d\varphi d\alpha$.

La somme de ces forces doit être opposée à la force extérieure : $F_M \rho R d\alpha d\varphi$. On a, par suite, la deuxième équation :

$$\frac{d\sigma\rho}{R.d\alpha} - \tau \cos \alpha + \frac{d\eta}{d\varphi} = \rho F_M.$$

Projetons enfin sur la tangente au parallèle ; nous avons les

deux forces : $\tau R d\alpha$ et $-\left(\tau R + \frac{d\tau R}{\rho d\varphi} \rho d\varphi\right) d\alpha$, dont la résultante est : $-\frac{d\tau}{d\varphi} \cdot R d\varphi d\alpha$.

Puis les cisaillements : $\eta \rho d\varphi$ et $-\left(\eta \rho + \frac{d\eta \rho}{R d\alpha} \cdot R d\alpha\right) d\varphi$,

dont la résultante est : $-\frac{d\eta \rho}{R d\alpha} R d\varphi d\alpha$.

En ajoutant la force extérieure $F_P R \rho d\varphi d\alpha$, on a la troisième équation :

$$\frac{d\tau}{d\varphi} + \frac{d\eta \rho}{R.d\alpha} = \rho F_P.$$

Finalement les efforts sont donc déterminés par le système de trois équations :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma}{R} + \frac{\tau \sin \alpha}{\rho} = F_N, \\ \frac{d\rho\sigma}{R.d\alpha} + \frac{d\eta}{d\varphi} - \tau \cos \alpha = \rho F_M, \\ \frac{d\tau}{d\varphi} + \frac{d\eta \rho}{R.d\alpha} = \rho F_P. \end{array} \right.$$

Appliquons ces équations au cas du vent ; on a alors : $F_M = F_P = 0$, et : $F_N = p \sin \alpha \cos \varphi$. Si de plus la méridienne est une courbe de Ribaucour, on prendra :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0, \quad \rho = R_0 \int_0^\alpha \cos^{-k} \alpha \cdot d\alpha.$$

Les calculs auxquels mène la résolution de ce système sont fort compliqués, et ne permettent pas, en général, la détermination des trois fonctions inconnues σ , τ et η . Prenons, pour en donner une idée, le cas le plus simple, celui de la coupole sphérique ; on a alors :

$$R = R_0, \quad \rho = R_0 \sin \alpha.$$

Le système (1) s'écrit :

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma + \tau &= p R_0 \sin \alpha \cos \varphi, \\ \frac{d\sigma \sin \alpha}{d\alpha} - \tau \cos \alpha + \frac{d\eta}{d\varphi} &= 0, \\ \frac{d\tau}{d\varphi} + \frac{d\eta \sin \alpha}{d\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

En tirant τ de la première et le portant dans les deux autres, on obtient :

$$\begin{aligned} \sin \alpha \frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{d\eta}{d\varphi} + 2\sigma \cos \alpha - p R_0 \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi &= 0, \\ -\frac{d\sigma}{d\varphi} + \sin \alpha \frac{d\eta}{d\alpha} + \eta \cos \alpha - p R_0 \sin \alpha \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Les deux fonctions σ et η satisfont donc à un système d'équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre. En écrivant que la valeur de $\frac{d^2\eta}{d\alpha d\varphi}$ est la même, calculée à partir de chacune de ces équations, on ramène la résolution de ce système à celui d'une équation aux dérivées partielles du 2^e ordre pour la fonction σ . Cette équation est :

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \frac{d^2\sigma}{d\alpha^2} + \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + 4 \cos \alpha \sin \alpha \frac{d\sigma}{d\alpha} + 2\sigma \cos 2\alpha &= \\ p R \sin \alpha \cos \varphi (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha), \end{aligned}$$

équation qu'on ne sait pas résoudre.

Cependant il est ici possible de déterminer une solution particulière. On sera alors ramené à trouver la solution de l'équation sans second membre. Cherchons à satisfaire au système (2) en prenant pour η une fonction de la forme $\eta = f(\alpha) \sin \varphi$. On a alors :

$$\sin \alpha \frac{d\sigma}{d\alpha} + 2\sigma \cos \alpha = \cos \varphi \left[p R_0 \sin \alpha \cos \alpha - f(\alpha) \right],$$

équation différentielle ordinaire en σ , dont l'intégrale est :

$$\sigma = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{p R_0}{3} \sin^3 \alpha - \int_0^\alpha f(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \right].$$

Posons : $f(\alpha) = \frac{g'(\alpha)}{\sin \alpha}$, où g' est la dérivée d'une nouvelle fonction de α , il vient :

$$\sigma = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{p R_0}{3} \sin^3 \alpha - g(\alpha) \right];$$

$g(\alpha)$ est alors déterminé par la troisième équation du système :

$$2 \frac{p R_0}{3} \sin \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} g(\alpha) = -g''(\alpha).$$

La fonction g est donc intégrale de l'équation différentielle du 2^e ordre :

$$y'' \sin^2 \alpha - y = \sin^3 \alpha,$$

où on a supprimé le facteur d'homothétie $\frac{2}{3} p R_0$. Cette équation n'est pas d'un type intégrable. En posant $\sin \alpha = x$ elle devient :

$$x(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x^3 \frac{dy}{dx} - y = x^3.$$

Ceci montre que la solution est une fonction de $\sin \alpha$. Cette fonction est impaire. On peut la développer en série de Fourier. En posant :

$$y = a_1 \sin \alpha + a_2 \sin 2\alpha + \dots + a_n \sin n\alpha + \dots,$$

on obtient entre les coefficients la relation de récurrence :

$$\frac{(n-2)^2}{4} \varepsilon_{n-2} - \varepsilon_n \left(1 + \frac{n^2}{2} \right) + \frac{(n+2)^2}{2} \varepsilon_{n+2} = 0, \quad n > 3.$$

Pour $n = 3$ cette expression est égale à 1. Les coefficients a_1 et a_2 peuvent être pris arbitrairement. En calculant la somme de cette série par approximation, on pourra donc déterminer $g(\alpha)$, et par suite σ et τ , ainsi que η .

Le procédé pourrait encore s'appliquer pour un dôme parabolique ; mais l'équation différentielle est beaucoup plus compliquée.

Nous voyons donc qu'en général on ne peut résoudre analytiquement le problème de la répartition des efforts, même pour une surface de révolution.

II. — Surfaces quelconques.

Nous supposons d'abord la surface rapportée à deux réseaux de courbes, $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$, orthogonales. Nous désignerons alors par σ et τ les efforts normaux aux directions des courbes $v = C^{te}$ et $u = C^{te}$, respectivement ; η sera la valeur commune des cisaillements le long de ces courbes. Nous désignerons par F_N , F_u , F_v les projections de la force extérieure rapportée à l'unité de surface, sur la normale et sur les tangentes aux courbes coordonnées. En projetant les forces appliquées à un élément de surface sur chacune de ces directions, et en écrivant que leur somme est nulle, on obtiendra les équations cherchées. En projetant sur la normale, on a la première équation :

$$\frac{\sigma}{R_u} + \frac{\tau}{R_v} = F_N ,$$

où R_u et R_v sont les rayons de courbure des sections normales tangentes aux courbes $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$.

Projetons sur la tangente à la courbe $u = C^{te}$: les forces qui s'exercent sur l'élément de surface parallèlement à cette direction sont :

1^o) $\sigma \sqrt{E} du$, et $-\left(\sigma \sqrt{E} + \frac{d\sigma \sqrt{E}}{dv} \cdot dv \right) du$, dont la somme est $-\frac{d\sigma \sqrt{E}}{dv} \cdot du dv$.

2^o) $\eta \sqrt{G} dv$, et $-\left(\eta \sqrt{G} + \frac{d\eta \sqrt{G}}{du} \cdot du \right) dv$
dont la somme est $-\frac{d\eta \sqrt{G}}{du} \cdot du dv$.

3^o) La projection de la force $\frac{\tau}{R_2} dS$ dirigée suivant la normale principale à la courbe $v = C^{te}$, et due aux compressions τ qui s'exercent le long de cette courbe, R_2 étant le rayon de courbure de la courbe $v = C^{te}$. Cette projection est

$\frac{\tau}{R_2} \cos \gamma \sqrt{EG} \cdot du dv$, γ étant l'angle de la normale principale à la courbe $v = C^{te}$ avec la tangente à la courbe $u = C^{te}$. L'expression de $\cos \gamma$ est :

$$\cos \gamma = S \frac{R_2}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{dx}{du} \cdot \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{dx}{dv} \right),$$

S étant le symbole de Lamé ; on a donc la deuxième équation :

$$\frac{d\sigma \sqrt{E}}{dv} + \frac{d\eta \sqrt{G}}{du} - \frac{\tau \cos \gamma}{R_2} \cdot \sqrt{EG} = \sqrt{EG} \cdot F_u,$$

car l'élément de surface est $dS = \sqrt{EG}$, les courbes coordonnées étant orthogonales.

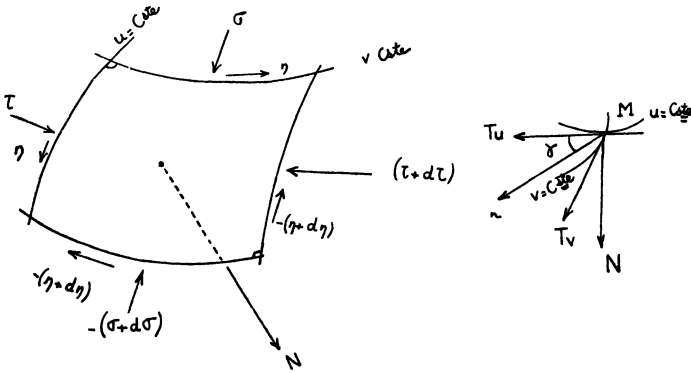


FIG. 25

On obtiendrait par le même procédé la troisième équation :

$$\frac{d\eta \sqrt{E}}{dv} + \frac{d\tau \sqrt{G}}{du} - \frac{\sigma \cos \gamma'}{R_1} \cdot \sqrt{EG} = \sqrt{EG} \cdot F_v,$$

où R_1 est le rayon de courbure de la courbe $u = C^{te}$, et où on a :

$$\cos \gamma' = S \frac{R_1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{dx}{dv} \cdot \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{dx}{du} \right).$$

Finalement le système qui définira la répartition des efforts sur la surface sera :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma}{R_u} + \frac{\tau}{R_v} = F_N, \\ \frac{d\sigma\sqrt{E}}{dv} + \frac{d\tau\sqrt{G}}{du} - \frac{\tau\cos\gamma}{R_2} \cdot \sqrt{EG} = \sqrt{EG} \cdot F_u, \\ \frac{d\tau\sqrt{E}}{dv} + \frac{d\sigma\sqrt{G}}{du} - \frac{\sigma\cos\gamma'}{R_1} \cdot \sqrt{EG} = \sqrt{EG} \cdot F_v. \end{array} \right.$$

On remarquera que ce système peut se simplifier légèrement si on rapporte la surface à ses lignes géodésiques et à une famille de trajectoires orthogonales. En effet le long d'une géodésique le plan osculateur est normal à la surface et γ , ou γ' , est donc égal à $\frac{\pi}{2}$. Par suite, dans une des deux dernières équations le terme en τ ou celui en σ disparaîtra : c'est ce qu'on a vu pour les surfaces de révolution qui correspondent à un cas particulier de cette propriété générale.

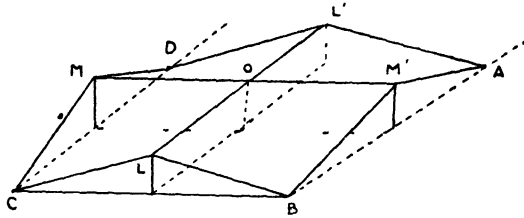


FIG. 26

On remarquera que les expressions $\frac{\cos\gamma}{R_2}$, et $\frac{\cos\gamma'}{R_1}$ ne sont autres que les courbures géodésiques des lignes $v = C^te$ et $u = C^te$.

Nous allons appliquer cette méthode au paraboloïde hyperbolique et d'une façon plus générale aux conoïdes. Les travaux de M. AIMOND, Directeur du Bureau d'études du Service des Bases au Ministère de l'Air, ont en effet appelé l'attention sur ces surfaces, utilisables comme toitures de hangar. La toiture est formée de quatre paraboloïdes ou de quatre conoïdes accolés ainsi que le montre la figure. Il existe d'ailleurs d'autres méthodes de groupement, mais il s'agit toujours de calculer les efforts pour une de ces surfaces.

Prenons donc un paraboloïde équilatère rapporté aux deux génératrices passant par le sommet et à un troisième axe, vertical dirigé vers le bas :

$$z = k xy.$$

Une première famille de géodésiques est constituée par un système de génératrices, $x = u$ par exemple. Cherchons la fonction $y = y(u, v)$ que l'on doit choisir pour y afin que les lignes $v = C^{\text{te}}$ soient les trajectoires orthogonales des précédentes. On doit avoir :

$$S \frac{dx}{du} \cdot \frac{dx}{dv} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dy}{dv} \cdot \frac{dy}{du} + k u \cdot \frac{dy}{dv} \left(k y + k u \frac{dy}{du} \right) = 0 :$$

Écartons la solution $\frac{dy}{dv}$ qui ne correspond à aucune réalité géométrique ; il reste une équation différentielle ordinaire pour déterminer y :

$$\frac{dy}{du} (1 + k^2 u^2) = - k^2 u y,$$

dont la solution est :
$$y = \frac{C}{\sqrt{1 + k^2 u^2}},$$

C étant une fonction arbitraire de v .

D'une façon plus générale, on peut se poser le même problème pour le conoïde de degré n : $z = k x^n y$ et on trouve pour y :

$$y = \frac{C}{\sqrt{1 + k^2 n u^{2n}}}.$$

On peut prendre $C = v$ et on a alors, pour un paraboloïde, la représentation paramétrique cherchée :

$$x = u, \quad y = \frac{v}{\sqrt{1 + k^2 u^2}}, \quad z = \frac{k u v}{\sqrt{1 + k^2 u^2}}$$

On a : $F = 0, \quad G = 1, \quad E = \frac{1 + k^2 u^2 + k^2 v^2}{(1 + k^2 u^2)^2},$

et le premier déterminant de Gauss est : $D = \frac{-2 k^3 u v}{(1 + k^2 u^2)^2}$

On a alors :

$$\frac{1}{R_u} = 0, \quad \frac{1}{R_v} = \frac{D}{E^{3/2}} = \frac{-2 k^2 u v (1 + k^2 u^2)}{(1 + k^2 u^2 + k^2 v^2)^{3/2}}.$$

Le cosinus de l'angle de la normale à la surface avec ox est :

$$A = \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-k v}{\sqrt{1 + k^2 u^2 + k^2 v^2}}$$

On a donc, pour le vent :

$$F_N = \frac{-p k v}{\sqrt{1 + k^2 u^2 + k^2 v^2}}.$$

Enfin la courbure géodésique de la ligne $v = C^{te}$ est :

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\cos \gamma}{R_2} = - \frac{k^2 v}{1 + k^2 u^2 + k^2 v^2}.$$

Si nous portons ces différentes valeurs dans le système (1), nous aurons d'abord :

$$\tau = \frac{p}{2 k^2} \cdot \frac{1 + k^2 u^2 + k^2 v^2}{u v (1 + k^2 u^2)}.$$

La dernière équation donne alors η : $\frac{d \eta \sqrt{E}}{d v} = - \frac{d \tau}{d u}$,

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{d \eta \sqrt{E}}{d v} &= \frac{1}{u^2 v} + \frac{3 k^4 v}{(1 + k^2 u^2)^2} \\ \eta \sqrt{E} &= \frac{\text{Log } v}{v^2} + \frac{3 k^4 v^2}{2 (1 + k^2 u^2)^2} + f(u), \end{aligned}$$

où f est une fonction de la seule variable u . Pour les paraboloïdes usuels, E est voisin de 1. On voit donc que, tout le long d'une génératrice ($u = C^{te}$), on peut ajouter un cisaillement représenté par $f(u)$, constant le long de la génératrice. Ayant ainsi déterminé η , on aura σ grâce à la deuxième équation de (1) :

$$\frac{d \sigma \sqrt{E}}{d v} = \frac{\tau \cos \gamma}{R_2} - \frac{d \eta}{d u}.$$

On aura donc :

$$\sigma \sqrt{E} = \int \left(\frac{\tau \cos \gamma}{R_2} - \frac{d\eta}{du} \right) \cdot dv + g(u),$$

où g est une fonction de la seule variable u .

Si on admet que E est voisin de 1, on voit que, tout le long d'une génératrice, on peut ajouter des efforts de compression ou de traction, constants le long de la génératrice. Cette propriété importante a été signalée par M. AIMOND. Elle permet de reporter d'une rive sur l'autre des réactions s'exerçant sur ces rives, au moyen de compressions ou de tractions s'exerçant le long d'une génératrice.

Le même calcul pourrait être repris pour un conoïde de degré n : on verrait encore que le long d'une génératrice ($u = C^te$), $\eta \sqrt{E}$ et $\sigma \sqrt{E}$ sont de la forme : $\alpha(u, v) + f(u)$, c'est-à-dire que le long d'une génératrice on peut ajouter des efforts constants le long de la génératrice.

* * *

Nous nous sommes servis jusqu'ici des coordonnées curvilignes de la surface rapportée à un réseau orthogonal. Cette méthode présente l'avantage de n'avoir à introduire que des efforts normaux aux directions sur lesquels ils s'exercent. Elle sera aussi avantageuse toutes les fois que, comme pour le vent, la projection de la force extérieure sur le plan tangent est nulle.

Mais pour certaines surfaces, ou pour certaines forces, il peut être préférable d'employer des équations en coordonnées cartésiennes. C'est le cas par exemple si on étudie l'action d'une force parallèle à l'un des axes (pesanteur). Les équations sont alors un peu plus difficiles à établir : elles nécessitent l'introduction de « fatigues obliques ». Nous résumerons ici la méthode employée par M. ISSENMANN-PILARSKI.

Considérons le plan tangent en un point M de la surface,

qui coupe l'axe oz en T . Soient TX et TY ses traces sur les plans xoz et yoz , dont les cosinus directeurs sont respectivement $\alpha, 0; \gamma$ et $0, \beta', \gamma'$.

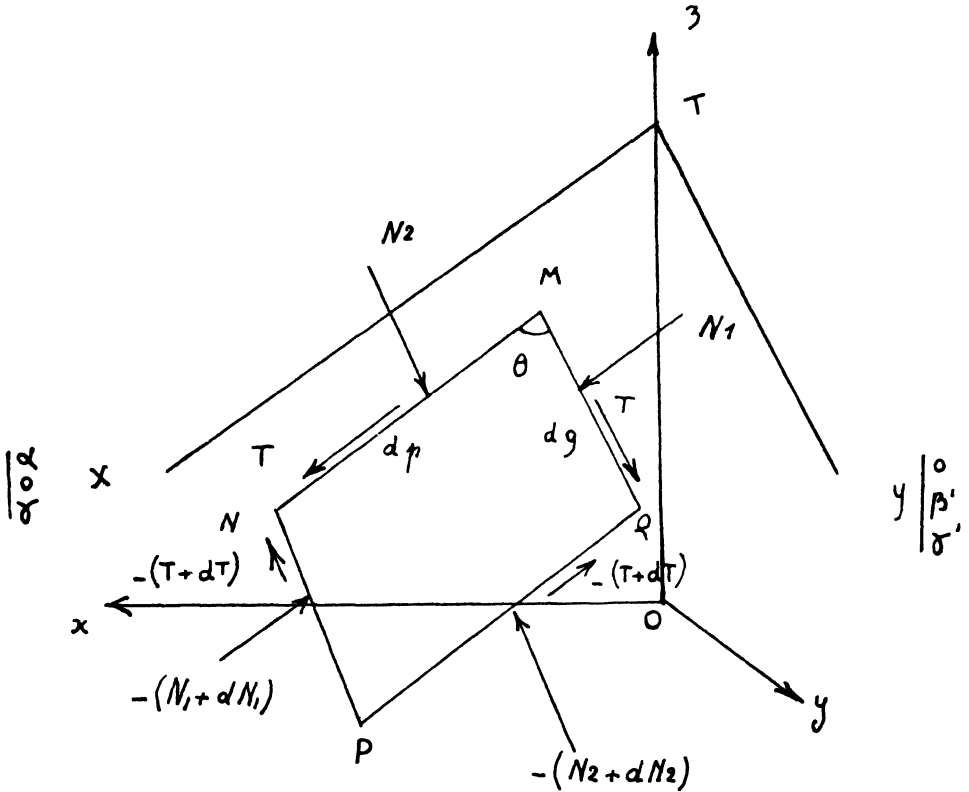


FIG. 27

Si la surface est donnée sous la forme : $z = z(x, y)$, on a :

$$\frac{\gamma}{\alpha} = p, \quad \frac{\gamma'}{\alpha'} = q.$$

Soit enfin θ l'angle des droites TX et TY , défini par :

$$\cos \theta = \gamma \gamma' = \frac{p \alpha}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + p^2 q^2}}.$$

Ceci étant, considérons un petit élément du plan tangent dont les côtés sont parallèles à TX et TY et qu'on peut assimiler à un élément de surface. Appelons N_1 et N_2 les forces qui s'exercent sur les côtés MQ et MN, N_1 étant parallèle à MN et N_2 à MQ. Soient T_1 et T_2 les efforts, analogues à des cisaillements qui s'exercent le long de ces côtés. Il s'agit de forces par unité de longueur. Remarquons d'abord qu'on a :

$$T_1 = T_2.$$

Projetons en effet l'élément sur le plan xoy. L'élément projeté sera en équilibre et cet élément est rectangulaire. On a donc $\theta_1 = \theta_2$, θ_1 et θ_2 étant les efforts tangentiels sur l'élément projeté. Or :

$$T_2 \alpha dp = \theta_2 dx, \quad dx = \alpha dp.$$

$$T_1 \beta' dq = \theta_1 dy, \quad dy = \beta' dq.$$

Donc : $T_1 = \theta_1, \quad T_2 = \theta_2, \quad \text{et} : T_1 = T_2.$

Enfin soient F_x, F_y, F_z les projections sur les axes de la force extérieure rapportée à l'unité de surface.

La force extérieure qui s'exerce sur l'élément considéré a pour projection sur ox :

$$F_x dS = \sin \theta dp dq \quad F_x = X dx dy,$$

en posant : $A = \frac{\sin \theta}{\alpha \beta'}, \quad X = A F_x ;$

et on a des formules analogues pour F_y et F_z .

Projetons sur chaque axe les forces s'exerçant sur l'élément. Sur ox on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\beta'} N_1 dy + T dx - \left[\frac{\alpha}{\beta'} N_1 + \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha}{\beta'} N_1 \right) dx \right] dy \\ & - \left[T + \frac{dT}{dy} dy \right] dx + X dx dy = 0, \end{aligned}$$

D'où la première équation :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha}{\beta'} N_1 \right) + \frac{dT}{dy} = X \dots$$

Sur oy, on a de même :

$$\begin{aligned} \frac{\beta'}{\alpha} N_2 dx + T dy - \left[\frac{\beta'}{\alpha} N_2 + \frac{d}{dy} \left(\frac{\beta'}{\alpha} N_2 \right) dy \right] dx \\ - \left[T + \frac{dT}{dx} dx \right] dy + Y dx dy = 0, \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{\beta'}{\alpha} N_2 \right) + \frac{dT}{dx} = Y. \end{aligned}$$

Sur oz on aura enfin, en posant : $\frac{\alpha}{\beta'} N_1 = \Sigma_1$, et $\frac{\beta'}{\alpha} N_2 = \Sigma_2$:

$$\frac{d}{dx} \left[\Sigma_1 p + T q \right] dx dy + \frac{d}{dy} \left[\Sigma_2 q + T p \right] dx dy = Z dx dy,$$

qui, en tenant compte des deux précédentes, s'écrira :

$$r \Sigma_1 + t \Sigma_2 + 2 s T = Z - p X - q Y.$$

Finalement, le système qui définit les efforts est :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \Sigma_1}{dx} + \frac{dT}{dy} &= X, \\ \frac{d \Sigma_2}{dy} + \frac{dT}{dx} &= Y, \\ r \Sigma_1 + t \Sigma_2 + 2 s T &= Z - p X - q Y. \end{aligned} \right.$$

Connaissant Σ_1 et Σ_2 , on en déduit N_1 et N_2 par les formules :

$$\Sigma_1 = \frac{\alpha}{\beta'} N_1, \quad \Sigma_2 = \frac{\beta'}{\alpha} N_2,$$

ou :

$$\Sigma_1 = \sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}} \cdot N_1, \quad \Sigma_2 = \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} \cdot N_2.$$

Si on veut obtenir les efforts normaux et les cisaillements, au sens habituel du terme, il suffira de composer les forces N_1 et T : on obtient ainsi la force élastique R qui s'exerce sur MQ . On la décomposera ensuite suivant MQ et la direction perpendiculaire ce qui donnera η , cisaillement et σ , effort normal.

Comme exemple de cette méthode nous allons chercher à nouveau les efforts qui s'exercent dans un paraboloid hyperbolique soumis à l'action du vent :

$$z = h. xy.$$

$$p = hy, \quad q = hx, \quad r = t = 0, \quad s = h.$$

Dans les paraboloïdes usuels α et β' sont voisins de 1 : nous admettrons donc que $A = \sin \theta = 1$. On a, dans cette hypothèse :

$$N_1 = \Sigma_1, \quad N_2 = \Sigma_2.$$

Si nous admettons, comme toujours, que la pression normale du vent est proportionnelle au cosinus directeur de la normale à l'élément frappé relatif à ox , on aura, ω étant la pression normale unitaire :

$$F_N = \frac{\omega h y}{\sqrt{1 + h^2 x^2 + h^2 y^2}}.$$

D'où :

$$X = \frac{\omega h^2 y^2}{1 + h^2 x^2 + h^2 y^2}, \quad Y = \frac{\omega h^2 x y}{1 + h^2 x^2 + h^2 y^2}, \quad Z = \frac{-\omega h y}{1 + h^2 x^2 + h^2 y^2}.$$

La dernière équation du système (2) donne alors : $T = -\frac{\omega h y}{2}$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\omega h x}{2} + \omega \int \frac{h^2 y^2}{1 + h^2 x^2 + h^2 y^2} d'x, \\ &= \frac{\omega h x}{2} + \frac{\omega h y^2}{\sqrt{1 + h^2 y^2}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{h x}{\sqrt{1 + h^2 y^2}} + f(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \omega \int \frac{h^2 x y}{1 + h^2 x^2 + h^2 y^2} dy, \\ &= \frac{\omega x}{2} \operatorname{Log} \left(1 + h^2 x^2 + h^2 y^2 \right) + g(x). \end{aligned}$$

On re rouve bien le résultat déjà signalé : le long d'une génératrice du paraboloid hyperbolique, on peut ajouter des efforts constants le long de cette génératrice.

CONCLUSION

Il résulte de cette étude que le problème de l'action du vent sur une voûte est très ardu, et ne se prête pas facilement à une mise en équation qui soit inattaquable. A la base de la solution adoptée, il y aura toujours une hypothèse qui ne sera pas entièrement conforme à la réalité. Le vent, nous l'avons dit, n'est pas un phénomène assez continu pour qu'on puisse appliquer les méthodes mathématiques à l'étude de ses effets, sans une certaine approximation. Les règlements administratifs, si critiquables qu'ils soient à certains points de vue, que nous avons précisés, ont adopté avec raison cette manière de voir. La complexité du problème, la nécessité d'obtenir des résultats qui aient une portée pratique justifient une solution approchée. Mais il est permis de penser qu'une fois le principe de l'approximation admis, il importe de serrer la réalité au plus près. Nous estimons qu'il est possible de le faire davantage en rejetant des formules trop simplificatrices. Un calcul plus rigoureux peut être fait sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à des fonctions compliquées qui annuleraient, dans la pratique, les avantages de cette plus grande rigueur.

La première et la deuxième partie ont montré que le calcul direct sur l'équation même des courbes d'intrados est fort accessible. Lorsqu'il introduira des fonctions non élémentaires, le mieux est de substituer à la courbe donnée une courbe osculatrice voisine de la famille des paraboloïques primaires. L'emploi de ces courbes se recommande particulièrement par les liens étroits qu'elles présentent entre elles et la continuité qu'on constate en passant de l'une à l'autre. En insérant, comme il a été expliqué, une courbe quelconque entre deux autres courbes de la famille des paraboloïques, on obtiendra

une approximation bien supérieure à la méthode trop grossière de la substitution de la corde à l'arc. Cette conclusion s'impose plus spécialement pour les coupoles où cette substitution ne saurait être envisagée.

La troisième partie avait pour but la recherche de certaines formes de toitures remarquables. Mais le problème d'analyse que soulève la détermination des surfaces convenables ne peut, on l'a vu, recevoir de solution que pour des cas particuliers. Au point de vue théorique deux sortes de surfaces intéressantes ont été mises en évidence : celles engendrées par des courbes de Ribaucour situées dans des plans parallèles aux plans de coordonnées, et celles généralisant dans l'espace une propriété de la parabole. Cependant la complexité de ces surfaces ne permettra pas de les utiliser dans la pratique.

Dans la quatrième partie, nous avons retrouvé les liens unissant les courbes de la famille des paraboliques. La répartition interne des efforts pourra être étudiée facilement sur l'équation même de ces courbes, dans le cas des voûtes cylindriques. Pour les coupoles, on devra se contenter de méthodes de calcul approchées, la solution analytique du problème ne pouvant pas, en général, être déterminée.

En ce qui concerne la meilleure courbe à recommander, les résultats exposés conseillent la prudence. Deux facteurs surtout doivent être pris en considération : le moment de renversement et les efforts internes. Au premier point de vue, la parabole est la courbe la meilleure. Mais par contre son emploi donne lieu à des efforts internes souvent plus considérables que pour les autres courbes. Signalons aussi que c'est l'arc dont la portée est la plus faible. Il semble donc qu'on ne puisse déterminer d'une manière certaine quelle est la meilleure courbe. Celle que nous proposerons, après discussion, est l'arc de cercle : il occupe, parmi les courbes étudiées, une place moyenne. Il est normal de l'adopter lorsque la force extérieure est, comme c'est le cas pour le vent, une pression normale. Enfin, il se trouve qu'il aura précisément l'avantage de simplifier les calculs.

BIBLIOGRAPHIE

- H. BOUASSE : *Cours de résistance des matériaux*. (Delagrave, éditeur.)
— *Hydrodynamique générale*. (id.)
— *Résistance des fluides*. (id.)
- G. DARBOUX : *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. (Gauthier-Villars, 1887, tomes I et II.)
- G. ESPITALIER : *Cours supérieur de béton armé*. (2^e édition, 3 volumes, 1934-1939.)
- E. GOURSAT : *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*. (Hermann, 1896, tomes I et II.)
- L. ISSENMANN-PILARSKI : *Calcul des voiles minces en béton armé*. (Dunod, 1942.)
— *Voiles minces ; voûtes et coques*. (Dunod, 1937.)
- N. JOUKOWSKI : *Aérodynamique*. (Cours professé à l'Ecole Impériale technique de Moscou, Gauthier Villars, 1931.)
- H. MUCHART : *Le calcul des moteurs éoliens*. (Thèse, Montpellier, 1928.)
- M. PUJADE-RENAUD : Hangar de la S.N.C.A.S.E. (*Revue « Travaux »*, juin 1939.)
- M. RANKINE : *Manuel de mécanique appliquée*. (Traduction A. Vialay, Paris, 1876.)
- Prince SISOWATH YOUTÉVONG : *Essai de normalisation des courbes d'intrados de voûtes en berceau*. (Thèse, Montpellier, 1941.)
- E. TURRIÈRE : Sur certaines surfaces généralisant la chaînette de Coriolis. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, t. XI, 1911, pp. 385-394.)
— Sur les réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, t. XII, 1912, pp. 364 374.)

- Etude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XL, 1912, pp. 228 238.)
 - Sur une congruence de droites associée au réseau conjugué d'une surface, orthogonal en projection. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, t. XIII, 1913, pp. 163 176.)
 - Formules canoniques pour les calculs mécaniques des lignes aériennes dans le cas des portées asymétriques. (*Revue générale de l'Electricité*, t. XXXIX, 16 mai 1936, pp. 715 720.)
 - Etude mécanique des câbles de téléphériques. La flèche en charge des câbles aériens. (*Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, t. XXIV, 1939.)
-

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	9
--------------------	---

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE COMPARATIVE DE L'ACTION DU VENT SUR LES ÇOURBES D'INTRADOS DE VOUTES EN BERCEAU

Introduction	13
CHAPITRE I. — Le vent et son introduction dans les calculs	15
CHAPITRE II. — Les procédés employés pour le calcul des pressions. Erreurs auxquels ils conduisent	25
CHAPITRE III. — Essai de classement des paraboliques primaires au point de vue de l'action du vent	33
CHAPITRE IV. — Nouveaux effets de l'action du vent	48
CHAPITRE V. — Moment de renversement. Centre de poussée ...	56

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE COMPARATIVE DE L'ACTION DU VENT SUR LES DOMES ET LES COUPÔLES.

CHAPITRE I. — La résultante des pressions. Méridiennes de pression minima	71
CHAPITRE II. — Moment résultant. Centre de poussée	83

TROISIÈME PARTIE
RECHERCHE THÉORIQUE
DE CERTAINES CLASSES DE SURFACES
GÉNÉRALISANT LES COURBES DE RIBAUCCOUR.

CHAPITRE I. — Etude en coordonnées ponctuelles	88
CHAPITRE II. — Etude en coordonnées tangentielles	98

QUATRIÈME PARTIE
RÉPARTITION DES EFFORTS DUS A L'ACTION DU VENT
DANS UN VOILE MINCE.

CHAPITRE I. — Généralités sur les voiles minces	115
CHAPITRE II. — Etude des efforts dans un voile mince cylindrique	119
CHAPITRE III. — Etude des efforts pour des surfaces de révolution et des surfaces quelconques	128
§ I. Surfaces de révolution	128
§ II. Surfaces quelconques	133
Conclusion	143
Bibliographie	145
Table des matières	147
