

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

V. KOURGANOFF

La part de la mécanique céleste dans la découverte de Pluton

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1941

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1941__245__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1941__245__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Série A, n° 1971

N° D'ORDRE :

2 838

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

V. KOURGANOFF

1^{re} THÈSE. — LA PART DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE DANS LA DÉCOUVERTE
DE PLUTON.

2^e THÈSE. — LES PROGRÈS RÉCENTS DANS L'OBSERVATION ET LA THÉORIE
DES AUBORES POLAIRES.

Soutenues le juillet 1941, devant la Commission d'Examen

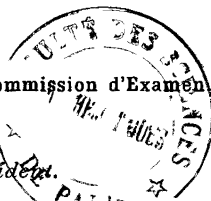
MM. ESCLANGON

CHAZY

TREMBLOT

Président.

Examineurs.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1941

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires</i>	H. LEBESGUE.	DANGEARD.	G. BERTRAND.	BOHN.
	Émile PICARD.	LESPIEAU.	Charles FABRY.	RABAUD.
	LÉON BRILLOUIN.	VESSIOT.	LÉON BERTRAND.	CAULLERY.
	PÉCHARD.	P. PORTIER.	WINTREBERT.	J. PERRIN.
	FREUNDLER.	M. MOLLIARD.	O. DUBOSCQ.	E. CARTAN.
	AUGER.	L. LAPICQUE.		

PROFESSEURS

Émile BOREL.....	†	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	PRENANT.....	†	Anatomie et Histologie com- parées.
A. COTTON.....	†	Recherches physiques.	VILLEY.....		Mécanique physique et expé- rimentale.
J. DRACH.....	†	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	COMBES..	†	Physiologie végétale.
Charles PÉREZ...	†	Zoologie.	GARNIER.....	†	Application de l'Analyse à la Géométrie.
M. GUICHARD.....	†	Analyse et mesures chimi- ques.	PÈRES.....		Mécanique théorique des fluides.
Paul MONTEL... ..	†	Théorie des fonctions.	HACKSPILL.....	†	Chimie minérale.
L. BLARINGHEM...	†	Botanique.	TOUSSAINT.....		Technique Aéronautique.
G. JULIA.....	†	Mécanique analytique et Mé- canique céleste.	M. CURIE.....		Physique (P. C. B.).
C. MAUGUIN.....	†	Minéralogie.	G. RIBAUD.....	†	Hautes températures.
A. DENJOY.....	†	Géométrie supérieure.	CHAZY.....	†	Mécanique rationnelle.
L. LUTAUD.....	†	Géographie physique et Géo- logie dynamique.	GAULT.....		Chimie (P. C. B.).
G. BRUHAT.....	†	Physique théorique et Phy- sique céleste.	CROZE.....		Recherches physiques.
E. DARMOIS.....	†	<i>Enseignement de Physique.</i>	DUPONT.....	†	Théories chimiques.
A. DERIVRE.....	†	Physique générale et Radio- activité.	LANQUINE.....	†	Géologie structurale et Géo- logie appliquée.
A. DUFOUR.....	†	Physique (P. C. B.).	VALIRON.....		Mathématiques générales.
L. DUNOYER.....		Optique appliquée.	BARRABÉ.....		Géologie structurale et Géo- logie appliquée.
A. GUILLIERMOND.	†	Botanique.	MILLOT.....		Biologie animale (P. C. B.).
M. JAVILLIER.....	†	Chimie biologique.	F. PERRIN.....		Théories physiques.
Henri VILLAT....	†	Mécanique des fluides et applications.	VAVON.....		Chimie organique.
Cb. JACOB.....	†	Géologie.	G. DARMOIS.....		Calcul des Probabilités et Phy- sique-Mathématique.
P. PASCAL.....	†	Chimie générale.	CHATTON.....	†	Biologie maritime.
M. FRÉCHET.....	†	Calcul différentiel et Calcul intégral.	AUBEL.....		Chimie biologique.
E. ESCLANGON...	†	Astronomie.	Jacques BOURCART		Géographie physique et Géo- logie dynamique.
M ^{me} RAMART-LUCAS.	†	Chimie organique.	M ^{me} JOLIO-CURIE.		Physique générale et Radio- activité.
H. BÉGHIN.....	†	Mécanique physique et expé- rimentale.	PLANTEFOL.....		Biologie végétale (P. C. B.).
Foch.....	†	Mécanique expérimentale des fluides.	CABANNES.....		Enseignement de Physique.
PAUTHENIER.....		Physique (P. C. B.).	GRASSÉ.....	†	Zoologie (révolution des êtres organisés).
De BROGLIE.....	†	Théories physiques.	PRÉVOST.....		Chimie (P. C. B.).
CHRÉTIEN.....		Optique appliquée.	BOULIGAND.....		Mathématiques.
LABROUSTE.....		Physique du Globe.	CHAUDRON.....		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.

A LA MÉMOIRE
DE
PERCIVAL LOWELL

PREMIÈRE THÈSE.

LA PART DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE DANS LA DÉCOUVERTE DE PLUTON.

INTRODUCTION.

Le 13 mars 1930 on apprenait la découverte à l'Observatoire Lowell (Arizona U. S. A.) d'une planète transneptunienne. L'événement suscita un très vif intérêt : non seulement une nouvelle planète venait s'ajouter à la famille déjà nombreuse des astres qui gravitent autour du Soleil, mais surtout les circonstances de sa découverte rappelaient singulièrement celles de la découverte de Neptune.

Bien avant que M. Tombaugh l'eût aperçue au « blink microscop » sur les clichés des 21, 23 et 29 janvier, divers astronomes avaient essayé de prévoir *par le calcul* les éléments, la masse et la position d'une telle planète. Le Verrier fit les premiers pas, et, successivement, Todd, Forbes, Flammarion, Lau, See, Gailliot, Pickering et Lowell cherchèrent à voir la planète « au bout de leur plume » (1).

C'est avec le plus grand empressement que l'on se mit à déterminer les éléments de l'orbite du nouvel astre afin de discerner le

(1) L'historique de la question a fait l'objet de très nombreuses publications. Nous nous contenterons de renvoyer à l'excellent et très bref exposé de A. D. C. CROMMELIN, *Monthly Notices*, 1930, t. 91, p. 380. Pour les travaux de LE VERRIER, cf. Addition à *la Connaissance des Temps* pour 1849, p. 239 et 254; et *Comptes rendus*, 1848, vol. 27, p. 209. Pour les travaux de FLAMMARION, cf. *Astronomie*, 1884, p. 81, « La planète transneptunienne ».

gagnant de cette étrange compétition. Bientôt il n'y eut plus de doute, c'était Percival Lowell, fervent scrutateur de Mars et fondateur de l'Observatoire portant son nom, qui l'emportait de loin. Non seulement la position qu'il avait prédite était à peine à 6° de la position réelle, ce qui représente « le champ de bonne définition » d'un télescope moyen, mais l'orbite ressemblait tellement à l'orbite prédite 15 ans plus tôt, qu'on avait l'impression de se trouver en présence d'un des plus beaux succès de la Mécanique céleste, ne le cédant en rien à la découverte de Neptune. En même temps que Lowell, William-Henry Pickering, frère de E. C. Pickering, était arrivé à des résultats similaires, bien que beaucoup moins précis, par une méthode entièrement différente.

Quelle ne fut donc pas la surprise des admirateurs de Lowell lorsque Ernest-William Brown, auteur d'une célèbre théorie de la Lune, publia deux Mémoires où il prétendait démontrer que *les calculs de Lowell et de Pickering n'étaient pas valables, et que la découverte de Pluton à 6° de la position prédite par Lowell relevait d'une simple coïncidence.*

Accumulant argument sur argument, s'accrochant aux moindres détails, avec un acharnement comparable à celui déployé jadis par les adversaires de Le Verrier, Brown développe la thèse du « pur hasard ». Le procédé n'était pas nouveau : déjà pour Babinet la découverte de Neptune à 52' de la position prédite par Le Verrier n'était qu'un « hasard fortuit » ⁽¹⁾.

Aussi ces critiques parurent-elles suspectes à quelques astronomes malgré le prestige de leur auteur. En effet, même si Brown avait découvert une faute quelconque dans les calculs de Lowell, et ce n'était nullement le cas, il paraîtrait presque incroyable que Lowell soit arrivé par « pur hasard » à déterminer les éléments de son orbite, pourtant nombreux, avec une grande précision.

Ce qui caractérise les critiques de Brown, c'est que nulle part il n'analyse les calculs mêmes de Lowell, et que nulle part il n'introduit dans ses raisonnements *l'ensemble* des éléments de Pluton. Ses critiques sont essentiellement indirectes. N'en citons qu'un exemple : il montre d'abord que les résidus d'une planète

(1) Cf. LE VERRIER, *Comptes rendus*, 1848, vol. 27, p. 276.

perturbée doivent avoir une certaine allure, puis que les résidus modernes d'Uranus ont une allure différente, et il conclut qu'il n'y a dans ces résidus « aucune espèce de matériaux pour la prévision d'une planète inconnue ». Mais alors quelques objections se présentent : comment se fait-il que la solution de Lowell ne soit pas indéterminée ? Pourquoi concorde-t-elle avec celle de Pickering, tirée des résidus de Neptune ? Pourquoi la planète de Lowell, semblable à Pluton ne serait-ce que par hasard, réduit-elle l'ensemble des résidus systématiques d'Uranus dans la proportion de 99 % ? Et ce dernier paradoxe n'est pas sans nous avoir incité à reviser les calculs de Lowell et ceux de Brown.

Nous nous proposons de résoudre le problème soulevé par Brown : mais nous en chercherons la solution dans un esprit différent. Alors qu'il attaque le problème pour ainsi dire *du dehors*, méthode élégante mais qui laisse subsister beaucoup de questions et ne résout rien de façon définitive, *nous essayerons de démontrer le mécanisme intime des solutions de Lowell et de Pickering*, et nous le comparerons, pièce par pièce, aux données fournies par l'observation de Pluton. Notre façon de procéder est incontestablement plus longue, elle nous a coûté de longs et fastidieux calculs numériques, mais nous en sommes récompensé par la clarté qu'ils projettent sur les curieux travaux de Le Verrier, Lowell, Pickering et les critiques de Brown lui-même.

La complexité du problème interdit la discussion des travaux de Lowell avant d'avoir calculé *les perturbations exactes produites par Pluton dans le mouvement d'Uranus*. C'est donc à ce calcul que nous consacrerons le début de la première partie. Nous l'effectuerons d'abord par une méthode classique du développement en série de la fonction perturbatrice. Puis nous vérifierons nos résultats par une méthode d'interpolation, inspirée de Le Verrier, mais spécialement adaptée par nous au cas difficile où les moyens mouvements sont presque commensurables.

Nous démontrerons qu'en donnant aux perturbations une forme spéciale, on assure leur continuité quand $in + i'n'$ tend vers zéro. La comparaison de la théorie aux observations nous fournira alors d'importants renseignements sur les différents résidus d'Uranus, ainsi qu'une nouvelle détermination des masses de Neptune et de

Pluton. Le dernier chapitre (p. 56) résumera l'ensemble des résultats de la première partie.

La deuxième partie est consacrée à la *discussion des recherches de Lowell*. Elle débutera par un bref résumé de son Mémoire sur la planète transneptunienne. Nous ferons ressortir les perfectionnements apportés par Lowell à la méthode de Le Verrier, puis nous montrerons que la méthode de Lowell, à son tour, est susceptible d'une transformation qui lui donne plus de rigueur et de simplicité.

Après avoir précisé l'analogie remarquable entre Pluton et la planète X_1 de Lowell, par la détermination de leurs positions respectives entre 1690 et 1930 (*fig. 3*, p. 75), nous calculerons les perturbations introduites par le développement nécessairement limité de Lowell, et nous les comparerons à celles de Pluton. *Nous découvrirons ainsi l'exactitude des perturbations de Lowell pendant la période des grandes oscillations*, à un léger décalage près, et la présence, dans la période moderne, de petites oscillations sans rapport avec les éléments de la planète X_1 ou de Pluton. Un paragraphe spécial sera consacré à l'explication de ces oscillations « fictives ». Répondant enfin à quelques objections de Brown, nous expliquerons les raisons de la dualité des solutions tirées des résidus d'Uranus, le rôle des résidus anciens, et ce qu'on doit entendre par « erreur probable » d'une solution comme celle de Le Verrier ou de Lowell. Nous essayerons aussi de retrouver l'influence des calculs de Lowell sur les recherches photographiques de Pluton. Le dernier chapitre (p. 109) résumera les conclusions de notre discussion, qui sont dans l'ensemble très favorables à Lowell.

La troisième partie est consacrée aux *recherches de Pickering*. Une brève introduction (p. 113) montrera l'intérêt et l'importance des travaux de Pickering malgré leur caractère un peu empirique. Dans le premier chapitre nous essayerons de résumer les généralités indispensables à l'intelligence des analyses qui suivent et ce qui, dans les travaux de Pickering sur la planète transneptunienne, peut intéresser les recherches futures.

Les analyses des solutions de 1909, 1919 et 1928 (deuxième chapitre) montreront que *les travaux de Pickering, qui eut l'idée originale de se servir des résidus de Neptune, confirment*

le succès de la Mécanique céleste. Le dernier chapitre de la troisième partie (p. 139) résumera nos conclusions sur les recherches de Pickering.

La quatrième partie, consacrée à la *discussion des critiques de Brown*, débutera par une introduction où nous résumerons les arguments avancés contre la validité des solutions de Lowell et de Pickering. Passant ensuite à l'examen des objections tirées de la prétendue petitesse de la masse de Pluton et de la disproportion de cette masse avec celle de la planète X_1 , nous réfuterons aisément ces objections au moyen des résultats numériques des précédentes parties. Nous examinerons enfin l'influence des grandes erreurs qui affectent les observations anciennes et nous montrerons le caractère illusoire des objections tirées de la symétrie accidentelle du système Uranus-Pluton par rapport au milieu de l'intervalle 1780-1910.

Reste l'objection, en apparence plus grave, de la non-conformité des résidus d'Uranus et de Neptune au « critérium » de Brown. Ce critérium, destiné à mettre en évidence la présence de perturbations dans une série donnée de résidus, est l'application d'une *transformation* spéciale. Après un exposé rapide des propriétés générales de cette transformation, nous accorderons à Brown qu'elle peut fournir une méthode approchée intéressante pour la recherche de nouvelles planètes. Par contre, les différences des résultats obtenus, quand on applique le critérium à la découverte de Neptune, planète à très faible excentricité ou à la découverte de Pluton, planète à très forte excentricité, s'expliquent, en partie, par le fait que *la transformation de Brown suppose* que les planètes décrivent *des orbites circulaires, hypothèse inadmissible dans le cas de Pluton*. Mais ce n'est pas tout. La contradiction apparente entre l'ensemble de nos conclusions et l'absence de matériaux utilisables dans les résidus de Neptune et d'Uranus d'après le critérium, s'explique par le simple fait que *Brown ne soumet au critérium qu'une partie des résidus*, négligeant dans l'ensemble une partie essentielle : *les résidus anciens. Brown commet cette grave omission parce que la transformation ne s'applique qu'aux courbes continues alors que les résidus anciens sont isolés.*

Pour trancher la question d'une façon définitive, nous avons

trouvé une méthode indirecte qui, précisément, permet de tenir compte de l'ensemble des données dans la transformation de Brown. On trouve, en appliquant cette méthode, que les résidus d'*Uranus* et de *Neptune* utilisés par *Lowell* et *Pickering* sont conformes au critérium, dans la mesure où le critérium lui-même est conforme aux résultats fournis par la transformation des perturbations exactes.

Nous croyons donc avoir établi que la thèse du « pur hasard » est tout à fait insoutenable, et nous sommes heureux d'avoir satisfait au vœu de *Le Verrier* qui demandait de ne point laisser s'accréditer le mythe du hasard dans les grandes découvertes scientifiques, sous peine de porter un profond découragement parmi les hommes qui se dévouent aux progrès des sciences.

Qu'il nous soit permis, avant de terminer, d'exprimer notre profonde reconnaissance à *M. Jean Chazy*, qui attira notre attention sur les problèmes posés par la découverte de *Pluton*, et à *M. Ernest Esclangon*, Directeur de l'Observatoire de Paris, qui nous a prodigué ses encouragements et nous a maintes fois facilité notre tâche.

PREMIÈRE PARTIE.

PERTURBATIONS PRODUITES PAR PLUTON DANS LE MOUVEMENT D'URANUS.

CHAPITRE I.

CALCUL DES PERTURBATIONS PAR LA MÉTHODE CLASSIQUE.

1. Les masses des planètes et les éléments de leurs orbites. —
Nous emprunterons les éléments de Pluton à Nicholson et Mayall ⁽¹⁾
et ceux d'Uranus à Gaillot ⁽²⁾.

<i>Pluton.</i>	<i>Uranus.</i>
Éléments héliocentriques. Écliptique et équinoxe moyens de 1930,0.	Éléments héliocentriques. Écliptique et équinoxe moyens de 1850,0.
T' = 1989 Oct. 2,03 T. U.	$\varepsilon = 29^{\circ}17'50'',91$
$\omega' = 113^{\circ}1'41'',3$ (arg. de la latitude)	$\varpi = 170^{\circ}50'07'',1$ (long. du périhélie)
$\Omega' = 109^{\circ}21'39'',4$	$\theta = \Omega = 73^{\circ}13'54'',4$
$i' = 17^{\circ}6'58'',4$	$\varphi = i = 0^{\circ}46'19'',72$
$a' = 39,60038$	$a = 19,21824$
$e' = 0,246086$	$e = 0,0463413$
$\mu' = 14'',23833$ par jour moyen	$n = 15424'',87318$ par année julienne
$n' = 5200'',5500$ par année julienne	$m = 1:22453$
$P' = 249,2097$ années tropiques	$P = 84,0219$ années tropiques

Les éléments d'Uranus ci-dessus sont les éléments provisoires de Gaillot; si l'on prenait les éléments déduits de la comparaison de sa théorie avec les observations, on aurait $n = 15424,838$; mais le moyen mouvement, n' , de Pluton est encore si mal connu,

⁽¹⁾ *Astrophysical Journal*, 1931, n° 73, p. 5.

⁽²⁾ *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 28, p. 4 et p. A.83. Dans ces *Annales* nous citerons partout la section « Mémoires ».

que le choix de n est absolument indifférent. Voici les valeurs de $\nu = \frac{n'}{n}$ suivant les valeurs adoptées pour n' .

Avec la valeur $n' = 5207'',9$ de Zagar ⁽¹⁾	$\nu = 0,337\ 63$
Avec la valeur $n' = 5205'',9$ de Roure ⁽²⁾	$\nu = 0,337\ 50$
Avec la valeur $n' = 5200'',5$ de Nicholson et Mayall.....	$\nu = 0,337\ 15$

On passe des éléments de Pluton ci-dessus aux éléments rapportés à l'écliptique et l'équinoxe de 1850,0 en appliquant les formules classiques de précession ⁽³⁾.

On trouve

$$\begin{aligned}\omega' &= 112^\circ\ 59'\ 45'',2 & \tau &= 289^\circ\ 46'\ 12'',64 \\ \Omega' &= 108\ 16\ 30,4 & \tau' &= 289\ 50\ 12,64 \\ i' &= 17\ 07\ 14,56 & \gamma &= 16\ 29\ 39,59 \\ & & \tau_1 &= \sin \frac{\gamma}{2} = 0,143\ 444.\end{aligned}$$

Les angles τ , τ' , γ se calculent aisément d'après les formules de Le Verrier ⁽⁴⁾; ils fixent la position relative des deux orbites en 1850,0.

Il résulte des recherches faites jusqu'à présent que la masse de Pluton ne saurait être de beaucoup supérieure à celle de la Terre ⁽⁵⁾. Nos perturbations seront calculées avec une précision suffisante, si nous adoptons comme masse provisoire de Pluton précisément celle de la Terre, soit : $T = 1:329390$. Dans ce qui suit les masses seront toujours rapportées à cette unité T , sauf indication contraire. *Notre principale inconnue, m' , représente donc le rapport de la masse de Pluton à celle de la Terre.*

La quantité fondamentale $\alpha = \frac{a}{a'}$ est calculée par la formule

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 \left(\frac{n_0}{n'}\right)^2 = \frac{1+m}{1+m'},$$

⁽¹⁾ F. ZAGAR, *R. Osservatorio astronomico di Padova*, 1931, n° 18, p. 21.

⁽²⁾ *Journal des Observateurs*, avril 1940, p. 55.

⁽³⁾ *Connaissance des Temps* (1933 par exemple), p. 1X.

⁽⁴⁾ *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. X, p. 15.

⁽⁵⁾ Cf. E. BOWER, *Lick Obs. Bull.*, 1931, n° 437, p. 171.

où nous avons pris ⁽¹⁾

$$n_0 = n - \sum \frac{d\varepsilon}{dt} = 15\,382'',835 \quad \text{et} \quad m' = 1\,T.$$

On trouve ainsi

$$\alpha = 0,485\,304\,78.$$

2. Les variations des éléments d'Uranus sous l'action de Pluton.

— Nous avons calculé les valeurs des transcendentes ⁽²⁾ $b^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, ..., $c^{(i)}$, $c_1^{(i)}$, ..., etc., de deux manières différentes, d'abord à l'aide des séries, ensuite par des formules de récurrence. Ce calcul est assez laborieux pour une valeur de α aussi grande que 0,485.

Des valeurs, ainsi vérifiées, des $b_\mu^{(i)}$, $c_\mu^{(i)}$, etc., nous avons déduit celles des coefficients ⁽³⁾ $\alpha' A_\mu^{(i)}$, $\alpha' B_\mu^{(i)}$, etc. Si, dans les coefficients dépendant de e' , ψ' , φ' , η , on substitue les valeurs numériques pour 1850,0 de ces dernières, les formules de Le Verrier donneront les variations des éléments de l'orbite d'Uranus ⁽⁴⁾.

Voici ces formules :

$$\alpha' R_{(0,1)} = \sum N e^h e' h' \eta^f \cos D, \quad \alpha \alpha' \frac{dR_{(0,1)}}{da} = \sum \alpha \frac{dN}{da} e^h e' h' \eta^f \cos D,$$

$$N = V^{(j)} \cdot \alpha' A^{(j)} + V_1^{(j)} \cdot \alpha' A_1^{(j)} + V_2^{(j)} \cdot \alpha' A_2^{(j)} + \dots,$$

$$D = i' l' + i \lambda + k' \varpi' + k \omega + u \tau',$$

$$\delta = i' v + i,$$

$$e = \sin \psi,$$

$$\mathcal{J} = \frac{m' \alpha}{1 + m} \frac{n_0}{n} \frac{e^h e' h' \eta^f}{\delta \sin i''}.$$

⁽¹⁾ Cf. GAILLOT, *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 28, p. 8. L'influence de la valeur adoptée pour m' sur la valeur de α est insensible.

⁽²⁾ Voir Tableau I, de l'Addition.

⁽³⁾ Voir Tableau II, de l'Addition.

⁽⁴⁾ Pour les notations, cf. *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 28, p. 5-7; ou TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 330-338; ou LE VERRIER, *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. II, p. 27 et t. X, p. 106.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \delta l = \left(-1,5 \frac{n_0}{n} 2i \frac{\mathcal{J}N}{\delta} - 2\mathcal{J}a \frac{dN}{da} + \frac{h}{e} \mathcal{J}N \cos \psi \tan \frac{\psi}{2} \right) \sin D \quad (1), \\ \delta e = \left(-\frac{k}{e} \mathcal{J}N \cos \psi - \frac{1}{2} \tan \frac{\psi}{2} \cos \psi 2i \mathcal{J}N \right) \cos D, \\ e \delta \varpi = \left(+\frac{h}{e} \mathcal{J}N \cos \psi \right) \sin D \quad (1). \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \delta \varphi = -\frac{\tan \frac{\gamma}{2}}{\cos \psi} \mathcal{J}N \left[\frac{f}{2 \tan^2 \frac{\gamma}{2}} \sin D \sin(\tau - \theta) + \left(i + k + \frac{u}{2\gamma^2} \right) \cos D \cos(\tau - \theta) \right], \\ \sin \varphi \delta \theta = -\frac{\tan \frac{\gamma}{2}}{\cos \psi} \mathcal{J}N \left[\frac{-f}{2 \tan^2 \frac{\gamma}{2}} \sin D \cos(\tau - \theta) + \left(i + k + \frac{u}{2\gamma^2} \right) \cos D \sin(\tau - \theta) \right], \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \delta a = 2ai \mathcal{J}N \cos D.$$

Les coefficients $V_p^{(j)}$ sont indépendants de a et de a' . Ils ont été calculés par Le Verrier pour un grand nombre de termes ⁽²⁾, mais la faible convergence des séries dans le cas qui nous occupe nous a conduit à calculer un très grand nombre de nouvelles valeurs des $V_p^{(j)}$. La place nous manque pour les reproduire dans ce Mémoire.

En calculant les perturbations périodiques des éléments d'Uranus, nous omettons toutes les inégalités dépendant de l'argument $V = 3l' - \lambda$ et de ses multiples. Chacune de ces inégalités à très longue période sera calculée à part, puis développée en série suivant les puissances du temps t , conformément à la méthode exposée au paragraphe suivant. Ces inégalités joueront le rôle d'inégalités séculaires. Les inégalités séculaires proprement dites sont, ici, extrêmement faibles, et dans l'ensemble négligeables.

Le Tableau I ci-contre donne : $100 \delta l$, $100 e \delta \varpi$, $100 \delta e$. En face de l'expression analytique de l'argument D , on lit les valeurs numériques des coefficients respectifs de $\sin D$ et de $\cos D$. Nous désignons, avec Le Verrier, par « terme d'ordre n » la somme des

(1) Nous omettons *ici* dans les expressions de δl et de $e \delta \varpi$ les très petits termes en $\sin \varphi \delta \theta$, mais dans le calcul numérique nous en avons tenu compte.

(2) Cf. *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. II, Addition.

TABLEAU I. — Inégalités périodiques des éléments.

(A l'exception des termes en $V = 3l' - \lambda$.)

D	100 δl	100 $e \delta \varpi$	100 δe	D	100 δl	100 $e \delta \varpi$	100 δe
<i>Termes d'ordre zéro.</i>				<i>Termes d'ordre un (suite).</i>			
$1l' - 1\lambda$	+21"	— 1"		$-2l' + 3\lambda + \varpi' - 2\tau'$	— 1"		
$2l' - 2\lambda$	+32	+ 1		$-1l' + 2\lambda + \varpi' - 2\tau'$	— 1		
$3l' - 3\lambda$	+ 8	+ 1		$0l' + 1\lambda + \varpi' - 2\tau'$	— 1		
$4l' - 4\lambda$	+ 2			$1l' + 0\lambda + \varpi' - 2\tau'$	— 1		
$-3l' + 3\lambda - \varpi' + \omega$		+ 1	— 1"	$0l' + 1\lambda + \omega + 2\tau'$	+ 1	— 1"	+ 1"
$-2l' + 2\lambda - \varpi' + \omega$	— 1	+ 2	— 2	$1l' + 0\lambda + \omega - 2\tau'$	+ 1	— 2	+ 2
$-1l' + 1\lambda - \varpi' + \omega$	— 1	+ 2	— 2	$2l' - 1\lambda + \omega - 2\tau'$	— 1	+ 2	— 2
$1l' - 1\lambda - \varpi' + \omega$	— 1	+ 3	— 3	$1l' + 0\lambda - 2\varpi' + \omega$		— 1	+ 1
$3l' - 3\lambda - \varpi' + \omega$	+ 1	— 2	+ 2	$2l' - 1\lambda - 2\varpi' + \omega$	— 1	+ 2	— 2
$4l' - 4\lambda - \varpi' + \omega$	+ 1	— 1	+ 1	$4l' - 3\lambda - 2\varpi' + \omega$		— 1	+ 1
$5l' - 5\lambda - \varpi' + \omega$		— 1	+ 1	$5l' - 4\lambda - 2\varpi' + \omega$		— 1	+ 1
<i>Termes d'ordre un.</i>				<i>Termes d'ordre deux.</i>			
$-3l' + 4\lambda - \varpi'$	+ 1			$2l' - 0\lambda - 2\omega$		+ 2	+ 2
$-2l' + 3\lambda - \varpi'$	+ 2			$4l' - 2\lambda - 2\omega$	+ 1	— 1	— 1
$-1l' + 2\lambda - \varpi'$	+ 2			$1l' + 1\lambda - \varpi' - \omega$	+ 1	— 1	— 1
$0l' + 1\lambda - \varpi'$	— 4			$2l' + 0\lambda - \varpi' - \omega$	+ 1	— 4	— 4
$1l' + 0\lambda - \varpi'$	—21	+ 1		$4l' - 2\lambda - \varpi' - \omega$	—11	+15	+15
$2l' - 1\lambda - \varpi'$	+44	— 1		$5l' - 3\lambda - \varpi' - \omega$	— 3	+ 4	+ 4
$3l' - 2\lambda - \varpi'$	+45	+ 1		$2l' + 0\lambda - 2\varpi'$	— 4		
$4l' - 3\lambda - \varpi'$	+14	+ 1		$4l' - 2\lambda - 2\varpi'$	+55		
$5l' - 4\lambda - \varpi'$	+ 4	+ 1		$5l' - 3\lambda - 2\varpi'$	+17		
$6l' - 5\lambda - \varpi'$	+ 1	+ 1		$6l' - 4\lambda - 2\varpi'$	+ 6		
$-2l' + 3\lambda - \omega$	— 1	+ 2	+ 2	$7l' - 5\lambda - 2\varpi'$	+ 2		
$-1l' + 2\lambda - \omega$		— 1	— 1	$-1l' + 3\lambda - 2\tau'$	— 1		
$0l' + 1\lambda - \omega$	+ 2	— 4	— 4	$0l' - 2\lambda - 2\tau'$	— 1		
$1l' + 0\lambda - \omega$	+ 3	—10	—10	$1l' + 1\lambda - 2\tau'$	— 2		
$2l' - 1\lambda - \omega$	—28	+45	+45	$2l' + 0\lambda - 2\tau'$	— 3		
$3l' - 2\lambda - \omega$	— 3	+ 6	+ 6	$4l' - 2\lambda - 2\tau'$	+ 2		
$4l' - 3\lambda - \omega$	— 1	+ 1	+ 1	$6l' - 4\lambda - 3\varpi' + \omega$	+ 1	— 1	+ 1

TABLEAU I (suite). — Inégalités périodiques des éléments.

(A l'exception des termes en $V = 3l' - \lambda$.)

D	100 δl	100 $e \delta \varpi$	100 δe	D	100 δl	100 $e \delta \varpi$	100 δe
<i>Termes d'ordre trois.</i>				<i>Termes d'ordre cinq.</i>			
$3l' + 0\lambda - 3\varpi'$	— 1"			$7l' - 2\lambda - 5\varpi'$	+ 9"		
$4l' - 1\lambda - 3\varpi'$	+ 1			$8l' - 3\lambda - 5\varpi'$	+ 33		
$5l' - 2\lambda - 3\varpi'$	+ 96			$9l' - 4\lambda - 5\varpi'$	+ 7		
$6l' - 3\lambda - 3\varpi'$	+ 20			$10l' - 5\lambda - 5\varpi'$	+ 4		
$7l' - 4\lambda - 3\varpi'$	+ 8			$11l' - 6\lambda - 5\varpi'$	+ 2		
$8l' - 5\lambda - 3\varpi'$	+ 3			$7l' - 2\lambda - 4\varpi' - \omega$	— 4	— 6"	— 6"
$9l' - 6\lambda - 3\varpi'$	+ 1			$8l' - 3\lambda - 4\varpi' - \omega$	— 13	+ 8	+ 8
$3l' + 0\lambda - 2\varpi' - \omega$	+ 1	— 1"	— 1"	$9l' - 4\lambda - 4\varpi' - \omega$	— 1	+ 2	+ 2
$4l' - 1\lambda - 2\varpi' - \omega$	— 5	— 23	— 23	$10l' - 5\lambda - 4\varpi' - \omega$		+ 1	+ 1
$5l' - 2\lambda - 2\varpi' - \omega$	— 96	+ 23	+ 23	$7l' - 2\lambda - 3\varpi' - 2\omega$	+ 1	+ 3	+ 3
$6l' - 3\lambda - 2\varpi' - \omega$	— 4	+ 6	+ 6	$8l' - 3\lambda - 3\varpi' - 2\omega$	+ 2	— 2	— 2
$7l' - 4\lambda - 2\varpi' - \omega$	— 1	+ 1	+ 1	$7l' - 2\lambda - 3\varpi' - 2\tau'$	+ 2		
$3l' - 0\lambda - \varpi' - 2\omega$		+ 1	+ 1	$8l' - 3\lambda - 3\varpi' - 2\tau'$	+ 11		
$4l' - 1\lambda - \varpi' - 2\omega$		+ 4	+ 4	$9l' - 4\lambda - 3\varpi' - 2\tau'$	+ 1		
$5l' - 2\lambda - \varpi' - 2\omega$	+ 2	— 3	— 3	$8l' - 3\lambda - 2\varpi' - \omega - 2\tau'$	— 1	+ 1	+ 1
$1l' + 2\lambda - \varpi' - 2\tau'$	— 1			<i>Termes d'ordre six.</i>			
$2l' + 1\lambda - \varpi' - 2\tau'$	— 1			$10l' - 4\lambda - 6\varpi'$	+ 6		
$3l' + 0\lambda - \varpi' - 2\tau'$	— 2			$11l' - 5\lambda - 6\varpi'$	+ 2		
$5l' - 2\lambda - \varpi' - 2\tau'$	+ 10			$12l' - 6\lambda - 6\varpi'$	+ 1		
$6l' - 3\lambda - \varpi' - 2\tau'$	+ 1			$10l' - 4\lambda - 5\varpi' - \omega$	— 2	+ 2	+ 2
$5l' - 2\lambda - \omega - 2\tau'$	+ 1	— 1	— 1	$11l' - 5\lambda - 5\varpi' - \omega$		+ 1	+ 1
<i>Termes d'ordre quatre.</i>				$10l' - 4\lambda - 4\varpi' - 2\tau'$	+ 1		
$7l' - 3\lambda - 4\varpi'$	+ 20			<i>Termes d'ordre sept.</i>			
$8l' - 4\lambda - 4\varpi'$	+ 6			$10l' - 3\lambda - 7\varpi'$	+ 3		
$9l' - 5\lambda - 4\varpi'$	+ 3			$11l' - 4\lambda - 7\varpi'$	+ 10		
$10l' - 6\lambda - 4\varpi'$	+ 1			$12l' - 5\lambda - 7\varpi'$	+ 1		
$5l' - 1\lambda - 3\varpi' - \omega$		— 6	— 6	$13l' - 6\lambda - 7\varpi'$	+ 1		
$7l' - 3\lambda - 3\varpi' - \omega$	— 6	+ 6	+ 6	$11l' - 4\lambda - 6\varpi' - \omega$	— 6	+ 3	+ 3
$8l' - 4\lambda - 3\varpi' - \omega$	— 1	+ 2	+ 2	$11l' - 4\lambda - 5\varpi' - 2\tau'$	+ 4		

termes dépendant d'un même argument D, et tels qu'on ait

$$h + h' + f = n + q,$$

q étant un nombre pair quelconque positif ou nul.

Le Tableau suivant (II) donne les inégalités, à longue période, en $V = 3l' - \lambda$.

TABLEAU II. — *Inégalités à longue période.*

(Termes en $V = 3l' - \lambda$.)

D	δl	$e \delta \varpi$	δe	D	δl	$e \delta \varpi$	δe
<i>Termes d'ordre deux.</i>				<i>Termes d'ordre six.</i>			
$V - 2\varpi'$	+ 110",1	+ 0',1		$3V - 6\varpi'$	+ 9",8		
$V - \varpi' - \omega$	- 139,0	- 11,4	- 11",4	$3V - 5\varpi' - \omega$	- 4,7	- 0',4	- 0",4
$V - 2\omega$	+ 5,4	+ 0,9	+ 0,9	$3V - 4\varpi' - 2\omega$	+ 0,7	+ 0,1	+ 0,1
$V - 3\varpi' + \omega$	- 2,7	- 0,2	+ 0,2	$3V - 4\varpi' - 2\tau'$	+ 3,4		
$V - 2\tau'$	+ 32,4			$3V - 3\varpi' - \omega - 2\tau'$	- 1,0	- 0,1	- 0,1
$V - \varpi' + \omega - 2\tau'$	- 6,0	- 0,5	+ 0,5				
$V + \varpi' - \omega - 2\tau'$	+ 0,7	+ 0,1	+ 0,1	<i>Termes d'ordre huit.</i>			
<i>Termes d'ordre quatre.</i>				$4V - 8\varpi'$	+ 1,2		
$2V - 4\varpi'$	+ 70,1	- 0,1		$4V - 7\varpi' - \omega$	- 0,5	- 0,1	- 0,1
$2V - 3\varpi' - \omega$	- 25,5	- 2,2	- 2,2	$4V - 6\varpi' - 2\tau'$	+ 0,3		
$2V - 2\varpi' - 2\omega$	+ 3,3	+ 0,6	+ 0,6				
$2V - \varpi' - 3\omega$	- 0,1						
$2V - 2\varpi' - 2\tau'$	+ 16,3	- 0,1					
$2V - \varpi' - \omega - 2\tau'$	- 1,7	- 0,2	- 0,2				
$2V - 2\omega - 2\tau'$	+ 0,3						

3. Mise sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} t^k (M_{k,j} \sin j n' t + N_{k,j} \cos j n' t)$. —

Les valeurs de ϖ' , ω , τ' , ε , ε' , dont dépend l'argument D, sont affectées de leurs inégalités séculaires et à longue période. Leurs variations sont cependant si faibles qu'on peut les considérer,

dans D, comme des constantes. En explicitant la variable t , il vient

$$\boxed{D = Ft + \alpha,} \quad \boxed{F = i'n' + in,}$$

$$\alpha = i'\varepsilon' + i\varepsilon + k'\varpi' + k\omega + u\tau'.$$

Le moyen mouvement d'Uranus, n , étant presque exactement triple de celui de Pluton, n' , les différentes valeurs de F sont très voisines des multiples de n' . En effet,

$$F = n'(i' + 3i) + (n - 3n')i = n'j - vi,$$

où l'on a posé

$$\boxed{v = 3n' - n = 0^{\text{G}60}, 0545,} \quad \boxed{j = i' + 3i}$$

v est la valeur de F relative aux termes en $V = 3l' - \lambda$, elle est très petite vis-à-vis de n' qui vaut $1^{\text{G}}, 6051$.

Considérons maintenant un terme $C \sin D$ ou $C \cos D$ d'une inégalité périodique quelconque

$$C \sin D = C \sin (Ft + \alpha) = C \sin [(jn't + \alpha) - ivt],$$

$$C \cos D = C \cos (Ft + \alpha) = C \cos [(jn't + \alpha) - ivt].$$

Si l'on développe $\sin D$ et $\cos D$ en série de Taylor, au voisinage de $(jn't + \alpha)$, et si l'on groupe ensuite les termes de même pulsation jn' , la partie périodique de δl , $\delta \varpi$ ou δe prend la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} (M_{0,j} \sin jn't + N_{0,j} \cos jn't) \\ & + \left(\frac{t}{100}\right) \sum_{j=1}^{\infty} (M_{1,j} \sin jn't + N_{1,j} \cos jn't) \\ & + \left(\frac{t}{100}\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} (M_{2,j} \sin jn't + N_{2,j} \cos jn't) \\ & + \dots \end{aligned}}$$

On trouve aisément que les $M_{k,j}$ et $N_{k,j}$ sont d'ordre k en v , au sens habituel. Les séries mixtes ci-dessus convergent donc très rapidement quand la commensurabilité des moyens mouvements est très approchée, car, dans ce cas, v est très petit.

Le même développement s'applique, en faisant $j = 0$, aux termes à longue période. On trouve ainsi, en posant $N_{k,0} = L_k 100^k$, etc.,

$$\begin{aligned}\delta l &= L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + L_3 t^3 + \dots, \\ \delta e &= E_0 + E_1 t + E_2 t^2 + E_3 t^3 + \dots, \\ \delta \varpi &= P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + P_3 t^3 + \dots,\end{aligned}$$

tous les coefficients L_k, E_k, P_k sont constants.

Le Tableau III (p. 16) donne les coefficients $M_{k,j}$ et $N_{k,j}$ pour les différentes valeurs de k et de j . Les coefficients des termes en $\left(\frac{t}{100}\right)^2$, étant inférieurs à 0",02 en valeur absolue, ne sont pas donnés dans ce tableau, mais n'ont pas été omis dans les calculs définitifs. Parmi les termes « séculaires », $L_0, L_1, e P_0, E_0$ sont omis pour des raisons que nous expliquerons au paragraphe suivant.

4. Les « perturbations réduites » : conséquences de leur continuité quand $in + i'n'$ tend vers zéro. — Les équations de condition résultent de la comparaison de la longitude vraie observée v_0 avec la longitude vraie théorique. Cette dernière comprend trois parties :

1° la longitude vraie v_c calculée au moyen des éléments provisoires, en tenant compte des perturbations produites par les planètes dont les éléments sont connus;

2° l'accroissement Δv que subirait v_c si les éléments provisoires $\varepsilon, n, e, \varpi$ étaient remplacés par les éléments exacts : $\varepsilon + \Delta\varepsilon, n + \Delta n, e + \Delta e, \varpi + \Delta\varpi$ ⁽¹⁾;

3° les perturbations en longitude vraie δv produites par les planètes dont un ou plusieurs éléments sont encore inconnus : éléments que l'on se propose précisément de calculer par la résolution des équations de condition.

Les équations de condition sont donc de la forme

$$(1) \quad \boxed{v_0 - v_c = \Delta v + \delta v.}$$

⁽¹⁾ $\Delta\varepsilon, \Delta n, \Delta e, \Delta\varpi$ jouent donc, dans la solution du premier ordre, le rôle de constantes d'intégration que les équations de condition déterminent par les conditions initiales.

TABLEAU III. — Résultats de la méthode classique.

i	$\frac{1}{m} \delta l = \left\{ \begin{array}{l} \text{Var. de la longitude} \\ \text{moyenne} \end{array} \right.$		$\frac{1}{m} e \delta \varpi = e. \left\{ \begin{array}{l} \text{Var. de la long.} \\ \text{du périhélie} \end{array} \right.$		$\frac{1}{m} \delta e = \left\{ \begin{array}{l} \text{Var. de l'excentricité} \end{array} \right.$	
	Coefficients de $\sin in' t$	Coefficients de $\cos in' t$	Coefficients de $\sin in' t$	Coefficients de $\cos in' t$	Coefficients de $\sin in' t$	Coefficients de $\cos in' t$
1	+0,01	+0,90	+0,75	—0,08	+0,19	—0,32
2	—0,19	—0,53	—0,19	—0,09	—0,15	+0,05
3	+0,21	+0,43	+0,14	+0,07	+0,03	—0,05
4	—0,23	—0,29	—0,04	—0,04	—0,04	+0,02
5	+0,00	+0,18	+0,02	+0,01	+0,03	—0,01
6	—0,05	—0,12	+0,01	+0,01	—0,01	+0,02
7	—0,03	+0,06				
8	—0,01	—0,01				

i	Coefficients de $(t/_{100}) \sin in' t$	Coefficients de $(t/_{100}) \cos in' t$	Coefficients de $(t/_{100}) \sin in' t$	Coefficients de $(t/_{100}) \cos in' t$	Coefficients de $(t/_{100}) \sin in' t$	Coefficients de $(t/_{100}) \cos in' t$
1	+0,13	+0,09	+0,05	—0,05	—0,06	—0,01
2	—0,10	—0,00	—0,03	+0,02	+0,02	+0,02
3	+0,09	—0,02	+0,02	—0,02	—0,01	—0,01
4	—0,07	+0,03	—0,01	+0,01	+0,01	+0,01
5	+0,05	+0,01		—0,01		—0,01
6	—0,04	+0,01				
7	+0,03	+0,01				

Termes « séculaires »	Termes « séculaires »	Termes « séculaires »
+0,66 $(t/_{100})^2$ +0,06 $(t/_{100})^3$	—0,91 $(t/_{100})$ —0,03 $(t/_{100})^2$	—0,42 $(t/_{100})$ +0,04 $(t/_{100})^2$

Dans ce Mémoire, δv est une fonction de la masse inconnue m' de Pluton; dans les calculs de Gaillot ⁽¹⁾, δv est une fonction de la masse inconnue de Neptune; dans les calculs de Lowell, δv était une fonction de l'ensemble des éléments inconnus de la planète transneptunienne.

⁽¹⁾ *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 28, p. A. 72.

Supposons, pour fixer les idées, que $\Delta\varepsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$ désignent les corrections inconnues aux éléments provisoires d'Uranus; et δl , δe , $\delta\varpi$ les variations des éléments d'Uranus sous l'action de Pluton. Comme $l = \varepsilon + nt$, on aura

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{\partial v}{\partial l} (\Delta\varepsilon + t \Delta n) + \frac{\partial v}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial v}{\partial \varpi} \Delta\varpi, \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial l} \delta l + \frac{\partial v}{\partial e} \delta e + \frac{\partial v}{\partial \varpi} \delta\varpi.\end{aligned}$$

Or, d'après le paragraphe précédent, on a

$$(2) \quad \begin{cases} \delta l = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + \dots + L_p, \\ \delta e = E_0 + E_1 t + E_2 t^2 + \dots + E_p, \\ \delta\varpi = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots + P_p, \end{cases}$$

L_p , E_p , P_p désignant les inégalités périodiques à *courte période*, et les termes séculaires représentant les développements des inégalités à longue période. Les équations (1) sont donc généralement de la forme

$$(3) \quad \begin{aligned}v_0 - v_t &= \frac{\partial v}{\partial l} [(\Delta\varepsilon + L_0) + (\Delta n + L_1)t + L_2 t^2 + \dots + L_p] \\ &+ \frac{\partial v}{\partial e} [(\Delta e + E_0) + E_1 t + \dots + E_p] \\ &+ \frac{\partial v}{\partial \varpi} [(\Delta\varpi + P_0) + P_1 t + \dots + P_p].\end{aligned}$$

On voit alors qu'en posant

$$(4) \quad \Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon + L_0, \quad \Delta n_1 = \Delta n + L_1, \quad \Delta e_1 = \Delta e + E_0, \quad \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi + P_0,$$

on pourra remplacer les inconnues $\Delta\varepsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$ par de nouvelles inconnues $\Delta\varepsilon_1$, Δn_1 , Δe_1 , $\Delta\varpi_1$, ce qui donnera aux équations de condition leur forme définitive (1)

$$(5) \quad \begin{aligned}v_0 - v_t &= \frac{\partial v}{\partial l} [\Delta\varepsilon_1 + \Delta n_1 t + L_2 t^2 + L_3 t^3 + \dots + L_p] \\ &+ \frac{\partial v}{\partial e} [\Delta e_1 + E_1 t + E_2 t^2 + \dots + E_p] \\ &+ \frac{\partial v}{\partial \varpi} [\Delta\varpi_1 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots + P_p].\end{aligned}$$

(1) Ainsi L_0 , L_1 , E_0 et P_0 se confondent avec les constantes d'intégration [voir p. 15, note (1)].

Revenons maintenant aux formules fondamentales de la page 10. Elles montrent, en désignant par A_1 et A_2 deux quantités indépendantes de v , c'est-à-dire de $(in + i'n')$, que les termes en V de δl sont de la forme

$$(9) \quad \delta l = \left(\frac{A_2}{v^2} + \frac{A_1}{v} \right) \sin(ivt + \beta).$$

En mettant cette expression de δl sous la forme (2), on trouve très aisément que

$$(7) \quad \begin{cases} L_0 = \left(\frac{A_2}{v^2} + \frac{A_1}{v} \right) \sin \beta, & L_1 = \left(\frac{A_2}{v} + A_1 \right) i \cos \beta, \\ L_2 = \frac{-1}{2} (A_2 + A_1 v) i^2 \sin \beta, & L_3 = \frac{-1}{6} (A_2 v + A_1 v^2) i^3 \cos \beta. \end{cases}$$

En procédant de même pour δe et $e \delta \varpi$, on trouve que lorsque v tend vers zéro, L_0 , L_1 , E_0 , P_0 deviennent infiniment grands; $2L_2$ tend vers $(-A_2 i^2 \sin \beta)$, E_1 et P_1 tendent également vers des valeurs finies; tandis que tous les autres coefficients L_3 , L_4 , ..., E_2 , E_3 , ..., P_2 , P_3 , ... tendent vers zéro.

En rapprochant ces résultats des formules (1), (4) et (5), nous voyons apparaître plusieurs conséquences d'une très grande importance :

1° En prenant comme nouvelles inconnues $\Delta \varepsilon_1$, Δn_1 , Δe_1 , $\Delta \varpi_1$ au lieu de $\Delta \varepsilon$, Δn , Δe , $\Delta \varpi$, on facilite la résolution des équations de condition, puisque les coefficients des inconnues dans les équations (5) sont beaucoup plus petits que dans les équations (1).

C'est dans cet esprit que Gaillot applique, en partie, le changement d'inconnues défini par les formules (4), à l'occasion de la résolution des équations de condition de sa théorie d'Uranus, où la masse de Neptune figure parmi les inconnues (1). Toutefois sa transformation est incomplète, puisqu'elle est limitée à $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \varpi$, sa façon de calculer les perturbations ne lui fournissant pas la valeur de L_1 . De plus, il semble qu'il ne se soit pas rendu compte de la portée générale de la transformation, puisqu'il se contente d'affirmer (1) que : « la forme nouvelle que nous venons de

(1) *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 28, p. A.72.

donner aux équations de condition présente deux avantages : le premier, c'est de diminuer dans une très forte proportion les valeurs absolues de $\frac{dv}{dm_7}$ (la somme totale des perturbations de la longitude vraie dues à l'action de Neptune), sans diminuer beaucoup l'amplitude de leurs variations ; le second tient à ce que les valeurs de $\Delta\epsilon_1$, Δe_1 et $e\Delta\varpi_1$ étant beaucoup plus faibles que celles de $\Delta\epsilon$, Δe et $e\Delta\varpi$, leur détermination se fait plus facilement et avec plus de précision ».

2° Lowell, au contraire, profite de la compensation de la discontinuité des coefficients de la perturbation par les arguments des sinus développés en séries [idée que nous avons concrétisée, sous une forme simple, par les formules (6) et (7)] pour expliquer *la continuité des solutions des équations de condition même lorsque la planète perturbatrice inconnue est supposée placée très près des points critiques de commensurabilité exacte des moyens mouvements*. Il venait de découvrir cette continuité en quelque sorte expérimentalement en essayant différentes distances moyennes, parmi lesquelles il avait inséré quelques distances critiques. Jusque-là on ne possédait aucune donnée positive à ce sujet, et la question mit aux prises des astronomes célèbres du temps de la controverse sur la découverte de Neptune, mais sans recevoir une solution satisfaisante (¹).

Cette continuité des solutions, Lowell l'attribue avec juste raison au « rejet » des termes discontinus sur les corrections inconnues $\Delta\epsilon$, Δn , etc., « rejet » dont la possibilité est rendue évidente par la forme même des équations (3). En effet, lorsqu'on se sert des équations de condition non pas en vue d'améliorer les éléments d'Uranus, mais pour trouver les éléments d'une planète transneptunienne, les quantités $\Delta\epsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$ se présentent comme de simples « sous-produits » du processus analytique et n'ont, par elles-mêmes, qu'un intérêt tout à fait secondaire. Aussi peut-on concevoir les termes discontinus L_0 , L_1 , E_0 et P_0 comme faisant partie de $\Delta\epsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$ [dans le système (3)], ce qui assure la continuité des autres inconnues.

(¹) Cf. P. LOWELL, *Memoir on a Trans-Neptunian planet*, 1915, p. 8, 69 et 70.

3° Mais Lowell lui-même n'avait pas épuisé les possibilités de la transformation, puisqu'il croyait que le « rejet » s'opérait *automatiquement* par le mécanisme même de la recherche des inconnues $\Delta\epsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$ par la méthode des moindres carrés. Aussi a-t-il commis l'imprudence de conserver dans l'expression de δv les termes discontinus L_0 , L_1 , E_0 , P_0 sans se rendre compte qu'une particularité du problème empêcherait la compensation *complète* des termes discontinus par les corrections $\Delta\epsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$.

En effet, les perturbations introduites dans les recherches de planètes inconnues sont en général développées suivant les puissances de l'excentricité ⁽¹⁾ de la planète troublante cherchée, et ces développements sont nécessairement *limités* aux premiers termes, sans quoi l'inconnue e' s'introduirait sous une forme trop compliquée. Il en résulte, comme nous l'expliquerons en détail dans la deuxième partie ⁽²⁾, que les équations de condition ne sont plus exactement de la forme (3) et que, par suite, L_0 , L_1 , E_0 , P_0 ne peuvent plus être compensés exactement et automatiquement, par un choix convenable de $\Delta\epsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$. Une partie des termes discontinus subsiste alors dans la solution définitive et donne des « oscillations fictives », comme celles que nous avons découvertes ⁽²⁾ dans une partie des calculs de Lowell.

Ainsi, si l'on veut que les solutions soient parfaitement continues et ne comportent pas d'« oscillations fictives », même en présence d'un développement limité de la fonction perturbatrice, *il faut et il suffit de commencer par développer l'ensemble des inégalités des éléments en séries de la forme (2), puis omettre L_0 , L_1 , E_0 , P_0 dans le calcul des variations totales de la longitude moyenne, de l'excentricité et de la longitude du périhélie, et ne calculer les perturbations en longitude vraie qu'avec les perturbations ainsi réduites des éléments*. Rien n'empêcherait d'ailleurs, si l'on désirait connaître les valeurs exactes de $\Delta\epsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$, de calculer L_0 , L_1 , E_0 , P_0 à part et de les retrancher des valeurs correspondantes de $\Delta\epsilon_1$, Δn_1 , Δe_1 , $\Delta\varpi_1$ fournies par la résolution des équations (5).

Ce procédé de calcul, que nous allons appliquer au cours de

⁽¹⁾ Voir ci-après, deuxième partie, p. 62.

⁽²⁾ Voir p. 88.

notre travail, nous mettra à l'abri des conséquences de l'inexactitude possible du « petit diviseur » v qui est actuellement mal connu en raison même de sa petitesse ⁽¹⁾. L'incertitude de v entraîne celle des termes discontinus L_0, L_1, E_0, P_0 , et par suite celle des valeurs de $\Delta\epsilon, \Delta n, \Delta e, \Delta\varpi$, mais non celle de la masse de Pluton, ou des autres inconnues qui ne dépendent que des perturbations réduites.

Nous donnons plus loin encore une application du même procédé de calcul, à propos d'un perfectionnement possible de la méthode de Le Verrier-Lowell ⁽²⁾.

CHAPITRE II.

CALCUL DES PERTURBATIONS PAR LA MÉTHODE D'INTERPOLATION.

1. **Introduction.** — Le Verrier déclare dans son Mémoire sur Neptune ⁽¹⁾ : « Les développements des dérivées $\frac{da}{dt}, \frac{d\epsilon}{dt}, \dots$ en fonctions du temps peuvent s'obtenir de plusieurs manières. On peut développer algébriquement chacun des termes de la fonction R suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons; cette fonction étant réduite en série, on en conclut immédiatement, par de simples différentiations, les dérivées partielles qui entrent dans les variations différentielles des éléments Il ne me paraît pas, cependant, qu'on puisse, avec une entière sécurité, suivre cette marche pour l'ensemble d'un travail, quand on ne connaît aucune relation à laquelle doivent satisfaire les résultats obtenus, et qui puisse servir à les vérifier. J'ai donc préféré commencer par l'emploi d'une méthode qui fournit simultanément toutes les inégalités. Cette dépendance mutuelle fait que, si le travail n'est pas complètement exact, il est nécessairement faux de tout point. Or on conçoit parfaitement

⁽¹⁾ Avec les éléments de Nicholson et Mayall, $v = 0,01146n$; avec ceux de Zagar, $v = 0,01289n$; avec ceux de Roure, $v = 0,01250n$.

⁽²⁾ Deuxième partie, p. 72.

⁽³⁾ Addition à *la Connaissance des Temps* pour 1849, p. 8.

qu'il est plus facile d'échapper à cette seconde alternative qu'aux chances multiples d'une erreur isolée. »

Suivant le conseil de Le Verrier, nous avons cru indispensable de vérifier les résultats du premier chapitre, obtenus par la méthode classique, en reprenant la question par une méthode d'interpolation.

La méthode que nous avons employée dérive de celle de Le Verrier, cependant, la forme particulière que nous avons donnée au développement des inégalités (Chap. I, p. 13) permet de simplifier considérablement les calculs numériques. A la recherche des développements de la forme

$$\sum \sum A_{i,i'} \cos(i\zeta + i'\zeta') + B_{i,i'} \sin(i\zeta + i'\zeta')$$

à deux variables, nous substituons celle des développements d'un type spécial, à une seule variable, que nous étudions au paragraphe suivant. Si l'on divise la circonférence en 16 parties, la méthode de Le Verrier exige la détermination d'environ deux fois plus de valeurs particulières de la fonction, et d'environ quatre fois plus de coefficients que la nôtre. Mais il faut au préalable résoudre un problème d'interpolation spécial : développement simultané d'une fonction périodique en sommes mixtes de la forme (1) ci-dessous. Nous commençons par résoudre ce problème général et parvenons à une méthode de calcul très-simple, analogue à la méthode d'interpolation classique. Nous déterminons ensuite les variations des éléments d'Uranus. Cette détermination se fait beaucoup plus rapidement que dans la méthode employée dans le premier chapitre. Ensuite nous comparons les résultats ⁽¹⁾ et constatons qu'ils se contrôlent mutuellement comme le souhaite Le Verrier.

2. Développement d'une fonction périodique $f(t)$ en somme de la forme

$$(1) \quad f(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \sum_{i=1}^n B_i \sin(in't + \varphi_i) + t \sum_{i=1}^n C_i \sin(in't + \psi_i).$$

⁽¹⁾ Voir p. 39.

1° *Calcul de A₂*. — Soit une fonction $f(t)$, définie et continue dans un certain intervalle, et telle qu'on puisse déterminer les valeurs numériques de $f(t)$ pour toutes les valeurs de t . On se propose de calculer les coefficients : $A_0, A_1, A_2; B_1, B_2, \dots, B_n; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; C_1, C_2, \dots, C_n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ du développement ci-dessus ou n est un multiple de 8.

Posons

$$z = n' t$$

et remplaçons la variable t par la variable z ; $f(t)$ se transforme en $\varphi(z)$

$$(2) \quad \varphi(z) = f(t) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \sum_{i=1}^n B_i \sin(i z + \varphi_i) \\ + \frac{z}{n'} \sum_{i=1}^n C_i \sin(i z + \psi_i).$$

Posons ensuite

$$(3) \quad \psi(z) = \frac{1}{2} [\varphi(z) + \varphi(2\pi - z)], \quad \chi(z) = \frac{1}{2} [\varphi(z) - \varphi(2\pi - z)].$$

On a

$$(4) \quad \varphi(z) = \psi(z) + \chi(z).$$

On peut mettre $\psi(z)$ sous la forme

$$(5) \quad \psi(z) = a_2(z - \pi)^2 + \psi_1(z)$$

avec

$$(6) \quad \psi_1(z) = \sum_{i=0}^n C'_i \cos i z + (z - \pi) \sum_{i=1}^n e_i \sin i z,$$

de même on a

$$(7) \quad \chi(z) = \sum_{i=1}^n B'_i \sin i z + (z - \pi) \sum_{i=0}^n e'_i \cos i z.$$

Les valeurs des coefficients α_i , C'_i , B'_i , e_i et e'_i sont définies par les formules

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = A_0, \quad \alpha_1 = \frac{A_1}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{A_2}{n^2}, \\ C'_0 = \alpha_0 + \pi e'_0 - \pi^2 \alpha_2, \quad e'_0 = \alpha_1 + 2\pi \alpha_2, \\ B'_i = b_i + \pi e_i, \quad b_i = B_i \cos \varphi_i, \quad e_i = \frac{1}{n} C_i \cos \psi_i, \\ C'_i = b'_i + \pi e'_i, \quad b'_i = B_i \sin \varphi_i, \quad e'_i = \frac{1}{n} C_i \sin \psi_i. \\ (1 \leq i \leq n). \end{array} \right.$$

Le coefficient α_2 s'obtient immédiatement par la formule

$$(9) \quad 4\pi^2 \alpha_2 = \psi(-\pi) - \psi(\pi).$$

A l'aide des formules (5) et (9), on pourra calculer les valeurs numériques de $\psi_1(z)$ pour une valeur quelconque de z .

2° *Calcul de B'_1 , B'_2 , ..., B'_n et de C'_0 , C'_1 , ..., C'_n .* — Posons

$$(10) \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{n}}$$

et formons l'équation (11) en multipliant les deux membres de (7) par $\sin jp\alpha$, j étant un entier pouvant prendre toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à n inclus.

$$(11) \quad \chi(z) \sin jp\alpha = \sum_{i=1}^n B'_i \sin iz \sin jp\alpha + (z - \pi) \sum_{i=0}^n e'_i \cos iz \sin jp\alpha.$$

Remplaçons z par $p\alpha$ et ajoutons membre à membre les relations obtenues en donnant à p toutes les valeurs entières de 0 à $(n-1)$ inclus.

Il vient

$$(12) \quad \sum_{p=0}^{n-1} \chi(p\alpha) \sin jp\alpha = \sigma'_j + \sum_{i=1}^n B'_i \sum_{p=0}^{n-1} \sin ip\alpha \sin jp\alpha$$

avec

$$(13) \quad \sigma'_j = \sum_{i=0}^n e'_i \sum_{p=0}^{n-1} (p-n)\alpha \cos ip\alpha \sin jp\alpha.$$

D'après les formules générales ⁽¹⁾

$$(14) \quad \sum_{p=0}^{n-1} \sin ip\alpha \sin jp\alpha = \begin{cases} 0, & \text{pour } i \neq j, \\ \frac{n}{2}, & \text{pour } i = j. \end{cases}$$

la relation (12) se réduit à

$$(15) \quad \frac{n}{2} B'_j = -\sigma'_j + \sum_{p=0}^{n-1} \chi(p\alpha) \sin jp\alpha.$$

Formons, de même, l'équation (16), en multipliant les deux membres de (6) par $\cos jp\alpha$,

$$(16) \quad \psi_1(z) \cos jp\alpha = \sum_{i=0}^n C'_i \cos iz \cos jp\alpha + (z - \pi) \sum_{i=1}^n e_i \sin iz \cos jp\alpha.$$

Remplaçons z par $p\alpha$ et ajoutons membre à membre les relations obtenues en donnant à p toutes les valeurs entières de 0 à $(n-1)$ inclus.

Il vient

$$(17) \quad \sum_{p=0}^{n-1} \psi_1(p\alpha) \cos jp\alpha = \sigma_j + C'_0 \sum_{p=0}^{n-1} \cos jp\alpha + \sum_{i=1}^n C'_i \sum_{p=0}^{n-1} \cos ip\alpha \cos jp\alpha$$

avec

$$(18) \quad \sigma_j = \sum_{i=1}^n e_i \sum_{p=0}^{n-1} (p-n)\alpha \sin ip\alpha \cos jp\alpha.$$

D'après les formules générales ⁽²⁾

$$(19) \quad \sum_{p=0}^{n-1} \cos ip\alpha \cos jp\alpha = \begin{cases} 0, & \text{pour } i \neq j \text{ et } (i+j) \text{ pair } \neq 2n, \\ 1, & \text{pour } i \neq j \text{ et } (i+j) \text{ impair}, \\ \frac{n}{2}, & \text{pour } i = j \text{ et } i \neq 0 \neq n, \\ n, & \text{pour } i = j = 0, \text{ ou } i = j = n, \text{ ou } i = 0 \text{ et } j = 2n, \end{cases}$$

⁽¹⁾ Cf. *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 1, p. 85, formules (39) et (41).

⁽²⁾ Cf. *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 1, p. 85, formules (39'), (41), et (31').

la relation (17) se réduit à

$$(20) \quad \frac{hn C_j'}{2} = U - \sigma_j + \sum_{p=0}^{n-1} \psi_1(p\alpha) \cos jp\alpha,$$

où

$$(21) \quad h = \begin{cases} 2, & \text{pour } j = 0 \text{ ou } j = n, \\ 1, & \text{pour } j \neq 0 \neq n, \end{cases}$$

et

$$(22) \quad U = \begin{cases} -(C_1' + C_3' + \dots + C_{n-1}') = \frac{1}{2} [\psi_1(\pi) - \psi_1(0)], & \text{pour } j \text{ pair,} \\ -(C_0' + C_2' + \dots + C_n') = \frac{1}{2} [-\psi_1(\pi) - \psi_1(0)], & \text{pour } j \text{ impair.} \end{cases}$$

Remarquons maintenant qu'en posant

$$(23) \quad \boxed{k = n - j,}$$

il vient

$$(24) \quad \sin jp\alpha + \sin kp\alpha = \begin{cases} 0, & \text{pour } p \text{ pair,} \\ 2 \sin jp\alpha, & \text{pour } p \text{ impair;} \end{cases}$$

$$(25) \quad \cos jp\alpha + \cos kp\alpha = \begin{cases} 2 \cos jp\alpha, & \text{pour } p \text{ pair.} \\ 0, & \text{pour } p \text{ impair.} \end{cases}$$

Compte tenu des formules (24) et (25), on trouve finalement

$$(26) \quad \frac{n}{4} (B_j' \pm B_k') = \Gamma_{j \pm k}' - S_{j \pm k}'$$

et

$$(27) \quad \frac{hn}{4} (C_j' \pm C_k') = \Gamma_{j \pm k} - S_{j \pm k} + \begin{cases} U, & \text{pour } (+), \\ 0, & \text{pour } (-), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(28) \quad S_{j \pm k} = \frac{1}{2} (\sigma_j \pm \sigma_k), \quad S_{j \pm k}' = \frac{1}{2} (\sigma_j' \pm \sigma_k').$$

$$(29) \quad \begin{Bmatrix} \Gamma_{j+k} \\ \Gamma_{j-k} \end{Bmatrix} = \sum_p \psi_1(p\alpha) \cos jp\alpha, \quad \text{avec } p = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots, (n-2), \\ 1, 3, 5, \dots, (n-1). \end{cases}$$

$$(30) \quad \begin{Bmatrix} \Gamma_{j+k}' \\ \Gamma_{j-k}' \end{Bmatrix} = \sum_p \chi(p\alpha) \sin jp\alpha, \quad \text{avec } p = \begin{cases} 1, 3, 5, \dots, (n-1), \\ 0, 2, 4, \dots, (n-2). \end{cases}$$

On vérifiera qu'en annulant les coefficients A_i et C_i on retrouve les formules d'interpolation de Le Verrier. Quand nous saurons calculer $S_{j\pm k}$ et $S'_{j\pm k}$, les formules (26) à (30) feront connaître

$$B'_1, B'_2, B'_3, \dots, B'_n \quad \text{et} \quad C'_0, C'_1, C'_2, \dots, C'_n.$$

3° *Calcul de $e_1, e_2, \dots, e_n$ et de $e'_0, e'_1, \dots, e'_n$.* — Formons l'équation (31) en multipliant les deux membres de (6) par $\sin jz$.

$$(31) \quad \psi_1(z) \sin jz = \sum_{i=0}^n C_i \cos iz \sin jz + (z - \pi) \sum_{i=1}^n e_i \sin iz \sin jz.$$

Posons $z = \pi + u$. En prenant u comme nouvelle variable, (31) s'écrit

$$(32) \quad (-1)^i \psi_1(\pi + u) \sin ju = \sum_{i=0}^n C_i \cos iu \sin ju + u \sum_{i=1}^n e_i \sin iu \sin ju.$$

Or, en remarquant que pour toute suite u_p on a

$$(33) \quad \sum_{p=0}^{2n-1} u_p = u_n - u_{2n} + \sum_{p=0}^{n-1} (u_p + u_{2n-p}),$$

on trouve immédiatement

$$(34) \quad \sum_{p=0}^{2n-1} p\alpha \sin ip\alpha \sin jp\alpha = 2\pi \sum_{p=0}^{n-1} \sin ip\alpha \sin jp\alpha = \begin{cases} 0, & \text{pour } i \neq j, \\ \pi n, & \text{pour } i = j, \end{cases}$$

et

$$(35) \quad \begin{aligned} \sum_{p=0}^{2n-1} p\alpha \cos ip\alpha \cos jp\alpha \\ &= 2\pi \sum_{p=0}^{n-1} \cos ip\alpha \cos jp\alpha + \begin{cases} -\pi, & \text{pour } (i+j) \text{ pair,} \\ -3\pi, & \text{pour } (i+j) \text{ impair,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\pi, & \text{pour } i \neq j \text{ et } (i+j) \text{ non mult. de } 2n, \\ +\pi(n-1), & \text{pour } i = j \text{ et } i \neq 0 \neq n, \\ +\pi(2n-1), & \text{pour } i = j = 0 \text{ ou } i = j = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Rappelons enfin que l'on a ⁽¹⁾

$$(36) \quad \sum_{p=0}^{2n-1} \sin ip\alpha \cos jp\alpha = \sum_{p=0}^{2n-1} \sin jp\alpha \cos ip\alpha \equiv 0.$$

Remplaçons alors, dans (32), u par $p\alpha$ et ajoutons membre à membre les relations obtenues en donnant à p toutes les valeurs entières de 0 à $(2n-1)$. Il vient, d'après (34) et (36),

$$(37) \quad (-1)^j \pi n e_j = \sum_{p=0}^{2n-1} \psi_1(\pi + p\alpha) \sin jp\alpha.$$

Procédant avec l'équation (7) comme on vient de le faire avec (6), et se servant des formules (35) et (36), il vient, de même,

$$(38) \quad (-1)^j h \pi n e'_j = W + \sum_{p=0}^{2n-1} \chi(\pi + p\alpha) \cos jp\alpha,$$

où h est défini par la formule (21) et W par

$$(39) \quad W = \pi(e'_0 - e'_1 + e'_2 - e'_3 + \dots + e'_n) = -\frac{1}{2} \chi(-\pi).$$

Le calcul numérique se simplifie si l'on forme $e_j \pm e_k$ et $e'_j \pm e'_k$. On trouve que

$$(40) \quad \frac{\pi n}{2} (e_j \pm e_k) = \mathcal{E}_{j \pm k}$$

et

$$(41) \quad \frac{h \pi n}{2} (e'_j \pm e'_k) = \mathcal{E}'_{j \pm k} + \begin{cases} (-1)^j W, & \text{pour } (+), \\ 0, & \text{pour } (-), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(42) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_{j+k} \\ \mathcal{E}_{j-k} \end{cases} = \sum_p (-1)^j \psi_1[(n+p)\alpha] \sin jp\alpha, \quad \text{avec } p = \begin{cases} 1, 3, 5, \dots, (2n-1), \\ 0, 2, 4, \dots, (2n-2). \end{cases}$$

$$(43) \quad \begin{cases} \mathcal{E}'_{j+k} \\ \mathcal{E}'_{j-k} \end{cases} = \sum_p (-1)^j \chi[(n+p)\alpha] \cos jp\alpha, \quad \text{avec } p = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots, (2n-2), \\ 1, 3, 5, \dots, (2n-1). \end{cases}$$

⁽¹⁾ Cf. *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 1, p. 83, formule (33) avec $m = 2n$.

Les formules de (39) à (43) permettent de calculer *directement* $e_j \pm e_k$ et $e'_j \pm e'_k$.

4° *Calcul de $S_{j\pm k}$ et de $S'_{j\pm k}$.* — En partant des formules (13), (18), (28) et en appliquant les formules (24) et (25), on trouve successivement :

$$(44) \left\{ \begin{aligned} S_{j\pm k} &= \sum_{i=1}^n e_i \sum_p (p-n)\alpha \sin ip\alpha \cos jp\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (e_i \mp e_{n-i}) \sum_p (p-n)\alpha \sin ip\alpha \cos jp\alpha, \\ \text{avec } p &= \begin{cases} 0, 2, 4, \dots, (n-2), & \text{pour } (+), \\ 1, 3, 5, \dots, (n-1), & \text{pour } (-). \end{cases} \\ \left[\text{Pour } i = \frac{n}{2}, (e_i + e_{n-i}) \text{ doit être remplacé par } e_{\frac{n}{2}} \text{ et non par } 2e_{\frac{n}{2}} \right] \end{aligned} \right.$$

et

$$(45) \left\{ \begin{aligned} S'_{j\pm k} &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} (e'_i \mp e'_{n-i}) \sum_p (p-n)\alpha \cos ip\alpha \sin jp\alpha, \\ \text{avec } p &= \begin{cases} 1, 3, 5, \dots, (n-1), & \text{pour } (+), \\ 0, 2, 4, \dots, (n-2), & \text{pour } (-). \end{cases} \\ \left[\text{Pour } i = \frac{n}{2}, (e'_i + e'_{n-i}) \text{ doit être remplacé par } e'_{\frac{n}{2}} \text{ et non par } 2e'_{\frac{n}{2}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de $(e_i \pm e_{n-i})$ et de $(e'_i \pm e'_{n-i})$, dans les formules (44) et (45), se calculent très rapidement à l'aide de la table des valeurs numériques des $\sin ip\alpha$ et $\cos ip\alpha$, qui sert pour le calcul des formules (29), (30), (42) et (43).

Le Tableau IV p. 30 donne les valeurs de ces coefficients dans le cas $n = 8$.

5° *Résumé.* — On commencera par le calcul des valeurs particulières des fonctions φ , ψ , et χ définies par (2) et (3). La formule (9) donnera a_2 . La formule (5) fera connaître les valeurs particulières de la fonction ψ_1 . On déterminera ensuite $(e_j \pm e_k)$

et $(e'_j \pm e'_k)$ à l'aide de (21), (39), (40), (41), (42) et (43). $S_{j \pm k}$ et $S'_{j \pm k}$ se calculeront à l'aide de (44) et (45) ou d'un tableau tel que IV. Enfin les formules (21), (22), (26), (27), (28), (29) et (30) donneront B'_j et C'_j , et il n'y aura plus qu'à passer à A_0 , A_1 , A_2 , B_i , C_i , φ_i , et ψ_i au moyen des formules (8), où l'indice muet i a la même signification que j .

Nous avons traité le cas où la partie séculaire de $f(t)$ se réduit à $A_0 + A_1 t + A_2 t^2$ parce que nous avons reconnu, dans le chapitre précédent, que dans le cas particulier étudié ici le reste de la série en t est négligeable. Cependant on pourrait étendre aisément la méthode au cas où la partie séculaire est un polynôme d'un degré supérieur à 2.

TABLEAU IV.

	$-S_{0-8}$	$-S_{1-7}$	$-S_{2-6}$	$-S_{3-5}$	Dans	
$4\pi(e_1 + e_7)$	+0,3266	+0,0884	-0,0957	-0,0259	$-S'_{1+7}$	
$4\pi(e_2 + e_6)$	+0,1768	+0,2310	+0,0625	-0,0957	$-S'_{2+6}$	
$4\pi(e_3 + e_5)$	+0,1353	+0,1509	+0,2310	+0,0884	$-S'_{3+5}$	
$4\pi e_4$	+0,1250	+0,1353	+0,1768	+0,3266	$-S'_{4+4}$	
Coeff. de	$4\pi(e'_0 - e'_8)$	$4\pi(e'_1 - e'_7)$	$4\pi(e'_2 - e'_6)$	$4\pi(e'_3 - e'_5)$		

	$-S_{0+8}$	$-S_{1+7}$	$-S_{2+6}$	$-S_{3+5}$	$-S_{4+4}$	Dans
$4\pi(e_1 - e_7)$	+0,3018	+0,0625	-0,1250	-0,0625	-0,0518	$-S'_{1-7}$
$4\pi(e_2 - e_6)$	+0,1250	+0,1768	0	-0,1768	-0,1250	$-S'_{2-6}$
$4\pi(e_3 - e_5)$	+0,0518	+0,0625	+0,1250	-0,0625	-0,3018	$-S'_{3-5}$
Coeff. de	$4\pi(e'_0 + e'_8)$	$4\pi(e'_1 + e'_7)$	$4\pi(e'_2 + e'_6)$	$4\pi(e'_3 + e'_5)$	$4\pi e'_4$	

3. Valeurs particulières des dérivées des variations des éléments. — Appliquons les formules données par Le Verrier (1).

(1) *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 1, p. 333-342.

En adoptant les mêmes valeurs initiales que dans le premier chapitre (p. 7), il vient

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{100}{m'} \frac{d\varepsilon_1}{dt} = -1,800 \left(100r' \frac{dR}{dr} \right), \\ \frac{1}{10m'} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -1,204 \left(\frac{100 \sin \varphi'}{m'} \frac{da}{dt} \right), \\ \frac{1}{m'} \frac{de}{dt} = -0,1940 \left(100 \frac{dR}{dv} \right) + 0,005602 \left(\frac{100}{m'} \frac{da}{dt} \right), \\ \frac{100}{m'} \frac{e d\varpi_1}{dt} = +0,1728 \left(\frac{10^4}{a} \frac{dR}{de} \right), \\ \frac{100}{m'} \frac{da}{dt} = +1,2762 \left(\frac{10^6}{r^2} \frac{dR}{dv} \right) + 30,838 \left[10^2 \sin(\nu - \omega) \frac{dR}{dr} \right], \\ 2000 \frac{d\varphi}{dt} = -511,56 \frac{dR}{ds} \sin(\nu' - \tau') \cos(\nu - \theta), \\ \sin \varphi \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \tan(\nu - \theta). \end{array} \right.$$

On sait que

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \nu = \nu + \tau' - \tau, \quad \omega = \varpi + \tau' - \tau, \\ e = \sin \psi, \quad \eta = \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{r'}{r}, \\ s = \cos(\nu' - \nu) - 2\eta^2 \sin(\nu' - \tau') \sin(\nu - \tau'), \\ \Delta = 1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1 s, \\ R = \frac{1}{r'} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} - \alpha_1 s \right), \\ \frac{dR}{dr} = \frac{1}{r'^2} \left[s \left(\Delta^{-\frac{3}{2}} - 1 \right) - \alpha_1 \Delta^{-\frac{1}{2}} \right], \\ \frac{dR}{ds} = \frac{\alpha_1}{r'} \left(\Delta^{-\frac{3}{2}} - 1 \right), \quad \frac{dR}{dv} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dv}, \\ \frac{1}{a} \frac{dR}{de} = -\cos(\nu - \omega) \frac{dR}{dr} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a \cos^2 \psi} \right) \sin(\nu - \omega) \frac{dR}{dv}. \end{array} \right.$$

Tout se ramène donc au calcul de r , r' , ν , ν' pour les différentes époques distantes de $\alpha = 15,5753$ années juliennes, durée qui représente le seizième de la période de révolution sidérale de Pluton.

Les valeurs de ν et de r , qui définissent les positions dans l'orbite d'Uranus, sont calculées au moyen des Tables de Gaillot. On commence par déterminer pour les dates principales, depuis

1709,82 jusqu'en 2223,81, la longitude moyenne, la longitude du périhélie, l'excentricité, les coefficients de l'équation du centre et la longitude du nœud affectés de leurs inégalités séculaires et à longue période ⁽¹⁾. On en tire les valeurs de ν et de r données dans le Tableau V (p. 34).

Les valeurs de ν' et de r' , qui définissent les positions dans l'orbite de Pluton, se calculent aisément à partir des données suivantes :

$$n' = 1^{\text{G}}/50,6051; \quad M_0 = 175^{\text{G}},69; \quad \varepsilon' = 21^{\text{G}},55; \quad \varpi' = 245^{\text{G}},86; \quad \frac{1}{2}e' = 0,123.$$

Les coefficients de l'équation du centre et ceux de l'équation du rayon vecteur sont :

$$\begin{array}{lll} E_1 = 31^{\text{G}},09; & E_2 = 4^{\text{G}},70; & E_3 = 0^{\text{G}},99; \\ E_4 = 0^{\text{G}},25; & E_5 = 0^{\text{G}},06; & E_6 = 0^{\text{G}},02; \\ \alpha'B_0 = +40,80; & \alpha'B_1 = -9,52; & \alpha'B_2 = -1,15; \\ \alpha'B_3 = -0,21; & \alpha'B_4 = -0,04; & \alpha'B_5 = -0,01. \end{array}$$

On remarquera qu'en raison du choix particulier de la variable $z = n't$ les valeurs particulières de ν' et r' se reproduisent chaque fois que z dépasse 400^{G} . Connaissant les positions de Pluton et celles d'Uranus, on trouve facilement la disposition mutuelle des planètes, puis la fonction perturbatrice et ses dérivées partielles (Tableau V). Ensuite les formules (1) donnent les valeurs particulières des dérivées des variations des éléments (Tableau VI).

4. Application des formules d'interpolation. — Au moyen des formules d'interpolation, en suivant la marche indiquée à la fin du paragraphe 2^o (p. 29), on trouve les coefficients B'_i , C'_i , e_i , et e'_i (Tableau VII). Après avoir mis chacune des dérivées sous la forme :

$$f(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \sum_{i=1}^8 B_i \sin(in't + \varphi_i) + t \sum_{i=1}^8 C_i \sin(in't + \psi_i),$$

(1) Voir le Tableau III de l'Addition.

on passera aisément aux variations des éléments eux-mêmes en intégrant par rapport au temps.

$$\begin{aligned}\int f(t) dt &= A_0 t + \frac{1}{2} A_1 t^2 + \frac{1}{3} A_2 t^3 - \sum_{i=1}^8 \frac{B_i}{in'} \cos(in't + \varphi_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^8 \frac{C_i}{i^2 n'^2} \sin(in't + \psi_i) \\ &\quad - t \sum_{i=1}^8 \frac{C_i}{in'} \cos(in't + \psi_i). \\ \iint f(t) dt &= \frac{1}{2} A_0 t^2 + \frac{1}{6} A_1 t^3 + \frac{1}{12} A_2 t^4 - \sum_{i=1}^8 \frac{B_i}{i^2 n'^2} \sin(in't + \varphi_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^8 \frac{2 C_i}{i^3 n'^3} \cos(in't + \psi_i) \\ &\quad - t \sum_{i=1}^8 \frac{C_i}{i^2 n'^2} \sin(in't + \psi_i).\end{aligned}$$

On peut, d'ailleurs, donner à ces deux formules une forme plus pratique en faisant intervenir les coefficients B'_i , C'_i , e_i et e'_i .

On a

$$\begin{aligned}\int f(t) dt &= A_0 t + \frac{1}{2} A_1 t^2 + \frac{1}{3} A_2 t^3 + \sum_{i=1}^8 \alpha_i \sin(in't + \chi_i) \\ &\quad + t \sum_{i=1}^8 \beta_i \sin(in't + \xi_i)\end{aligned}$$

avec

$$\alpha_i \cos \chi_i = \frac{1}{in'} \left(C'_i - \pi e'_i + \frac{e_i}{i} \right), \quad \alpha_i \sin \chi_i = \frac{1}{in'} \left(-B'_i + \pi e_i + \frac{e'_i}{i} \right),$$

et

$$\beta_i \cos \xi_i = + \frac{e'_i}{i}, \quad \beta_i \sin \xi_i = - \frac{e_i}{i}.$$

De même

$$\begin{aligned}\iint f(t) dt &= \frac{1}{2} A_0 t^2 + \frac{1}{6} A_1 t^3 + \frac{1}{12} A_2 t^4 + \sum_{i=1}^8 \alpha'_i \sin(in't + \chi'_i) \\ &\quad + t \sum_{i=1}^8 \beta'_i \sin(in't + \xi'_i),\end{aligned}$$

TABLEAU

α	Pluton		Uranus		Disposition mutuelle des		
	v'	r'	v	r	$\frac{r}{r'}$	s	σ
— 9	G 169,4	34,16	G 162,1	18,60	0,5445	+0,9694	G 15,8
— 8	205,5	31,05	242,8	18,79	0,6052	+0,7947	358,5
— 7	247,1	29,87	317,9	19,76	0,6615	+0,4388	328,9
— 6	288,4	31,18	386,7	20,27	0,6501	+0,0427	302,7
— 5	324,1	34,37	55,5	19,77	0,5752	—0,4761	268,4
— 4	353,0	38,26	130,5	18,79	0,4911	—0,9361	222,9
— 3	376,6	42,01	211,3	18,55	0,4416	—0,8245	161,7
— 2	396,6	45,15	289,3	19,37	0,4290	—0,0943	106,0
— 1	014,3	47,47	360,0	20,19	0,4253	+0,6361	56,1
0	030,5	48,89	27,8	20,08	0,4107	+0,9586	18,4
1	046,3	49,35	99,9	19,16	0,3882	+0,6518	345,2
2	062,1	48,83	179,2	18,49	0,3787	—0,2409	284,5
3	078,4	47,36	259,4	18,96	0,4003	—0,9347	223,1
4	096,1	45,00	332,8	19,95	0,4433	—0,8402	163,6
5	116,3	41,81	1,0	20,26	0,4846	—0,2400	115,4
6	140,1	38,05	70,7	19,57	0,5143	+0,4721	68,7
7	169,4	34,16	147,3	18,64	0,5457	+0,9301	24,0
8	205,5	31,05	228,4	18,64	0,6003	+0,8959	370,7
9	247,1	29,87	304,8	19,58	0,6555	+0,6053	341,4
10	288,4	31,18	374,4	20,27	0,6501	+0,2318	314,9
11	324,1	34,37	42,6	19,94	0,5802	—0,2884	281,4
12	353,0	38,26	116,1	18,95	0,4953	—0,8393	236,6
13	376,6	42,01	196,5	18,48	0,4399	—0,9225	174,8
14	396,6	45,15	275,7	19,17	0,4246	—0,2957	119,1
15	014,3	47,47	347,6	20,10	0,4234	+0,4849	67,8
16	030,5	48,89	15,5	20,20	0,4132	+0,9322	23,6
17	046,3	49,35	86,2	19,35	0,3921	+0,7887	357,8
18	062,1	48,83	164,3	18,52	0,3793	—0,0156	299,0
19	078,4	47,36	245,3	18,79	0,3967	—0,8443	235,0
20	096,1	45,00	320,2	19,79	0,4398	—0,9281	175,7
21	116,3	41,81	388,9	20,30	0,4855	—0,4190	127,5
22	140,1	38,05	57,6	19,76	0,5193	+0,2828	81,7
23	169,4	34,16	132,7	18,76	0,5492	+0,8345	37,2
24	205,5	31,05	213,8	18,53	0,5968	+0,9519	380,2

V.

planètes	Fonction perturbatrice et ses dérivées partielles						α
	Δ	$10^2 R$	$10^2 \frac{dR}{ds}$	$10^2 \frac{dR}{dr}$	$10^2 \frac{dR}{dv}$	$10^4 \frac{dR}{a \, de}$	$10^2 \frac{da}{m' \, dt}$
0,2409	4,418	+11,88	+2,247	+1,177	-25,51	+ 40,78	- 9
0,4045	3,514	+ 5,621	-0,0601	-3,044	-24,33	-110,16	- 8
0,8572	2,644	+ 0,576	-0,8057	-0,495	- 8,27	- 18,36	- 7
1,3672	2,654	- 0,782	-0,4346	+0,773	- 4,33	+ 24,00	- 6
1,8784	2,919	- 1,024	+0,0573	+0,901	- 7,88	+ 29,26	- 5
2,1606	2,980	- 0,880	+0,3325	+0,286	- 4,44	+ 9,54	- 4
1,9231	2,583	- 0,657	+0,1981	-0,344	- 3,20	- 12,53	- 3
1,2648	2,059	- 0,282	-0,1341	-0,271	- 2,86	- 9,63	- 2
0,6399	2,063	+ 0,854	-0,0996	+0,613	+ 1,66	+ 19,07	- 1
0,3813	2,506	+ 2,724	+0,5722	+0,121	+ 3,85	+ 2,77	0
0,6447	2,010	+ 0,732	-0,1430	-0,520	+ 5,60	- 17,64	1
1,3258	1,965	- 0,267	-0,0692	+0,252	+ 0,36	+ 9,43	2
1,9085	2,318	- 0,524	+0,1909	+0,161	+ 0,73	+ 6,25	3
1,9414	2,422	- 0,621	+0,1805	-0,329	- 1,35	- 10,13	4
1,4674	2,252	- 0,507	-0,0958	-0,492	+ 0,14	- 15,24	5
0,7789	2,339	+ 0,614	-0,3684	+0,539	- 6,32	+ 19,05	6
0,2828	4,018	+ 9,015	+1,392	+2,822	-28,78	+101,13	7
0,2848	4,303	+10,79	+1,088	-3,771	-32,69	-136,49	8
0,6361	2,870	+ 2,133	-0,7897	-1,603	-18,07	- 55,70	9
1,1212	2,545	- 0,329	-0,6007	+0,316	- 5,23	+ 9,44	10
1,6712	2,737	- 0,907	-0,0961	+0,868	- 7,39	+ 28,08	11
2,0767	2,900	- 0,862	+0,2687	+0,454	- 5,46	+ 15,38	12
2,0051	2,647	- 0,678	+0,2508	-0,218	- 2,81	- 8,03	13
1,4314	2,129	- 0,391	-0,0612	-0,359	- 3,57	- 12,65	14
0,7687	1,971	+ 0,433	-0,1747	+0,358	+ 0,73	+ 10,99	15
0,4003	2,245	+ 2,494	+0,4681	+0,568	+ 1,80	+ 17,15	16
0,5352	2,143	+ 1,234	+0,0922	-0,685	+ 7,13	- 23,64	17
1,1557	1,917	- 0,152	-0,1268	+0,148	+ 0,62	+ 5,64	18
1,8272	2,269	- 0,499	+0,1524	+0,243	+ 1,07	+ 9,14	19
2,0098	2,475	- 0,634	+0,2212	-0,225	- 0,94	- 6,73	20
1,6425	2,353	- 0,609	-0,0061	-0,553	+ 0,03	- 13,42	21
0,9760	2,274	+ 0,049	-0,3645	+0,047	- 2,10	+ 2,53	22
0,3850	3,377	+ 5,128	+0,3095	+2,647	-23,33	+ 95,24	23
0,2200	5,037	+16,70	+2,582	-2,283	-33,24	- 81,75	24

TABLEAU VI

$\frac{z}{a}$	$\frac{2000}{m'} \sin \varphi \frac{d\theta}{dt}$	$\frac{2000}{m'} \frac{d\varphi}{dt}$	$\frac{1000}{m'} \frac{d\varepsilon_1}{dt}$	$\frac{1}{10 m' \sin i''} \frac{d^3 \rho}{dt^2}$	$\frac{100}{m'} e \frac{d\varpi_1}{dt}$	$\frac{100}{m'} \frac{de}{dt}$
— 9	+39,04	+13,09	—75,22	— 49,10	—4,408	+0,011
— 8	+16,26	—22,53	+ 2,03	+132,63	—4,204	—2,659
— 7	— 1,44	— 2,31	+28,66	+ 22,10	—1,429	—0,682
— 6	+ 2,00	— 0,14	+15,86	— 28,90	—0,748	—1,551
— 5	— 0,07	+ 0,16	— 2,04	— 35,23	—1,362	—1,088
— 4	+ 1,46	+ 1,53	—11,25	— 11,49	—0,767	—0,204
— 3	+ 2,27	— 1,14	— 6,62	+ 15,09	—0,553	—0,346
— 2	— 0,16	— 1,32	+ 4,67	+ 11,59	—0,494	—0,137
— 1	+ 4,09	+ 1,44	+ 3,62	— 22,96	+0,287	—1,209
0	+10,30	— 9,20	—20,68	— 3,34	+0,665	—0,796
1	— 1,00	— 3,32	+ 4,93	+ 21,24	+0,967	+0,206
2	+ 1,10	+ 0,03	+ 2,30	— 11,35	+0,062	+0,394
3	+ 0,56	— 1,59	— 6,51	— 7,52	+0,126	+0,378
4	— 0,92	— 0,86	— 6,48	+ 12,20	—0,233	+0,708
5	— 0,22	+ 0,07	+ 3,49	+ 18,35	+0,024	+1,007
6	— 0,13	+ 0,87	+12,98	— 22,94	—1,092	+0,215
7	+27,14	+15,48	—46,71	—121,76	—4,973	+1,906
8	+38,72	—36,70	—36,50	+164,33	—5,649	—3,304
9	— 3,82	— 9,32	+27,83	+ 67,06	—3,122	—0,105
10	+ 0,85	+ 0,07	+21,92	— 11,37	—0,904	—0,842
11	— 0,08	+ 0,13	+ 3,45	— 33,81	—1,277	—1,109
12	+ 1,12	+ 1,73	— 9,17	— 18,52	—0,943	—0,192
13	+ 2,52	— 0,70	— 8,34	+ 9,67	—0,485	—0,269
14	+ 0,10	— 1,84	+ 2,11	+ 15,23	—0,617	—0,122
15	+ 1,94	+ 1,04	+ 6,32	— 13,23	+0,126	—0,789
16	+10,61	— 6,87	—17,02	— 20,65	+0,311	—1,412
17	— 0,69	— 5,82	— 3,21	+ 28,46	+1,232	+0,046
18	+ 0,61	+ 0,14	+ 7,44	— 6,79	+0,107	+0,288
19	+ 0,80	— 1,40	— 5,15	— 11,00	+0,185	+0,406
20	— 0,78	— 1,01	— 7,88	+ 8,10	—0,162	+0,595
21	— 0,28	+ 0,05	+ 0,22	+ 16,16	+0,005	+0,406
22	— 0,02	+ 0,07	+12,96	— 3,05	—0,363	+0,505
23	+13,50	+11,57	—10,45	—114,67	—4,031	+2,002
24	+69,61	—44,49	—86,11	+ 98,43	—5,744	—1,506

TABLEAU VII.

Coefficient	$\frac{1000}{m'} \frac{d\varepsilon_1}{dt}$	$\frac{1}{10 m' \sin i''} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$	$\frac{100}{m'} e \frac{d\varpi_1}{dt}$	$\frac{100}{m'} \frac{de}{dt}$
B' ₁	— 3,66	— 2,37	+0,311	+0,717
B' ₂	+ 7,33	+11,66	+0,282	—0,288
B' ₃	— 9,87	—24,31	—0,249	+0,274
B' ₄	+ 8,41	+37,43	+0,431	+0,047
B' ₅	— 7,92	—11,95	—0,172	+0,199
B' ₆	+ 5,00	+15,81	+0,091	—0,113
B' ₇	— 3,13	— 3,98	+0,046	+0,204
C' ₀	— 2,15	+11,43	—1,171	—0,425
C' ₁	+ 2,14	— 5,36	+1,928	—0,057
C' ₂	— 5,14	+15,18	—0,931	—0,486
C' ₃	+ 7,96	—23,92	+0,970	+0,020
C' ₄	—14,20	+21,68	—0,482	—0,424
C' ₅	+ 1,29	—26,02	+0,304	+0,348
C' ₆	— 4,75	+22,76	—0,060	—0,698
C' ₇	— 1,89	—26,75	—0,219	+0,636
C' ₈	— 0,75	+11,18	—0,021	—0,322
e ₁	+0,602	+4,647	—0,026	—0,152
(¹ / ₂) e ₂	—0,250	—0,897	—0,006	+0,035
(¹ / ₃) e ₃	+0,261	+0,237	+0,015	—0,018
(¹ / ₄) e ₄	—0,324	—0,094	—0,008	+0,003
(¹ / ₅) e ₅	+0,101	—0,014	+0,008	—0,005
(¹ / ₆) e ₆	—0,138	+0,033	—0,001	+0,002
(¹ / ₇) e ₇	+0,024	—0,035	0,000	—0,002
e' ₀	+0,006	+0,592	—0,011	+0,012
e' ₁	+0,130	—1,124	+0,015	—0,041
(¹ / ₂) e' ₂	—0,212	+0,321	—0,016	+0,011
(¹ / ₃) e' ₃	+0,245	+0,097	+0,008	—0,008
(¹ / ₄) e' ₄	—0,240	—0,453	—0,008	—0,005
(¹ / ₅) e' ₅	+0,252	+0,105	+0,002	+0,002
(¹ / ₆) e' ₆	—0,202	—0,261	—0,001	—0,003
(¹ / ₇) e' ₇	+0,238	+0,042	—0,002	—0,005
(¹ / ₈) e' ₈	—0,078	—0,073	0,000	0,000

TABLEAU VIII. — Résultats de la méthode d'interpolation.

i	$\frac{1}{m'} \delta l = \left\{ \begin{array}{c} \text{Var. de la longitude} \\ \text{moyenne} \end{array} \right.$		$\frac{1}{m'} e \delta \omega = e. \left\{ \begin{array}{c} \text{Var. de la long.} \\ \text{du périhélie} \end{array} \right.$		$\frac{1}{m'} \delta e = \left\{ \begin{array}{c} \text{Var. de l'excentricité} \end{array} \right.$	
	Coefficient de $\sin in' t$	Coefficient de $\cos in' t$	Coefficient de $\sin in' t$	Coefficient de $\cos in' t$	Coefficient de $\sin in' t$	Coefficient de $\cos in' t$
1	+1",23	—0",35	+0",74	—0",15	—0",03	—0",49
2	—0",40	—0",40	—0",17	—0",07	—0",10	+0",10
3	+0",31	+0",37	+0",12	+0",05*	+0",01	—0",06
4	—0",30	—0",26	—0",04	—0",05	—0",04	—0",00
5	+0",02	+0",16	+0",02	+0",02	+0",03	—0",02
6	—0",04	—0",11	—0",00	—0",01	—0",04	+0",01
7	—0",03	+0",07	—0",01		+0",04	—0",01
8	+0",01	—0",01			—0",02	

i	Coefficient de $(\frac{1}{100}) \sin in' t$	Coefficient de $(\frac{1}{100}) \cos in' t$	Coefficient de $(\frac{1}{100}) \sin in' t$	Coefficient de $(\frac{1}{100}) \cos in' t$	Coefficient de $(\frac{1}{100}) \sin in' t$	Coefficient de $(\frac{1}{100}) \cos in' t$
1	—0",89	+0",16	+0",01	—0",03	—0",04	+0",15
2	+0",06	—0",01	—0",01	—0",01	+0",01	—0",04
3	+0",01	—0",03	+0",01	+0",02	—0",01	+0",02
4	—0",02	+0",06	—0",01	—0",01		—0",00
5	+0",03	—0",02		+0",01		+0",01
6	—0",02	+0",02				
7	+0",02					

	Termes « séculaires »	Termes « séculaires »	Termes « séculaires »
	—0",53 $(\frac{1}{100})^2$ +1,67 $(\frac{1}{100})^3$ —0,32 $(\frac{1}{100})^4$	—0",97 $(\frac{1}{100})$ —0,15 $(\frac{1}{100})^2$ +0,04 $(\frac{1}{100})^3$	—0",16 $(\frac{1}{100})$ —0,23 $(\frac{1}{100})^2$ —0,06 $(\frac{1}{100})^3$

avec

$$\alpha'_i \cos \chi'_i = \frac{1}{i^2 n'^2} \left(-B'_i + \pi e_i + 2 \frac{e'_i}{i} \right), \quad \alpha'_i \sin \chi'_i = \frac{1}{i^2 n'^2} \left(-C'_i + \pi e'_i - 2 \frac{e_i}{i} \right)$$

et

$$\beta'_i \cos \xi'_i = \frac{1}{i n'} \left(-\frac{e_i}{i} \right), \quad \beta'_i \sin \xi'_i = \frac{1}{i n'} \left(-\frac{e'_i}{i} \right).$$

Rappelons enfin qu'on a

$$a_2 = \frac{1}{4\pi^2} [\psi(-\pi) - \psi(\pi)],$$

$$a_1 = e'_0 - 2\pi a_2,$$

$$a_0 = C_0 - \pi e'_0 + \pi^2 a_2$$

et que

$$\delta l = \delta \varepsilon_1 + \delta \rho + \tan g \frac{\psi}{2} e \delta \varpi.$$

En effectuant l'intégration on trouve les résultats ci-contre (Tableau VIII). Il ne reste plus qu'à les comparer à la méthode classique.

On remarquera l'absence de $\sin \varphi d\theta$ et de $d\varphi$ dans nos tableaux définitifs. C'est qu'une détermination approximative (par intégration graphique) nous a montré que les résidus d'Uranus en latitude étaient trop petits, comparés aux erreurs systématiques, pour donner des résultats intéressants en ce qui concerne la masse de Pluton. Comme, par ailleurs, Lowell et Pickering n'ont trouvé de résultats bien définis que pour les résidus d'Uranus en longitude, nous nous bornerons au calcul des perturbations de la longitude.

CHAPITRE III.

COMPARAISON DES RÉSULTATS DES DEUX MÉTHODES.

Les graphiques ci-après (*fig. 1*) montrent les variations des éléments calculées par les deux méthodes avec les constantes d'intégration :

$$L_0 = -0'',61, \quad 100 L_1 = 0'',00, \quad E_0 = 0'',00, \quad e P_0 = 0'',00,$$

pour la méthode classique, et

$$L_0 = +0'',56, \quad 100 L_1 = -2'',48, \quad E_0 = +0'',15, \quad e P_0 = +0'',06,$$

pour la méthode d'interpolation.

Ces constantes provisoires sont destinées simplement à faire ressortir la concordance des résultats. Celle-ci est très satisfaisante si l'on songe au manque de convergence des séries classiques, au

grand intervalle ($15^{\text{ans}},6$) choisi pour l'interpolation, et à de petites erreurs inévitables dans un calcul aussi étendu et complexe que celui exigé par la première méthode. De plus l'interpolation

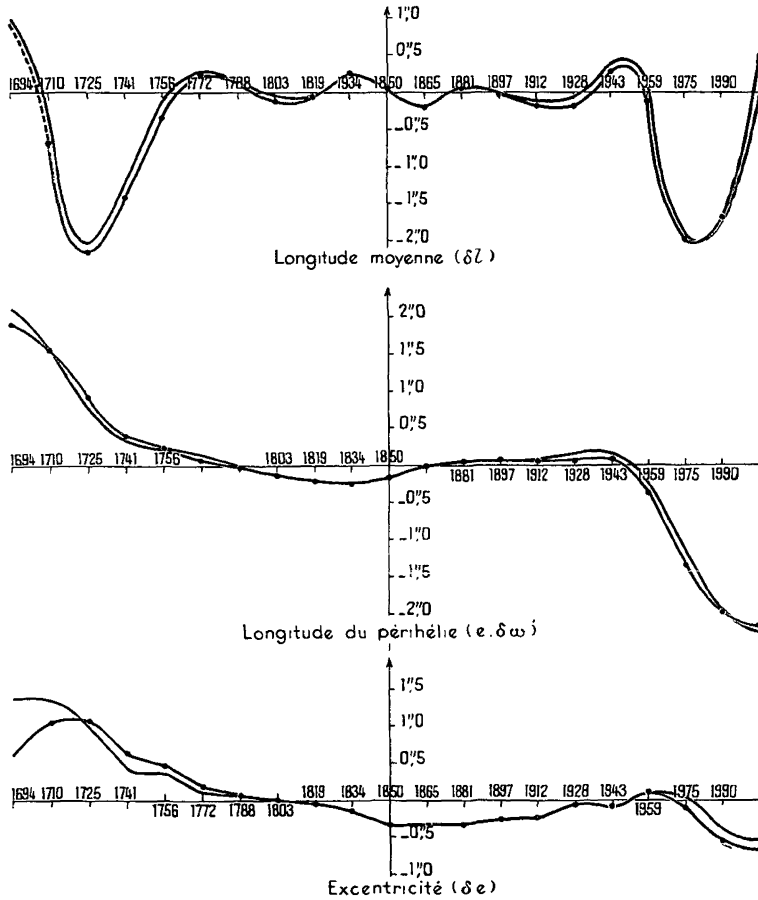


Fig. 1. — Variations de la longitude moyenne, de l'excentricité et de la longitude du périhélie ($e\delta\omega$) d'Uranus sous l'action de Pluton, calculées par la méthode classique (—) et par la méthode d'interpolation (---•---).

étant commencée à partir de 1710 seulement, il n'y a rien d'étonnant que les divergences s'accroissent pour des dates antérieures; pour celles-ci, seule la méthode analytique reste valable.

Nous avons représenté en outre (*fig. 2*) les variations des perturbations en longitude vraie, d'après les deux méthodes, d'où il ressort nettement que nous avons atteint une précision qui dépasse largement celle des résidus correspondants et aussi celle qui correspond à l'incertitude de nos données.

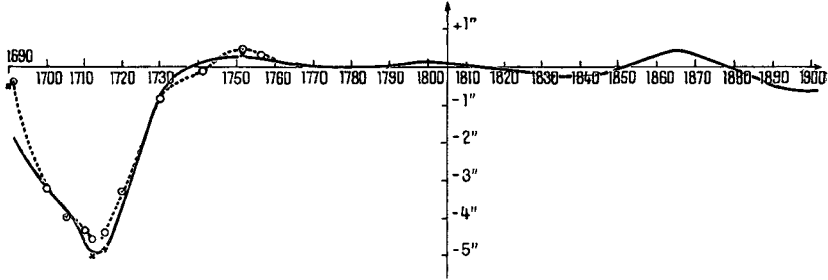


Fig. 2. — Perturbations en longitude vraie.

—— Par la méthode d'interpolation.
 ... Par la méthode classique.
 × Valeurs adoptées dans la résolution des équations.

On remarquera que les inégalités ne sont pas représentées par les mêmes termes de détail dans chacune des deux méthodes. Cela n'a rien de surprenant : une même fonction peut être représentée par une infinité de développements mixtes différents. En effet, un terme périodique ou périodique mixte peut être remplacé par son développement « séculaire ». Il semble en résulter qu'on pourrait identifier les développements mixtes en les réduisant respectivement en séries entières, ou, du moins, en procédant ainsi pour leur différence terme à terme. Il est cependant facile de constater qu'il n'en est rien. Un terme tel que $0'',01 \cos 8n't$ donnerait, dans un développement « séculaire », un terme en $\left(\frac{t}{100}\right)^2$ ayant pour amplitude

$$0'',01 \frac{(100n')^2}{2!} 8' = 2'',03.$$

Par suite, de petites erreurs, pratiquement négligeables, sur les termes de grande fréquence masqueraient complètement l'identité des développements correspondants suivant les puissances du temps.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONDITION. MASSE DE PLUTON.

1. Introduction. — On dispose de deux séries de résidus d'Uranus. Ceux de la théorie de Le Verrier publiée en 1873 et ceux de la théorie de Gaillot publiée en 1903. Lowell s'est servi des résidus de Gaillot, Pickering s'est servi de ceux de Le Verrier. La théorie de Gaillot, fondée sur des valeurs plus modernes des masses, est dans l'ensemble supérieure à celle de Le Verrier. Mais cette dernière possède sur la première un avantage : c'est que Le Verrier forme les équations de conditions individuelles, pour les observations antérieures à 1780, tandis que Gaillot les traite par groupes de trois ou quatre. *Or, la courbe des perturbations en longitude vraie (fig. 2, p. 41) montre l'importance prépondérante des observations antérieures à 1780 en ce qui concerne l'action de Pluton.* Certaines de ces observations sont presque simultanées, celles-là, il n'y a pas d'intérêt à les traiter individuellement; par contre, des observations comme celles de 1690, 1712 et 1715, que Gaillot confond en un même résidu, ne peuvent pas être considérées comme simultanées vis-à-vis des perturbations de Pluton. Pour apprécier le degré d'exactitude de chacune de ces observations, nous sommes donc obligé de commencer par les résidus de Le Verrier.

2. Les résidus de Le Verrier : solutions L_1 et L_2 . Discussion des résultats. — Le Verrier donne ⁽¹⁾ les résidus provisoires. Pour calculer les résidus définitifs, il suffit de substituer dans ses équations de condition les corrections des éléments ⁽²⁾ :

$$\delta n = -0'',0121, \quad \delta \varepsilon = -0'',16, \quad \delta e = -0'',24, \quad x = -0,02.$$

On trouve ainsi (Tableau IX) les résidus R_i , qui, changés de signe, donnent les seconds membres des équations de n° 1 à n° 5. Pour les autres résidus nous adoptons ceux qu'on déduit des résidus individuels par interpolation graphique [courbe tracée

⁽¹⁾ *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 14, p. A.86.

⁽²⁾ *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 14, p. A.90.

par Lowell ⁽¹⁾ étendue jusqu'en 1906 au moyen des observations de Greenwich].

TABLEAU IX. — *Équations de condition. Groupe spécial 1691-1782.*

N° 1	1690,97	$\delta\varepsilon = 155,4$	$\delta n = 1,91$	$\delta e = 0,49$	$x = 77,8$	$\mu_7 = 0,52$	$m' = +2,01$
2	1712,23	$\delta\varepsilon = 151,1$	$-0,39$	$+2,09$	$+18,6$	$-5,03$	$m' = -7,42$
3	1715,23	$\delta\varepsilon = 148,1$	$+0,11$	$+2,13$	$= 21,7$	$-4,81$	$m' = +9,34$
4	1750,83	$\delta\varepsilon = 91,0$	$+0,74$	$-1,76$	$-115,4$	$+0,30$	$m' = +5,65$
5	1756,73	$\delta\varepsilon = 85,0$	$-0,02$	$-1,90$	$-46,2$	$+0,12$	$m' = +5,19$
6	1764,00	$\delta\varepsilon = 79,4$	$-0,96$	$-1,65$	$-6,1$	$+0,12$	$m' = +5,20$
7	1772,00	$\delta\varepsilon = 74,8$	$-1,74$	$-0,89$	$+50,9$	$+0,01$	$m' = +3,85$
8	1782,00	$\delta\varepsilon = 69,8$	$-1,96$	$+0,55$	$+99,4$	$-0,07$	$m' = -2,35$

Nous prenons comme inconnues, non seulement les quatre corrections aux éléments d'Uranus et la masse m' de Pluton, mais aussi la correction μ_7 à la masse de Neptune. Comme Le Verrier introduit μ_7 avec la perturbation totale brute de Neptune, sans effectuer la correction de L_0 , E_0 et P_0 , dont nous avons déjà montré l'utilité et la nécessité (p. 18-21), nous appliquerons, aux coefficients de μ_7 de Le Verrier, la correction :

$$\delta\varepsilon = +3093'',93, \quad \delta e = -117'',93, \quad x = -282'',92,$$

de manière à les rendre analogues à ceux de Gaillot. On constate aisément qu'au degré de précision auquel on se borne pour les coefficients de μ_7 , les perturbations d'Uranus par Neptune sont les mêmes chez Le Verrier et chez Gaillot.

Quant aux coefficients de m' , qui représentent les perturbations en longitude vraie produites par l'unité de masse (T) de Pluton, nous adoptons pour 1691 les résultats de la méthode analytique ⁽²⁾ et pour les autres dates les valeurs données par la méthode d'interpolation.

En comparant les coefficients de m' aux termes constants ($-R_t$), on s'aperçoit immédiatement que le résidu de l'équation n° 3, relative à 1715,23 (moyenne de 3 observations de Flamsteed), est certainement très erroné. Telle est la première constatation

⁽¹⁾ *Memoir on a Trans-Neptunian planet.*, Planche I, à la fin du Mémoire.

⁽²⁾ Voir p. 40-41.

importante révélée par la comparaison des observations et des perturbations nouvellement calculées. Nous omettons donc cette équation dans la formation des équations normales (Tableau X), obtenues par la méthode des moindres carrés.

TABLEAU X. — *Équations normales du groupe 1691-1782*
(sans l'équation n° 3).

+ 7,00 δε	— 706,50 δn	— 6,24 δe	— 4,05 x	+ 79,00 μ ₇	— 25,35 $\frac{m'}{5}$	— 12,13 = 0
— 706,50	+ 79257,81	+ 633,29	+ 241,20	— 10733,28	+ 3989,75	+ 683,32 = 0
— 6,24	+ 633,29	+ 12,14	+ 0,91	— 517,86	+ 15,89	+ 3,95 = 0
— 4,05	+ 241,20	+ 0,91	+ 15,13	+ 311,07	— 56,30	+ 49,60 = 0
+ 79,00	— 10733,28	— 517,86	+ 311,07	+ 34358,78	— 906,80	+ 942,77 = 0
— 25,35	+ 3989,75	+ 15,90	— 56,30	— 906,80	+ 642,38	— 197,11 = 0
— 12,13	+ 683,32	+ 3,95	+ 49,60	+ 942,77	— 197,11	+ 165,34 = Σ vv

Bien que les équations du Tableau IX correspondent à l'époque du maximum des perturbations elles ne suffisent point à déterminer m' . Une très forte proportion des perturbations serait rejetée sur les corrections des éléments si on les prenait isolément.

Nous partageons les observations restantes en 3 groupes :

1^o... 1782-1830 2^o... 1836-1873 3^o... 1873-1903

Le système de poids est nécessairement arbitraire pour des équations qui peuvent être entachées de nombreuses erreurs systématiques inconnues. Nous prendrons d'abord les poids de Gaillot. La solution correspondante s'appellera L_1 .

Solution L_1 .

Groupe.	Poids.	Groupe.	Poids.
1691-1782.....	1,0	1836-1873.....	2,0
1782-1830.....	1,5	1873-1903.....	2,0

Pour les coefficients de δε, δn, δe, x et μ₇ dans les équations postérieures à 1780, nous renvoyons le lecteur aux équations de Gaillot (1), et nous donnons seulement R_i et les coefficients de m' (Tableau XI).

(1) *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 28, p. A. 73.

TABLEAU XI.

Date	m'	R_I	Date	m'	R_I	Date	m'	R_I	Date	m'	R_I
1782,33	-0,07	+2,45	1844...	-0,11	-0,80	1865...	+0,52	-0,20	1887...	-0,33	+3,95
1783,68	-0,05	+3,90	1845...	-0,06	-0,67	1867...	+0,48	-0,00	1888...	-0,38	+4,22
1786,65	+0,02	+5,17	1846...	-0,02	-0,45	1868...	+0,47	+0,12	1889...	-0,40	+4,47
1792,47	+0,12	+3,90	1847...	+0,04	-0,25	1869...	+0,43	+0,25	1890...	-0,44	+4,72
1796,37	+0,15	+2,07	1848...	+0,08	+0,00	1870...	+0,41	+0,45	1891...	-0,46	+4,97
1803,24	+0,13	-0,30	1849...	+0,14	+0,05	1871...	+0,36	+0,57	1892...	-0,50	+5,22
1812,21	-0,01	-2,12	1850...	+0,19	+0,12	1872...	+0,35	+0,85	1893...	-0,50	+5,37
1816,55	-0,10	-0,45	1851...	+0,23	+0,12	1873...	+0,30	+1,00	1894...	-0,53	+5,55
1820,17	-0,16	+0,62	1852...	+0,27	+0,07	1874...	+0,28	+1,20	1895...	-0,53	+5,55
1824,25	-0,20	+1,75	1853...	+0,31	+0,00	1875...	+0,26	+1,37	1896...	-0,53	+5,50
1827,14	-0,24	+2,15	1854...	+0,35	-0,05	1876...	+0,24	+1,55	1897...	-0,53	+5,25
1829,58	-0,25	+2,25	1855...	+0,39	-0,15	1877...	+0,20	+1,75	1898...	-0,54	+5,00
			1856...	+0,42	-0,25	1879...	+0,13	+2,25	1899...	-0,55	+4,75
1837...	-0,27	+0,77	1857...	+0,45	-0,45	1880...	+0,04	+2,45	1900...	-0,54	+4,37
1838...	-0,26	+0,50	1858...	+0,49	-0,50	1881...	-0,01	+2,62	1901...	-0,52	+4,05
1839...	-0,26	-0,12	1859...	+0,51	-0,50	1882...	-0,06	+2,80	1902...	-0,51	+3,75
1840...	-0,25	-0,62	1860...	+0,53	-0,50	1883...	-0,12	+3,00	1903...	-0,51	+3,37
1841...	-0,20	-0,80	1861...	+0,54	-0,45	1884...	-0,17	+3,25			
1842...	-0,18	-0,95	1862...	+0,54	-0,45	1885...	-0,22	+3,50			
1843...	-0,14	-0,92	1863...	+0,53	-0,37	1886...	-0,27	+3,75			

TABLEAU XII. — *Équations normales du groupe : 1782-1830.*

+ 12,00δε-	546,30δn+	4,39δε+	6,42x-	14,00μ ₇ -	3,30 $\frac{m'}{5}$ +	21,39=0	+ 7,34
-546,30	+29061,05	+ 119,65	-493,92	-15053,80	+ 37,49	-1187,22=0	-406,22
+ 4,39	+ 119,65	+ 30,29	- 8,85	- 1369,45	- 7,46	- 19,26=0	+ 0,13
+ 6,42	- 493,92	- 8,85	+ 19,04	+ 596,97	+ 7,43	+ 12,78=0	+ 8,59
- 14,00	-15053,80	-1369,45	+596,97	+65460,00	+344,10	+1229,18=0	+138,24
- 3,30	+ 37,49	- 7,46	+ 7,43	+ 344,10	+ 6,43	- 4,92=0	+ 0,24
+ 21,39	- 1187,22	- 19,26	+ 12,78	+ 1299,18	- 4,92	+ 85,35=Σvv	+ 16,71

Les nombres de la dernière colonne représentent les termes libres du groupe de 1782-1830 relatifs aux résidus de Gaillot.

TABLEAU XIII. — *Équations normales du groupe : 1836-1873.*

+ 35,00 $\delta\epsilon$ + 164,60 δn - 41,12 δe - 26,56 x - 22,14 μ - 37,90 $\frac{m'}{5}$ - 4,58 = 0	- 0,48
+164,60 +4934,52 - 441,37 + 300,95 - 9236,50 + 622,87 + 60,49 = 0	-162,63
- 41,12 - 441,37 + 69,58 + 9,11 + 2666,97 - 82,35 + 3,91 = 0	- 0,74
- 26,56 + 300,95 + 9,11 + 65,98 + 1860,02 + 11,69 + 13,51 = 0	- 10,47
- 22,14 -9236,50 +2666,97 +1860,02 +143 406,00 -518,85 +388,74 = 0	-292,50
+ 37,90 + 622,87 - 82,35 + 11,69 - 2518,85 + 109,49 - 1,36 = 0	- 2,38
- 4,58 + 60,49 + 3,91 + 13,51 + 388,74 - 1,36 + 8,97 = Σvv	+ 45,28

Les nombres de la dernière colonne représentent la somme des termes libres du groupe de 1836-1873 et du groupe de 1873-1903 relatifs aux résidus de Gaillot.

TABLEAU XIV. — *Équations normales du groupe : 1873-1903.*

+ 29,00 $\delta\epsilon$ + 1204,20 δn + 22,75 δe + 42,29 x + 22,46 μ - 40,00 $\frac{m'}{5}$ + 109,55 = 0	
+1204,20 + 51931,24 +1201,36 +1625,97 +106540,40 -1986,11 + 4811,09 = 0	
+ 22,75 + 1201,36 + 52,45 + 16,91 + 3541,43 - 75,85 + 123,33 = 0	
+ 42,29 + 1625,97 + 16,91 + 75,70 + 2396,72 - 40,17 + 148,65 = 0	
+ 22,46 +106540,40 +3541,43 +2396,72 +265764,00 -5365,85 +10356,52 = 0	
- 40,00 - 1986,11 - 75,85 - 40,17 - 5365,85 + 113,72 - 202,14 = 0	
+ 109,55 + 4811,09 + 123,33 + 148,65 + 10356,52 - 202,14 + 464,78 = Σvv	

TABLEAU XV. — *Équations normales de la solution L₁.*

+ 153,00 $\delta\epsilon$ + 1211,65 δn - 36,39 δe + 37,04 x + 122,00 μ - 34,50 $\frac{m'}{5}$ + 229,89 = 0	
+1211,65 +236580,90 +2332,73 +3354,17 +161293,82 + 1319,52 + 8645,65 = 0	
- 36,39 + 2332,73 + 301,63 + 39,69 + 9844,77 - 311,69 + 229,54 = 0	
+ 37,04 + 3354,17 + 39,69 + 327,06 + 9720,00 - 102,12 + 393,08 = 0	
+ 122,00 +161293,82 +9844,77 +9720,00 +950888,78 -16160,04 +24277,06 = 0	
- 34,50 + 1319,52 - 311,69 - 102,12 - 16160,04 + 1098,46 - 611,49 = 0	
+ 229,89 + 8645,65 + 229,54 + 393,08 + 24277,06 - 611,49 + 1240,87 = Σvv	

La résolution du système L_4 donne :

$$\delta e = -1''.16, \quad \delta n = -0'',018\,49, \quad \delta e = +0'',071,$$

$$x = -0'',388, \quad \mu_7 = -0,013\,429,$$

$$\Sigma vv \text{ initiale} = 1240,87, \quad \Sigma vv \text{ finale} = 151,01,$$

Réduction de la somme des carrés des résidus : $R = 87,8\%$,

$$m_7 = 1 : 19\,165,$$

$$m' = 1,645T \pm 0,29.$$

Groupe.	Σvv initiale.	Σvv finale.	Poids.	Réduction.
1691-1782....	165,34	53,98	1	67,4%
1782-1830....	85,33	44,78	1.5	47,5
1836-1873....	8,97	7,39	2	18,0
1873-1903....	464,78	7,57	2	98,4

Ces résultats appellent un certain nombre de remarques importantes.

1° L'erreur probable de m' a été déterminée par les relations classiques :

$$\text{Erreur probable} = \frac{\text{résidu moyen définitif}}{\sqrt{\text{coefficient de } m' \text{ dans l'équation finale en } m'}},$$

$$\text{Résidu moyen définitif} = \sqrt{\frac{\Sigma vv}{N - p}}$$

(N = nombre d'équations, p = nombre d'inconnues).

Il est évident que cette *erreur probable* dépend essentiellement des poids adoptés. Sa signification ne doit pas être surestimée.

2° La valeur de m_7 , masse de Neptune, que nous venons de trouver, se situe entre la valeur définitive de Gaillot⁽¹⁾ (1 : 19094) et celle de Newcomb (1 : 19314) adoptée par *la Connaissance des Temps* et le *Nautical Almanac*. Résultat très satisfaisant pour la théorie de Le Verrier.

(1) Qui est aussi la valeur trouvée par Asaph Hall par l'observation du satellite.

3° La réduction des résidus est très considérable (87,8 % pour les poids adoptés). — Mais il ne faut pas perdre de vue que ce n'est pas seulement à l'introduction de m' que nous la devons, mais surtout à l'application de la méthode des moindres carrés. En effet, les résidus de Le Verrier n'ont pas été formés dans le but de rendre minimum la somme de leurs carrés, mais par une méthode spéciale que Le Verrier préférerait à cause de sa simplicité. — *Notre résultat met donc en relief la perfection de la théorie de Le Verrier, et montre que la petitesse relative des résidus de Gaillot est due au moins autant à l'application de la méthode des moindres carrés qu'aux qualités intrinsèques de ses données et de sa théorie.*

4° En ce qui concerne la masse de Pluton, m' , celle que nous venons de trouver s'accorde mieux avec la valeur trouvée par Nicholson et Mayall (1) à partir des résidus de Neptune

$$m' = 0,94 T = 0,24,$$

qu'avec la conclusion de la discussion de Bower (2) ($m' = 0,10 T$) basée sur des considérations des valeurs hypothétiques de l'albedo et de la densité des différentes planètes du système solaire.

Étant donné qu'on pourrait considérer comme arbitraire le rejet de l'observation de 1715, et comme trop fort le poids 1, attribué au groupe 1691-1782, qui correspond à des observations peu précises, nous avons résolu le système précédent en attribuant le poids zéro à ce groupe douteux, bien qu'il se situe à l'époque où les perturbations de Pluton étaient maxima. La solution correspondante s'appellera L_2 .

Solution L_2 .

Groupe.	Poids.	Groupe.	Poids.
1691-1782	0,0	1836-1903	2,0
1782-1830	1,5		

(1) *Astrophysical Journal*, 1931, n° 73, p. 8.

(2) *Lick Obs. Bull.*, 1931, n° 437, p. 178.

La résolution du système L_2 donne

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= -1''.457, & \delta n &= -0''.003\,06, & \delta e &= +0''.181, \\ x &= -0''.334, & \mu_7 &= -0.0169, \\ \Sigma vv \text{ initiale} &= 1075.5, & \Sigma vv \text{ finale} &= 67.7, \\ m_7 \text{ provisoire} &= 1 : 189\,08, & m_7 \text{ finale} &= 1 : 192\,33;\end{aligned}$$

$$m' = 1.96 \pm 0.82.$$

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= +4''.907\,205\mu_7 + 0''.290\,645\frac{m'}{5} - 1''.487\,827, \\ \delta n &= -0.363\,598\mu_7 + 0.002\,023\frac{m'}{5} - 0.010\,030, \\ \delta e &= -29.999\,378\mu_7 + 1.157\,410\frac{m'}{5} - 0.780\,505, \\ x &= -23.431\,792\mu_7 - 0.055\,484\frac{m'}{5} - 0.708\,065;\end{aligned}$$

$$\mu_7 = +0.010\,607\frac{m'}{5} - 0.021\,068.$$

Cette solution présente une particularité curieuse, qui n'est peut-être pas une simple coïncidence, c'est que dans l'hypothèse $m'=0$, c'est-à-dire *en résolvant par la méthode des moindres carrés les équations de condition de Le Verrier, limitées aux résidus modernes (1782-1903), et sans tenir compte de Pluton, on trouve $m_7=1:19314$, c'est-à-dire la masse de Newcomb, rigoureusement*. La théorie de Newcomb semble donc se distinguer de celle de Le Verrier (1873) surtout par l'usage de la méthode des moindres carrés ⁽¹⁾ et le rejet des observations anciennes, mais non par des résultats essentiels concernant les perturbations.

D'autre part, en ce qui concerne la masse de Pluton, la solution L_2 confirme d'une manière remarquable les résultats de la solution L_1 .

Cette concordance, plutôt inattendue, justifie l'emploi des observations anciennes et l'exclusion du résidu de 1715. Nous allons donc revenir au système L_1 et l'analyser plus complètement, en éliminant $\delta\varepsilon$, δn , δe , x et μ_7 dans les équations individuelles,

(1) Nous venons de faire une remarque analogue pour la théorie de Gaillot (p. 48, Remarque 3°).

de façon à former un système d'équations de la forme

$$\boxed{A m' + B = 0.}$$

On tire des équations normales :

$$\partial \varepsilon = + 0,636\,654 \frac{m'}{5} - 1,369\,920,$$

$$\partial n = - 0,026\,702 \frac{m'}{5} - 0,009\,701,$$

$$\partial e = + 0,955\,627 \frac{m'}{5} - 0,243\,140,$$

$$x = + 0,078\,688 \frac{m'}{5} - 0,413\,541,$$

$$\mu_7 = + 0,010\,744 \frac{m'}{5} - 0,016\,965.$$

En remplaçant ces expressions dans les équations de condition individuelles on obtient les coefficients A et B ci-après (Tableaux XVI et XVII).

Les coefficients A représentent ce qu'on pourrait appeler « les perturbations réduites absolues » ⁽¹⁾; ils correspondent à la solution du système :

$$(\text{Perturbations}) + (\text{Réduction}) = 0.$$

Ils sont indépendants de la valeur des résidus. *Leur valeur représente « l'effet observable » de Pluton sur les longitudes d'Uranus.* Ils déterminent aussi le poids intrinsèque de l'équation correspondante, car l'effet d'une même erreur sur B est d'autant plus insensible sur m' , que A est plus grand.

Les coefficients B représentent les résidus définitifs dans l'hypothèse $m' = 0$, c'est-à-dire quand on applique la méthode des moindres carrés sans tenir compte de Pluton.

Soit m'_0 la valeur définitive de la masse de Pluton. Chaque équation de condition laisse un résidu $\rho' = A m'_0 + B$. La quantité ρ' représente la somme des erreurs systématiques et accidentelles de la théorie et des observations et, éventuellement, les perturbations produites par des planètes encore inconnues. C'est l'*erreur effective* ρ' d'un résidu par opposition à l'*erreur probable* ⁽²⁾

⁽¹⁾ Voir les courbes p. 98 et p. 125.

⁽²⁾ Voir p. 101.

dont les valeurs, telles que les calcule Lowell, seront désignées par ΔB dans le Tableau XVI. Lorsque $|\rho'| < |B|$ on peut affirmer que le résidu initial R_i renferme une part d' « effet observable » de Pluton : il peut servir au calcul de m' et pouvait donner à Lowell une détermination valable des éléments de Pluton.

La dernière colonne du Tableau XVII donne $\rho' - R_i$, qui, avec les notations de la page 15, s'écrit $\delta\nu + \Delta\nu$. C'est la *perturbation réduite* par une correction convenable des éléments provisoires d'Uranus et « ajustée » en quelque sorte aux résidus R_i .

Une autre quantité intéressante est la *masse apparente*

$$m'_a = -\frac{B}{A}.$$

C'est la masse qu'on aurait trouvée si l'on admettait que le terme B est exact : « hypothèse de travail » inévitable avant la découverte de Pluton. Chaque valeur positive de m'_a montre que le résidu correspondant est exact ou affecté d'une erreur favorable à la découverte de l'astre.

Le Tableau XVI montre qu'à ce point de vue toutes les observations anciennes (excepté celle de 1715 que nous avons déjà omise) étaient extrêmement favorables, tout en conduisant à une forte surestimation de la masse.

TABLEAU XVI.

Date	m'_a	ΔB	ρ'	A	B	Date	m'_a	ΔB	ρ'	A	B
1691...	^T +11,0	$\pm 2,94$	- 2",14	+ 0",23	- 2",53	1736...	+ 7,3	»	- 3",23	+ 0",57	- 4",16
1712...	+ 1,6	»	- 0,31	- 4,05	+ 6,43	1764...	+ 10,6	$\pm 4",00$	- 4,04	+ 0,45	- 4,78
1715...	- 2,5	»	- 16,21	- 3,88	- 9,81	1772...	+ 15,2	»	- 4,07	+ 0,30	- 4,57
1781...	+ 4,7	$\pm 2,14$	- 2,35	+ 0,78	- 3,63						

m'_a , masse apparente; ΔB , erreur probable selon Lowell; ρ' , « erreur effective »; A, « perturbation réduite absolue »; B, résidu définitif dans l'hypothèse $m' = 0$.

En comparant l'erreur probable ΔB de Lowell à « l'erreur effective » ρ' des résidus anciens (Tableau XVI), on constate que ρ' est toujours de l'ordre de ΔB , sauf en 1715.

TABLEAU XVII. — Analyse de la solution L₁.

Date	A	R _l	B	ρ'	ρ'—R _l	Date	A	R	B	ρ'	ρ'—R _l
1691	+0,23	-2,01	-2,53	-2,14	-0,13	1850	-0,07	+0,12	+0,82	+0,70	+0,58
1712	-4,05	+7,42	+6,43	-0,31	-7,73	1851	-0,06	+0,12	+0,82	+0,72	+0,60
(1713)	(-3,88)	(-9,34)	(-9,81)	(-10,21)	(-6,87)	1852	-0,05	+0,07	+0,76	+0,69	+0,62
1751	+0,78	-5,65	-3,63	-2,35	+3,30	1853	-0,02	+0,00	+0,67	+0,64	+0,64
1756	+0,57	-5,19	-4,16	-3,23	+1,96	1854	-0,01	-0,05	+0,62	+0,60	+0,65
1764	+0,45	-5,20	-4,78	-4,04	+1,16	1855	0,00	-0,15	+0,51	+0,51	+0,66
1772	+0,30	-3,85	-4,57	-4,07	-0,22	1856	+0,02	-0,25	+0,36	+0,39	+0,64
1782	+0,28	+2,35	+0,21	+0,68	-1,67	1857	+0,03	-0,45	+0,12	+0,17	+0,62
						1858	+0,05	-0,50	+0,03	+0,12	+0,62
						1859	+0,06	-0,50	-0,03	+0,07	+0,57
1782	+0,28	+2,45	+0,27	+0,73	-1,72	1860	+0,07	-0,50	-0,10	+0,02	+0,52
1784	+0,32	+3,90	+1,61	+2,13	-1,77	1861	+0,07	-0,45	-0,13	-0,01	+0,44
1787	+0,42	+5,17	+2,70	+3,39	-1,78	1862	+0,07	-0,45	-0,22	-0,10	+0,35
1792	+0,58	+3,90	+1,40	+2,34	-1,56	1863	+0,06	-0,37	-0,23	-0,13	+0,24
1796	+0,64	+2,07	-0,22	+0,84	-1,23	1865	+0,03	-0,20	-0,30	-0,22	-0,02
1803	+0,68	-0,30	-1,95	-0,84	-0,54	1867	+0,02	0,00	-0,29	-0,26	-0,26
1812	+0,55	-2,12	-2,85	-1,95	+0,17	1868	+0,02	+0,12	-0,31	-0,27	-0,39
1817	+0,43	-0,45	-0,84	-0,13	+0,32	1869	+0,02	+0,25	-0,38	0,35	0,60
1820	+0,34	+0,62	+0,41	+0,97	+0,35	1870	+0,01	+0,45	-0,35	-0,33	-0,78
1824	+0,24	+1,75	+1,69	+2,09	+0,34	1871	+0,01	+0,57	-0,48	-0,46	-1,03
1827	+0,15	+2,15	+2,19	+2,43	+0,28	1872	0,00	+0,85	-0,30	-0,31	-1,16
1830	+0,08	+2,25	+2,37	+2,51	+0,26	1873	0,00	+1,00	-0,38	-0,38	-1,38
						1874	-0,01	+1,20	-0,33	-0,35	-1,55
						1875	+0,01	+1,37	-0,39	-0,37	-1,74
1837	-0,11	+0,77	+1,10	+0,92	+0,15	1876	+0,02	+1,55	-0,37	-0,35	-1,90
1838	-0,15	+0,50	+0,90	+0,65	+0,15	1877	+0,02	+1,75	-0,38	-0,35	-2,10
1839	-0,18	-0,12	+0,32	+0,02	+0,14	1879	+0,01	+2,25	-0,20	-0,18	-2,43
1840	-0,20	-0,62	-0,14	-0,48	+0,14	1880	-0,01	+2,45	-0,30	-0,32	-2,77
1841	-0,21	-0,80	-0,25	-0,59	+0,21	1881	-0,03	+2,62	-0,31	-0,36	-2,98
1842	-0,20	-0,95	-0,41	-0,74	+0,21	1882	-0,04	+2,80	-0,31	-0,38	-3,18
1843	-0,20	-0,92	-0,33	-0,66	+0,26	1883	-0,05	+3,00	-0,33	-0,41	-3,41
1844	-0,19	-0,80	-0,19	-0,51	+0,29	1884	-0,05	+3,25	-0,28	-0,36	-3,61
1845	-0,18	-0,67	-0,02	-0,32	+0,35	1885	-0,06	+3,50	-0,19	-0,29	-3,79
1846	-0,17	-0,45	+0,20	-0,06	+0,39	1886	-0,08	+3,75	-0,09	-0,22	-3,97
1847	-0,15	-0,25	+0,45	+0,20	+0,45	1887	-0,09	+3,95	-0,05	-0,20	-4,15
1848	-0,13	0,00	+0,69	+0,48	+0,48	1888	-0,09	+4,22	+0,05	-0,10	-4,32
1849	-0,11	+0,05	+0,77	+0,59	+0,51	1889	-0,08	+4,47	+0,19	+0,05	-4,42

TABLEAU XVII (suite). — Analyse de la solution L₁.

Date	A	R _l	B	ρ'	ρ'—R _l	Date	A	R _l	B	ρ'	ρ'—R _l
1890	—0",08	+4",72	+0",29	+0",16	—4",56	1897	—0",01	+5",25	+0",34	+0",32	—4",93
1891	—0",07	+4",97	+0",44	+0",31	—4",66	1898	—0",00	+5",00	+0",06	+0",06	—4",94
1892	—0",06	+5",22	+0",56	+0",46	—4",76	1899	—0",01	+4",75	—0",18	—0",20	—4",95
1893	—0",05	+5",37	+0",66	+0",57	—4",80	1900	—0",02	+4",37	—0",52	—0",55	—4",92
1894	—0",05	+5",55	+0",74	+0",66	—4",89	1901	—0",03	+4",05	—0",86	—0",82	—4",87
1895	—0",04	+5",55	+0",71	+0",64	—4",91	1902	—0",03	+3",75	—1",03	—1",08	—4",83
1896	—0",02	+5",50	+0",61	+0",58	—4",92	1903	—0",04	+3",37	—1",48	—1",43	—4",80

On est très tenté d'admettre que l'observateur s'était trompé d'une seconde sur l'ascension droite en 1715, ce qui ferait concorder le résidu de 1715 avec celui de 1712. Malheureusement il est très peu probable que trois observations différentes (celles de Flamsteed des 4 mars, 10 mars et 29 avril) soient entachées d'une même erreur.

Le résultat le plus remarquable fourni par l'analyse de la solution L₁ est la concordance entre la masse $m'_a = 1,6 T$ qui résulte de l'équation de 1712, équation qui correspond à la valeur maximum de A et la solution du système complet qui donne une valeur voisine $m' = 1,65 T$, malgré le poids double attribué aux équations postérieures à 1830. Si le résidu de 1715 ne rendait point un peu suspect celui de 1712 on aurait là une garantie sérieuse de l'exactitude de la valeur 1,6 T de la masse de Pluton.

On notera également la petitesse de A entre 1800 et 1900, circonstance extrêmement défavorable à la découverte de Pluton. Dans le même ordre d'idées, notons que les grands résidus laissés par la théorie de Le Verrier après 1873 étaient dus simplement à un mauvais choix des éléments d'Uranus, puisqu'ils pouvaient être réduits sans tenir compte de Pluton comme le prouve la petitesse des valeurs correspondantes de B.

3. Les résidus de Gaillot : solution G₁. Discussion des résultats.

— Puisque les trois observations de 1715 sont nettement erronées, la moyenne de Gaillot de 1710 qui comprend les observations de 1691, 1712, et les trois observations de 1715, est certainement

erronée de plusieurs secondes. Nous résoudrons donc le système d'équations de Gaillot en omettant l'équation de 1710 ⁽¹⁾. Le groupe 1691-1782 est remplacé ici par quatre équations pour lesquelles les valeurs des perturbations (coefficients de $\frac{m'}{5}$) et des résidus R_g sont données par le Tableau XVIII.

TABLEAU XVIII.

Date	$\frac{m'}{5}$	R_g	Date	$\frac{m'}{5}$	R_g
1709,79....	(-18",35)	(-2",14)	1767,34....	+0",40	+0",58
1732,81....	+ 1,25	-4,45	1769,47....	+0,30	-3,78

La solution G_1 a été obtenue avec les poids suivants :

Solution G_1 .

Groupe.	Poids.	Groupe.	Poids.
1733-67-69....	1,0	1836-1903.....	2,0
1782-1830.....	1,5		

On trouvera les coefficients des équations normales à la suite de ceux de la solution L_1 (Tableaux XII et XIII). En résolvant les équations normales nous avons trouvé :

$$m' = 1,30 \pm 1,11.$$

$$\delta\varepsilon = + 0",305\,280 \frac{m'}{5} - 0",046\,911,$$

$$\delta n = - 0,000\,436 \frac{m'}{5} + 0,003\,028,$$

$$\delta e = + 0,831\,797 \frac{m'}{5} - 0,034\,077,$$

$$x = - 0,286\,459 \frac{m'}{5} + 0,043\,327,$$

$$\mu_7 = + 0,010\,396 \frac{m'}{5} + 0,000\,294,$$

$$\Sigma vv \text{ initiale} = 150,1, \quad \Sigma vv \text{ finale} = 146,2;$$

(1) D'ailleurs, même si les observations de 1715 étaient exactes, on ne pourrait pas grouper, sans précautions spéciales, des résidus aussi distants que ceux de 1691, 1712 et 1715.

TABLEAU XIX. — Analyse de la solution G₁.

Date	A	R _g	B	ρ'	ρ' - R _g	Date	A	R _g	B	ρ'	ρ' - R _g
1710...	(-3",73)	(-2",14)	(-2",70)	(-6",99)	(-4",85)	1861...	+0",134	+0",85	+0",89	+1",06	+0",21
1733...	+0,281	-4,45	-4,74	-4,37	+0,08	1862...	+0,124	-0,26	-0,22	-0,06	+0,20
1767...	+0,056	+0,58	+0,41	+0,48	-0,10	1863...	+0,107	+0,39	+0,42	+0,56	+0,17
1769...	+0,026	-3,78	-3,95	-3,92	-0,14	1865...	+0,084	+0,01	+0,03	+0,14	+0,13
1782...	-0,151	+1,44	+1,25	+1,05	-0,39	1867...	+0,049	-1,36	-1,34	-1,28	+0,08
1784...	-0,132	+0,54	+0,34	+0,17	-0,37	1868...	+0,045	-1,82	-1,81	-1,75	+0,07
1787...	-0,056	+1,20	+0,98	+0,91	-0,29	1869...	+0,018	-1,35	-1,34	-1,32	+0,03
1792...	+0,064	-0,10	-0,37	-0,29	-0,19	1870...	+0,014	-0,88	-0,87	-0,85	+0,03
1796...	+0,122	+0,69	+0,40	+0,56	-0,13	1871...	-0,017	-1,41	-1,41	-1,43	-0,02
1803...	+0,183	+1,19	+0,87	+1,11	-0,08	1872...	-0,010	-0,47	-0,47	-0,48	-0,01
1812...	+0,159	+0,77	+0,48	+0,69	-0,08	1873...	-0,036	-1,56	-1,57	-1,62	-0,06
1817...	+0,118	+0,60	+0,34	+0,49	-0,11	1874...	-0,031	-0,32	-0,33	-0,37	-0,05
1820...	+0,087	+2,37	+2,15	+2,26	-0,11	1875...	-0,021	+0,83	+0,82	+0,79	-0,04
1824...	+0,061	+0,66	+0,49	+0,57	-0,09	1876...	-0,010	+0,20	+0,19	+0,18	-0,02
1827...	+0,014	-2,00	-2,14	-2,12	-0,12	1877...	-0,017	+0,35	+0,33	+0,31	-0,04
1830...	-0,014	-0,02	-0,13	-0,15	-0,13	1879...	-0,023	-0,47	-0,49	-0,52	-0,05
1837...	-0,135	+1,22	+1,18	+1,00	-0,22	1880...	-0,058	-0,84	-0,86	-0,94	-0,10
1838...	-0,147	-0,17	-0,20	-0,39	-0,22	1881...	-0,066	-0,51	-0,53	-0,62	-0,11
1839...	-0,167	-1,26	-1,29	-1,51	-0,25	1882...	-0,072	-0,35	-0,38	-0,47	-0,12
1840...	-0,180	-0,22	-0,24	-0,47	-0,25	1883...	-0,085	-0,51	-0,53	-0,64	-0,13
1841...	-0,157	-0,68	-0,69	-0,89	-0,21	1884...	-0,088	+0,01	-0,01	-0,12	-0,13
1842...	-0,159	-1,08	-1,08	-1,29	-0,21	1885...	-0,093	+0,80	+0,78	+0,66	-0,14
1843...	-0,145	-0,91	-0,91	-1,10	-0,19	1886...	-0,097	+0,90	+0,88	+0,75	-0,15
1844...	-0,140	-0,29	-0,28	-0,46	-0,17	1887...	-0,113	+0,36	+0,34	+0,19	-0,17
1845...	-0,116	+1,69	+1,70	+1,55	-0,14	1888...	-0,116	+0,33	+0,31	+0,16	-0,17
1846...	-0,101	-1,02	+1,04	+0,91	-0,11	1889...	-0,093	+0,74	+0,73	+0,61	-0,13
1847...	-0,067	+1,66	+1,68	+1,59	-0,07	1890...	-0,086	+1,36	+1,35	+1,24	-0,12
1848...	-0,054	-0,26	-0,23	-0,30	-0,04	1891...	-0,066	+0,71	+0,71	+0,62	-0,09
1849...	-0,021	+1,08	+1,11	+1,08	0,00	1892...	-0,067	+1,19	+1,19	+1,10	-0,09
1850...	-0,007	-0,01	+0,03	+0,04	+0,05	1893...	-0,029	+0,80	+0,81	+0,77	-0,03
1851...	+0,019	+0,04	+0,08	+0,10	+0,06	1894...	-0,023	+0,24	+0,25	+0,22	-0,02
1852...	+0,034	+1,30	+1,34	+1,38	+0,08	1895...	+0,011	+0,22	+0,24	+0,25	+0,03
1853...	+0,051	+1,16	+1,20	+1,27	+0,11	1896...	+0,039	-0,17	-0,14	-0,09	+0,08
1854...	+0,067	+0,80	+0,84	+0,93	+0,13	1897...	+0,066	-0,51	-0,47	-0,38	+0,13
1855...	+0,084	+0,31	+0,35	+0,46	+0,15	1898...	+0,083	-0,89	-0,85	-0,74	+0,15
1856...	+0,095	+0,31	+0,35	+0,47	+0,16	1899...	+0,093	-0,52	-0,47	-0,35	+0,17
1857...	+0,106	+0,39	+0,43	+0,57	+0,18	1900...	+0,123	-1,09	-1,03	-0,87	+0,22
1858...	+0,126	+0,29	+0,33	+0,49	+0,20	1901...	+0,159	-0,97	-0,90	-0,69	+0,28
1859...	+0,129	-0,12	-0,08	+0,09	+0,21	1902...	+0,181	-0,79	-0,71	-0,47	+0,32
1860...	+0,135	+0,66	+0,70	+0,88	+0,22	1903...	+0,192	-0,65	-0,56	-0,31	+0,34
						1907...	+0,235	-0,25	-0,13	+0,18	+0,43
						1910...	+0,293	-1,10	-0,95	-0,57	+0,53

La valeur de $m_7 = 1:19037$ est très voisine de la valeur définitive de Gaillot (1:19094).

La valeur de m' que nous venons de trouver concorde assez bien avec celle que nous avons tirée des résidus de Le Verrier. « L'erreur probable » est naturellement beaucoup plus forte, puisque nous n'avons pas pu utiliser ici les observations qui correspondent au maximum de la « perturbation réduite absolue ». En tout cas la limite supérieure de m' reste positive, ce qui donne la réponse à la question de savoir si les résidus d'Uranus de Gaillot avaient quelque rapport avec l'action de Pluton ⁽¹⁾. Nous venons d'établir la réalité de cette liaison d'une façon incontestable.

Le Tableau XIX donne les valeurs des coefficients A et B, des résidus R_g de Gaillot, des *erreurs effectives* ρ' (résidus définitifs) et des perturbations réduites $(\rho' - R_g)$ « ajustées » aux résidus de Gaillot.

Le Tableau XX donne la masse apparente m'_a . On remarque que pour le groupe 1691-1715 la valeur de m'_a est négative : on sait qu'il fallait s'y attendre. *Par contre, on voit que la masse apparente est positive pour les groupes 1751-56 et 1764-72, ceux-là mêmes qui ont été utilisés par Lowell.*

TABLEAU XX.

GROUPE	DATE	m'_a	GROUPE	DATE	m'_a
1691-1715...	1709,8	— 0,7	1767-1769...	1768,7	+43,1
1751-1756...	1752,8	+16,8			

CHAPITRE V.

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Les calculs dont nous venons d'exposer les fondements analytiques et les principaux résultats numériques constituent une partie sans doute fastidieuse, mais essentielle dans notre travail.

⁽¹⁾ Voir, pour plus de détails, la discussion p. 97.

Les critiques de Brown ne permettaient pas un jugement définitif sur la part de la Mécanique céleste dans la découverte de Pluton, parce qu'elles n'étaient pas fondées sur un calcul suffisamment complet et suffisamment rigoureux des perturbations produites par Pluton dans le mouvement d'Uranus. Avant d'aborder la discussion des recherches de Lowell et de Pickering, il était utile, et même indispensable, de mettre en valeur les connaissances fournies par l'observation directe de Pluton pour établir un certain nombre de faits rigoureusement contrôlés pouvant servir de terme de comparaison aux calculs de ces précurseurs, calculs qui, par leur nature même, ne pouvaient être qu'indirects et approximatifs.

Récapitulons rapidement les principaux résultats des chapitres précédents.

Ainsi que nous l'avons annoncé dans l'Introduction, nous venons de calculer les perturbations en longitude vraie d'Uranus par deux méthodes différentes : la méthode classique de Le Verrier et une méthode d'interpolation en partie originale. La concordance des résultats garantit l'exactitude de nos calculs.

Chemin faisant, nous avons démontré la continuité des perturbations, « réduites » par l'omission des valeurs initiales, à l'origine des temps, des inégalités à longue période. Nous avons prouvé de plus que cette omission était légitime et permettait de soustraire nos calculs à l'incertitude qui règne encore sur la valeur numérique du petit diviseur $3n' - n$.

D'autre part, les développements auxquels nous avons été conduit par la méthode classique fournissent les valeurs des transcendentes $b_n^{(i)}$; $c_n^{(i)}$, ..., pour $\alpha = \frac{a}{a'} = 0,485$, jusqu'à un ordre très élevé, et ces valeurs pourraient servir à la construction ou à la vérification d'une théorie du mouvement de Pluton lui-même. Enfin le développement de la méthode d'interpolation nous a permis de trouver une méthode de calcul très simple des coefficients d'une somme périodique mixte, représentant une fonction quelconque $f(t)$, à l'aide des valeurs particulières de cette fonction.

En ce qui concerne le but direct de nos calculs, nous avons mis d'abord en pleine lumière l'énorme disproportion entre les perturbations antérieures à 1780 et les perturbations modernes

(1780-1910). Comparant ensuite la théorie aux observations d'Uranus, nous n'avons pas tardé à découvrir que la moyenne des trois observations de Flamsteed de 1715 était erronée d'environ une seconde en ascension droite, et que, par contre, les autres observations anciennes s'accordaient mieux avec la théorie qu'on ne pouvait le prévoir *a priori*.

L'exactitude de l'ensemble des observations anciennes a été confirmée par la solution des équations modernes prises isolément, et la « masse apparente » de Pluton relative à ces observations anciennes a été trouvée positive (sauf en 1715), ce qui constitue un autre fait important en faveur de Lowell. Inversement l'examen des résidus définitifs ρ' laissés par les équations modernes s'accorde avec l'affirmation de Brown sur la faible teneur des résidus modernes d'Uranus en matériaux utilisables pour la recherche de Pluton.

Notons encore en passant que nous avons pu constater la perfection de la théorie de Le Verrier, qui, bien que datant de 1873, ne le cède en rien aux théories plus modernes de Newcomb et de Gaillot quand on prend soin, comme nous l'avons fait, de déterminer les valeurs initiales des éléments de l'orbite d'Uranus par la méthode des moindres carrés. Elle donne, en particulier, exactement la même masse de Neptune que la théorie de Newcomb (1:19314).

En ce qui concerne la masse de Pluton, toutes nos déterminations, bien qu'affectées d'une très grande erreur probable, sont très concordantes entre elles et s'accordent en particulier parfaitement avec la masse que l'on trouve à l'aide des résidus de Neptune (0,94T). Les résidus de Le Verrier nous ont donné 1,65T en prenant l'ensemble des observations, et 1,96T en prenant les observations postérieures à 1780 seules. Les résidus de Gaillot nous ont donné 1,30T en prenant toutes les observations postérieures à 1750. *Nos recherches semblent donc indiquer que la masse de Pluton est voisine de celle de la Terre et peut-être même légèrement supérieure.*

Cette conclusion diffère de celle de E. Bower ⁽¹⁾ qui trouve, par des extrapolations sur l'albedo et la densité de l'ensemble des

(1) Cf. E. BOWER, *Lick Obs. Bull.*, 1931, n° 437, p. 178.

grosses planètes, compte tenu des observations de la magnitude et du diamètre apparent de Pluton, une masse « voisine de 0,1 T » ⁽¹⁾. Si la masse de Pluton était voisine de celle de la Terre, l'albedo devrait être plus faible, ou la densité devrait être plus forte que ceux de toutes les planètes connues, mais on ne voit guère ce qui s'y opposerait *a priori*.

Notons, pour terminer, que l'examen des résidus définitifs ρ' montre que *les résidus modernes de Le Verrier et ceux de Gaillot n'étaient pas dus uniquement à l'action de Pluton*. L'avenir montrera si les oscillations restantes sont de simples erreurs systématiques ou des perturbations dues à une autre planète transneptunienne. Cependant nous remarquerons, avec Brown, que les oscillations à fréquence double de celle d'Uranus que l'on reconnaît dans les résidus de Gaillot, même rectifiés, semblent être plutôt des erreurs que des perturbations, d'autant plus que nous venons d'établir l'absence d'oscillations analogues dans les résidus rectifiés de Le Verrier.

⁽¹⁾ C'est cette dernière valeur qui est donnée par le *Berliner Jahrbuch*. Notons à ce propos que la *Connaissance des Temps* ne donne aucun renseignement au sujet de Pluton.



DEUXIÈME PARTIE.

LE PLUTON DE LOWELL.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE LOWELL.

1. **Introduction.** — La méthode de Lowell dérive de celle de Le Verrier. Toutes les deux supposent qu'une théorie aussi exacte que possible d'une planète P n'arrive pas à représenter parfaitement les observations. La théorie laisse des « résidus » et l'on explique ces résidus par l'action perturbatrice d'une planète encore inconnue P' . « Connaissant les éléments de deux planètes P et P' , trouver les perturbations produites par P' dans le mouvement elliptique de P » : tel est le problème classique de la Mécanique céleste. Le Verrier et Lowell se posent le problème inverse : « Connaissant l'effet observable des perturbations, trouver les éléments de la planète perturbatrice P' ».

Le problème présente de sérieuses difficultés analytiques. D'abord, les perturbations sont des fonctions transcendantes et complexes de certains éléments de P' , tels que a' , la distance au Soleil, et ϵ' , la longitude de l'époque. Puis, on ne connaît ni les perturbations elles-mêmes, ni les éléments exacts de la planète P . Ces deux difficultés sont liées par une sorte de cercle vicieux : « Les expressions numériques des perturbations ne pourraient se conclure immédiatement des observations, que si l'on connaissait les valeurs rigoureuses des éléments de l'ellipse décrite par Uranus autour du Soleil ; et ces éléments, à leur tour, ne peuvent se déterminer exactement, si l'on ne connaît pas la quantité des perturbations » (¹). C'est que les éléments de P ne sont pas déduits des

(¹) LE VERRIER, *Addition à la Connaissance des Temps* pour 1849. p. 154.

observations elles-mêmes, mais des observations diminuées du total des perturbations subies par P.

Toutefois, alors qu'on ignore tout des éléments de P' , ceux de P sont connus en première approximation. Pour ces derniers, il suffira de déterminer, non point les éléments eux-mêmes, mais seulement leurs « corrections ». Ces petites quantités s'introduiront linéairement dans « les équations de condition » du problème et se calculeront d'une façon relativement facile; il n'en sera pas de même des éléments de P' .

On n'a pas trouvé, jusqu'ici, de méthode analytique permettant de trouver l'inconnue a' par la résolution des équations de condition. Le Verrier et Adams ont choisi la distance de Neptune au Soleil d'après la loi empirique de Bode, et ont achevé la résolution du problème en faisant varier très légèrement la distance hypothétique. Lowell procède d'une façon moins arbitraire, mais, lui aussi introduit a' comme *un paramètre variable* et non comme une inconnue.

Toutes les méthodes supposent que la planète perturbatrice circule dans le plan de l'écliptique; approximation acceptable même pour une planète de forte inclinaison comme Pluton, car les perturbations de la longitude ne dépendent que des cubes de l'inclinaison.

Les autres inconnues s'obtiennent assez facilement quand on connaît ε' . Mais cette dernière, comme a' , ne peut se déterminer que par des essais successifs. On attribue à ε' différentes valeurs particulières et l'on cherche celle qui satisfait le mieux à l'ensemble des équations, compte tenu des valeurs correspondantes des autres inconnues.

Telles sont les idées générales empruntées par Lowell ⁽¹⁾ à Le Verrier.

Ceux qui s'intéressent particulièrement à la découverte de Neptune pourront se reporter au Mémoire original, dans l'Addition à la *Connaissance des Temps* pour 1849, qui révèle la prodigieuse ingéniosité et l'immense labeur de Le Verrier.

⁽¹⁾ *Memoir on a Trans-Neptunian planet. Memoirs of the Lowell Observatory.* Vol. I, n° 1, 1915.

2. **Solution du premier ordre.** — L'expérience de Neptune a démontré que le choix arbitraire de a' peut être très erroné. (Le Verrier avait adopté une distance supérieure de dix unités à la distance réelle.) Lowell envisage donc cinq distances différentes : $a' = 40,5; 42,5; 45,0; 47,5; 51,25$; et nous verrons bientôt comment cela le conduit à un choix objectif de la distance définitive. Pour chacune des distances il calcule un développement limité, des perturbations en longitude vraie, de la forme

$$\begin{aligned} P = \delta v &= A + B e + B' e' + C e^2 + C' e e' + D' e^2 e' \\ &= (A + B e + C e^2) + e' (B' + C' e + D' e^2), \end{aligned}$$

A, B, B', etc. sont des fonctions du type

$$m' M \sin (i l + i' l' + k \varpi - k' \varpi');$$

l et l' sont les longitudes moyennes; ϖ et ϖ' les longitudes des périhélies; les coefficients M sont des fonctions ⁽¹⁾ de a et de a' .

Le développement ci-dessus est introduit par Lowell dans les équations de condition

$$\frac{\partial v}{\partial n} \Delta n + \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial v}{\partial \varpi} \Delta \varpi + P = r,$$

Δn , $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \varpi$ sont des corrections inconnues aux éléments d'Uranus. r représente la différence entre la longitude observée v_0 et la longitude calculée v_c , c'est-à-dire le *résidu brut* de la théorie. Lowell représente ce dernier graphiquement, puis trace parmi les points isolés une courbe ⁽²⁾ continue (C), ne conservant ainsi que les variations *systématiques* des résidus. Pour les résidus antérieurs à 1836, Lowell prend les résidus mêmes de Gaillot, mais remplace ceux de 1767 et 1769, assez discordants, par leur moyenne. Pour les valeurs de r postérieures à 1836, Lowell relève celles que donne la courbe (C), de 3 ans en 3 ans.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 39, t. 13. Certains exemples comportant des tableaux numériques fort encombrants, il nous est impossible de les reproduire tous. On voudra bien se reporter au Mémoire de Lowell.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, planche II.

Il trouve ainsi 37 équations ⁽¹⁾, où il représente par des crochets [1], [2], . . . , [37], les valeurs correspondantes de P.

Lowell admet que la masse de Neptune employée par Gaillot, et qui concorde bien avec celle trouvée par Asaph Hall au moyen du satellite, n'a pas besoin de correction, ce qui explique l'absence du terme $\frac{\partial \nu}{\partial \mu_7} \delta \mu_7$ dans ses équations de condition ⁽²⁾.

Pour simplifier, Lowell pose avec Le Verrier,

$$\boxed{h' = e' \sin \varpi', \quad k' = e' \cos \varpi'.$$

Il vient

$$\begin{aligned} P = & (S_0 t + S_1 \sin \varepsilon' + S_2 \sin 2 \varepsilon' + \dots + C_1 \cos \varepsilon' + \dots) m' k' \\ & + (C_0 t + C_1 \sin \varepsilon' + C_2 \sin 2 \varepsilon' + \dots - S_1 \cos \varepsilon' - \dots) m' h' \\ & + (E_0 t + D_1 \sin \varepsilon' + D_2 \sin 2 \varepsilon' + \dots + E_1 \cos \varepsilon' + \dots) m'. \end{aligned}$$

Les coefficients S_0, S_1, S_2 , etc... sont des fonctions connues du temps t et de la distance a' . Lowell calcule leurs valeurs numériques pour les dates des 37 équations et les principales distances. Connaissant ces quantités il détermine les coefficients des inconnues, $m' k', m' h', m'$ pour des valeurs de ε' distantes de 10° et obtient, pour chaque couple a', ε' un système de 37 équations où tout est connu sauf $\Delta n, \Delta \varepsilon, \Delta e, \Delta \varpi, k', h', m'$. Lowell donne un exemple ⁽³⁾ complètement développé dans l'hypothèse $a' = 47,5, \varepsilon' = 180^\circ$.

Chacun de ces systèmes est résolu par la méthode des moindres carrés, ce qui fait connaître les valeurs des inconnues et la somme des carrés des résidus définitifs Σvv .

Ces résultats, et les valeurs correspondantes de e' et de ϖ' , sont groupés en tableaux ⁽⁴⁾ suivant les valeurs de a' et de ε' , puis représentés graphiquement. On porte ε' en abscisse et Σvv en ordonnée pour chaque valeur de a' . On représente de même ⁽⁵⁾ tous les autres éléments de la planète inconnue en fonction de ε' .

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 54, t. 19.

⁽²⁾ Le Verrier et Gaillot représentent la masse de Neptune par $m_7(1 + \mu_7)$, où m_7 est la masse provisoire de la planète.

⁽³⁾ *Loc. cit.*, p. 35, t. 8.

⁽⁴⁾ *Loc. cit.*, p. 36, t. 9 (voir aussi ci-dessous, p. 82, t. XXVII).

⁽⁵⁾ *Loc. cit.*, planche III.

Les valeurs de ε' qui correspondent aux valeurs négatives de m' sont rejetées, et parmi les valeurs restantes on choisit celles qui rendent minima Σvv . On trouve généralement *deux* valeurs de ε' , satisfaisant à cette condition et qui diffèrent d'environ 180° . Nous expliquerons plus loin l'origine et les conséquences de cette dualité ⁽¹⁾.

Toutes les équations sont traitées avec le même poids, mais en revanche l'essai est repris quelquefois pour trois, quatre ou même cinq groupements différents des équations. Ensuite, les solutions sont classées suivant le nombre d'équations utilisées ⁽²⁾.

Le Tableau XXI, ci-dessous, résume les dates des équations employées par Lowell dans les différents groupes :

TABLEAU XXI.

GROUPE	NOMBRE d'équations	ÉQUATIONS EMPLOYÉES
N° 1	37	<i>Toutes les équations</i> , de 1710 à 1910
2	35	Groupe n° 1, sauf 1907 et 1910
3	34	» 2, sauf 1710
N° 1'	27	Groupe n° 1, sauf 1846 + 6 K
2'	25	» 2, »
3'	24	» 3, »
(0 ≤ K ≤ 9)		

Choisissant dans chacun des groupes, pour chaque valeur de α' , les valeurs de ε' qui réalisent le minimum μ de Σvv , Lowell obtient son tableau 28 (*loc. cit.*, p. 60) qui donne, en même temps, la longitude héliocentrique correspondante de la planète P' pour 1914,5, que nous désignerons par $v_{1914,5}$. Une représentation graphique des valeurs de $\mu = \Sigma vv_{\min}$, en fonction cette fois de α' ,

⁽¹⁾ Voir p. 94.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 55, 56, 57 : t. 20 à t. 24 pour ε' voisin de 180° ; p. 58-59 : t. 25 à t. 27 pour ε' voisin de 0° .

D'après ce tableau tous les groupes se valent à peu près. Lowell donne la préférence à celui qui opère la meilleure réduction R en utilisant le maximum de données, c'est-à-dire dans les deux cas ⁽¹⁾, au groupe de 27 équations. D'où les deux solutions définitives ⁽²⁾. Nous expliquerons au chapitre II (p. 94) pourquoi Lowell a conservé la solution X₂ à côté de X₁ malgré une valeur de R inférieure de 10 %, et ce qu'il faut penser en général de la dualité des solutions.

<i>Solution X₁.</i>	<i>Solution X₂.</i>
$\alpha' = 13,0;$	$\alpha' = 11,7;$
$\varepsilon' = 230,1;$	$\varepsilon' = 250,0 + 1800;$
$m' = 6,59 T;$	$m' = 7,51 T;$
$e' = 0,202;$	$e' = 0,197;$
$\varpi' = 230,8 + 1800,$	$\varpi' = 190,6;$
$\nu_{1911,} = 840,0;$	$\nu_{1911,} = 820,8 + 1800;$
$R = 99 \frac{1}{2} \%;$	$R = 89 \frac{1}{2} \%;$
27 équations, de 1710 à 1910.	27 équations, de 1710 à 1910.

Signalons, pour terminer, une variante ⁽³⁾ que Lowell désigne par H₂₀. Dans cette solution Lowell considère, dans l'expression de P, un certain nombre de termes négligés dans sa solution principale H₁₄. La nouvelle expression de P est de la forme ⁽⁴⁾

$$P = \delta\nu = (A + Be + Ce^2 + De^3 + Fe^4) + e'(B' + Ce + D'e^2 + F'e^3).$$

La solution H₂₀ ne diffère donc de la solution H₁₄ que « par quelques termes en e de grandeur insignifiante, et pourtant il existe une différence entre les résultats de H₂₀ et ceux de H₁₄ » ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ ε' voisin de 0° et c' voisin de 180°.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 105, § 9. Ce sont ces solutions, du premier ordre seulement, que Lowell donne dans sa conclusion définitive. Nous en expliquons plus loin la raison, voir p. 71.

⁽³⁾ *Loc. cit.*, p. 61, § 42.

⁽⁴⁾ Le nombre total des termes est de 55. (*Loc. cit.*, p. 61 à 65, t. 30.)

⁽⁵⁾ Lowell, *loc. cit.*, p. 100.

Solution H₂₀ (1). Solution H₁₄ correspondante.

$a' = 47,5;$	$a = 47,5;$
$\varepsilon' = 33^{\circ},0 + 180^{\circ};$	$\varepsilon' = 21^{\circ},1 + 180^{\circ};$
$m' = 6,13\text{T};$	$m' = 10,54\text{T};$
$e' = 0,171;$	$e' = 0,177;$
$\varpi' = 54^{\circ},0;$	$\varpi' = 22^{\circ},0;$
$\nu_{1914,5} = 91^{\circ},9 + 180^{\circ};$	$\nu_{1914,5} = 75^{\circ},7 + 180^{\circ};$
$R = 70 \frac{4}{2} \%;$	$R = 83 \frac{1}{2} \%;$
35 équations.	37 équations.

Dans H₂₀ l'essai de distance est fait seulement pour $a' = 47,5$ et l'essai de ε' est fait seulement au voisinage de 180° . Lowell n'envisage qu'un groupe de 35 équations.

Pour nous rendre compte de l'influence des termes propres à H₂₀, nous considérons la solution H₁₄ qui se rapproche le plus (2) de la conclusion de H₂₀. *On remarque aussitôt que dans H₂₀ la position prédite est beaucoup plus exacte* ($\nu_{1914,5}$ de Pluton = $90^{\circ},6$), *tandis que la réduction R % est moins bonne* (3).

3. Solution du second ordre. — Dans la première approximation la perturbation P était limitée aux termes de premier ordre en e' . « Mais, dit Lowell (4), l'amplitude considérable des termes d'ordre supérieur en e' restait une source de grande inquiétude quant à la validité du résultat. J'ai donc décidé d'en tenir compte. On aurait pu réduire les carrés en remplaçant l'une des puissances de e' par sa solution du premier ordre, puis corriger e' en appliquant de nouveau la méthode déjà utilisée. On pourrait toutefois objecter que la solution du premier ordre ne constitue peut-être même pas une première approximation. Il n'y avait donc qu'une seule méthode sûre : considérer le problème comme impliquant directement l'inconnue e'^2 ».

(1) *Loc. cit.*, p. 69, t. 33 et p. 60, t. 28.

(2) Il n'existe pas pour H₁₄ de groupe de 35 équations (*Loc. cit.*, p. 60), mais ce groupe diffère peu de celui de 37 équations, comme le montre notre tableau XXI.

(3) Nous expliquerons plus loin (p. 92), les raisons et la signification de cette apparente discontinuité.

(4) *Loc. cit.*, p. 73. § 48.

Si l'on tire les équations normales directement des équations de condition, on tombe sur des équations du 4^e et du 5^e degré. La méthode indirecte trouvée par Lowell s'inspire en partie de la méthode employée par Le Verrier pour sa solution du premier ordre. La voici dans ses grandes lignes.

Les termes complémentaires en e'^2 introduisent $e'^2 \sin 2\varpi'$ et $e'^2 \cos 2\varpi'$ comme nouvelles inconnues; soit, avec les notations de la page 63 : $2k'h'$ et $(k'^2 - h'^2)$. En définitive la nouvelle expression de P se présente sous la forme

$$\begin{aligned} P = & (S_0 t + \Sigma S_i \sin i \varepsilon' + \Sigma C_i \cos i \varepsilon') m' k' \\ & + (C_0 t + \Sigma C_i \sin i \varepsilon' - \Sigma S_i \cos i \varepsilon') m' h' \\ & + (E_0 t + \Sigma D_i \sin i \varepsilon' + \Sigma E_i \cos i \varepsilon') m' \\ & + (\Sigma F_i \sin i \varepsilon' + \Sigma G_i \cos i \varepsilon') m' (k'^2 - h'^2) \\ & + (\Sigma G_i \sin i \varepsilon' - \Sigma F_i \cos i \varepsilon') 2 m' k' h'. \end{aligned}$$

Comme tout à l'heure, les coefficients S_i , C_i , . . . , F_i , G_i sont des fonctions connues ⁽¹⁾ de a' et de t . On se donne au départ une valeur de a' . Les valeurs de t sont celles des équations de condition.

Soient X_1 , X_2 , X_3 , X_4 les sommes des perturbations et des résidus pour les années 1753, 1840, 1870, 1903,5. Lowell résout les quatre équations correspondantes ⁽²⁾ par rapport à Δn , $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \varpi$. Il trouve

$$\Delta n = A'' X_1 + B'' X_2 + C'' X_3 + D'' X_4$$

et trois relations analogues pour $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \varpi$, où A'' , B'' , C'' , D'' sont des coefficients purement numériques. En remplaçant les X_i par leurs valeurs en fonction de P et des résidus, Δn , $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \varpi$ deviennent des fonctions connues ⁽³⁾ de

$$m'(k'^2 - h'^2), \quad 2 m' k' h', \quad m' k', \quad m' h', \quad m', \quad \sin i \varepsilon', \quad \cos i \varepsilon'.$$

En reportant ces expressions de Δn , $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \varpi$ dans les 22 équations restantes ⁽⁴⁾, celles-ci prennent la forme

$$\begin{aligned} \varphi_1(\varepsilon') m' (k'^2 - h'^2) + \varphi_2(\varepsilon') 2 m' k' h' \\ + \varphi_3(\varepsilon') m' k' + \varphi_4(\varepsilon') m' h' + \varphi_5(\varepsilon') m' + \varphi_6(\varepsilon') = 0. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 75, t. 36 et p. 91, t. 44.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 76, § 50.

⁽³⁾ *Loc. cit.*, p. 77.

⁽⁴⁾ On ne considère, en tout, que 27 équations et l'on omet, ici, l'équation incertaine relative à 1710. Mais on reprend 1710 en deuxième approximation.

Les $\varphi_i(\varepsilon')$ sont des fonctions connues ⁽¹⁾ de ε' .

Ces nouvelles équations sont groupées, par addition, en trois équations normales de même forme. En éliminant m' entre ces trois équations, on trouve deux équations ⁽²⁾ du type

$$ah'^2 + bk'^2 + ch'k' + dh' + ek' + f = 0.$$

Lowell donne à ε' une valeur particulière, les coefficients a, b, c, d, e, f , fonctions de ε' , deviennent alors purement numériques; il résout le système de ces deux équations à l'aide d'une résolvante du quatrième degré. Cette résolvante n'a généralement que deux racines réelles : Lowell distingue ces racines par les indices b et c .

Les valeurs h'_0 et k'_0 ainsi obtenues ne sont que le point de départ d'une nouvelle approximation. Lowell pose $h' = h'_0 + \Delta h'$ et $k' = k'_0 + \Delta k'$. Il applique le théorème des accroissements finis :

$$P(h', k') = P(h'_0, k'_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial h'}\right)_0 \Delta h' + \left(\frac{\partial P}{\partial k'}\right)_0 \Delta k'.$$

En substituant les expressions de P en fonction de $m'\Delta h'$ et de $m'\Delta k'$ dans les 27 équations de condition initiales (1710 inclus), on trouve des équations linéaires en $m'\Delta h'$, $m'\Delta k'$, m' , Δn , $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \varpi$ que l'on résout par la méthode des moindres carrés ⁽⁴⁾, d'où $\Delta h'$, $\Delta k'$, m' et Σvv . En ajoutant $\Delta h'$ et $\Delta k'$ à h'_0 et k'_0 , on obtient les valeurs définitives des inconnues h' et k' , dont on tire e' , ϖ' et $v_{1914,5}$.

On procède ensuite comme en première approximation en recommençant le même processus pour d'autres valeurs de a' et de ε' . On adopte la solution qui rend Σvv minimum ⁽⁵⁾.

La discrimination entre les groupes ayant des poids différents se fait comme dans la solution du premier ordre. Selon qu'on adopte avec Lowell « les erreurs probables lues sur la courbe » (A) ou « les erreurs probables calculées » (B), on obtient des expressions très légèrement différentes de R %.

(1) *Loc. cit.*, p. 78-82, t. 37.

(2) *Loc. cit.*, p. 83, § 51 et § 52.

(3) *Loc. cit.*, p. 54 et 87.

(4) *Loc. cit.*, p. 88.

(5) Lowell résume les résultats ainsi obtenus dans t. 47, p. 97.

Le Tableau XXII ci-dessous, des principales solutions du deuxième ordre, avant le choix définitif suivant les valeurs de R , montre que la solution « 27 — c — 45,0 » réalise une réduction nettement meilleure que les autres : $R = 98,2 \%$. Les valeurs correspondantes des éléments sont : $\varepsilon' = 34^{\circ},0 + 180^{\circ}$, $\varpi' = 163^{\circ},1 + 180^{\circ}$, $e' = 0,200$, $m' = 9,35 T$, d'où $\nu_{1944,5} = 91^{\circ},1 + 180^{\circ}$.

TABLEAU XXII.

GROUPE	TYPE de la racine adoptée	a'	$\nu_{1911,5}$	R_A	R_B
Les 27 équations.....	c	47,5	$72,8 + 180^{\circ}$	$85,7^{\frac{90}{100}}$	$86,7^{\frac{90}{100}}$
»	c	45,0	$91,1 + 180$	98,2	98,3
»	b	45,0	$77,1 + 180$	80,2	81,5
» sauf 1907 et 1910.	c	47,5	$62,0 + 180$	82,4	—
» sauf 1710.....	b	47,5	$55,6 + 180$	77,6	84,5

On voit que cette solution confirme remarquablement la solution X_2 du premier ordre, surtout en ce qui concerne la longitude ⁽¹⁾ prédite.

On comprend dès lors pourquoi Lowell s'est arrêté en définitive aux deux solutions du premier ordre : elles donnaient, par des calculs beaucoup plus simples et plus faciles à vérifier, une approximation semblable à celle du deuxième ordre.

Lowell ne semble pas avoir essayé en deuxième approximation des solutions analogues à X_1 avec ε' au voisinage de 0° . Il néglige un peu cette variante; même en première approximation les distances essayées sont moins nombreuses et les groupes eux-mêmes moins nombreux ⁽²⁾. Nous verrons plus loin ⁽³⁾ que Lowell avait des raisons sérieuses pour procéder ainsi, mais

⁽¹⁾ Position de Pluton en 1914,5 : $\nu = 90^{\circ},6$.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 60.

⁽³⁾ Voir p. 96.

quand même n'oublions pas que c'est bien X_1 qui correspondait à Pluton.

Le fait que Lowell donne dans la conclusion X_1 et X_2 semble indiquer, toutefois, qu'il considérait l'essai du deuxième ordre comme une simple vérification de la validité des solutions du premier ordre. La solution X_2 ayant fourni la vérification cherchée, il n'y avait plus lieu de reprendre l'essai du deuxième ordre pour la solution X_1 .

4. Perfectionnements apportés par Lowell à la méthode de Le Verrier. — Nous avons déjà dit que la méthode de Lowell dérive, dans l'ensemble, de la méthode de Le Verrier. Cependant, profitant de l'expérience acquise par la découverte de Neptune et des facilités offertes par l'usage de la machine à calculer, Lowell est arrivé à rendre cette méthode plus objective, plus précise et plus claire.

La méthode de Lowell comporte en effet, *des essais méthodiquement variés de la distance*; l'usage presque exclusif de *la méthode des moindres carrés*; *l'extension du développement limité* de la perturbation en longitude; la mise au point de *la solution du deuxième ordre*; et *la pesée originale des résidus par le critérium du pourcentage de la réduction R*.

Tout cela, sans insister sur l'importante mise en évidence de la dualité des solutions et de leur continuité quand $in + i'n'$ tend vers zéro, sera extrêmement précieux pour les recherches futures.

Le caractère circulaire de l'orbite de Neptune fit dire à quelques-uns que Le Verrier eut tort de compliquer inutilement le problème, en prenant comme une des inconnues e' . Le grand mérite de Lowell est d'avoir compris qu'il n'y avait aucune raison pour que toutes les planètes fussent aussi « complaisantes » que Neptune ⁽¹⁾ et la très grande excentricité de Pluton confirme la parfaite exactitude de ses vues.

Nous ne pouvons terminer cet exposé sans rendre un hommage à la scrupuleuse rigueur des calculs de Lowell. Dans son Mémoire, d'une limpide clarté, tous les cas sont envisagés, et tout le long du

(1) Le mot est de Lowell, *loc. cit.*, p. 101.

calcul on ne trouve pas une faute numérique et pas une approximation injustifiée. Tous les détails du calcul sont présentés *in extenso*, permettant facilement des vérifications à toutes les étapes de la solution. Aucune difficulté n'est cachée, ni pour la convergence des séries, ni pour l'erreur probable des données, et le lecteur peut se faire une idée parfaitement exacte des limites du problème et du degré de confiance qu'il doit accorder aux conclusions. Lowell résume ses réserves par une image frappante : « *Analitics thought to promise the precision of a rifle and finds it must rely upon the promiscuity of a shot gun after all, though the fault lies not more in the weapon than in the uncertain bases on which it rests* » (1).

5. Transformation de la méthode de Lowell. — Cependant on doit reconnaître que si la méthode de Lowell représente un grand progrès sur celle de Le Verrier, elle est susceptible, à son tour, d'un important perfectionnement qui découle de l'application de la règle (formulée p. 20) concernant l'usage des « perturbations réduites ». Il résulte, en effet, des considérations présentées dans la première partie (p. 15-21), que l'on devrait introduire les perturbations de la planète inconnue, non point par le développement limité des variations *de la longitude vraie*, mais par des *développements limités, et convenablement réduits, des inégalités des éléments*. Une équation de condition prendrait alors la forme de l'équation (5) de la page 17. Les inégalités périodiques seraient calculées de la façon habituelle, mais *les inégalités à longue période seraient réduites aux termes finis, non nuls, L_2, E_1, P_1 par un choix de la distance a' tel qu'on ait exactement $v = in + i'n' = 0$* . En faisant varier convenablement i et i' , on aurait un ensemble de distances aussi serré qu'on voudrait. Les distances envisagées par Lowell correspondent, par exemple, aux rapports $\frac{i}{v}$ égaux respectivement à $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{7}, \frac{4}{4}, \frac{3}{13}$. Si l'on remarque en outre que l'ordre en e' dépend de $(i' - i)$, on voit que, sauf dans quelques cas exceptionnels, l'ordre des termes

(1) *Loc. cit.*, p. 104. Il rappelle que si la Mécanique céleste ne donne qu'une solution de précision médiocre, cela ne tient pas à la qualité de l'outil, mais à l'incertitude des matériaux fournis par l'observation.

à longue période sera très élevé en e' : on pourra alors les négliger complètement.

Outre la simplicité et l'accroissement de rigueur qui résulteraient de cette façon de procéder, on se trouverait d'emblée au voisinage des points les plus probables empiriquement, si l'on tient compte de l'exemple d'Uranus, de Neptune et de Pluton ($n \neq 2n'$; $n \neq 3n'$) et de l'exemple de nombreux satellites de Jupiter et de Saturne dont les moyens mouvements sont aussi presque commensurables.

Nous arrêterons là ces suggestions, dont le développement analytique nous entraînerait trop loin du but que nous nous proposons ici. Nous y reviendrons dans un Mémoire spécial.

CHAPITRE II.

ANALYSE DE LA SOLUTION X_1 DE LOWELL.

1. Comparaison des positions de X_1 avec celles de Pluton. —

On sait que les adversaires de Le Verrier se sont emparés des discordances entre *les éléments* du Neptune théorique et du Neptune réel pour proclamer ⁽¹⁾ que la concordance parfaite entre la *position* prédite et la position observée était due à « un hasard fortuit » ! En réponse Le Verrier avait expliqué que les éléments « ne sont que des *auxiliaires* mathématiques propres à conduire à la connaissance de la direction et de la distance, et que, ces auxiliaires peuvent varier considérablement sans cesser de donner, aux époques des perturbations, la position du corps troublant » ⁽²⁾.

Pour Pluton, la question ne se pose pas tout à fait de la même façon. La concordance entre les éléments elliptiques eux-mêmes est, en effet, si extraordinaire, qu'il n'a jamais été question de contester la ressemblance des orbites depuis que l'on connaît bien celle de Pluton.

⁽¹⁾ Cf. *Comptes rendus*, t. 27, 1848, p. 276.

⁽²⁾ Cf. *Comptes rendus*, t. 27, 1848, p. 328.

TABLEAU XXIII.

*Différences entre les éléments prédits et les éléments observés
de Neptune et de Pluton (1).*

PLANÈTE.	NEPTUNE			PLUTON.		
	Le Verrier.	Observé.	Erreur relative.	Lowell.	Observé.	Erreur relative.
$\varepsilon'_{1850,0}$	332°,4	334°,2	0,5%	22°,1	19°,4	0,8%
$\varpi'_{1850,0}$	284°,1	47°,2	34,2	203°,8	221°,3	4,8
a'	36,1	30,0	20,3	43,0	39,6	8,6
e'	0,1076	0,00872	—	0,202	0,246	—
b'	35,9	30,0	19,6	42°,1	38,4	9,6
i'	$\neq 0^\circ$	1°47	—	$\neq 10^\circ$	17°	—

Cependant, Le Verrier avait doublement raison et, comme on va le voir, la comparaison des éléments ne donne qu'une vague idée de la correspondance précise entre les positions de Pluton et les positions de la planète de Lowell.

Avec les éléments de Pluton et de X_1 , nous avons calculé les longitudes héliocentriques et les rayons vecteurs qui déterminent les projections des lieux réels des deux planètes sur l'écliptique. Nous avons représenté les résultats par le tableau XXIV (p. 76) et le diagramme ci-contre (fig. 3).

Ce diagramme montre de façon frappante la *ressemblance extraordinaire* de X_1 avec Pluton. On y voit combien les différents écarts sont petits (distance et longitude) lorsqu'on les considère à l'échelle du système Pluton-Uranus-Soleil. On remarque également la grande dissymétrie de ce système et le fait essentiel de la *non-équivalence de deux conjonctions consécutives*, les unes très proches, les autres très éloignées. Nous avons tracé, sur le même

(1) Les erreurs relatives sur ε' et ϖ' sont rapportées à 360°. L'inclinaison i' ne figure chez Le Verrier et chez Lowell qu'à titre d'indication. Lowell dit : « Par analogie avec les autres membres du système solaire, où l'excentricité et l'inclinaison sont généralement liées, l'inclinaison de l'orbite devrait être voisine de 10° ». (*Loc. cit.*, p. 105.)

diagramme, les orbites du Neptune de Le Verrier et du Neptune observé. Ce qui distingue la figure 3 des diagrammes analogues,

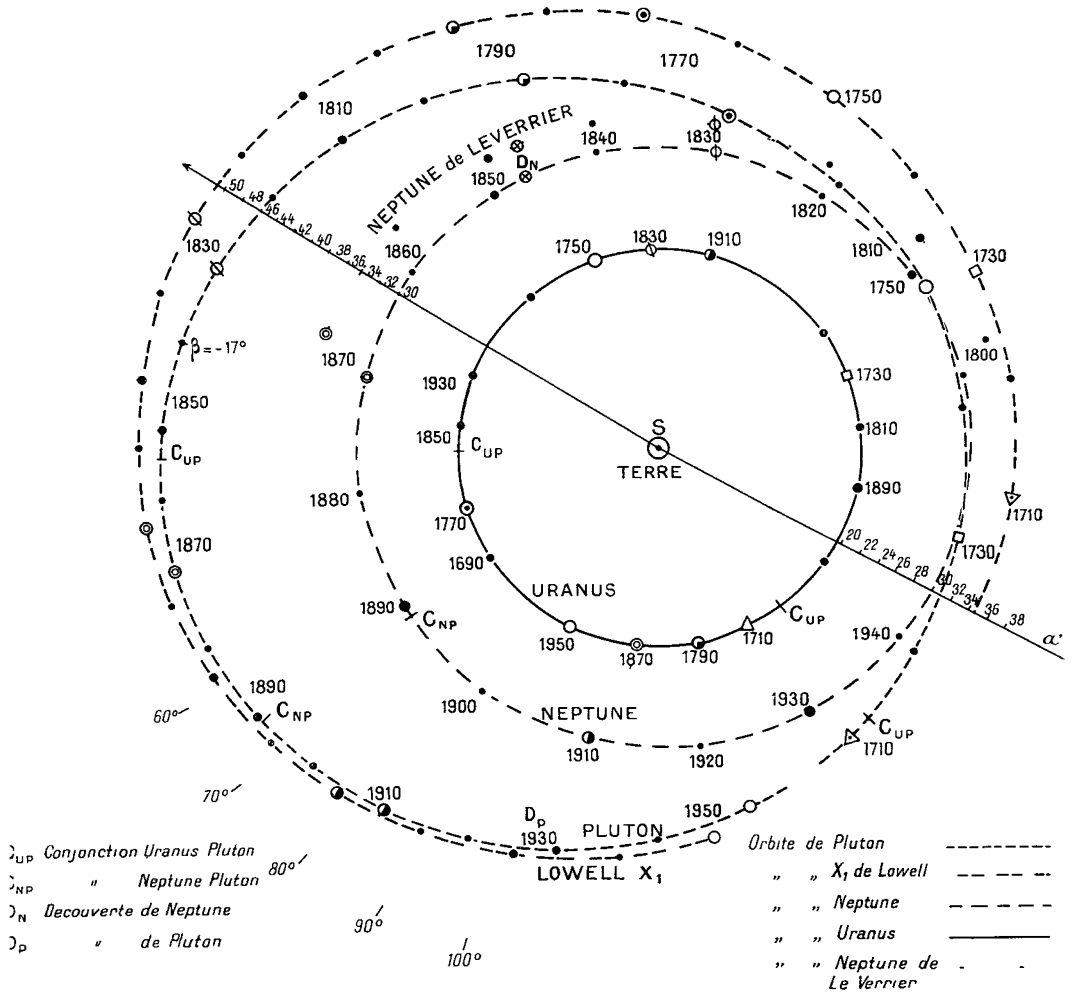


Fig 3 — Etude cinématique des mouvements projetés sur le plan de l'écliptique

publiées ailleurs, c'est que de 20 ans en 20 ans les positions correspondantes des planetes sont indiquées par des signes de même nature.

TABLEAU XXIV.
Positions héliocentriques de Pluton et de X₁.

ANNÉE.	LONGITUDE.			RAYON VECTEUR.			AVANCE des configurations mutuelles identiques avec Uranus.
	Pluton.	X ₁ .	Différ.	Pluton.	X ₁ .	Différ.	
1700....	134,2°	183,8°	—49,6°	36,6	34,7	—1,9	+17 ^{ans}
10....	151,5	203,2	—51,7	34,1	34,3	+0,2	+18
20....	172,0	222,5	—50,5	32,0	34,6	+2,6	+18,5
30....	195,3	241,3	—46,0	30,5	35,5	+5,0	+19
40....	220,8	259,0	—38,2	29,9	36,9	+7,0	+19
50....	245,4	275,2	—29,8	30,4	38,7	+8,3	+18
60....	268,1	290,0	—21,9	31,8	40,7	+8,9	+13,5
70....	287,7	303,3	—15,6	33,9	42,7	+8,8	+7,5
80....	304,8	315,3	—10,5	36,3	44,6	+8,3	+4
90....	319,9	326,5	—6,6	38,8	46,3	+7,5	+2
1800....	333,4	336,9	3,5	41,3	47,8	+6,5	+0,5
10....	345,9	346,8	—0,9	43,4	49,2	+5,8	0
20....	357,4	355,8	+1,6	45,3	50,2	+4,9	—1
30....	8,1	5,3	+2,8	46,9	51,0	+4,1	—1
40....	18,3	14,1	+4,2	48,1	51,5	+3,4	—1,5
50....	27,9	22,6	+5,3	48,8	51,7	+2,9	—1,5
60....	37,3	31,2	+6,1	49,3	51,6	+2,3	—2
70....	46,8	39,9	+6,9	49,3	51,2	+1,9	—2
80....	56,0	48,9	+7,1	48,9	50,4	+1,5	—2
90....	65,9	58,2	+7,7	48,1	49,5	+1,4	—2
1900....	74,9	67,9	+7,0	46,9	48,2	+1,3	—2
10....	85,0	78,2	+6,8	45,4	46,7	+1,3	—2
20....	95,8	89,2	+6,6	43,4	45,0	+1,6	—2
30....	107,4	101,0	+6,4	41,3	43,2	+1,9	—2
40....	120,6	114,0	+6,6	38,9	41,2	+2,3	—2,5
50....	135,4	128,3	+7,1	36,4	39,2	+2,8	—3

On peut, d'ailleurs, traduire la disposition mutuelle de X_1 et de Pluton d'une façon légèrement différente et qui s'approche davantage des origines analytiques de X_1 . Étant donné la ressemblance des orbites de X_1 et de Pluton, l'allure des perturbations d'Uranus est déterminée surtout par l'avance ou le retard *angulaire* de la planète troublante (X_1 ou Pluton) par rapport à la planète troublée (Uranus). Or, les mêmes configurations mutuelles d'Uranus et de X_1 d'une part, et d'Uranus et de Pluton de l'autre, *se reproduisent tantôt avec quelques années d'avance tantôt avec quelques années de retard*. Le graphique ci-après (*fig. 4*) représente l'avance (ou le retard) des configurations identiques d'Uranus avec X_1 et d'Uranus avec Pluton, exprimés en années. *On remarquera que depuis 1790 jusqu'en 1940, soit pendant 150 ans, le décalage n'a pas dépassé 2 ans*. Le décalage plus grand avant 1780 est une conséquence de l'erreur qui affecte le résidu moyen de 1710 ⁽¹⁾.

Faisons avant de terminer une remarque importante. Ce que nous appelons « éléments observés » de Pluton sont des éléments tirés d'un arc très court de l'ellipse décrite par Pluton de 1914 à 1932. Donc, *les positions dites « observées », en 1710 par exemple, résultent d'une extrapolation* et pourront se révéler comme inexactes quand on observera Pluton pendant plus longtemps et quand on connaîtra mieux sa véritable orbite. Toutefois, étant donné la faible précision des observations très anciennes, nous ne pensons pas que de tels changements puissent affecter gravement l'ensemble de nos conclusions.

2. Comparaison des perturbations produites par X_1 et de celles produites par Pluton. — Si nous voulons pénétrer dans le mécanisme de la solution de Lowell, nous devons porter notre attention sur *les perturbations produites par X_1* : c'est elles qui ont servi à Lowell pour tirer les éléments de X_1 des résidus d'Uranus.

Mais une distinction s'impose immédiatement. On a vu plus haut ⁽²⁾ que Le Verrier et Lowell introduisent dans les équations de

⁽¹⁾ Voir p. 101.

⁽²⁾ Voir p. 62 et p. 66.

condition un développement de la perturbation en longitude, P , limité aux premiers termes de la série en e^{ik} .

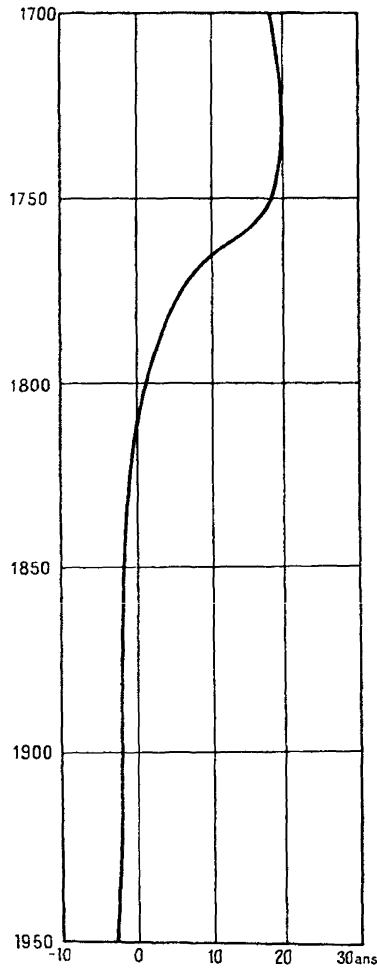


Fig. 4. — Avance des configurations identiques de Pluton-Uranus sur celles de X_1 -Uranus.

Il y a là une source d'erreur inévitable : même quand on sait que le reste de la série n'est pas négligeable, on ne peut en tenir compte sans compliquer inextricablement la résolution

des équations. Or, quand l'excentricité e' vaut 0,200 comme pour X_1 , la convergence devient si lente que les termes d'ordre supérieur conservent des amplitudes considérables.

Ainsi, malgré la ressemblance des orbites et des longitudes de X_1 et de Pluton après 1780, on ne doit pas se représenter les perturbations utilisées par Lowell d'après celles de Pluton. Quant à la période qui s'étend de 1690 à 1780, particulièrement importante puisqu'elle englobe les plus gros résidus et les plus fortes perturbations, les longitudes de X_1 y sont décalées sur celles de Pluton, et les perturbations de X_1 doivent l'être également. Pendant cette période, la distribution des perturbations par rapport aux résidus doit être différente selon qu'on considère X_1 ou Pluton.

Tout cela explique, en partie, le fait en apparence paradoxal, d'une réduction massive des résidus de Gaillot par le développement limité des perturbations de X_1 , à côté d'une réduction insignifiante des mêmes résidus par les perturbations exactes de Pluton. Ce fait paraît surtout paradoxal quand on ne pense qu'aux ressemblances de X_1 et de Pluton. D'ailleurs même les considérations ci-dessus ne l'expliquent pas complètement. Car la concordance entre les solutions du premier ordre et celles du deuxième ordre semble indiquer que le reste des séries n'est pas aussi important qu'on pouvait le craindre. On se rappelle, d'autre part, que la somme des carrés des résidus de Gaillot des 27 équations de Lowell valait 56,3 : dont 30,5 pour les trois résidus antérieurs à 1780 et 25,8 pour les résidus postérieurs. En introduisant les perturbations produites par X_1 , Lowell avait ramené la somme des carrés des résidus à 15,6 au total. Or, même si les perturbations anciennes de X_1 permettent la réduction complète des 30,5 de la Σvv des trois résidus anciens, on ne voit pas, *a priori*, pourquoi les perturbations modernes relatives aux positions exactes de X_1 ramèneraient de 25,8 à 15,6 la Σvv des résidus modernes réduite à peine par les perturbations exactes de Pluton !

C'est pour tirer au clair toutes ces contradictions que nous calculerons *le développement limité des perturbations de X_1 , tel qu'il fut employé par Lowell*. Nous résoudrons à nouveau ses équations de condition et cela nous permettra de former les *résidus définitifs individuels* pour chacune des 27 équations.

On verra ainsi la distribution mutuelle des perturbations de X_1 et des résidus de Gaillot.

En comparant ensuite les perturbations « réduites » de Lowell aux perturbations « réduites » de Pluton, nous répondrons à toutes les questions que nous venons de soulever.

Lowell tire les éléments de X_1 d'un tableau reproduit ci-dessous (Tableau XXV) : les valeurs optima de ϵ' ont déjà été déterminées et il ne reste plus qu'à choisir la distance a' de façon à rendre minimum les valeurs μ de $\Sigma vv_{\min}$.

TABLEAU XXV.

a'	$\mu = \Sigma vv_{\min}$	$\Sigma vv_{\text{Gaillot}}$	Red. %	$\nu_{1914,5}$	ϵ'	m' (1)	e'	ω'
47,5	24,5	56,3	89,5	47,2	358°6	1,59	0,217	165°0
45,0	18,1	»	97,8	65,5	9,8	1,40	0,208	183,5
42,5	15,7	»	99,5	89,8	25,9	0,90	0,200	209,9
40,5	19,9	»	95,9	115,9	43,4	0,62	0,171	229,0

La détermination de a' entraîne, par interpolation, celle de tous les autres éléments et en particulier de $\nu_{1914,5}$. Le réseau de courbes tracées par Lowell et reproduites ci-contre (*fig. 5*) montre l'allure des variations de μ , des éléments ϵ' , e' , m' et de $\nu_{1914,5}$ en fonction de a' . On y voit que $\Sigma vv_{\min} = \mu$ est minimum pour $a' = 43,0$ et que $\mu_{\min} = 15,5$.

La longitude de Pluton était : $90^{\circ},6$ en 1914,5. Or, si au lieu de $a' = 43$ nous adoptons $a' = 42,5$, nous aurons, comme longitude de X_1 , $89^{\circ},8$ au lieu de $84^{\circ},0$. La coïncidence avec Pluton sera encore plus serrée que pour X_1 . Or, l'examen du graphique $\mu = f(a')$ montre que rien ne s'oppose à ce choix de a' , et cela devient encore plus évident si l'on considère les variations de a' en fonction de la réduction R % : pour $a' = 43,0$, $R = 99,6$ % ; pour $a' = 42,5$, $R = 99,5$ %.

(1) Dans ce paragraphe et dans le paragraphe suivant nous adoptons la même unité de masse que Lowell : $1/50\,000^{\text{e}}$ de la masse du Soleil, soit 6,6 T.

Nous faisons toutes ces remarques non point pour « découvrir *a posteriori* » un Pluton encore plus parfait que celui de Lowell, ni même pour montrer comment varie sa solution quand on fait varier a' , mais simplement *parce que les calculs de Lowell sont*

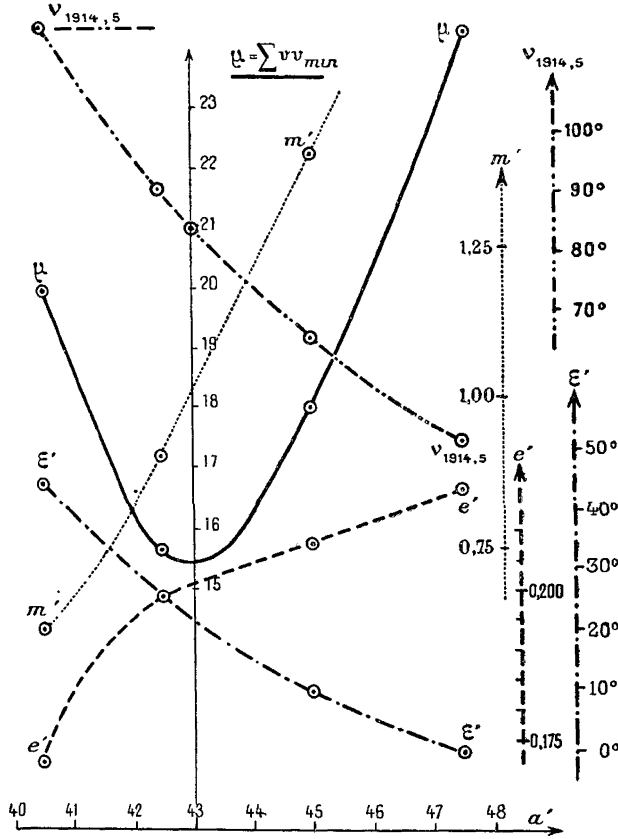


Fig. 5. — Variations de $\mu = \sum v v_{min}$, des éléments de X_1 et de $v_{1914,5}$ en fonction de la distance hypothétique a' .

développés pour $a' = 42,5$ et non pour $a' = 43,0$. Nous simplifierons donc énormément les nôtres, sans leur faire perdre tant soit peu de leur signification, en étudiant les perturbations produites, non par X_1 , mais par une planète X'_1 extrêmement

voisine de X_4 , dont les éléments sont comparés à ceux de X_4 dans le Tableau XXVI.

TABLEAU XXVI.

Planète	a'	ε'	m'	e'	ϖ'	$\Sigma v v_{\min}$	R %
X_4	43,0	22°1	1,00	0,202	203,8	15,5	99,6
X'_4	42,5	25,9	0,90	0,200	209,9	15,7	99,5

L'expression du développement limité de la perturbation P se présente sous la forme

$$P = K' m' k' + H' m' h' + M' m'.$$

Les coefficients S_i , C_i , etc. sont donnés par Lowell ⁽¹⁾. On en déduit les valeurs de K' , H' , M' . Quant à k' et h' , on pourrait les déterminer par la résolution des équations de condition; mais il est plus simple de les emprunter aux solutions mêmes de Lowell. Avec les valeurs de e' , ϖ' et m' données ci-dessus, il vient

$$m' h' = -0,090 \quad \text{et} \quad m' k' = -0,156.$$

On se rappellera cependant que les valeurs précédentes de e' , ϖ' , et m' dérivent, par interpolation, des solutions des équations de condition *pour les valeurs rondes de ε'* . Voici un extrait du tableau correspondant de Lowell ⁽²⁾ :

TABLEAU XXVII.

a'	ε'	m'	$m' k'$	$m' h'$	e'	ϖ'	$\Sigma v v$
42,5	20°	0,818	-0,1659	-0,0560	0,214	198° 3/4	17,2
»	25	0,900	-0,1598	-0,0842	0,201	207° 3/4	15,7
»	30	0,822	-0,1275	-0,0985	0,196	217° 3/4	16,6

Nous aurons plus de précision en interpolant directement entre les valeurs de $m' h'$ et $m' k'$ du Tableau XXVII.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 49-50.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 59, t. 27.

On trouve ainsi

$$m' h' = -0,0885, \quad m' k' = -0,1535.$$

Avec les valeurs de H' , K' , M' et les valeurs correspondantes de P , qu'on peut appeler « perturbations brutes » ou *non réduites*, nous trouvons des équations normales (Tableau XXVIII) qui donnent

$$100 \Delta n = -9,135, \quad \frac{10}{9} \Delta \varepsilon = 5,991, \quad 2 \Delta e = -9,307, \quad \frac{1}{10} \Delta \varpi = -3,674.$$

TABLEAU XXVIII.
Équations normales.

$+ 7,83(100 \Delta n) - 3,34\left(\frac{10}{9} \Delta \varepsilon\right) + 2,90(2 \Delta e) + 1,00\left(\frac{1}{10} \Delta \varpi\right) + 122,19 = 0$				
$- 3,34$	$+ 22,43$	$+ 1,52$	$- 3,65$	$- 164,15 = 0$
$+ 2,90$	$+ 1,52$	$+ 14,04$	$+ 0,85$	$+ 151,21 = 0$
$+ 1,00$	$- 3,65$	$+ 0,85$	$+ 11,37$	$+ 80,67 = 0$

Avec ces valeurs de Δn , $\Delta \varepsilon$, Δe et $\Delta \varpi$ nous calculons la « réduction » ⁽¹⁾

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial n} \Delta n + \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial v}{\partial \varpi} \Delta \varpi,$$

et enfin la « perturbation réduite » ($P + \Delta v$).

La différence entre le résidu R_g de Gaillot et la « perturbation réduite » représente le résidu définitif v laissé par la solution X'_1 de Lowell. Le Tableau XXIX résume l'ensemble des calculs.

On vérifie que la somme des carrés des v vaut 15,6. Cela prouve que nos calculs numériques sont corrects et justifient notre choix de $m' k'$ et de $m' h'$.

Les résultats précédents sont représentés par les graphiques ci-après. Ce qu'ils montrent de plus frappant, c'est l'*extraordi-*

(1) Nous écrivons « réduction » entre guillemets pour éviter toute confusion avec la réduction R des résidus au sens habituel.

TABLEAU XXIX — *Expressions numériques des perturbations de Lowell*
Solution X_1

Date	Numero	$P = H m h + K' m k + M m$			Perturbation brute $\delta v = P$	Reduction Δv	Perturbation reduite $\delta v + \Delta v$	Residu de Gaillot R_0	Residu définitif v
		H	K	M					
1709,79	1	+ 62,6	+107,6	+0,22	-21,87	+24,06	+2,19	-2,14	+0,05
1732,81	2	- 11,5	+ 13,8	-1,91	- 2,81	+ 7,60	+4,79	-4,45	+0,34
1768,65	3	+ 59,0	+ 37,9	-4,37	-14,97	+16,70	+1,73	-2,47	-0,74
1783,05	4	+ 60,3	+113,9	+0,13	-22,71	+22,02	-0,69	+0,96	+0,27
1786,65	5	+ 48,8	+129,8	+2,03	-22,41	+21,70	-0,71	+1,20	+0,49
1792,47	6	+ 22,5	+147,4	+5,14	-19,99	+19,35	-0,64	-0,10	-0,74
1796,37	7	+ 1,7	+152,2	+6,92	-17,29	+16,63	-0,66	+0,69	+0,03
1803,24	8	- 35,6	+145,1	+8,67	-11,32	+10,43	-0,89	+1,19	+0,30
1812,21	9	- 71,4	+109,3	+7,67	- 3,56	+ 2,57	-0,99	+0,77	-0,22
1816,55	10	- 79,2	+ 85,7	+6,06	- 0,69	- 0,12	-0,81	+0,60	-0,21
1820,17	11	- 79,3	+ 65,3	+4,45	+ 1,00	- 1,51	-0,51	+2,37	+1,86
1827,14	12	- 64,7	+ 30,7	+1,35	+ 2,23	- 2,20	+0,03	-2,00	-1,97
1836,67	13	- 23,0	+ 10,5	0,93	- 0,40	+ 0,48	+0,08	+1,22	+1,30
1840,00	14	- 7,2	+ 13,3	-0,96	- 2,26	+ 2,11	-0,15	-0,78	-0,93
1846,00	16	+ 15,7	+ 30,4	-0,07	- 6,12	+ 5,54	-0,58	+1,40	+0,82
1852,00	18	+ 25,5	+ 57,9	+1,46	- 9,84	+ 9,05	-0,79	+0,95	+0,16
1858,00	20	+ 18,5	+ 87,9	+2,86	-12,56	+12,08	-0,48	+0,70	-0,28
1864,00	22	- 4,4	+111,5	+3,29	-13,77	+13,87	+0,10	-0,18	-0,08
1870,00	24	- 37,9	+121,5	+2,37	-13,17	+13,76	+0,59	-1,32	-0,73
1876,00	26	- 74,2	+114,9	+0,31	-10,80	+11,34	+0,54	+0,50	+1,04
1882,00	28	-105,1	+ 92,8	-2,13	- 6,85	+ 6,89	+0,04	-0,52	-0,48
1888,00	30	-124,2	+ 60,2	-4,02	- 1,86	+ 1,37	-0,49	+0,85	+0,36
1894,00	32	-128,0	+ 24,0	-4,77	+ 3,36	- 3,84	-0,48	+0,50	+0,02
1900,00	34	-116,3	- 8,2	-4,32	+ 7,67	- 7,62	+0,05	-1,00	-0,95
1903,47	35	-103,9	- 22,8	-3,64	+ 9,42	- 8,93	+0,49	-0,65	-0,16
1907,00	36	- 88,0	- 33,0	-2,77	+10,36	- 9,57	+0,79	-0,25	+0,54
1910,50	37	- 70,0	- 38,2	-1,79	+10,44	- 9,56	+0,88	-1,10	-0,22

naire disproportion entre la « perturbation brute » et la « perturbation réduite » (fig. 6a et 6b).

La « réduction » est énorme : elle vaut presque, en valeur absolue, la perturbation brute. Cela signifie que les perturbations de la planète X'_1 ne laissent qu'un « effet observable » minime en comparaison avec l'effet de changement dans les éléments provisoires d'Uranus.

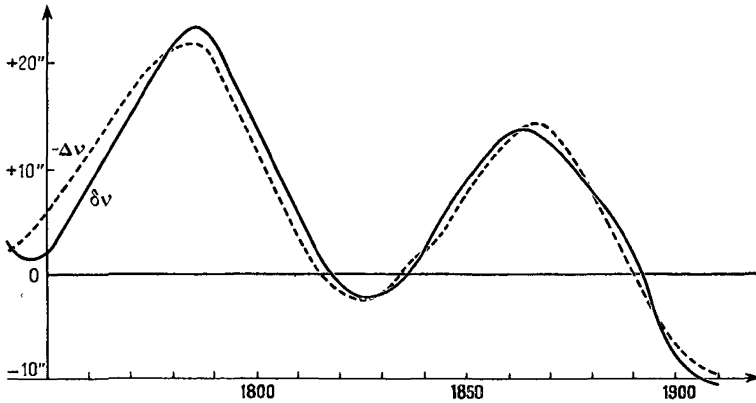


Fig. 6 a. — Perturbations brutes et leur « réduction » dans la solution X'_1 .



Fig. 6 b. — Perturbations réduites.

La figure 7, à plus forte échelle, montre comment la courbe des perturbations réduites de X'_1 passe parmi les résidus de Gaillot, et montre aussi, en pointillé, les perturbations réduites produites par Pluton, que nous empruntons à la solution G_1 de la première partie (1).

Ces graphiques et les tableaux correspondants dissipent les difficultés, signalées plus haut, relatives aux différences de réduction des résidus d'Uranus par X_1 et par Pluton.

(1) Voir p. 54.

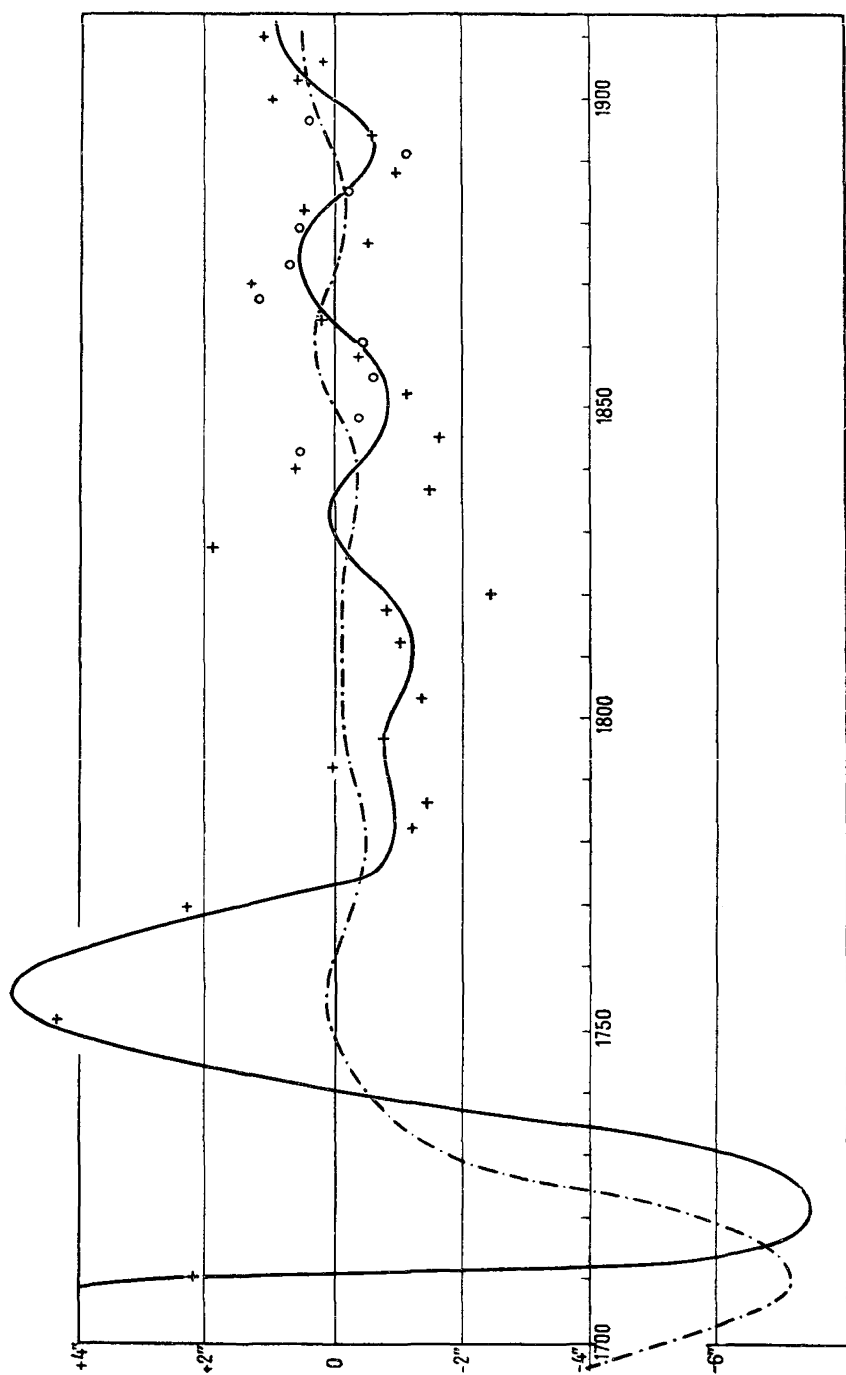


Fig. 7.

----- Perturbations réduites produites par Pluton (solution G₁).
 — Perturbations réduites produites par X₁.
 + Résidus de Gaillot dans la solution à 27 équations.
 o Résidus de Gaillot non utilisés par Lowell.

Nous constatons que ces différences proviennent d'abord d'un effet de « souplesse paramétrique » de X_1 . Nous entendons par là que, cherchant à expliquer les résidus par les perturbations, Lowell dispose de 9 paramètres arbitraires : éléments $a', \varepsilon', e', \varpi', m'$ de X_1 et corrections $\Delta n, \Delta \varepsilon, \Delta e, \Delta \varpi$ des éléments d'Uranus. Il peut donc satisfaire même aux résidus légèrement erronés, surtout isolés, comme ceux antérieurs à 1780, *en ajustant convenablement les éléments de X_1* . La réduction complète des trois résidus en question (voir Tableau XXIX et la figure 7) montre que ce facteur a joué pleinement en ce qui concerne X_1 .

Au contraire, les éléments de Pluton, *fixés par l'observation*, ne laissent à notre disposition que 5 paramètres, dont un seul m' dépend véritablement de Pluton. Le moindre décalage des résidus, quand ils sont erronés, empêche la courbe des perturbations de Pluton de passer par des points donnés d'avance : d'où la faible réduction des résidus.

La réduction subséquente de 25.8 à 15.7 est due, comme on le voit, *à de petites oscillations modernes dans les « perturbations réduites » de X_1 , qui suivent celles des résidus de Gaillot*, et dont on ne trouve pas la moindre trace dans les perturbations exactes de Pluton. Étant donné la similitude de Pluton et de X_1 dans l'intervalle correspondant, on peut se demander si cette différence est due aux termes d'ordre supérieur, négligés par Lowell avec le « reste » de la perturbation, ou à quelque autre cause encore insoupçonnée. Le paragraphe suivant répond à cette question en expliquant l'origine des « oscillations fictives » dans les perturbations réduites de la planète X_1 .

Mais il ne faut pas que toutes ces différences nous fassent oublier un autre fait essentiel, mis en lumière par les mêmes courbes : la ressemblance remarquable entre l'allure des perturbations produites par X'_1 et celles produites par Pluton pendant la période fondamentale des grandes oscillations.

Vers 1720 nous trouvons pour X_1 un profond minimum, analogue à celui de 1712 pour Pluton, puis un maximum vers 1750 qui ressemble encore à celui de Pluton, bien que ce dernier soit plus atténué (fig. 7).

Ainsi, avec un retard qui correspond à celui des configurations mutuelles identiques des deux planètes, les perturbations

de Lowell reproduisent les perturbations exactes à l'époque voisine de la principale conjonction entre Pluton et Uranus.

Pour mettre davantage en lumière ce résultat remarquable, il n'est peut-être pas inutile de reproduire ici la courbe, très inexacte, des perturbations que Pickering attribuait à Pluton, bien après la découverte de ce dernier ⁽¹⁾ (fig. 8).

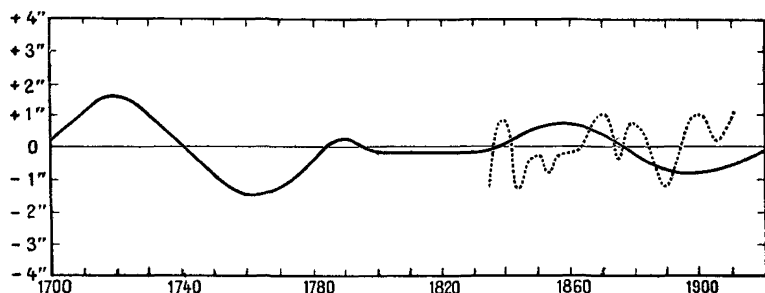


Fig. 8.

----- Résidus de Gaillot d'après la courbe de Lowell.

—— Perturbations d'Uranus par Pluton d'après Pickering (1931).

On voit que Lowell a mieux vu par le seul secours de l'analyse ce qui s'était passé il y a 200 ans, que Pickering ne l'a vu en 1931 malgré le secours des observations directes. Ce document curieux, qui constitue, à notre connaissance, l'unique représentation ou calcul, publiés jusqu'ici, des perturbations d'Uranus par Pluton, montre l'intérêt du calcul exact auquel nous avons consacré la première partie ⁽²⁾.

3. Origine des oscillations fictives dans les perturbations réduites de la planète X_1 et explication de la solution H_{20} . —

1° On se rappelle que ce ne sont pas les perturbations totales

⁽¹⁾ « *Monthly Notices* », 1931, t. 91, p. 813-817. Pickering ne dit pas comment il a obtenu sa courbe.

⁽²⁾ Pickering dit (*loc. cit.*, p. 814) : « To calculate accurate perturbations from the present mass of data would be a rather pretty problem and perhaps someone will undertake it, but the present curve cannot in general be far out of the way ».

brutes δv que l'on compare aux résidus dans les équations de condition ⁽¹⁾, mais la somme des perturbations δv et de l'effet Δv des corrections des éléments provisoires.

La présence des oscillations fictives dans les calculs de Lowell s'explique par la réapparition dans les perturbations réduites $\delta v + \Delta v$ de certains termes négligés dans le développement limité des perturbations brutes.

Aux termes discontinus ⁽²⁾ L_0, L_1, E_0, P_0 des développements des inégalités à longue période, correspondent différents termes des perturbations *en longitude vraie*, qui se reconnaissent par la présence, dans leurs expressions analytiques du petit diviseur $v = 3n' - n$.

La correspondance s'établit par la formule ⁽³⁾

$$(1) \quad \delta v_d = \frac{\partial v}{\partial t} \delta l_d + \frac{\partial v}{\partial e} \delta e_d + \frac{\partial v}{\partial \varpi} \delta \varpi_d,$$

qui donne ⁽⁴⁾

$$(2) \quad \boxed{\delta v_d = \delta v_c + \delta v_n + \dots}$$

avec

$$(3) \quad \begin{cases} \delta v_c = L_0 + L_1 t + 2 E_0 \sin \zeta + 2 e (L_0 - P_0) \cos \zeta, \\ \delta v_n = \frac{5}{2} e (E_0 \sin 2 \zeta - e P_0 \cos 2 \zeta). \end{cases}$$

Il se trouve qu'en limitant ses développements, Lowell a conservé δv_c et négligé δv_n ⁽⁵⁾.

Or, pour la planète X_1 de Lowell on a $3n' - n = -0,088n$, valeur relativement petite. On doit donc s'attendre à ce que, δv_c l'emportant de beaucoup sur la partie *continue* de δv , la représentation graphique de la perturbation brute prenne la forme d'une sinusoïde inclinée de grande amplitude et de pseudo-période égale à la durée de la révolution sidérale d'Uranus. C'est

⁽¹⁾ Voir p. 15.

⁽²⁾ Voir p. 18.

⁽³⁾ L'indice d rappelle qu'il s'agit uniquement des termes discontinus.

⁽⁴⁾ Cf. TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. 1, p. 350 [formules (2), (3), (4)].

⁽⁵⁾ Voir ci-dessous p. 92-94.

précisément ainsi que s'explique l'allure de la courbe des perturbations brutes (fig. 6a).

Nous avons vu cependant que les perturbations réduites $\delta\nu + \Delta\nu$ étaient beaucoup plus petites que les perturbations brutes (*fig. 6b*). C'est qu'on dispose, dans $\Delta\nu$, de quatre quantités arbitraires choisies exprès pour rendre $\delta\nu + \Delta\nu$ de l'ordre de grandeur des résidus, qui sont environ dix fois plus petits que $\delta\nu$.

On a

$$(4) \quad \Delta\nu = \frac{\partial\nu}{\partial t} (\Delta\varepsilon + t \Delta n) + \frac{\partial\nu}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial\nu}{\partial \varpi} \Delta\varpi,$$

d'où, par analogie avec les formules (1), (2) et (3),

$$(5) \quad \begin{aligned} \Delta\nu = & \Delta\varepsilon + t \Delta n + 2 \Delta e \sin \zeta + 2 e (\Delta\varepsilon - \Delta\varpi) \cos \zeta \\ & + \frac{5}{2} e (\Delta e \sin 2\zeta - e \Delta\varpi \cos 2\zeta) + \dots \end{aligned}$$

et, par conséquent

$$(6) \quad \begin{aligned} \delta\nu + \Delta\nu = & (\Delta\varepsilon + L_0) + (\Delta n + L_1)t + 2(\Delta e + E_0) \sin \zeta \\ & + 2e(\Delta\varepsilon + L_0 - \Delta\varpi - P_0) \cos \zeta \\ & + \frac{5}{2} e (\Delta e \sin 2\zeta - e \Delta\varpi \cos 2\zeta) \\ & + \text{la partie continue de } \delta\nu \\ & + \dots \end{aligned}$$

La formule (6) montre clairement qu'on pourra compenser $\delta\nu$ en donnant à $\Delta\varepsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$ des valeurs telles qu'on ait

$$(7) \quad \Delta\varepsilon + L_0 = 0, \quad \Delta n + L_1 = 0, \quad \Delta e + E_0 = 0, \quad \Delta\varpi + P_0 = 0,$$

soit en prenant

$$(8) \quad \Delta\varepsilon = -L_0, \quad \Delta n = -L_1, \quad \Delta e = -E_0, \quad \Delta\varpi = -P_0.$$

Naturellement, on ne doit pas s'attendre à ce que les relations (8) soient vérifiées rigoureusement (à cause de la partie *continue* de $\delta\nu$, et des résidus qui se trouvent dans les seconds membres des équations), mais elles montrent néanmoins l'ordre de grandeur des corrections $\Delta\varepsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$. Effectivement nous avons trouvé, en résolvant les équations, des corrections très considérables

$$\Delta\varepsilon = + 5'',4, \quad \Delta n = - 0'',091 \text{ par an} \quad \Delta e = - 4'',65, \quad \Delta\varpi = - 36'',7.$$

Mais la *nécessité d'introduire de fortes corrections pour compenser les termes discontinus* δv_c , entraîne comme conséquence l'importance exagérée que prend la partie

$$(9) \quad P_f = \frac{5}{2} e (\Delta e \sin 2\zeta - e \Delta \varpi \cos 2\zeta)$$

des perturbations réduites (6), surtout après la quasi-disparition de la partie

$$(\Delta e + L_0) + (\Delta n + L_1) + 2(\Delta e + E_0) \sin \zeta + 2e(\Delta c + L_0 - \Delta \varpi - P_0) \cos \zeta.$$

Ainsi l'existence, dans les perturbations réduites, de l'oscillation fictive

$$P_f = \frac{5}{2} e (\Delta e \sin 2\zeta - e \Delta \varpi \cos 2\zeta)$$

est due essentiellement à la présence de termes discontinus et à l'omission, dans l'expression de δv_d , de la partie

$$\delta v_n = \frac{5}{2} e (E_0 \sin 2\zeta - e P_0 \cos 2\zeta).$$

L'expression numérique de P_f découle immédiatement des valeurs de Δe et $\Delta \varpi$ trouvées au paragraphe précédent :

$$\Delta e = -4'',65, \quad \Delta \varpi = -36'',7,$$

d'où

$$(10) \quad P_f = 0'',6 \sin(2\zeta + 177^\circ) = 0'',6 \sin \left[400^\circ \left(\frac{t}{42} \right) + 267^\circ \right].$$

Or, si l'on se réfère à la courbe des résidus modernes de Gaillot, tracée par Lowell, on remarque que ces résidus, d'une amplitude moyenne de $0'',6$ à $0'',7$, sont

$$\begin{array}{ll} \text{maxima en.....} & 1789, 1829, 1871, 1913; \\ \text{minima en.....} & 1808, 1850, 1892. \end{array}$$

Donc P_f est presque identique, non seulement en amplitude, mais encore en phase, à l'oscillation systématique principale des résidus modernes de Gaillot, et l'on comprend dès lors pourquoi la partie fictive P_f des perturbations de Lowell permet une réduction massive de ces résidus.

2° Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer que la solution désignée par H_{20} avait surpris Lowell par les différences profondes qu'elle présentait avec la solution principale H_{14} , malgré l'introduction de termes « en apparence négligeables ». Les différences se manifestaient surtout dans la réduction des résidus de Gaillot, beaucoup moins sensible dans la solution H_{20} , et nous savons de plus que la position prédite dans H_{20} était au contraire plus précise que dans la solution H_{14} .

Or, l'explication de l'origine des oscillations fictives que nous venons de donner, éclaire aussi les particularités de la solution H_{20} et, réciproquement, est confirmée par elle.

On reconnaît, en effet, parmi les 25 termes de δv retenus par Lowell dans la solution H_{14} , les termes à longue période n°s 14 et 18 (d'après les notations de Lowell) (1).

Leurs amplitudes respectives sont

$$|n^{\circ} 14| = a(172)^{(3)} \frac{3 n^2 e^2}{4 v^2}, \quad |n^{\circ} 18| = a(182)^{(2)} \frac{3 n^2 e e'}{4 v^2};$$

or, les termes en 2ζ correspondants sont omis dans H_{14} , mais ils se retrouvent dans H_{20} : ce sont les n°s 36 et 67,

$$n^{\circ} 36 = a(172)^{(3)} \frac{5 n^2 e^2}{2 v (v - 2 n)} \sin[(v - 2 n)t + \beta_1],$$

$$n^{\circ} 67 = a(182)^{(2)} \frac{5 n^2 e e'}{4 v (v - 2 n)} \sin[(v - 2 n)t + \beta_2].$$

Lorsque $v = 0,088 n$, on a

$$|n^{\circ} 36| = 0,14 \times |n^{\circ} 14| \quad \text{et} \quad |n^{\circ} 67| = 0,07 \times |n^{\circ} 18|.$$

Les termes négligés sont donc beaucoup plus petits que les termes conservés dans H_{14} et l'on comprend que Lowell ait été tenté de les omettre pour ne pas trop compliquer ses calculs. Mais considérons les valeurs numériques de nos quatre termes, il vient, d'après le Tableau XXX,

$$|n^{\circ} 14| = 0'',70, \quad |n^{\circ} 18| = 11'',50, \quad |n^{\circ} 36| = 0'',10, \quad |n^{\circ} 67| = 0'',80.$$

(1) *Loc. cit.*, p. 22 et 62. Voir aussi le Tableau XXX ci-contre.

TABLEAU XXX.

Expressions analytiques des perturbations de Lowell (H₁₃)
(longitude vraie).

PÉRIODE	PULSATION	NUMÉRO de Lowell (*)	AMPLITUDE		PHASE ($\varepsilon' = 28^0,7$ $\varpi' = 233,3$)	ORDRE	ARGUMENT
			($m' = 0,90$)	($m' = 0,90$) ($e' = 0,20$)			
957 ^{ans}	G/an 0,418	14	+ 0,70	+ 0,70	G 119,7	e^2	$3l' - \lambda - 2\omega$
»	»	16	+ 1,13 e'	+ 0,22	365,9	ee'	$3l' - \lambda - \omega - \varpi'$
»	»	17	+ 1,54 e'	+ 0,30	»	ee'	$3l' - \lambda - \omega - \varpi'$
»	»	18	+ 58,39 e'	+ 11,50	»	ee'	$3l' - \lambda - \omega - \varpi'$
»	»	19	+ 6,96 e'	+ 1,37	»	ee'	$3l' - \lambda - \omega - \varpi'$
389	1,029	20	+ 0,59 e'	+ 0,12	275,7	$e^2 e'$	$4l' - \lambda - 2\omega - \varpi'$
276	1,447	4	+ 0,23	+ 0,23	241,6	e	$l' - \omega$
»	»	9	+ 5,74 e'	+ 1,13	395,4	e'	$l' - \varpi'$
214	1,866	5	+ 1,43	+ 1,43	161,3	e	$2l' - \lambda - \omega$
»	»	10	+ 9,48 e'	+ 1,87	7,5	e'	$2l' - \lambda - \varpi'$
121	3,313	1	+ 2,17	+ 2,17	202,9	$e^0 e'^0$	$l' - \lambda$
107	3,732	22	+ 4,68 e'	+ 0,92	368,8	ee'	$4l' - 2\lambda - \omega - \varpi'$
»	»	21	+ 1,16 e'	+ 0,23	»	ee'	$4l' - 2\lambda - \omega - \varpi'$
77	5,179	6	+ 1,49	+ 1,49	364,2	e	$3l' - 2\lambda - \omega$
»	»	11	+ 62,64 e'	+ 12,34	210,4	e'	$3l' - 2\lambda - \varpi'$
60	6,626	2	+ 2,49	+ 2,49	5,8	$e^0 e'^0$	$2l' - 2\lambda$
49	8,074	7	+ 0,13	+ 0,13	47,4	e	$l' - 2\lambda + \omega$
47	8,492	12	+ 2,38 e'	+ 0,47	213,3	e'	$4l' - 3\lambda - \varpi'$
»	»	23	+ 0,24 e'	+ 0,05	»	$e^2 e'$	$4l' - 3\lambda - \varpi'$
40	9,939	3	+ 0,26	+ 0,26	8,7	$e^0 e'^0$	$3l' - 3\lambda$
35	11,387	8	+ 0,16	+ 0,16	250,3	e	$2l' - 3\lambda + \omega$

(*) On a omis les termes particulièrement faibles : nos 13, 15, 24, 25.

Dans la solution H_{14} les termes n^{os} 14 et 18 seront compensés par un choix convenable des corrections $\Delta\varepsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$, mais l'omission des termes n^{os} 36 et 67 donnera naissance à une oscillation fictive d'une amplitude de l'ordre de $0",8$, et c'est précisément ce que nous avons déjà trouvé par le calcul direct.

Par contre, dans la solution H_{20} on tient compte des termes n^{os} 36 et 67, et de quelques autres termes analogues de moindre importance. Les termes en 2ζ de δv_n annulent les termes correspondants P_f de Δv et il n'y a pas d'oscillations fictives. Cette fois, cependant, *il ne reste plus rien pour réduire les oscillations en 2ζ des résidus de Gaillot*. Ainsi un accroissement d'exactitude produit une diminution de la réduction des résidus.

4. Pseudo-dualité de la solution de Lowell. — Au lieu de trouver une position unique, comme Le Verrier ou Adams, Lowell trouve deux positions possibles qui diffèrent de 180° . Ce fait n'a pas manqué de contribuer à augmenter les doutes de certains astronomes sur la validité des calculs de Lowell. Or, la chose est parfaitement naturelle : c'est ce qui a été trouvé par la presque totalité des chercheurs de la planète transneptunienne. Elle s'explique, en principe, par le fait que *la période des perturbations n'est que la moitié de la période synodique*. C'est pourquoi la solution du problème inverse n'est pas uniforme mais comporte deux déterminations.

Pickering montre la nécessité de la dualité des solutions déduites des résidus d'Uranus en considérant les variations de la composante tangentielle de la force perturbatrice ⁽¹⁾. Ces variations montrent que lorsque la planète perturbée est relativement loin ⁽²⁾ de la planète perturbatrice (couple Uranus-Pluton), les perturbations « d'opposition » ont presque la même amplitude que les perturbations « de conjonction ».

Toutefois, l'explication à la fois la plus claire et la plus intuitive a été donnée par H. E. Lau ⁽³⁾ en 1914. La voici : « Concevons, dit-il, une planète, Uranus, par exemple, dont le mouvement

⁽¹⁾ *Harvard Annals*, 1909, t. 61, p. 135. Voir aussi p. 124, fig. 17 et p. 130.

⁽²⁾ Cette particularité ne se présentait pas pour le couple Uranus-Neptune.

⁽³⁾ *Bulletin de la Société Astronomique de France*, vol. 28, p. 275.

soit troublé par l'action d'une planète plus éloignée. Supposons qu'à une époque donnée les deux planètes se trouvent en U et T. La chute d'Uranus dans la direction de T, étant plus forte que celle du Soleil S, la planète semble s'éloigner du Soleil. Si la planète troublante se trouvait en T', la chute du Soleil vers T' aurait été plus grande que celle d'Uranus, de sorte que cette planète semblerait à nouveau s'éloigner du Soleil.

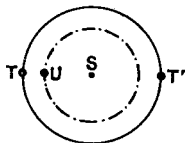


Fig. 9.

« *L'action de la planète troublante est donc à peu près la même pour les deux configurations examinées, et cette égalité sera d'autant plus parfaite que la planète troublante est plus éloignée....* Inversement, les perturbations d'Uranus ne permettent pas de décider si, à l'époque donnée, la planète troublante se trouve en T ou bien en T'. »

L'explication de Lau montre qu'on ne peut demander à Lowell un choix aussi net et tranchant que le fut celui de Le Verrier.

Toutefois, étant donné le caractère particulièrement rigoureux de l'analyse de Lowell, nous aurions été étonné s'il n'y avait eu aucune discrimination possible entre les deux déterminations. Or, justement, nous avons trouvé que non seulement *le choix était possible*, mais qu'il avait été *positivement entrevu par Lowell lui-même*. Cela est tout à fait remarquable et, à notre connaissance, n'a point encore été signalé de façon précise.

Si nous comparons, en effet, les réductions des résidus relatives au groupe de 27 équations, nous trouvons ⁽¹⁾ que la réduction pour X_1 est de 100 % alors que pour X_2 elle n'est que de 90 % (à 1 % près).

De plus, en comparant les résultats des autres groupes on voit que la réduction R diminue légèrement pour X_2 lorsque le poids du groupe employé augmente. Ainsi, en incorporant les deux

(1) Voir p. 66.

équations de 1903-1910 la réduction passe de 91 % à 89,5 %, mais cet effet est par trop minime pour justifier le rejet de la solution X_2 .

Il n'en est pas de même des 10 % qui différencient X_1 et X_2 , et Lowell s'en est parfaitement rendu compte.

« Les solutions, dit-il ⁽¹⁾, parlent elles-mêmes des alternatives entre lesquelles il nous reste à choisir. *Si nous ne tenons compte que des résidus seuls, nous devons choisir celle des solutions qui a son ϵ' au voisinage de 0°, puisque c'est celle qui donne les plus petits résidus définitifs.* »

Or, la solution « qui a son ϵ' au voisinage de 0° », c'est X_1 . Autrement dit, la réduction des résidus fournit à Lowell, malgré la grande distance qui sépare Uranus de Pluton, une solution absolue du problème, sans aucune dualité, *et cette solution absolue est la vraie.*

Si, cependant, Lowell ne s'est pas arrêté à cette solution unique, c'est que, toujours préoccupé du but pratique de sa recherche, la découverte effective de Pluton, et conscient aussi du peu que représente une différence relative de 10 % avec des données aussi peu précises que les résidus d'Uranus, *il craint de manquer la découverte physique en restreignant les limites de sa solution par un choix trop rigoureux.*

Après avoir constaté que l'analyse semble accorder un poids plus grand à la solution X_1 , il remarque aussitôt, que « d'un autre côté cela placerait la planète X, pour le moment, et encore pour beaucoup d'années, *dans une région du ciel qui a été scrutée aussi bien que possible, alors que la solution X_2 nous mènerait dans une région presque inaccessible à la plupart des observatoires et par conséquent plus intéressante pour la recherche des planètes inconnues* » ⁽¹⁾.

La conservation de la solution X_2 procède, chez Lowell, du même esprit réaliste que le choix des limites exagérément étendues chez Le Verrier. On se rappelle que la solution absolue a donné à Le Verrier une approximation de 52'. Pourtant Le Verrier n'a pas hésité à assigner à sa solution une erreur probable de 5° en arrière, et de 18° en avant, de la position la plus précise.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 103.

« En effet, dit Le Verrier ⁽¹⁾, il faut bien se garder d'attribuer aux observations une rigueur qu'elles n'auraient point, ce qui pourrait conduire à trop restreindre les limites que nous avons en vue, et, par suite, à manquer la découverte de l'astre, si l'on avait circonscrit sa recherche physique dans une étendue de l'écliptique qui ne le comprendrait réellement pas. »

On a vu les craintes de Le Verrier se justifier par l'échec des recherches entreprises en 1919 au Mont Wilson sur la demande de Pickering. Les images de Pluton figuraient sur quatre clichés ⁽²⁾, mais on ne s'en est aperçu qu'après la découverte en 1930 : c'est que l'on a limité l'étude des clichés à une région très voisine de l'écliptique, alors que la latitude de Pluton était assez considérable.

Du reste, on peut envisager la dualité des solutions encore à un autre point de vue. *On peut considérer que chaque solution, tirée des résidus d'Uranus, ne fait connaître la solution réelle qu'à $\pm 180^\circ$ près.* Une solution telle que $\nu_{1914,5} = 262^\circ,5$, par exemple, indique que la planète peut se trouver soit à $262^\circ,8$, soit à $82^\circ,8$ de longitude. Une telle attitude permet d'utiliser les solutions qui ont été élaborées au voisinage de $\epsilon' = 180^\circ$, comme les solutions du second ordre de Lowell, pour prévoir directement les longitudes correspondantes au voisinage de $\epsilon' = 0^\circ$. *Cela devient particulièrement intéressant lorsqu'une méthode différente, mais moins précise, permet de fixer sans ambiguïté le quadrant dans lequel doit se trouver la planète.* C'est ce que fit Pickering en 1919 ⁽³⁾. Cela voudrait dire aussi que la solution du second ordre de Lowell : « $c - 45,0$ », $\nu_{1914,5} = 91^\circ,1 + 180^\circ$ avait placé X à $0^\circ,5$ de Pluton en 1914,5.

5. Le rôle des résidus anciens. — L'importance des résidus anciens dans « le problème inverse des perturbations » avait été

⁽¹⁾ LE VERRIER, Addition à la *Connaissance des temps*, pour 1849, p. 239.

⁽²⁾ Voir ci-dessous, p. 131.

⁽³⁾ Nous expliquerons plus loin (p. 129), comment, localisant la planète X au voisinage de 100° au moyen des résidus de *Neptune*, il a pu se servir des solutions de Lowell, en choisissant X_1 , ainsi que de celles de Lau et de Gaillot, mais justement en rectifiant ces dernières de 180° de façon à les placer au voisinage de X_1 .

mise en évidence par divers auteurs, et en particulier par Le Verrier. Lowell, aussi, n'a pas manqué de s'en apercevoir : « Il est d'un intérêt vital, dit-il ⁽¹⁾, de remarquer à quel degré ce sont les résidus anciens qui nous informent de l'existence d'un nouvel astre, et non les résidus modernes. Ces derniers peuvent être réduits par des changements convenables des éléments de l'astre perturbé. Les résidus anciens, au contraire, ne peuvent être réduits de la sorte et constituent de ce fait nos poteaux indicateurs ».

Le rôle des résidus anciens devient plus important encore dans le cas de Pluton, du fait ⁽²⁾ que les perturbations maxima d'Uranus eurent lieu entre 1690 et 1760. Par contre, durant toute la période des observations modernes les perturbations furent à peine sensibles et ne redeviendront notables que vers 1950-1960. C'est ce que montre clairement la figure 10 qui représente « les perturbations réduites absolues » d'Uranus entre 1690 et 1900 ⁽³⁾.

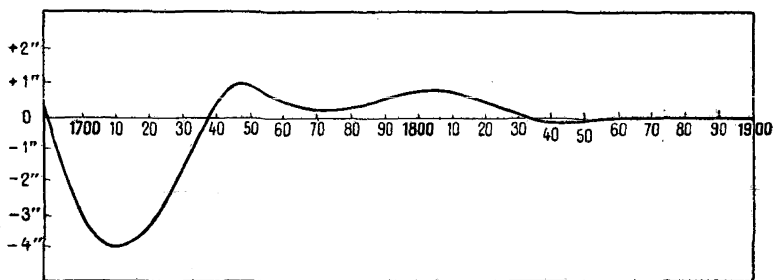


Fig. 10. — Perturbations réduites absolues d'Uranus par Pluton (solution L_1).

Or, ne perdons pas de vue qu'Uranus n'a été observée de façon suivie qu'après 1781, date de sa découverte par Herschell. Entre 1690 et 1780 on ne dispose que de quelques observations isolées et discordantes. C'est en cela surtout que le problème

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 101, § 66.

⁽²⁾ Passé sous silence par Brown.

⁽³⁾ Ce sont les coefficients A de la solution L_1 (voir première partie, p. 50). Voir une portion de la même courbe à plus grande échelle, p. 125.

de Pluton diffère de celui de Neptune. « L'effet observable » de Neptune se traduisait, pour Le Verrier et Adams, par une suite continue de résidus, provenant d'observations méridiennes assez précises, s'étendant de 1781 à 1845 et englobant, par hasard, la période du maximum des perturbations. « L'effet observable » de Pluton sur Uranus se manifestait, pour Lowell, surtout par les trois résidus anciens de Gaillot, espacés de 43 et 16 ans, peu précis, et dont un (1710) était erroné.

Doit-on en conclure, avec Brown, que le travail de Lowell « n'est pas valable » et que la ressemblance de X, avec Pluton est due au « pur hasard » ? Ce serait très exagéré et injuste, car cela reviendrait à tenir compte de l'amplitude des erreurs d'observation sans tenir compte de l'amplitude correspondante des perturbations.

En effet, l'analyse des résidus d'Uranus, compte tenu de l'action de Pluton ⁽¹⁾, nous a permis de calculer leur « erreur effective ». *Les erreurs des trois résidus anciens de Gaillot étaient très considérables, mais pas de nature à faire disparaître toute trace de l'action de Pluton.*

D'après la solution G₁.

DATE	Masse apparente m'_a	RÉSIDU pour $m' = 0$	Erreur effective pour $m' = 17,3$
	^T		
1709,8	— 0,7	— 2,70	— 6,99
1752,8	+ 16,8	— 4,74	— 4,37
1768,7	+ 43,1	— 1,77	— 1,72

D'après la solution L₁.

DATE	Masse apparente m'_a	RÉSIDU pour $m' = 0$	Erreur effective pour $m' = 17,63$
1709,8	+ 1,05	— 5,11	— 10,22
1752,8	+ 5,6	— 3,81	— 2,64

D'ailleurs, il ne faut pas oublier que l'« erreur effective », c'est-à-dire le résidu définitif dans l'hypothèse $m' \neq 0$, n'a pas une signification absolue. Ses variations quand on passe de L₁ à G₁ le montrent bien. Elle dépend des poids assignés aux résidus, et ces

(1) Première partie, p. 50 et 51.



matériaux, à leur tour, ne peuvent être évalués objectivement que si l'on connaît « l'erreur effective ». Comme on le voit, il y a là une sorte de cercle vicieux inhérent au problème.

Quoi qu'il en soit, on remarque immédiatement que *le résidu de 1752,8 est supérieur à « l'erreur effective » aussi bien dans L_1 que dans G_1 .*

Cette erreur est d'ailleurs favorable puisque « la masse apparente » correspondante est positive. Il en est de même du résidu de 1768,7.

Il y a donc dans la détermination des éléments de X_1 une part de hasard favorable, comme dans toute découverte scientifique, et en particulier comme dans celle de Neptune.

Mais d'un autre côté, et c'est là l'essentiel, même si l'erreur s'était exercée dans un sens défavorable, il serait resté pour 1752,8 un résidu de $0'',5$ à $0'',1$, manifestant l'action de Pluton.

D'ailleurs, est-il exact de dire que l'erreur était « favorable » ? Telle quelle, ne conduisait-elle pas à une forte surestimation de la masse et de la magnitude ? Inversement, elle aurait pu être très différente sans que le calcul de la longitude de X_1 en fût affecté ; il eût suffi que la masse apparente restât positive, car, moyennant cette condition, la longitude et la masse de la planète théorique dépendent l'une seulement de *la date* du maximum des perturbations, l'autre seulement de *l'amplitude* de ces perturbations, c'est-à-dire de deux facteurs absolument distincts ⁽¹⁾.

Enfin, et c'est là un deuxième fait essentiel, n'oublions pas que la résolution des équations de conditions avec les perturbations de Pluton, et *un poids nul accordé aux observations anciennes* (solution L_2), nous a donné une masse de Pluton voisine de 2 T. Cela prouve qu'il y avait dans les résidus modernes d'Uranus autre chose que des oscillations fictives et que les observations modernes contenaient, elles aussi, une trace de l'action de Pluton.

(¹) Voir la troisième partie; les méthodes de Brown et de Pickering sont justement fondées sur le principe de l'indépendance de la longitude et de la masse. D'ailleurs, chez Le Verrier, l'erreur en longitude est inférieure à 1 %, tandis que l'erreur en masse est supérieure à 40 %.

Quant à l'influence de l'erreur qui affecte le résidu de 1710, elle s'est traduite simplement par un glissement de 20 ans environ, du point d'intersection de la courbe des perturbations avec l'axe des temps. Le point exact B a été remplacé par le point B'; la courbe (') déterminée par B, R_{II} et R_{III} a été décalée au voisinage de B, mais l'allure générale après 1750 n'a pas été affectée, grâce aux positions exactes de R_{II} et R_{III}. C'est le décalage antérieur à 1750 qui explique le retard des configurations identiques de la planète X, avec Uranus sur celles de Pluton avec Uranus.

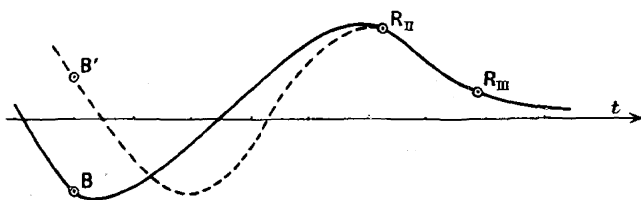


Fig. 11. — Décalage de 20 ans par lequel s'est traduite l'erreur affectant le groupe de 1710.

6. « L'erreur probable » de la solution de Lowell. — Certains critiques ont reproché à Lowell de n'avoir pas calculé l'« erreur probable » de ses résultats, et ont insinué qu'une fois calculée l'« erreur probable » se serait révélée si considérable que la solution perdrait toute sa signification.

En fait, un précédent illustre, celui du calcul des « limites » où Le Verrier croyait avoir enfermé son Neptune, montre clairement que dans le problème qui nous occupe, le calcul d'erreur probable ne peut avoir aucun fondement objectif, et que la notion même d'erreur « probable » y est complètement dénuée de sens.

Dans le Mémoire de 1846, Le Verrier se pose la question suivante ⁽²⁾ : « Jusqu'où peut donc s'élever l'effet des erreurs réunies et inévitables de la théorie et de l'observation ? », et il répond :

⁽¹⁾ La figure 11 n'est qu'un schéma; pour la courbe exacte voir la figure 7.

⁽²⁾ Addition à *la Connaissance des Temps* pour 1849, p. 239. C'est nous qui soulignons dans ces citations, sauf le mot « arbitraire » qui est souligné par Le Verrier.

« *Il n'est pas possible de répondre d'une manière précise à cette question, et autrement que par une appréciation empruntée à l'habitude que chaque astronome a de la grandeur et de la marche des erreurs des Tables astronomiques les plus exactes.* »

Et, le 2 octobre 1848, Le Verrier proclamait devant l'Académie des Sciences ⁽¹⁾ : « Après avoir ajouté, dans le même Mémoire (de 1846), que la grandeur des écarts que l'on voudrait tolérer entre l'observation et le calcul se trouvait ainsi indéterminée, je la fixais arbitrairement à 5'' pour toutes les positions d'Uranus observées depuis 1781 jusqu'en 1845. C'est dans cette hypothèse *arbitraire* que j'ai fait mes calculs des limites. Mais on voit, et l'on n'oubliera pas que j'aurais pu, au lieu de 5'', prendre pour écart 10'' et même 12'' ».

Or, si avec 5'' Le Verrier trouvait déjà une enceinte ayant une étendue de 18°,5 ⁽²⁾, on conçoit qu'avec une erreur probable des données de 12'', les limites de l'enceinte s'élargiraient au point d'enlever, en apparence, toute valeur à la prédiction. Car l'« *erreur probable* » de la solution varie bien plus rapidement que l'erreur hypothétique des données. Le Verrier remarque, par exemple, qu'en ce qui concerne le demi-grand axe a' : « quand on reprend le calcul des limites du demi-grand axe avec d'autres incertitudes que 5'' dans les données, on aperçoit qu'il s'en faut de beaucoup que l'étendue comprise entre les limites de ce demi-grand axe varie proportionnellement à l'incertitude des données. Elle varie bien plus rapidement » ⁽³⁾. Puis il indique que :

Pour 5'' on a 2,86 unités d'intervalle entre les limites de a' .

Pour 2'',5 on n'a aucune valeur de a' , qui puisse satisfaire à la question.

Pour plus de 5'' on a la plus grande latitude dans le choix de a' .

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 1848, vol. 27, p. 326.

⁽²⁾ Le Verrier revient souvent sur ce nombre : « J'ai en effet exposé, le 31 août 1846, avant la découverte de Neptune, qu'il serait peut-être nécessaire de pousser les recherches jusqu'à 18°,5 au delà de la position la plus probable que j'avais assignée » (*Comptes rendus*, 1848, vol. 27, p. 327).

⁽³⁾ *Comptes rendus*, 1848, vol. 27, p. 330.

Tout le monde sait que malgré toutes ces énormes « erreurs probables » la postérité n'a retenu du calcul de Le Verrier que les 52' qui séparaient *en fait* sa planète théorique du Neptune vrai.

Cela montre que la traduction objective et rigoureuse des résidus par des éléments ou des positions d'une planète théorique est en somme toujours « valable ». Vraie ou fausse, selon le contenu des données, quelle que soit son « erreur probable », elle n'est qu'une hypothèse de travail, stimulant la recherche physique. Par contre, tout essai de fixer, a priori, son degré d'exactitude ne peut être basé que sur des appréciations arbitraires et ne fait que créer de fausses certitudes ou des inquiétudes stériles.

CHAPITRE III.

PLUTON : « PLANÈTE LOWELL ».

1. **Introduction.** — Le nom de Le Verrier reste à jamais attaché à Neptune, malgré les travaux d'Adams. Il n'est que trop naturel, malgré quelques contributions de Pickering, d'associer à Pluton le nom de Lowell.

En effet, Lowell avait apporté la certitude absolue de l'existence d'une planète transneptunienne; ses calculs ont guidé les recherches photographiques dans la vaste étendue du ciel, et les ont conduites au succès. C'est grâce à ses calculs qu'on a pu identifier le nouvel astre en tant que nouvelle planète. Enfin, on n'oubliera pas que c'est à l'Observatoire fondé par Lowell à Flagstaff, suivant un plan de recherches établi par lui, grâce au matériel, aux fonds, et surtout à l'esprit de recherche qu'il a légués à ses collaborateurs, que la planète fut effectivement découverte, en 1930, par M. Clyde Tombaugh.

Nous allons maintenant analyser rapidement cet autre aspect de l'œuvre de Lowell.

2. **La certitude de l'existence de Pluton.** — Les travaux mathématiques de Lowell ont apporté à ses collaborateurs cette certitude de l'existence de la planète cherchée, sans laquelle on n'aurait jamais pu oser entreprendre les longues et minutieuses recherches qu'exigeait une pareille entreprise.

Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer qu'aucun grand observatoire possédant un « blink-microscop » ne s'est occupé de la recherche de Pluton avant que celui de Lowell ne l'ait menée à bonne fin. Rappelons aussi qu'il en fut de même pour Le Verrier et que malgré ses « vives insistances pour qu'on vérifiât son travail ⁽¹⁾ au moyen d'une lunette », ce n'est qu'à Berlin, *et plus de quatre mois après la publication de son principal Mémoire* (1^{er} juin 1846) qu'on daigna chercher l'astre à l'existence duquel on n'osait pas croire.

Et que dire d'Adams dont les calculs sont restés dans les tiroirs de Greenwich pendant plus d'un an ! ⁽²⁾.

3. **Les recherches de Pluton.** — Au mois de mars 1937, je demandais à M. V. M. Slipher, directeur de l'Observatoire de Flagstaff, si la distribution des recherches photographiques avait été faite en conformité avec les résultats mathématiques de Lowell.

Je me permets d'extraire de sa réponse, datée du 11 mai 1937, le passage suivant qui révèle le lien étroit existant entre l'observation et le calcul : « Depuis la mise en service du nouveau télescope (mars 1929) jusqu'à la découverte de la planète X de Lowell (février 1930), on a réussi 28 clichés en cherchant dans la région des Gémeaux prédite par Lowell. Ces plaques étaient à peu près également réparties entre les deux saisons d'observation. Je me souviens avec quelle impatience je travaillais à l'ajustement

⁽¹⁾ LE VERRIER, *Comptes rendus*, 1848, vol. 27. p. 273.

⁽²⁾ Cf. P. CHALLIS, *Monthly Notices*, t. 7. p. 145. « J'ai reçu les *Mémoires* d'Adams en septembre 1845... mais la recherche a été retardée... parce que c'était une chose si nouvelle que d'entreprendre des observations en ne s'appuyant que sur des déductions purement théoriques, et qu'alors que le travail paraissait considérable la perspective du succès était très douteuse. »
Date de la découverte de Neptune : le 23 septembre 1846.

définitif du nouvel instrument pendant les deux dernières semaines de 1928 et les premières semaines de 1929, afin que le télescope fût prêt à fonctionner à temps, pour couvrir la région des Gémeaux avant qu'elle ne tombe trop près du Soleil pour cette saison là ».

4. L'identification de Pluton. — Les calculs de Lowell ont également rendu le plus grand service lorsqu'il s'est agi d'identifier Pluton comme une nouvelle planète.

La tendance générale, après la découverte, était de considérer le nouvel astre soit comme un astéroïde, soit comme une comète périodique. On lisait, par exemple, dans le *Journal des Observateurs* ⁽¹⁾ : « Il est à remarquer que la plus inclinée et la plus excentrique des planètes, Mercure, a 7° d'inclinaison et 0,2 d'excentricité, et que les astéroïdes atteignent avec (944) Hidalgo 43° d'inclinaison et 0,65 d'excentricité. L'orbite du nouvel astre ressemblerait donc davantage à celle des astéroïdes ou des comètes périodiques qu'à celles des grosses planètes : on ne saurait encore se prononcer sur sa véritable nature. »

De même, Pickering s'empressait d'écrire : « Il faut admettre que cet objet est simplement une comète; s'il avait été annoncé après la découverte selon l'usage, nous aurions connu son orbite très complètement, mais malheureusement tel ne fut pas le cas ⁽²⁾ ». Cette citation est particulièrement intéressante parce qu'elle montre la fausse direction qu'auraient pris les calculs sur Pluton sans l'idée que c'était la planète X, de Lowell.

En fait, comme l'a si bien souligné la « circulaire » du 1^{er} mai 1930 de V. M. Slipher, ce qui a suscité les recherches qui ont abouti à l'incorporation de Pluton dans la famille des grosses planètes : celles établissant l'absence de traits cométaires, celles qui ont montré que le nouvel astre avait une orbite elliptique et une brillance cent fois supérieure à celle du plus gros astéroïde placé à la même distance, « c'est qu'il satisfaisait bien à la longitude, à l'inclinaison et à la distance au Soleil, prédites par Lowell pour sa planète X, ».

⁽¹⁾ *Journal des Observateurs*, 1930, n° 13, p. 77.

⁽²⁾ *Popular Astronomy*, 1930, p. 341. « The trans-Neptunian comet ».

Il pourrait sembler, de prime abord, qu'il n'y avait pas de mal à laisser Pluton dans la famille des comètes ou des astéroïdes. Mais qu'on se demande alors, s'il fût venu à l'esprit de quelque astronome de chercher sa masse par son action sur Neptune ou sur Uranus, si les recherches de Lowell n'avaient pas laissé l'idée fausse, mais féconde, de la valeur très considérable de cette masse. Or, nos recherches, comme celles de Nicholson et Mayall, prouvent que la masse de Pluton, sans être très grande, est suffisante pour avoir joué, et pour continuer à jouer, un certain rôle dans la mécanique du système solaire.

5. **La découverte photographique de Pluton** ⁽¹⁾. — Dès 1905, les calculs de Lowell l'ont amené à chercher la planète transneptunienne à son Observatoire de Flagstaff. Cet observatoire, fondé en vue d'investigations spéciales sur la planète Mars, se trouve dans le désert d'Arizona (U. S. A.). Il est bâti sur un haut plateau, à 7000 pieds (2300^m) d'altitude, près d'une oasis, et jouit d'un climat exceptionnel. Les conditions d'observation y sont excellentes pendant 9 mois par an !

Au début l'installation comprenait une lunette de 24 pouces. Une lentille photographique de 5 pouces, en vue des recherches sur la planète X, fut empruntée à la « Brasher Company ». Des centaines de clichés furent exposés et examinés à la loupe. Plus tard, le Dr. Lampland recommença les photographies avec un télescope de 42 pouces. Après 10 minutes d'exposition, ce télescope « prenait » des étoiles de 15^e-16^e grandeur. A ce moment un objectif photographique de 9 pouces fut employé. On a détecté 500 images d'astéroïdes, mais pas la planète transneptunienne.

(1) Les différents renseignements donnés dans ce paragraphe sont puisés aux sources suivantes :

1° G. D. DUNCANSON, *Journal of British Astronomical Association*, 1936, p. 19;

2° V. M. SLIPHER, *Popular Astronomy*, 1930, p. 227; et la « circulaire » spéciale publiée le 13 mars 1930 par l'Observatoire Lowell;

3° LAWRENCE LOWELL, *Biography of Percival Lowell*, New-York, 1935. Mac-Millan Co. (Ref. dans *Nature*, mai 1936, p. 884.)

Pourtant, après la découverte de Pluton, le Dr. Lampland a trouvé, en examinant les vieux clichés, qu'en 1915 Lowell en avait pris un qui contenait l'image de la planète, mais à ce moment-là l'Observatoire ne possédait pas un équipement suffisant pour révéler son caractère spécial.

Lowell mourut en 1916, mais selon les termes de son testament, les recherches devaient continuer et les fonds nécessaires étaient légués à l'Observatoire de Flagstaff, pour le matériel et pour le personnel.

En avril 1929 un nouveau télescope photographique a été mis en service. Il possédait un puissant mouvement d'horlogerie, un axe polaire reposant sur deux fondations très stables, ce qui permettait d'exposer des clichés pendant tout une nuit sans interruption. L'objectif de 13 pouces d'ouverture et d'environ 64 pouces de distance focale était du type « astro » à 3 éléments, il a été taillé par Lun et Sykes de Alvan Clark C^o. Le champ de bonne définition était remarquablement grand, couvrant toute l'étendue d'une plaque de 17×14 pouces. Certaines photographies étaient prises sur des clichés de 7×5 pouces pour contrôler les résultats des clichés plus grands. Une exposition d'une heure donnait 50 000 à 500 000 images stellaires. Dès la mise en service du nouveau télescope, des paires de plaques étaient prises d'une même région du ciel à quelques nuits d'intervalle, puis examinées au blink-microscop.

En janvier 1929, M. Tombaugh fut adjoint à l'Observatoire de Flagstaff en qualité d'assistant. Ses principales fonctions consistaient à prendre des clichés au nouveau télescope photographique et à les examiner au « blink-microscop ».

Les clichés exposés les 21, 23 et 29 janvier 1930, examinés le 13 février par M. Tombaugh, lui révélèrent un astre mobile nouveau. Le secret fut maintenu à l'Observatoire jusqu'à ce que la nature de l'objet fût définitivement établie. Cet astre, suivi régulièrement depuis le 19 février, passa près de δ Géminorum le 8 mars, puis son mouvement devint rétrograde. Le mouvement s'accordant d'une façon satisfaisante avec celui qu'aurait la planète de Lowell, la découverte fut annoncée le 13 mars : double anniversaire de la naissance de Lowell et de la découverte d'Uranus

par Herschell. A ce moment l'astre se trouvait à 6° de la position X_1 prédite par Lowell.

Le soin avec lequel M. Tombaugh étudia les clichés, voisins de la Voie Lactée et contenant un très grand nombre d'images analogues à Pluton, mérite un hommage particulier. Sa dextérité est particulièrement soulignée par l'échec des recherches

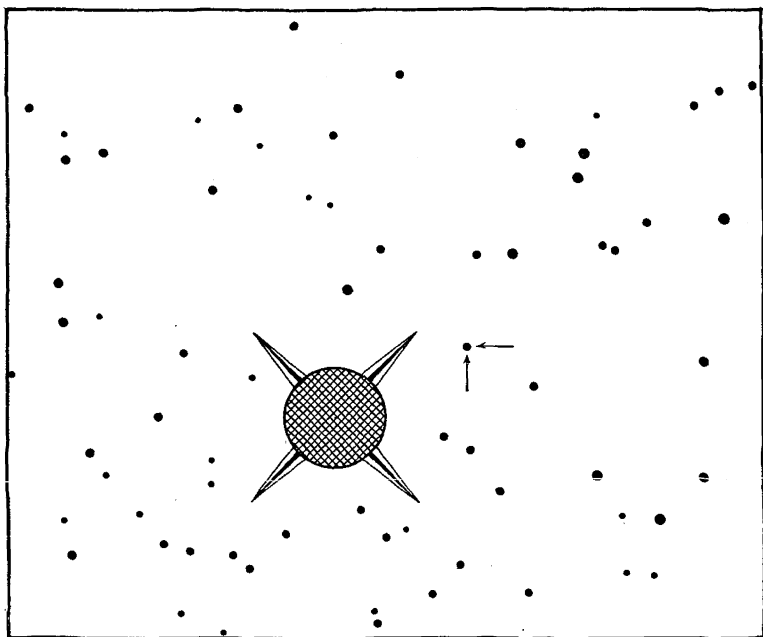


Fig. 12. — Reproduction schématique de l'image de Pluton (indiquée par des flèches) au télescope de 42 pouces de l'Observatoire Lowell prise par le Dr. Lampland, le 4 mars 1930. (D'après *Popular Astronomy*, 1930, p. 187.)

analogues entreprises au Mont Wilson en 1919 sur la demande de Pickering.

L'Observatoire Lowell a poursuivi depuis 1930 des recherches photographiques ⁽¹⁾ en vue de trouver d'autres planètes trans-

⁽¹⁾ V. M. SLIPHER, *The trans-Neptunian planet search*. (*Proceedings of the American Philosophical Society*, Vol. 79, n° 3, 30 septembre 1938, p. 435 à 440).

neptuniennes. Ces recherches sont fondées sur l'effet parallaxique du mouvement orbital de la Terre. En 1938, déjà, 35 000 000 d'étoiles ayant un mouvement propre notable, et couvrant une superficie de 65 % de la sphère céleste, étaient examinées, mais sans succès. *V. M. Slipher conclut donc qu'il ne semble pas exister de planète transneptunienne de magnitude photographique inférieure à 16 en dehors de Pluton.*

CHAPITRE IV.

CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE.

Dans le premier chapitre nous avons cherché à résumer aussi clairement que possible les principes de la méthode employée par Lowell dans la découverte mathématique de Pluton. Nous avons souligné les principaux perfectionnements apportés par Lowell à la méthode originale de Le Verrier, et nous avons cherché à profiter de l'expérience acquise par l'analyse des calculs de Lowell pour montrer de quelle manière on devrait modifier sa méthode si l'on tentait de l'appliquer à la recherche de quelque nouvel astre. Ce chapitre était destiné à familiariser le lecteur avec les notions dont il allait être constamment question dans la suite, et à servir de guide aux chercheurs qui voudraient s'initier rapidement à la méthode de Le Verrier-Lowell et aux perfectionnements dont elle paraît susceptible.

Le deuxième chapitre nous a fait pénétrer dans le mécanisme de la solution X_1 et nous a permis de suivre les liens qui rattachent le Pluton de Lowell aux résidus d'Uranus d'une part et au Pluton observé de l'autre. La plupart des auteurs qui se sont occupés de la question se sont bornés à la comparaison des éléments elliptiques de la planète X_1 avec les éléments de Pluton. Ce procédé de comparaison est un peu superficiel et il est incontestable que le Tableau XXIV et les figures 3 et 4 (p. 75) montrent la correspondance entre X_1 et Pluton d'une façon nettement plus frappante, car ils joignent à la description purement géométrique des orbites

l'élément cinématique de la distribution dans le temps. Il se dégage de cette comparaison une première impression très défavorable à la thèse du pur hasard, mais cette première impression est soumise au contrôle plus rigoureux de l'analyse dans les paragraphes suivants.

Puis nous avons porté notre attention sur les perturbations que la planète X_1 produit, selon Lowell, dans le mouvement d'Uranus. Bien que Lowell ait publié de nombreux détails, nous avons dû refaire une partie de ses calculs, car Lowell avait omis de publier les résidus *individuels* laissés par chacune de ses équations. Il résulte de la comparaison de nos calculs avec ceux de Lowell que les perturbations produites par X_1 représentent bien la transposition analytique des résidus de Gaillot, mais s'y adaptent mieux que les perturbations produites par Pluton, grâce à la *souplesse paramétrique* de X_1 et aussi grâce à la présence d'oscillations fictives. La présence des oscillations fictives exige une explication et souligne l'importance des résidus anciens, mais ne change rien à la validité de la prédiction de Lowell, puisque ces oscillations s'étendent sur une période où Uranus n'a été que très peu perturbée par Pluton. Nous avons trouvé l'explication des oscillations fictives dans la répercussion de la discontinuité des termes à longue période, au voisinage de la commensurabilité des moyens mouvements, sur le développement *limité* des perturbations *en longitude vraie*.

L'existence d'une apparente dualité dans les solutions de Lowell pouvait *a priori* paraître un peu singulière et a été souvent invoquée comme une objection à la validité de ces solutions. Nous avons montré, au contraire, que la dualité des solutions est une propriété normale du problème lorsque la planète perturbatrice s'éloigne de plus en plus de la planète perturbée. Nous avons prouvé que l'analyse avait permis à Lowell de faire un choix et que, seule la crainte de manquer la découverte physique de l'astre, lui avait fait conserver la seconde position X_2 de la planète.

Nous sommes revenu alors aux résidus anciens et nous avons montré, en utilisant les résultats de la première partie, que l'amplitude des erreurs des observations anciennes, soulignée avec tant de soin par Brown, était compensée par *l'amplitude des*

perturbations particulièrement fortes, à cause du voisinage d'une conjonction entre Uranus et Pluton (1712). Notre étude prouve que les résidus anciens d'Uranus représentaient bien, en partie, l'action de Pluton, contrairement aux affirmations de Brown, et cela montre que *l'on pouvait prévoir par la Mécanique céleste l'existence de Pluton* et même préciser les éléments de son orbite comme l'a fait Lowell. L'absence même de perturbations sensibles pendant la période 1780-1910 était révélatrice de la disposition mutuelle d'Uranus et de Pluton, c'est-à-dire de leur grand éloignement pendant cette période.

Nous avons étudié enfin la question de l'erreur probable de la solution de Lowell et nous avons montré que, si l'existence d'un astre perturbateur peut être établie avec certitude par la Mécanique céleste, *l'erreur probable* de la position théorique dépend de trop d'impondérables pour être prévisible d'avance. Comme nous l'avons rappelé, Le Verrier lui-même admettait que son Neptune pouvait se trouver à 18° du Neptune réel, et qu'il pouvait se trouver même plus loin si son excentricité était plus forte que 0,2, ce qui est exactement le cas de Pluton. Cela n'a pas empêché de découvrir Neptune à $52'$ de la position prédite par Le Verrier. Les $52'$ d'erreur de Le Verrier et les $6'$ d'erreur de Lowell reflètent à peu près exactement la précision des données dont disposaient les deux astronomes. Nous pensons que « lorsqu'un auteur a tiré des données d'une question tout ce qui y est contenu, on n'a plus rien à lui demander; et même, que plus ces données étaient incertaines, plus il était difficile d'en faire jaillir la vérité ⁽¹⁾ ».

Dans le troisième et dernier chapitre, nous avons essayé de retracer les différentes étapes de la découverte physique de Pluton. Nous avons pu y déceler une influence incontestable des calculs de Lowell : d'abord dans la persévérance des collaborateurs de Lowell qui ne peut s'expliquer que par la certitude analytique de l'existence de l'astre mystérieux; ensuite dans l'organisation des recherches, centrées sur la région indiquée par le

(1) LE VERRIER, *Comptes rendus*, 1848, vol. 27, p. 325.

calcul; enfin dans l'identification de Pluton en tant que planète transneptunienne, malgré les nombreuses déterminations erronées de son orbite qui l'avaient classé parmi les comètes ou les astéroïdes.

Nous pouvons donc conclure que la découverte de Pluton a été un résultat direct des calculs de Lowell.



TROISIÈME PARTIE.

RECHERCHES DE W. H. PICKERING.

INTRODUCTION.

L'analyse des recherches de Pickering sur la planète transneptunienne ⁽¹⁾ se complique du fait qu'il procède quelquefois de façon purement empirique et souvent sans suivre une méthode bien déterminée. Au cours des vingt années qui séparent son dernier Mémoire de celui de 1909, Pickering change complètement son interprétation des données, et cela d'une façon souvent fort arbitraire.

Cependant, outre l'idée originale de traiter le problème par une méthode graphique, le travail de Pickering présente un intérêt particulier, parce que Pickering ne s'est pas borné à l'étude des résidus d'Uranus, mais utilisa aussi ceux de Neptune et, même, tenta d'utiliser, avec moins de succès, ceux de Saturne.

Dans le Mémoire de 1909, Pickering considère seulement les résidus d'Uranus, mais s'en sert déjà pour annoncer l'apparition prochaine de perturbations sensibles de Neptune relatives à une conjonction avec la planète transneptunienne. *Cette prédiction ne tarde pas à se vérifier* et, dès 1919, Pickering tente un nouvel essai pour préciser la position de la planète, en se servant cette fois simultanément des résidus d'Uranus et de Neptune. La *proximité de Neptune à Pluton lui permet de s'affranchir de la dualité des solutions* ⁽²⁾, inhérente à l'utilisation des résidus d'Uranus

⁽¹⁾ W. H. Pickering, (1858-1938), a consacré trois Mémoires à la planète transneptunienne : *Harvard Annals*, t. 61, 1909, p. 113; *Harvard Annals*, 82, 1919, p. 49; *Popular Astronomy*, 1928, p. 143, sans parler de nombreuses publications consacrées à Pluton après 1930.

⁽²⁾ Voir p. 97.

pris isolément, et il en profite pour indiquer la nécessité de choisir la solution X_1 parmi les deux solutions de Lowell. La concordance de ses conclusions avec celles de Lowell est tout à fait remarquable, surtout si l'on considère que les deux astronomes ont utilisé des méthodes et des données différentes : la longitude prédite par Lowell était de 91° ; la longitude prédite par Pickering était de $97^\circ,8$; et celle de Pluton était, par rapport au même équinoxe, de $96^\circ,7$. *Pluton se trouvait donc seulement à $2^\circ,3$ de la moyenne des deux positions prédites par la Mécanique céleste* ⁽¹⁾. Sur la demande de Pickering, plusieurs clichés furent exposés à l'Observatoire du Mont Wilson en 1919-1920 et, comme nous l'avons déjà indiqué ⁽²⁾, les images de Pluton figuraient sur quatre clichés, mais n'ont pas été remarquées à cause du manque d'un « blink-microscop » et de l'examen d'une région trop restreinte des plaques.

Ces faits, joints à la remarquable concordance de l'orbite de Lowell avec celle de Pluton, se suffisent à eux-mêmes pour montrer la puissance des méthodes de la Mécanique céleste et le tort que les observateurs avaient eu de ne pas prendre plus au sérieux les résultats de Lowell et de Pickering.

Malheureusement Pickering lui-même avait plus confiance dans les recherches physiques de l'astre que dans ses propres calculs, de sorte que l'échec des recherches entreprises au Mont Wilson en 1919 lui avait fait douter de l'exactitude de ses conclusions. Renonçant au choix des données qui l'avait conduit à la solution exacte, il élaborait en 1928 une solution entièrement différente de celle de 1919 et beaucoup moins rigoureuse.

Nous allons étudier avec un soin particulier les solutions de 1919 et de 1928, et nous montrerons, plaidant en faveur de la Mécanique céleste *contre Pickering lui-même*, que son revirement de 1928 n'avait aucun fondement rationnel.

Remarquons, à ce propos, que lorsque l'on compare les recherches de Lau, Gaillot, Lowell et Pickering, on constate que chaque fois qu'une méthode approchée venait à remplacer une méthode rigoureuse, et chaque fois que des considérations étran-

(1) Voir fig. 21, p. 131.

(2) Voir p. 97.

gères à la Mécanique céleste venaient à s'introduire dans la discussion des résultats, les conclusions s'éloignaient de la vérité : un argument de plus contre la thèse du pur hasard.

Nous essayerons d'abord (chapitre I) de dégager des différents calculs de Pickering les idées générales dont il s'est inspiré et les méthodes empiriques dont il a fait usage. Nous analyserons ensuite (chapitre II) ses trois Mémoires, en nous plaçant au point de vue de leur contribution à la découverte de Pluton. Nous terminerons (chapitre III) en comparant les méthodes et les résultats de Pickering avec les méthodes et les résultats de Lowell.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE PICKERING.

1. **Les origines de la méthode.** — La méthode de Pickering constitue une tentative de résolution du « problème inverse des perturbations » par un procédé graphique. Idée bien tentante, quand on considère combien sont laborieux les procédés analytiques. Sir John Herschell fit les premiers pas dans cette voie. Dans les *Outlines of Astronomy* il essaya d'expliquer graphiquement les principes de la méthode analytique d'Adams et de Le Verrier.

Dès 1877, Todd fit un premier essai ⁽¹⁾ inspiré des idées de Herschell, mais son travail ne saurait se comparer à celui de Pickering qui fut le premier à développer assez complètement les conséquences théoriques et pratiques de la méthode. Voici les fondements de cette dernière.

2. **Correction des éléments elliptiques de la planète perturbée par la méthode de J. Herschell.** — Rappelons d'abord, une fois de plus, que les éléments elliptiques de la planète perturbée ne sont connus que d'une façon approximative ⁽²⁾. Les éléments ϵ, n, e, ω ,

⁽¹⁾ D. P. Todd, Preliminary account of a speculative and practical search for a trans-neptunian planet (*The american Journal of Science and Arts*, série 3, vol. XX, p. 439, 1880).

⁽²⁾ Voir p. 15 et p. 60.

adoptés dans une théorie déterminée, peuvent toujours recevoir de petites corrections $\Delta\epsilon$, Δn , Δe , $\Delta\varpi$. A ces corrections, correspond une variation $\Delta\nu$ de la longitude vraie théorique.

Les équations de condition qui sont généralement de la forme

$$\text{Perturbations} + \Delta\nu = \text{résidus},$$

peuvent se mettre sous la forme

$$\boxed{\text{Perturbations} = \text{résidus réduits},}$$

en posant

$$\text{Résidus réduits} = \text{résidus} - \Delta\nu.$$

Or, d'après les formules classiques ⁽¹⁾, la partie principale de $\Delta\nu$, quand l'excentricité e de la planète perturbée tend vers zéro, se réduit à l'expression

$$\boxed{\Delta\nu = \Delta\epsilon + t \Delta n + 2 \Delta e \sin \zeta - 2 e \Delta\varpi \cos \zeta.}$$

Supposons maintenant qu'on représente les variations des résidus réduits en fonction du temps par une courbe continue (C).

L'effet des corrections $\Delta\epsilon$, Δn se traduit par l'équation

$$\Delta\nu = \Delta\epsilon + t \Delta n,$$

c'est-à-dire par une droite arbitraire.

L'effet des corrections Δe , $\Delta\varpi$ se traduit par l'équation

$$\Delta\nu = 2 \Delta e \sin \zeta - 2 e \Delta\varpi \cos \zeta,$$

qui peut se mettre sous la forme $\Delta\nu = A \sin(\zeta + \varphi)$, avec

$$A = 2 \sqrt{(\Delta e)^2 + (e \Delta\varpi)^2} \quad \text{ct} \quad \tan \varphi = - \frac{e \Delta\varpi}{\Delta e}.$$

Cette équation est représentée par une sinusoïde, d'amplitude et de phase arbitraires, ayant une période égale à la durée de la révolution sidérale T de la planète perturbée.

(1) Cf. TISSERAND, *loc. cit.*, p. 350 et ci-dessus, p. 90, formule (5).

En d'autres termes, *notre ignorance de la valeur exacte des éléments se traduit, sur la représentation graphique des résidus, par la possibilité de choisir comme nouvelle origine des longitudes une infinité de sinusoides inclinées de pseudo-période donnée.*

Ce nouveau point de vue permet de réaliser facilement une courbe de résidus réduits ayant une allure déterminée d'avance. Il suffit de tracer sur un verre transparent un réseau de sinusoides ayant pour période T et une amplitude variable. Un déplacement du verre réalise une variation de phase φ et même, approximativement, une correction de ligne moyenne.

3. Détermination graphique de l'accélération perturbatrice par la méthode de J. Herschell. — Soient S le Soleil; P la planète troublée; P' la planète troublante; Δ la distance PP' ; r' la distance SP' ; m' la masse de P' ; f la constante de la gravitation universelle (*fig. 13*).

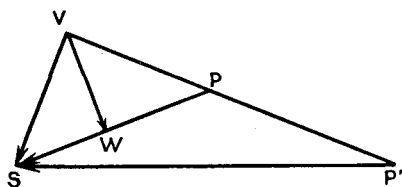


Fig. 13.

Les accélérations sont représentées par des vecteurs; l'accélération absolue $\frac{fm'}{r'^2}$ que m' communique à une masse quelconque placée en S est représentée par le vecteur $\vec{SP'}$ de longueur r' . A cette échelle, l'accélération absolue $\frac{fm'}{\Delta^2}$, que m' communique à une masse quelconque placée en P , sera représentée par le vecteur $\vec{VP'}$, V étant un point de PP' tel qu'on ait

$$VP' = \left(\frac{r'}{\Delta}\right)^2 r'.$$

Dans le mouvement elliptique troublé de P , rapporté à S ; l'accélération totale de perturbation sera représentée par le vecteur $\vec{VS}$,

résultante de l'accélération $\overrightarrow{VP'}$ et de l'accélération $\overrightarrow{P'S}$ qui correspond à la réaction du Soleil.

Décomposons le vecteur $\overrightarrow{VS}$ en une composante radiale $\overrightarrow{WS}$ et une composante « tangentielle » $\overrightarrow{VW}$ perpendiculaire au rayon vecteur.

A l'échelle de la figure, le vecteur $\overrightarrow{VW}$ représente $\gamma = \frac{fm'}{r'^2} \frac{|\overrightarrow{VW}|}{r'}$ unités d'accélération. Si l'on remplace la planète P' par une planète P'_1 de masse m'_1 , on aura, en affectant d'indice 1 les quantités correspondantes,

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{|\overrightarrow{VW}|}{|\overrightarrow{V_1W_1}|} \frac{m'}{m'_1} \left(\frac{r'_1}{r'} \right)^3.$$

Telle sera l'expression du rapport des composantes « tangentielles » des accélérations perturbatrices.

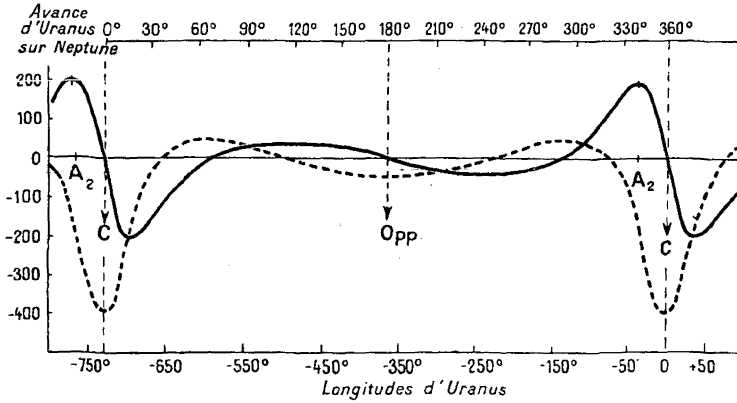


Fig. 14. — Accélération perturbatrice dans le cas Uranus-Neptune (d'après Pickering). Composante tangentielle —. Composante radiale -----.
Les longitudes d'Uranus sont comptées à partir de la conjonction, C.

Il suffit d'envisager une suite de configurations mutuelles de P et de P' pour déterminer un ensemble de valeurs de l'accélération perturbatrice permettant la représentation graphique de celle-ci

sous la forme d'une courbe continue. Pickering obtient ainsi des courbes, comme celles de la figure 14, qui représente *l'action perturbatrice* de Neptune sur Uranus en fonction du temps : force perturbatrice ou accélération perturbatrice, puisque l'une est égale à l'autre, à un facteur constant près.

4. La date du maximum des perturbations. — Repère A. — Si les principaux « accidents » de la courbe des résidus de P sont dus aux perturbations subies par P, ils doivent être liés aux configurations mutuelles de P avec une ou plusieurs planètes perturbatrices.

La longitude de P, correspondant à un certain type de maximum (ou de minimum) des résidus, est considérée, par Pickering, comme un repère et désignée par A.

A la date du maximum, la planète perturbatrice se trouve à une certaine longitude L, généralement différente de la longitude A de la planète perturbée. Le problème revient à déterminer d'abord A, puis la différence $L - A$, d'où L.

Pour définir A, Pickering emploie deux procédés distincts, selon la période synodique du couple envisagé.

1^o Quand la période synodique est plus courte que l'intervalle des observations continues, la courbe des résidus présente au moins deux maxima ou deux minima analogues : l'intervalle qui les sépare n'est autre que la période synodique, puisque dans l'hypothèse des orbites circulaires au même « effet observable » doit correspondre la même configuration mutuelle. *La connaissance de la période synodique donne la distance de la planète inconnue, et permet de tracer une courbe de la composante tangentielle de la force perturbatrice.* Pickering pose en principe que « la courbe des déplacements (résidus ou perturbations), doit ressembler à la courbe des forces » (1), et surtout à la courbe de la composante tangentielle (l'effet de la composante radiale ne faisant que renforcer celui de la composante tangentielle). On modifie, ensuite, la courbe des résidus, au moyen de la sinusoïde inclinée, jusqu'à la réalisation d'une concordance d'allure

(1) *Popular Astronomy*, 1928, p. 148.

entre la courbe des résidus et celle des forces. On prend, enfin, comme repère A la longitude du maximum qui précède la conjonction hypothétique des deux planètes ⁽¹⁾.

2° Quand la période synodique est nettement plus longue que l'intervalle des observations (couples Uranus-Neptune; Neptune-planète O ⁽²⁾), on ne peut plus procéder de même et l'on prend comme repère A « celui des maxima qui est suivi par une chute brusque et profonde ⁽³⁾ ». On se sert au préalable de la sinusoïde pour accentuer la courbure et préciser davantage la position de maximum.

5. La correction B. — Connaissant la longitude A il nous reste à trouver la correction L — A. La figure 15 représente la configu-

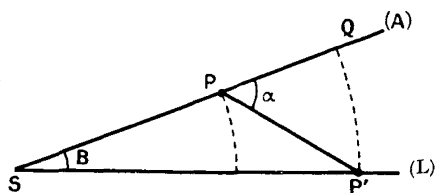


Fig. 15.

ration mutuelle des deux planètes P et P' au moment du maximum de perturbation. La longitude de P vaut A, celle de P' vaut L. Soit PQ le prolongement du vecteur SP. Posons $\alpha = \widehat{QPP'}$.

Dans une première approximation, Pickering admet que l'angle α est le même, quelles que soient les distances SP et SP', et quelles que soient les masses de P et de P'.

Connaissant la valeur de l'angle $B = \widehat{PSP'}$ qui vaut 8°,2 dans le cas Uranus-Neptune, il est en mesure de calculer la valeur numérique de la « constante » α , et il trouve que $\alpha = 22^\circ,1$.

Réciproquement, la connaissance de α va lui permettre de calculer l'angle B, en tenant compte des valeurs nouvelles des

⁽¹⁾ C'est-à-dire la longitude du point A₂ de la figure 14.

⁽²⁾ C'est ainsi que Pickering désigne sa planète transneptunienne.

⁽³⁾ *Popular Astronomy*, 1928, p. 147, et *Harvard Annals*, 1919, t. 82, p. 56.

distances moyennes SP et SP'. Il suffit de résoudre l'équation

$$\sin(\alpha - B) = \frac{a}{a'} \sin \alpha$$

par rapport à B.

L'angle $(-B)$ représente une première approximation de la correction $L - A$. Cependant Pickering trouve qu'on peut améliorer la valeur de $L - A$ par une dernière correction qu'il appelle C.

6. **La correction C.** — En étudiant les perturbations de Saturne par Neptune (résidus de Bouvard), il trouve que, dans ce cas, $A = 350^\circ$ en 1848,5; la valeur théorique de B est égale à $15^\circ,2$; la longitude L de Neptune en 1848,5 était de $331^\circ,0$. L'identité $L = A - B - C$ sera satisfaite si l'on prend $C = 3^\circ,8$, soit 4° en chiffres ronds.

Pickering considère C comme une fonction linéaire du rapport des distances moyennes $\frac{a}{a'}$ des deux planètes P et P'. Puisque $C = 0^\circ$ pour le système Uranus-Neptune $\left(\frac{a}{a'} = 0,64\right)$; et que $C = 4^\circ$ pour le système Saturne-Neptune $\left(\frac{a}{a'} = 0,32\right)$, on trouve immédiatement

$$C = 8^\circ - 12^\circ,5 \frac{a}{a'}$$

D'ailleurs dans son dernier mémoire⁽¹⁾ Pickering néglige complètement la correction C.

7. **Calcul de la masse et de la magnitude.** — Pickering admet⁽²⁾ que pendant un intervalle de temps τ suffisamment court après la conjonction, cinq ans par exemple, on peut négliger les variations de la composante radiale de l'accélération perturbatrice et considérer la composante tangentielle comme proportionnelle au temps, c'est-à-dire de la forme $\gamma = \gamma_0 t$.

⁽¹⁾ *Popular Astronomy*, 1928, p. 159.

⁽²⁾ *Harvard Annals*, 1909, t. 61, p. 147.

Soit ν la vitesse de variation de la perturbation en longitude à l'instant τ .

On a

$$\nu = \int_0^\tau \gamma dt = \frac{\gamma_0 \tau^2}{2} = (\gamma \text{ à l'instant } \tau) \frac{\tau}{2}.$$

Si nous remplaçons P' par P'_1 , on aura

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{\gamma \text{ à l'instant } \tau}{\gamma_1 \text{ à l'instant } \tau}.$$

Or, ν représente aussi *la vitesse de variation des résidus* attribués aux perturbations produites par P' . On peut aisément déterminer la valeur de ν sur *la courbe des résidus*.

Pickering admet ⁽¹⁾, d'autre part, que l'on a

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{|\overrightarrow{VW}|}{|\overrightarrow{V_1W_1}|} \frac{m'}{m'_1} \frac{r'_1}{r'}.$$

Il en tire immédiatement

$$\frac{m'}{m'_1} = \frac{\nu}{\nu_1} \frac{|\overrightarrow{V_1W_1}|}{|\overrightarrow{VW}|} \frac{a'}{a'_1},$$

puisque $a' = r'$ et $a'_1 = r'_1$ pour les orbites supposées circulaires.

Le rapport $\frac{\nu}{\nu_1}$ sera donné par la courbe des résidus; $\frac{|\overrightarrow{V_1W_1}|}{|\overrightarrow{VW}|}$ sera déterminé par la méthode graphique de Herschell; $\frac{a'}{a'_1}$ sera calculé au moyen de la période synodique. Connaissant m'_1 on pourra calculer m' par la formule ci-dessus.

Pour passer de la masse à la magnitude, Pickering fait, selon l'usage, des hypothèses sur la densité et l'albedo basées sur les cas extrêmes déjà observés dans le système solaire.

⁽¹⁾ Signalons immédiatement que cette formule est inexacte. On a vu (p. 118), que l'on doit prendre le cube $\left(\frac{r'_1}{r'}\right)^3$. De même, dans la formule qui donne $\frac{m'}{m'_1}$, il faut prendre le cube $\left(\frac{a'}{a'_1}\right)^3$.

CHAPITRE II.

ANALYSE DES SOLUTIONS DE PICKERING.

1. **Analyse du Mémoire de 1909.** — Dans son premier Mémoire, Pickering considère d'abord les perturbations subies par Uranus et il représente graphiquement les résidus non réduits de Le Verrier (¹). Le graphique de Pickering est reproduit ci-dessous (*fig. 16*). Il remarque alors que « le trait le plus caracté-

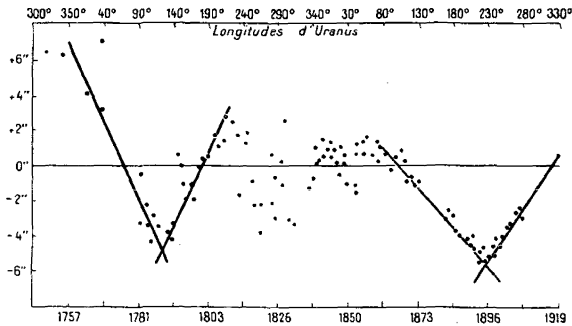


Fig. 16. — Résidus d'Uranus bruts (théorie de Le Verrier).

ristique de la figure est certes le minimum de 1895 et ensuite un autre minimum qui se place vers 1788 » (²). D'où la période synodique du couple Uranus-planète O : 108,4 ans et la distance moyenne de O : 51,9 unités. Il trace ensuite la courbe des forces tangentielles de perturbation et « revise » la courbe des résidus au moyen de la sinusoïde inclinée, de façon à rendre l'analogie aussi serrée que possible. Il arrive ainsi à la courbe des résidus réduits reproduite ci-après (*fig. 17*).

La longitude du maximum principal, indiqué sur la figure 17 par une croix, est estimée approximativement à 90° : Uranus se trouvait là en 1865,5, c'est le repère A correspondant.

(¹) Il s'agit de la théorie de Le Verrier publiée en 1873.

(²) *Loc. cit.*, p. 142.

Les corrections B et C relatives à la distance de 51,9 sont

$$B = 14^{\circ},0, \quad C = 4^{\circ},0.$$

Ainsi la longitude théorique de la planète O, selon Pickering, était de 72° en 1865,5. Or, c'est en 1897,6 que la longitude de Pluton était de 72° ; en 1865,5 la longitude de Pluton n'était que de $42^{\circ},5$.

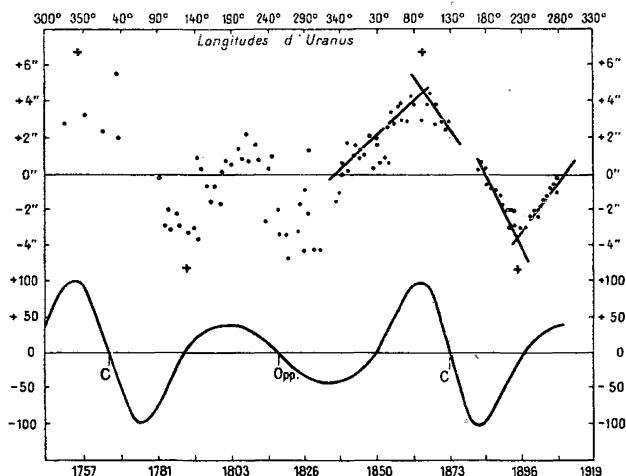


Fig. 17. — Résidus d'Uranus réduits, ajustés à la courbe de la composante tangentielle de l'accélération perturbatrice.

L'erreur exprimée en temps était donc de 32 ans; exprimée en longitude, l'erreur était de $29^{\circ},5$.

On remarquera cependant que la période synodique du couple Uranus-Pluton n'est pas une quantité constante, qu'elle varie de siècle en siècle en raison de l'excentricité de l'orbite de Pluton. La période synodique voisine de l'intervalle étudié est de 111 ans, entre les oppositions de 1791 et de 1902. D'autre part le rayon vecteur de Pluton varie de 38,8 à 46,9 entre 1790 et 1900, en passant par un maximum de 49,3 vers 1865,5. Ainsi l'erreur de Pickering, en ce qui concerne la distance, n'est pas aussi grossière qu'on pourrait se l'imaginer d'après la distance moyenne, 39,6, de Pluton ⁽¹⁾.

(1) Voir Tableau XXIV, p. 76.

Remarquons aussi que la courbe « des perturbations réduites absolues » produites par Pluton présente un minimum assez nettement marqué vers 1780-1790 et un maximum vers 1860-1863, comme le montre la figure 18 (1).

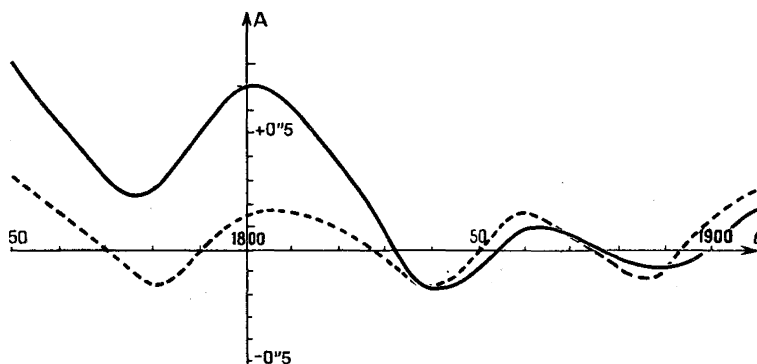


Fig. 18. — Perturbations réduites absolues d'Uranus par Pluton ($m' = 1 T$).

—— Solution L_1 .

----- Solution G_1 .

Malheureusement l'oscillation correspondante n'est que de $0'',3$ environ, pour $m' = 1 T$, alors qu'elle atteint presque $6'',0$ dans les résidus de Le Verrier et y subsiste, en partie, même en tenant compte de l'action de Pluton.

Il serait toutefois injuste d'attacher une importance excessive aux erreurs du premier Mémoire de Pickering, car il considérait lui-même les indications fournies par Uranus au moyen de sa méthode comme insuffisantes. *Il s'en est servi surtout pour prédire, dès 1909, une conjonction entre la planète O et Neptune.* Il prévoyait que cette conjonction devait se traduire par un maximum bien marqué des résidus de Neptune. « Quatre ou cinq ans après le prochain maximum des déviations de Neptune, que nous attendons pour 1924, celles-ci nous permettront de calculer la longitude de O avec beaucoup plus de précision qu'on ne peut le faire actuellement (2). »

(1) C'est un agrandissement de la courbe déjà donnée p. 98.

(2) *Harvard Annals*, t. 61, p. 160.

Cette prévision se réalisait peu après. Seulement les résidus de Neptune commençaient à diminuer d'une façon systématique, dès 1910-1915, c'est-à-dire un peu avant la date prévue par Pickering.

Pour apprécier la portée de ce succès, il faut se rappeler que d'après tous les astronomes de l'époque, y compris Lowell et Gaillot, Neptune ne pouvait être d'aucun secours pour la recherche de la planète transneptunienne ⁽¹⁾. On faisait valoir l'absence de résidus marqués de Neptune, que l'on interprétait par le rejet des perturbations éventuelles sur les corrections des éléments. *Pickering fut le seul à prévoir le phénomène, à suivre son développement et à s'en servir avec succès dès 1919, pour prédire la longitude de Pluton.*

Passons maintenant à l'examen du Mémoire de 1919, qui est particulièrement intéressant à tous les points de vue.

2. Analyse du Mémoire de 1919. — Dans le Mémoire de 1919 Pickering considère les résidus bruts de la théorie de Neptune de Newcomb et les transforme en résidus réduits, au moyen de la sinusoïde inclinée. Nous reproduisons ci-contre (*fig. 19 et 20*) les courbes de Pickering, empruntées, pour éviter des répétitions, au Mémoire de 1928, mais qui sont, dans l'ensemble, très voisines de celles publiées en 1919. Sur les courbes de 1919, au point de courbure maximum des résidus bruts, point qui devient le maximum des résidus réduits, la longitude A de Neptune était de $107^{\circ},9$ et Neptune s'y trouvait en 1910,0. A ce repère A Pickering retranche les corrections B et C qui résultent de la distance $a' = 51,9$ déterminée en 1909 au moyen des résidus d'Uranus. Il prend donc

$$B = 9^{\circ},4, \quad C = 1^{\circ},0$$

et après avoir averti que la date, 1910,0, du maximum n'est connue qu'à cinq ans près (d'où $6^{\circ},5$ d'incertitude sur la longitude finale) ⁽²⁾, il obtient une première conclusion, avec l'hypothèse

⁽¹⁾ Cf. LOWELL, *loc. cit.*, p. 7, § 8; GAILLOT, *Comptes rendus*, 1909, t. 148, p. 754.

⁽²⁾ Si le maximum a lieu en 1905 par exemple, A est diminué de $11^{\circ},5$ et L d'autant, seulement, par ailleurs, en 5 ans O avance de 5° environ; de sorte que la longitude en 1910 n'est diminuée que de $6^{\circ},5$.

que l'orbite de la planète O est circulaire :

Longitude de O en 1910,0 = $97^{\circ},5 \pm 6^{\circ},5$ (orbite de O circulaire).

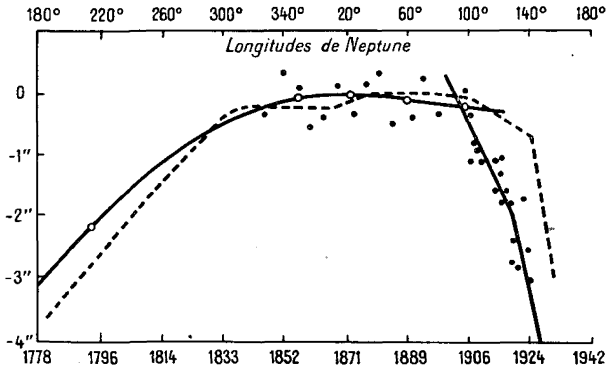


Fig. 19. — Résidus de Neptune bruts (théorie de Newcomb).

(En pointillé : l'allure des résidus prédite par Pickering dès 1908.)

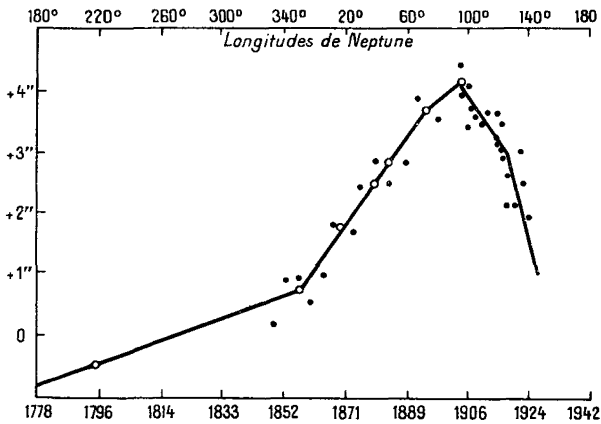


Fig. 20. — Résidus de Neptune réduits (d'après Pickering).

En 1910,0 la longitude de Pluton était de $85^{\circ},0$, on voit donc que cette fois la longitude prédite est plus exacte : l'erreur n'est que de $12^{\circ},5$.

Remarquons ensuite que le nombre important en 1919 n'était pas la longitude de O en 1910, mais sa longitude en 1920. Pickering passe de 1910,0 à 1920,0 avec le moyen mouvement de $0^{\circ},964$ par an correspondant à la distance $a = 51,9$. Il trouve

Longitude de O en 1920,0 = $107^{\circ},1 \pm 6^{\circ},5$ (orbite de O circulaire)

avec une erreur de $11^{\circ},3$ par rapport à la position réelle de Pluton.

Pickering reprend ensuite les calculs avec l'hypothèse que l'orbite de la planète O est elliptique. Cette hypothèse, que suggéraient déjà les travaux de Lowell (1915), était également nécessaire pour lever la contradiction entre le moyen mouvement de $0^{\circ},964$ déduit de l'étude d'Uranus seule et le moyen mouvement de $0^{\circ},561$ déduit des dates trouvées pour les conjonctions de O avec Uranus et Neptune.

Le problème se ramenait à la détermination d'une ellipse par trois observations. Problème classique, qui peut être résolu de bien de manières par l'analyse. *Malheureusement Pickering n'indique nulle part la méthode qu'il a employée*, et il est probable, si l'on considère la façon dont il procède partout ailleurs, qu'il a trouvé la solution par une suite de tâtonnements empiriques. Il semble, du reste, que dans cette partie du travail Pickering ait procédé par approximations successives, et comme les détails intermédiaires du calcul ne sont pas publiés, l'origine de certaines transformations reste un peu obscure.

Considérant d'abord la position déterminée par les résidus d'Uranus en 1865,5, et dont la valeur avait été fixée, comme on l'a vu, à $72^{\circ},0$, Pickering remplace ⁽¹⁾ ce nombre par $69^{\circ},3$, ce qui, avec les $0^{\circ},8$ de précession, lui donne $70^{\circ},1$ comme longitude de O en 1865,5, par rapport à l'équinoxe moyen de 1920,0.

Il admet ensuite que la longitude de O en 1757,1 était de $339^{\circ},6$ ⁽²⁾ par rapport à l'équinoxe de 1920,0. Si le choix de la date s'explique par la valeur admise pour la période synodique ⁽³⁾, le

(1) Probablement à cause des modifications dans les corrections B et C dues à une nouvelle approximation dans la distance. *Loc. cit.*, table III, p. 56.

(2) La longitude correspondante de Pluton : $261^{\circ},5$.

(3) $1865,5 - 1757,1 = 108,4$.

nombre $339^{\circ},6$ doit correspondre à un changement, non indiqué, dans la distance provisoire de O.

Enfin la longitude de O en 1910,0 est fixée à $92^{\circ},8$ à la suite d'un calcul préliminaire non reproduit. Pickering indique seulement que la distance trouvée par une première approximation est de 68,4 unités : il en résulte que $B = 12^{\circ},6$, $C = 2^{\circ},5$, ce qui conduit bien, sans autre changement, à la valeur $92^{\circ},8$.

Pickering montre alors que les trois valeurs précédentes de la longitude sont satisfaites par une ellipse ayant les éléments suivants :

$\alpha' = 55,1,$	$e' = 0,31,$	$\varpi' = 280^{\circ};$	passage au périhélie : 1720,0.
-------------------	--------------	--------------------------	--------------------------------

Ces valeurs sont à rapprocher de celles de Pluton :

$\alpha' = 39,6,$	$e' = 0,246,$	$\varpi' = 222^{\circ};$	passage au périhélie : 1740,0.
-------------------	---------------	--------------------------	--------------------------------

Bien que les éléments diffèrent considérablement, les positions en 1920,0 concordent remarquablement. En effet, Pickering déduit des éléments ci-dessus la longitude suivante :

Longitude de O en 1920,0 = $97^{\circ},8$	(orbite de O elliptique).
---	---------------------------

Or, comme la longitude correspondante de Pluton est de $96^{\circ},7$, l'erreur n'est que de $1^{\circ},1$.

Le résultat précédent représente le point culminant des travaux de Pickering. Non seulement la longitude prédite est remarquablement exacte, mais aussi Pickering a l'excellente idée d'étayer ses conclusions par la comparaison de l'ensemble des autres prédictions sérieuses.

Pickering réduit les longitudes proposées pour la planète trans-neptunienne, par différents auteurs, à l'époque 1920,0 et les représente par un tableau et un diagramme, dont nous donnons des extraits dans le Tableau XXXI et la figure 21, en nous bornant aux positions de Lau, Gaillot, Pickering et Lowell. Nous y avons ajouté, à titre d'indication, les renseignements relatifs à Pluton, et aux conclusions de Pickering de 1919 dans l'hypothèse d'une orbite circulaire (O_c) ou elliptique (O_e).

TABLEAU XXXI.

Positions théoriques de la planète transneptunienne en 1920,0.

Auteur	Date de publication	α'	m'	Longitude
Lau A.....	1899	46	9T	$117^\circ + 180^\circ$
» B.....	»	75	48	167°
Pickering.....	1909	52	2	125
Gaillot A.....	1909	44	5	$116^\circ + 180^\circ$
» B.....	»	66	24	121
Lowell X ₁	1913	43	7	91
» X ₂	»	45	8	$89^\circ + 180^\circ$
Pickering O _c	1919	52	2	107
» O _e	»	55	2	98
Pluton (position réelle).....		$r'_{1920} = 43,4$	1?	96,7

Voici comment Pickering interprète les résultats ⁽¹⁾ : « Lau et Gaillot ont trouvé que les longitudes voisines de 270° étaient les plus probables. *L'auteur trouve que les longitudes voisines de 90° s'accordent mieux avec les faits....* Si nous ajoutons 180° aux résultats de Lau et de Gaillot et si, de plus, nous considérons la solution la plus voisine de Lowell, *nous constatons que la plupart des chercheurs placent la planète inconnue dans une région du ciel relativement restreinte, d'une étendue inférieure à 20 degrés.* »

On pourrait remarquer de plus que les différentes solutions se distinguent surtout par l'hypothèse d'une orbite circulaire ou l'hypothèse d'une orbite elliptique : les deux espèces de solutions forment deux groupes homogènes, mais distincts, et le second couvre une étendue inférieure à 6° .

Nous arrivons ainsi à une conclusion d'une importance capitale : Pickering a su réaliser l'accord de ses travaux, fondés sur les résidus de Neptune, avec ceux de Lau, Gaillot,

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 51 ; Au sujet de la dualité des solutions voir p. 94.

et Lowell, fondés sur les résidus d'Uranus. Ces différents travaux indiquaient une région du ciel très restreinte et c'est dans cette région que Pluton se trouvait effectivement.

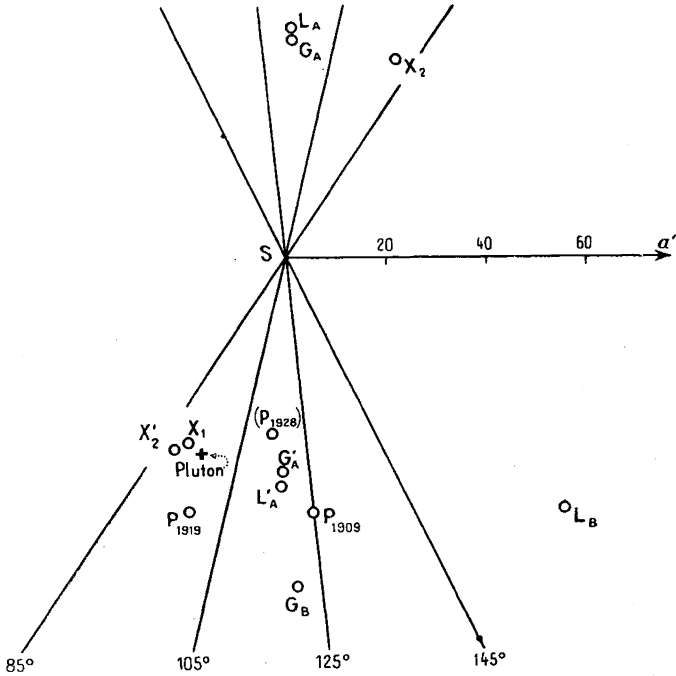


Fig. 21. — Positions de Pluton (+) et des planètes théoriques en 1920,0.

X_1, X_2 , positions de Lowell; X'_1 , symétrique de X_2 .

$P_{1909}, P_{1919}, (P_{1928})$, positions de Pickering.

L_A, L_B, G_A, G_B , positions de Lau et de Gaillot; L'_A, G'_A , symétriques de L_A, G_A .

Il est donc incontestable que, dès 1919, le problème de la planète transneptunienne avait été résolu, en première approximation, grâce à la Mécanique céleste.

Chacun des Mémoires de Pickering fut suivi d'une série de recherches photographiques. Ces recherches, plus ou moins étendues, ont failli aboutir en 1919, puisque quatre clichés, parmi ceux pris au Mont Wilson par Humason, contenaient des images de Pluton. Malheureusement ce n'est qu'après la découverte de

Pluton, à l'Observatoire Lowell, et après le calcul de son orbite, qu'on s'en est aperçu.

La moyenne de ces quatre positions réduite à 1930,0 donnait : $\alpha = 6^h 29^m 03^s,8$ $\delta = +19^\circ 21' 56''$ et $t_m = 29,0667$ déc. 1919 ⁽¹⁾. Or le Mémoire de 1919 avait prédit par rapport à $\gamma_{1920,0}$: $\alpha = 6^h 34^m$ $\delta = +23^\circ$. En corrigeant de la précession on voit que

$\Delta\alpha \approx 5^m$	et	$\Delta\delta \approx 3^\circ,5$.
----------------------------	----	------------------------------------

La zone de l'examen critique des plaques ayant été restreinte à 2° de part et d'autre de l'écliptique ⁽²⁾, on aperçoit immédiatement la raison de l'échec des recherches de 1919. Peut-être l'absence d'un « blink-microscop » y était-elle aussi pour quelque chose. L'exposition au contraire était suffisante : les quatre images étaient de magnitude 15 et les étoiles de magnitude 17 étaient encore nettes.

3. Analyse du Mémoire de 1928. — Après avoir reproduit côte à côte les résidus modernes de Le Verrier, de Gaillot et ceux qu'il avait obtenus en 1909 par une réduction graphique de ceux de Le Verrier, Pickering remarque que l'on constate sur ces courbes (reproduites ici : *fig. 22*) « deux maxima appréciables à chaque extrémité et deux autres moins marqués entre ces deux-là » ⁽³⁾.

« Considérons d'abord, dit-il, le dernier maximum. En réalité, il arrive un peu après 1906, mais comme Uranus était à cette date à la longitude de 277° , presque en opposition avec la position de Neptune en 1904, il est clair qu'une seule et même planète ne peut avoir été en conjonction avec Uranus et Neptune à la fois. Il est vrai, cependant, comme nous l'avons déjà expliqué, qu'une perturbation faible arrive quand les planètes sont presque en opposition, bien qu'un tel effet soit généralement petit. Il est donc possible que O ait, au moins, contribué au maximum de 1906. »

« Le deuxième maximum que nous allons considérer est celui

⁽¹⁾ *Popular Astronomy*, 1930, p. 416.

⁽²⁾ *Cf. Monthly Notices*, 1931, p. 380.

⁽³⁾ *Popular Astronomy*, 1928, p. 153.

de 1867 ⁽¹⁾. On le remarque sur les trois courbes de la figure 22 et, selon Gaillot, c'est un des mieux marqués. Il n'est donc pas étonnant que Gaillot et Lowell aient pensé qu'il était de première importance pour la détection de la planète inconnue.

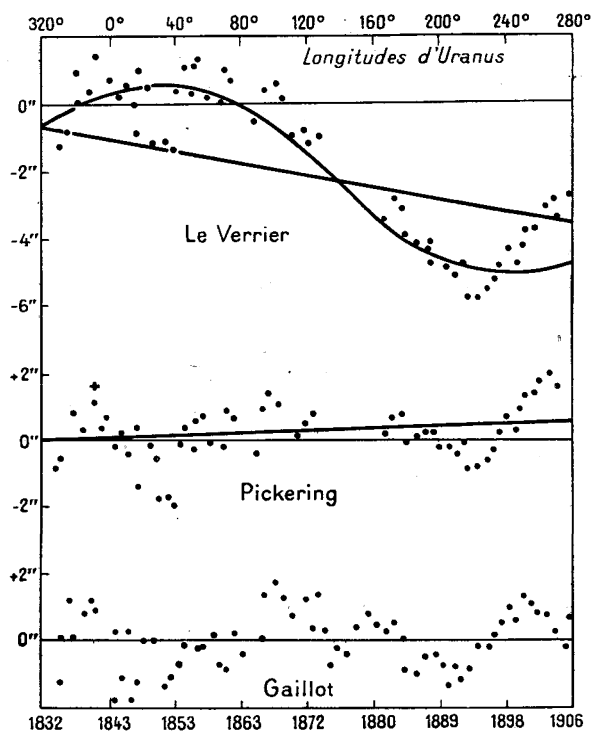


Fig. 22. — Résidus d'Uranus. En haut : résidus bruts de Le Verrier et la sinusoïde de réduction de Pickering; au milieu : résidus de Le Verrier réduits par Pickering; en bas : résidus bruts de Gaillot.

Moi aussi j'ai fait la même erreur ⁽²⁾, mais pour une raison différente. J'ai été mis sur la fausse voie par une observation plus ancienne, et erronée, d'Uranus, qui, avec la perturbation de 1867, donnait une période plausible pour la planète inconnue.

⁽¹⁾ C'est-à-dire celui qui, dans les Mémoires antérieurs, était placé en 1865,5 et qui jouait alors un rôle essentiel.

⁽²⁾ C'est nous qui soulignons ici et dans toutes les citations de Pickering.

Sur ma courbe (fig. 22), ce maximum est le troisième en importance. Sa longitude est de 101° Si Uranus avait été en conjonction avec O en 1867 et que Neptune n'avait été perturbée qu'à la longitude de 95° en 1904, il est évident que pendant ces 37 ans, ou bien O a rétrogradé de 6° , ou que, du moins, en admettant quelques petites corrections, elle est restée fixe. Ce maximum ne donne donc guère de résultat plausible. » Aussi Pickering abandonne-t-il le maximum de 1867. Or, nous allons montrer que la stricte application de la Mécanique céleste n'exigeait nullement cet abandon.

1° *Il n'est nulle part question chez Gaillot ou Lowell du maximum de 1867, pour la raison très simple que voici : leur méthode purement analytique ne suppose aucune sélection préalable des matériaux. Ce soin est laissé aux équations elles-mêmes.*

2° *Les raisons qui, en 1909 et en 1919, avaient fait choisir à Pickering la date de 1865,5 comme repère fondamental, dérivait de la sélection des minima de 1895 et de 1788 pour définir la période synodique de O avec Uranus. Or, depuis 1909, aucun fait nouveau n'est venu montrer le caractère erroné du minimum de 1788.*

La seule raison d'abandonner le minimum de 1788 serait son absence dans les résidus de Gaillot. Mais, d'une part, Pickering avait à sa disposition ces résidus probablement dès 1909 et sûrement en 1919 et, d'autre part, Pickering se défend d'avoir emprunté quoi que ce soit aux résidus en question.

3° *Il est arbitraire et inexact d'affirmer que l'acceptation du maximum de 1867 entraîne la rétrogradation de O, ou du moins son immobilité. Ce maximum, ne l'oublions pas, joue un rôle essentiel dans les recherches de 1909-1919 et Pickering n'y avait point remarqué cette grave difficulté qui l'arrête maintenant. Nous avons vu ⁽¹⁾, au contraire, qu'en 1865,5, la planète O était, par rapport à $\gamma_{1920,0}$ à la longitude $69^{\circ},3$ et en 1910,0 à la longitude $92^{\circ},8$. Le fait d'avoir produit le maximum de 1867 ne l'empêchait pas, alors, d'avancer de $23^{\circ},5$ en 44,5 ans.*

(1) Voir ci-dessus p. 128.

L'avance se réduit bien à $12^{\circ},6$ en 39 ans, si l'on remplace la date du maximum de Neptune par 1904,2, mais nous sommes encore loin d'une planète stationnaire. On peut remarquer, tout au plus, que les moyens mouvements sont incompatibles avec l'hypothèse d'une orbite circulaire, mais cette difficulté a déjà été résolue en remplaçant l'orbite circulaire par une orbite elliptique.

La confusion provient de ce que Pickering raisonne maintenant comme si la déviation maximum correspondait à la date de la conjonction, c'est-à-dire comme si, à la date du maximum, la longitude de O était celle d'Uranus ou de Neptune. Or, cette idée est inexacte et contraire à la théorie générale de Pickering lui-même.

Ainsi l'abandon du maximum de 1867 n'était point nécessaire. Il était même d'autant moins légitime que son *invariance* vis-à-vis des changements multiples apportés par Gaillot à la théorie de Le Verrier augmentait ses chances de représenter une perturbation plutôt qu'une erreur systématique.

Mais revenons à l'exposé de Pickering.

« Considérons, dit-il, le maximum de 1841 lorsque la longitude d'Uranus était de 353° . On reconnaît celui-ci sur toutes les courbes de la figure.22, bien que chez Gaillot on observe un point légèrement plus élevé 3 ans plus tôt. Si telle est la perturbation réelle, O dut faire environ 102° en 63 ans, ce qui correspond à un moyen mouvement de $1^{\circ},6$ par an. Puisque Uranus fait $4^{\circ},3$ par an, et Neptune $2^{\circ},2$ par an, ce résultat paraît plausible.

Le deuxième maximum ancien possible, celui de 1828, donnerait une vitesse de $2^{\circ},1$ par an, ce qui, comme pour le maximum de 1867, est peu probable. Les maxima plus anciens donneraient des vitesses encore plus grandes.

Donc, de toute façon, le maximum réel doit se situer entre 1828 et 1867. *Par conséquent, de tous les maxima possibles, trouvés soit par Gaillot, soit par moi-même, seul celui de 1841,7, à la longitude de 353° , apparaît comme probable.* D'ailleurs, sur les deux courbes (Gaillot-Pickering, fig. 22), le maximum est suivi d'un brusque minimum, signe caractéristique de conjonction de deux planètes. »

Ici encore nous plaiderons pour la Mécanique céleste contre Pickering.

1° Remarquons d'abord que sur les courbes de Pickering le maximum de 1841 est à peine perceptible, et que, s'il y en a un chez Gaillot, ou plus précisément sur la courbe de Lowell tracée à travers les résidus de Gaillot, la période d'oscillation, inférieure à 10 ans, est nettement trop faible pour correspondre à une perturbation (fig. 23).

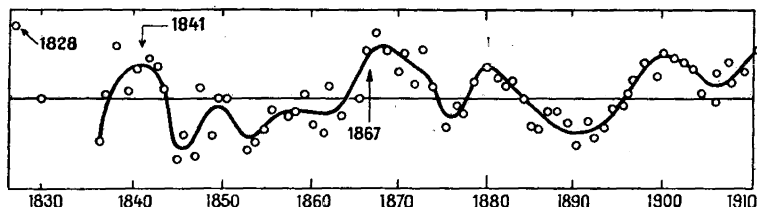


Fig. 23. — Résidus de Gaillot interpolés par Lowell.

2° Ensuite, nous savons, *a posteriori*, que les perturbations réduites produites par Pluton présentent bien un minimum en 1782, et un autre en 1888, ainsi qu'un maximum vers 1860, mais il n'y a aucun maximum en 1841, au contraire, on remarque plutôt un léger minimum (¹).

Par conséquent, on ne s'étonnera pas que Pickering ait trouvé en 1928 une position beaucoup plus inexacte qu'en 1919, et cela malgré l'amélioration des données fournies par Neptune.

Avec une orbite circulaire, basée sur les seules perturbations d'Uranus et de Neptune, Pickering trouve, pour 1928,0, une longitude de $132^{\circ},4$ avec $a' = 35,2$. Considérant ensuite les résidus de Saturne (¹), il y découvre trois maxima importants, et il trace, en conséquence, une orbite elliptique. Les erreurs éventuelles de cette dernière partie du calcul n'ont guère d'importance puisque la longitude correspondante, pour 1928,0, est à peine modifiée : $131^{\circ},4$ au lieu de $132^{\circ},4$. Les rayons vecteurs eux-mêmes diffèrent à peine de 2 ou 3 unités dans les deux orbites pour la période 1900-1940.

Ainsi, comme la longitude de Pluton était de $106^{\circ},1$ en 1928,0, l'erreur était de 25° environ.

(¹) Voir la figure 18, p. 125.

Les éléments de l'ellipse de Pickering sont :

$$\alpha' = 30,1, \quad T = 164^{\text{ans}}, 8, \quad e' = 0,195, \quad \varpi' = 252^{\circ}, 1; \quad \text{pass. au périh. : } 1809,0.$$

Ces valeurs sont à rapprocher de celles de Pluton :

$$\alpha' = 39,6, \quad T = 249^{\text{ans}}, 0, \quad e' = 0,246, \quad \varpi' = 222^{\circ}, 3; \quad \text{pass. au périh. : } 1740,0.$$

La seule particularité exacte de cette orbite c'est qu'elle prévoit l'interpénétration des orbites de O et de Neptune, qui est réelle, mais qui est due en fait à la grande excentricité de Pluton, et non, comme chez Pickering, à une distance moyenne arbitrairement petite et égale à celle de Neptune.

4. Les déterminations de l'inclinaison et de la longitude du nœud. — La question de la latitude ⁽¹⁾ évolue, à travers les trois Mémoires de Pickering, comme celle de la longitude : indécision en 1909, prévision exacte en 1919, conclusion très erronée en 1928.

On sait que pour Pluton l'inclinaison $i = 17^{\circ}$ et la longitude du nœud $\Omega = 109^{\circ}$. Or, le Mémoire de 1919 prévoit $i = 15^{\circ} \pm 5^{\circ}$ et $\Omega = 100^{\circ} \pm 5^{\circ}$. Ces résultats sont tirés des résidus en déclinaison de Neptune représentés ci-dessous (fig. 24) et vaguement

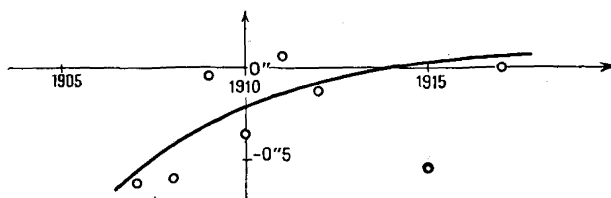


Fig. 24. — Résidus de Neptune en déclinaison (Newcomb).

confirmés par les résidus en latitude d'Uranus ⁽²⁾. Comme on le voit la prévision est remarquablement juste mais, malheureu-

⁽¹⁾ Lowell avait essayé de déterminer l'inclinaison et la longitude du nœud de la planète transneptunienne au moyen des résidus en latitude d'Uranus (*loc. cit.*, p. 70, § 46), mais n'a pas trouvé de résultats concluants, sauf l'impression que l'inclinaison devait être considérable.

⁽²⁾ *Harvard Annals*, t. 82, 1919, pp. 58, 59.

sement, l'exposé de Pickering est si sommaire qu'aucune discussion de validité n'est possible.

En 1928 la longitude du nœud est fixée à 180°. Mais là, comme pour la longitude proprement dite, l'erreur ne doit pas être incriminée à la Mécanique céleste, car Pickering obtient ce résultat en raisonnant par analogie avec le cas, très différent, de Neptune-Uranus au lieu d'appliquer le raisonnement plus rigoureux du Mémoire de 1919.

5. Le calcul de la masse et de la magnitude. — Nous avons exposé plus haut la méthode employée par Pickering pour le calcul de la masse.

Dans le Mémoire de 1909 il applique la formule (1)

$$\frac{m'}{m'_1} = \frac{\nu}{\nu_1} \frac{\left| \frac{\vec{V}_1 \vec{W}_1}{|\vec{V}_1 \vec{W}_1|} \right|}{\left| \frac{\vec{V} \vec{W}}{|\vec{V} \vec{W}|} \right|} \frac{a'}{a'_1},$$

avec

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{1}{35}; \quad \frac{\left| \frac{\vec{V}_1 \vec{W}_1}{|\vec{V}_1 \vec{W}_1|} \right|}{\left| \frac{\vec{V} \vec{W}}{|\vec{V} \vec{W}|} \right|} = 2,3; \quad \frac{a'}{a'_1} = 1,73,$$

d'où

$$\frac{m'}{m'_1} = \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad \boxed{m' = 2 T.}$$

Dans le deuxième Mémoire le calcul de la masse n'est pas repris.

Dans le Mémoire de 1928, le calcul de la masse est simplifié par le choix d'une distance moyenne égale à celle de Neptune. Dans ces conditions

$$\frac{a'}{a'_1} = 1 = \left(\frac{a'}{a'_1} \right)^3, \quad \frac{\left| \frac{\vec{V}_1 \vec{W}_1}{|\vec{V}_1 \vec{W}_1|} \right|}{\left| \frac{\vec{V} \vec{W}}{|\vec{V} \vec{W}|} \right|} = 1$$

et il vient

$$\frac{m'}{m'_1} = \frac{\nu}{\nu_1}.$$

(1) Qui est d'ailleurs inexacte : voir p. 122, renvoi (1). Avec la formule rectifiée, Pickering aurait trouvé $\boxed{m' = 6 T,}$ c'est-à-dire la même valeur que Lowell.

Or, il trouve ⁽¹⁾ que

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{1}{33},$$

d'où

$$m' \neq 0,52 \text{ T.}$$

Signalons cependant qu'en raison des nombreuses erreurs déjà signalées dans ce Mémoire, cette détermination n'a pas une grande signification. D'ailleurs, dans une addition ⁽²⁾ au Mémoire, Pickering remplace $\frac{1}{33}$ par $\frac{1}{23}$, d'où

$$m' = 0,75 \text{ T.}$$

Cette valeur se rapproche de celle (0,94 T) tirée par Nicholson et Mayall des mêmes résidus de Neptune après la découverte de Pluton. La masse de Pickering est trop petite parce qu'il a placé la planète O trop près de Neptune.

Quant aux valeurs correspondantes de la magnitude elles sont très arbitraires puisqu'elles font appel à des hypothèses gratuites sur l'albedo et la densité. Il se trouve que la magnitude, 15, prédite en 1919 était, elle aussi, remarquablement exacte. Mais il est difficile d'affirmer, cette fois, qu'il ne s'agit pas d'une simple coïncidence.

CHAPITRE III.

CONCLUSION DE LA TROISIÈME PARTIE.

Comme on vient de le voir, les insuffisances de la méthode de Pickering proviennent de son caractère empirique. Le principal avantage des méthodes graphiques, économie de travail, ne devient vraiment précieux que si la précision atteinte correspond à la précision recherchée. Or, la comparaison systématique des travaux de Lowell avec ceux de Pickering montre que les conclusions de Pickering quand elles sont erronées, ne le sont

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 163, table VI.

⁽²⁾ *Popular Astronomy*, 1928, p. 220.

pas, comme celles de Lowell, à cause des erreurs dans les données, mais à cause de l'interprétation erronée de ces données. C'est là une différence essentielle entre les travaux des deux astronomes.

Beaucoup de postulats empiriques sur lesquels reposent les recherches de Pickering sont inadmissibles et ne conduisent qu'à une approximation très grossière.

1° Considérons d'abord les critères des repères A ⁽¹⁾. Ils sont tous les deux nettement insuffisants. Une courbe de résidus présente généralement un très grand nombre de maxima « suivis d'une chute brusque », et il ne saurait être question de les considérer tous comme liés à des perturbations. La meilleure preuve du manque d'objectivité et de fidélité du critérium est la facilité avec laquelle Pickering abandonnait en 1928 des repères (1865-1867) qu'il considérait à un autre moment comme « essentiels » et « caractéristiques ». Et que dire des innombrables maxima qu'il trouve dans les résidus de Saturne et qui sont abandonnés au cours d'un même Mémoire ⁽²⁾!

N'ayant aucun moyen pour discerner entre les maxima-perturbations et les pseudo-maxima des erreurs systématiques, la méthode de Pickering ne permet pas une détermination objective de la période synodique. En fait, contrairement aux allégations de Pickering, ce ne sont pas les repères A analogues qui définissent chez lui la période synodique mais « la période synodique la plus plausible » qui fait choisir entre les maxima de repère. Pickering l'avoue lui-même dans le Mémoire de 1928, à propos de l'abandon du maximum de 1867 ⁽³⁾.

L'absence de repères objectifs crée le défaut caractéristique de la méthode : l'incertitude et l'instabilité des conclusions.

2° Un autre postulat de Pickering, la constance de l'angle α qui sert à définir la correction B ⁽⁴⁾, est arbitraire et peu exact. Nous montrerons plus loin, à propos de la transformation de

⁽¹⁾ Voir p. 119.

⁽²⁾ Cf. *Popular Astronomy*, 1928, p. 155-165 et p. 218-221.

⁽³⁾ Voir la citation p. 133.

⁽⁴⁾ Voir p. 120.

Brown ⁽¹⁾, que le cas Uranus-Neptune, qui sert de modèle à Pickering, est un cas très particulier. Nous verrons que, même dans l'hypothèse $e' = 0$, le maximum de la perturbation réduite, ou le maximum des résidus, peuvent se placer très loin de la conjonction. L'erreur de Pickering provient de l'idée fausse que « la courbe des déplacements doit ressembler à la courbe des forces » ⁽²⁾. Cela est vrai, par hasard, pour l'équation différentielle $x'' = -\sin x$, et partant pour les forces et les élongations d'un pendule; mais le cas des perturbations est bien plus complexe, ne serait-ce qu'en raison de la « réduction » Δv , de sorte que l'analogie entre les forces et les résidus est des plus lointaines.

3° *Il est contradictoire de faire passer une orbite elliptique par trois positions obtenues avec l'hypothèse d'une orbite circulaire.* Il peut se faire alors que la première détermination ne constitue même pas un début d'approximation.

L'essai de justification, tenté par Pickering, par la petitesse de l'arc de l'ellipse correspondant à la correction B, n'est guère sérieux. Car, d'une part, on vient de rappeler que B n'est pas forcément petite et d'autre part, *il est clair qu'un arc d'orbite doit admettre le Soleil pour foyer et ne peut être assimilé, comme en géométrie, au cercle osculateur à l'ellipse.*

4° *Il est facile de montrer que l'hypothèse $e' = 0$ conduit à une période synodique inexacte*, même si nos précédentes objections ne jouaient point. Dans cette hypothèse, l'écart entre deux maxima analogues représente l'intervalle entre deux configurations identiques de P et de P'. Or, il n'en est plus ainsi si l'orbite de P' est très elliptique, puisque deux conjonctions angulaires ne correspondent plus au « minimum d'approche », d'où retards ou avances des perturbations.

Considérons par exemple le cas Uranus-Pluton. Les conjonctions ont eu lieu en 1712, 1853, les oppositions en 1791, 1902. Les intervalles synodiques correspondants : 141, 111 ans, diffèrent beaucoup de l'intervalle moyen de 126 ans ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Voir quatrième partie, p. 155.

⁽²⁾ *Popular Astronomy*, 1928, p. 148.

⁽³⁾ Voir p. 75-76.

Si l'on considère les perturbations maxima, dont la date varie d'ailleurs suivant la réduction employée, on trouve des intervalles encore plus différents et sans rapport avec les précédents (voir fig. 10 et fig. 18) :

Minimum fort....	1712	Maximum fort....	1742
» faible ..	1782	» faible..	1860
» faible ..	1890		

Les intervalles sont de 70, 118 et 108 ans.

Or, une variation de 30 ans dans la période synodique Pluton-Uranus correspond à une variation très considérable de la distance moyenne de Pluton, ce qui modifie beaucoup les corrections B et C et par suite la longitude prédite.

La difficulté s'accroît encore si, au lieu d'une détermination directe, on passe d'une longitude connue, à une autre, inconnue, par application du moyen mouvement déduit de l'hypothèse $e' = 0$. Quand, en 1919, Pickering passe de la longitude de O en 1865,5 (erreur : 30°) à la longitude de O en 1757,1, l'erreur sur cette dernière position augmente encore de 50°.

Une orbite elliptique construite à partir de telles données sera peu exacte, et les positions déduites de cette ellipse seront peu précises.

5° Pickering affirme que sa méthode possède, sur la méthode analytique, l'avantage de pouvoir être appliquée dès que la perturbation s'est manifestée. Cette affirmation n'est pas fondée. Pour appliquer la méthode, on doit attendre que la perturbation ait atteint et dépassé le maximum (repère A); de plus, si l'arc observé est insuffisant, la réduction par la sinusoïde, comme la réduction analytique, absorbe complètement l'effet de la perturbation. Inversement, rien n'empêchait d'appliquer les méthodes analytiques aux résidus de Neptune, vers 1920-25.

Le grand mérite de Pickering est d'avoir prévu et suivi régulièrement les perturbations de Neptune par Pluton, et d'avoir montré, par son Mémoire de 1919, la puissance heuristique de la Mécanique céleste. Pickering fut avec Lowell l'instigateur des recherches photographiques de Pluton. C'est par une véritable malchance que les recherches de 1919 n'ont pas abouti.

Pickering a raison quand il remarque avec amertume que, bien qu'il ait prévu la position de Pluton à 1° près à cette époque, « aucun observatoire, possédant un « blink-microscop » et un télescope assez puissant, n'a cru qu'il valait la peine de regarder et de voir si la planète était là ! » (1). Il aurait pu cependant évoquer le précédent illustre d'Adams et Le Verrier (2).

S'il nous était permis de formuler un reproche à Pickering, ce serait seulement pour regretter la violence qu'il mit à dénigrer, après 1930, les travaux de Lowell mort en 1916. Nous espérons, selon le mot de Le Verrier, que « ces grandes accusations rentreront dans le néant d'où elles n'auraient jamais dû sortir » (3), et nous mettrons ces attaques sur le compte d'un ressentiment, fort compréhensible devant le succès de Lowell et après tant d'efforts consacrés par Pickering au même problème.

Si l'analyse successive des travaux de Lowell et de Pickering laisse à Lowell le premier rang dans la découverte de Pluton, il n'en reste pas moins vrai que la méthode empirique de Pickering avait apporté une contribution importante à la solution mathématique du problème, en levant l'indétermination entre les solutions de Lowell, et en confirmant, au moyen des résidus de Neptune, les résultats obtenus au moyen des résidus d'Uranus.

(1) *Popular Astronomy*, 1930, p. 294.

(2) Voir p. 104.

(3) Nous nous abstiendrons de relever, dans les publications de Pickering, postérieures à la découverte de Pluton, les nombreuses attaques contre l'œuvre de Lowell, très brutales et souvent fort injustes, comme par exemple dans *Popular Astronomy*, 1930, p. 285-294.

QUATRIÈME PARTIE.

DISCUSSION DES CRITIQUES DE BROWN.

INTRODUCTION.

Comme nous l'avons déjà annoncé dans l'Introduction générale, Ernest-William Brown ⁽¹⁾ nie la validité des calculs de Lowell et de Pickering et prétend que la coïncidence étroite entre les différentes théories de la planète transneptunienne et les données réelles de Pluton était due au « pur hasard ».

Ses principaux arguments peuvent se résumer ainsi :

1° Il y a désaccord entre la masse probable de Pluton et la masse prédite par Lowell; l'effet d'un Pluton ayant une masse inférieure à celle de la Terre sur les résidus d'Uranus est trop petit pour être observable.

2° La solution de Lowell dépend beaucoup des résidus anciens; l'erreur probable des résidus anciens est si considérable qu'on doit leur attribuer un poids nul. Une prédiction fondée sur les résidus anciens n'a par conséquent aucune valeur.

3° La solution de Lowell prédit une conjonction entre Pluton et Uranus en 1853 simplement parce que cette date se situe au milieu de l'intervalle des observations modernes (1781-1903). En

(1) E.-W. BROWN (1866-1938) a consacré trois Mémoires à la découverte de Pluton :

1° *Proc. of the Nat. Academy of Sciences of the U. S. A.*, vol. 16, 1930, p. 364-371;

2° *Monthly Notices*, t. 92, 1931, p. 80-101;

3° *Publications of the Astronomical Society of the Pacific.*, vol. 44, 1932, p. 24-27.

absence de perturbations réelles, l'hypothèse d'une planète perturbatrice conduit à placer celle-ci de telle façon qu'il y ait symétrie par rapport à l'intervalle où les résidus sont petits : car alors on pourra minimiser les perturbations réduites, sur toute l'étendue de l'intervalle, par une « réduction » convenablement choisie.

4° L'application aux résidus modernes d'Uranus et de Neptune d'une *transformation spéciale*, que nous appellerons « transformation de Brown », devrait donner à la courbe des résidus une forme *caractéristique*, si ceux-ci représentaient l'effet des perturbations. Or, les résidus transformés d'Uranus ont une forme nettement différente, et les résidus transformés de Neptune n'ont pas davantage la forme canonique. Les matériaux mêmes qui ont servi à Lowell et à Pickering étant donc sans valeur, il doit en être de même de leurs solutions.

Il nous sera facile de réfuter les trois premiers arguments de Brown et un lecteur attentif a déjà pu se rendre compte qu'au cours de nos précédents chapitres nous y avons répondu par avance. Nous y reviendrons encore, mais très brièvement.

Le quatrième argument, celui qui résulte de la transformation de Brown, est beaucoup plus subtil et, en apparence, plus sérieux. Pour en saisir la portée et les points faibles, il est indispensable de connaître les propriétés essentielles de la transformation telles que les expose Brown et telles qu'elles se révèlent à la lumière d'une analyse plus poussée. Nous consacrerons donc à cette question un chapitre spécial, d'autant plus que la transformation de Brown fournit une nouvelle méthode de recherche de planètes troublantes, et que notre sujet principal nous a conduit à faire une étude comparée de telles méthodes.

CHAPITRE I.

LES ARGUMENTS INDÉPENDANTS DU « CRITÉRIUM ».

1. **La petitesse de la masse probable de Pluton.** — Brown tire un premier argument de la prétendue petitesse de la masse de Pluton.

« Les informations concernant la nouvelle planète sont encore assez maigres, mais semblent suffisantes pour prouver qu'elle ne pouvait pas être prédite par ses effets sur Uranus. Dans l'hypothèse la plus favorable sur l'albedo (0,06) et la densité (5,6), la masse ne saurait dépasser de beaucoup celle de la Terre, soit le septième de la masse prédite par Lowell. A la distance de 40 à 43 unités, les perturbations d'une telle planète sur Uranus ne seraient pas dans les limites de détection à partir des résidus dont on dispose! » ⁽¹⁾. Il affirme, de même, dans son principal Mémoire : « La valeur la plus probable de la masse réelle est actuellement 0,1 T. Une prédiction avec une telle valeur de la masse, fondée sur l'action gravitationnelle de la planète et les observations dont on dispose, n'a aucune valeur » ⁽²⁾.

Remarquons d'abord qu'il y a ici deux arguments distincts :

1° il y a désaccord entre la masse probable de Pluton et celle prédite par Lowell;

2° il est impossible de détecter les perturbations de Pluton dans les résidus d'Uranus, si la masse de Pluton est voisine de celle de la Terre.

Or, s'il est parfaitement exact que la masse de Lowell paraît nettement trop grande, *l'erreur sur la masse n'implique nullement une erreur sur la longitude prédite*. Comme nous l'avons déjà rappelé, Le Verrier et Adams se sont trompés *du simple au double* sur la masse de Neptune et cela n'affecta nullement la longitude de leur astre théorique. Les deux déterminations : celle de la masse et celle de la longitude sont très indépendantes.

La méthode de Pickering le met en évidence avec une netteté particulière ⁽³⁾, et la transformation de Brown ⁽⁴⁾ le confirme.

En effet la détermination de la longitude dépend surtout de *la date du maximum* de perturbation, tandis que celle de la masse dépend de *l'amplitude* du maximum. *L'allure générale* des courbes peut suffire à la détermination de la longitude, quelle que

⁽¹⁾ *Proc. of Nat. Acad. of Science of the U.S.A.*, 1930, vol. 16, p. 370.

⁽²⁾ *Monthly Notices*, 1931, vol. 92, p. 101.

⁽³⁾ Voir p. 119.

⁽⁴⁾ Voir p. 158.

soit la réduction employée, tandis qu'une réduction incorrecte peut altérer fortement la pente des résidus réduits et fausser complètement le calcul de la masse.

De plus il ne faut pas perdre de vue qu'en plaçant l'astre, dans une direction exacte, à une distance trop grande on est amené à lui supposer une masse trop grande, et que l'effet varie comme le carré de la distance. Le Verrier, Adams, Lowell et Pickering ont placé leurs planètes trop loin et toutes les masses ont été systématiquement trop fortes, sans qu'on puisse cependant *tout* expliquer par cet effet, même dans le cas de Neptune.

Le deuxième argument n'est guère plus décisif. On ne peut affirmer que les perturbations d'Uranus par Pluton soient indécélables depuis que nous avons montré ⁽¹⁾ qu'avec une masse de Pluton égale à celle de la Terre les perturbations, même réduites, s'élèvent à 4" en 1712, et que « l'erreur effective » des résidus anciens est inférieure aux résidus eux-mêmes. Et il n'est même pas certain que la masse de Pluton soit inférieure à celle de la Terre ⁽²⁾. De plus, il ne faut pas oublier que le traitement par la méthode des moindres carrés de plus de mille observations d'Uranus peut mettre en évidence une action systématique, même si beaucoup d'observations individuelles sont entachées d'une erreur supérieure à l'effet recherché.

C'est en particulier ce que semble confirmer la solution L_2 qui donne une masse de Pluton du même ordre que la solution L_1 , bien qu'on y ait affecté les observations anciennes d'un poids nul ⁽³⁾.

2. Le rôle des résidus anciens. — L'argument que nous venons de discuter est intimement lié avec une autre affirmation de Brown, qui, postulant la dépendance de la solution de Lowell des résidus anciens, insinue que le poids de ces derniers est nul.

Cependant nous avons expliqué plus haut ⁽⁴⁾ que Brown fait erreur quand il prétend pouvoir assigner des « erreurs probables » et des poids objectifs à des résidus isolés. L'exemple de Neptune

⁽¹⁾ Voir p. 98.

⁽²⁾ Voir p. 58.

⁽³⁾ Voir p. 48.

⁽⁴⁾ Voir p. 101.

démontre qu'il est impossible d'évaluer *a priori* les erreurs systématiques, et il est facile, quand on y tient, d'exagérer leur amplitude. En fait l'exactitude des résidus est une *hypothèse de travail* absolument indispensable et ce n'est qu'après la découverte physique de l'astre inconnu qu'on peut évaluer approximativement le degré d'exactitude des données. C'est justement à cette étude que nous avons consacré la première partie de notre travail, et nos résultats sont dans l'ensemble très favorables à Lowell.

Par contre, la meilleure preuve de l'impossibilité d'assigner des poids objectifs, *a priori*, nous est fournie par Brown qui, tout en soulignant avec vigueur l'influence des poids sur la validité des solutions, *n'indique nulle part les valeurs qu'il proposerait*.

3. La symétrie du système Uranus-Pluton par rapport au milieu de l'intervalle 1780-1910. — L'argument le plus étrange qu'on ait avancé contre le travail de Lowell, et que nous avons eu le plus de peine à comprendre, sinon à réfuter, est le suivant :

Brown part de l'hypothèse que les résidus d'Uranus les plus exacts, ceux de 1780 à 1910, ne portent pas la moindre trace de l'action de Pluton. Il affirme alors ⁽¹⁾ que l'existence de la réduction conduit à placer la planète hypothétique de telle façon que ses perturbations soient symétriques par rapport *au milieu de l'intervalle des observations* utilisées. Autrement dit, si Lowell trouve que Pluton avait été en conjonction avec Uranus en 1853, ce n'est pas parce qu'il l'a reconnu dans les résidus d'Uranus, mais parce que 1853 représente approximativement le milieu de l'intervalle 1780-1910. De même, si Lowell place son orbite de telle façon que sa planète soit à l'aphélie vers 1853, ce n'est pas davantage à cause des résidus d'Uranus, mais pour la même raison que ci-dessus. Enfin l'excentricité considérable de la planète X₁ est expliquée par la possibilité qui en découle d'avoir un intervalle plus long pendant lequel les perturbations sont insensibles.

Nous avons soumis le raisonnement de Brown au contrôle de l'analyse et nous avons pu y relever de nombreuses inexactitudes. Comme ce calcul est long, compliqué et ne présente pas beaucoup

⁽¹⁾ *Proc. of Nat. Sciences of the U. S. A.*, 1930, vol. 16, p. 367-368.

d'intérêt, nous nous bornerons à citer un exemple tiré du travail de Lowell et qui montre, à lui seul, que le sophisme de Brown est inacceptable.

Lorsque Lowell utilise dans ses calculs les observations s'étendant de 1710 à 1903 il trouve comme longitude $\nu_{1914,5}$ la valeur 88° . Lorsqu'il incorpore à ce groupe les observations postérieures à 1903 et allant jusqu'à 1910, il trouve pour $\nu_{1914,5}$ la valeur 84° . *Ainsi l'extension de l'intervalle des observations, avec un retard de trois ans et demi dans la date médiane de l'intervalle, amène non point une augmentation de 15° dans la longitude prédite, comme cela se produirait si le raisonnement de Brown était exact, mais une diminution de 4° .* Car, ne l'oublions pas, c'est Uranus qui sert de repère, et un retard de trois ans et demi dans la date de la conjonction aurait dû amener une augmentation de 15° dans la longitude de celle-ci.

Développant les conséquences de son sophisme, Brown remarque que les résidus entre 1910 et 1930 suivent le même cours que ceux des 127 années précédentes : donc, s'ils sont traités avec les autres par la méthode de Lowell, la position prédite pour la planète en 1930 serait altérée de 30° environ ; « si la solution est possible ! ». « *Mais il est douteux qu'on puisse trouver une planète qui donnerait de petits résidus pendant un intervalle aussi long que 147 ans et qui, de plus, satisferait aux résidus anciens* » ⁽¹⁾. Quel dommage, pour le raisonnement de Brown, qu'on puisse trouver non seulement une telle planète théorique, mais une telle planète réelle : Pluton. Car un coup d'œil sur la courbe des perturbations en longitude moyenne ⁽²⁾ montre que ce n'est pas pendant 147 ans, mais pendant 200 ans que les perturbations d'Uranus par Pluton restent imperceptibles.

L'erreur de Brown provient de la confusion entre les conjonctions angulaires et les minima d'approche, confusion due à l'oubli des excentricités des orbites. La période des conjonctions angulaires est de 126 ans, et c'est ce qui fait naître chez Brown le doute sur la possibilité d'avoir de petits résidus pendant 147 ans.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 370.

⁽²⁾ Voir p. 40, figure 1.

La période des minima d'approche est double : 252 ans à cause de la très forte excentricité de Pluton. Il n'y a donc rien de surprenant qu'il puisse s'écouler plus de 147 ans entre les époques des perturbations maxima.

Une autre affirmation de Brown révèle la même erreur : « Lowell avait remarqué que les résidus de Le Verrier semblent fournir la même date de la conjonction que ceux de Gaillot, bien qu'ils soient beaucoup plus considérables et d'une allure toute différente. Cette ressemblance s'explique de la même façon, du fait que ces résidus s'étendent sur le même intervalle et sont minima aux environs du milieu de l'intervalle » (1). Nous pensons que l'explication véritable est tout autre : c'est que les deux séries de résidus contenaient les traces d'une même planète perturbatrice et que Lowell a su le mettre en évidence, malgré les différences apparentes des résidus, provenant des différences des « réductions » employées.

Il est évident, en définitive, qu'en cherchant bien on pourra toujours retrouver les résultats de Lowell par un raisonnement incorrect, mais cela ne prouvera point que celui de Lowell le fut également.

L'argument de Brown n'est donc qu'un sophisme ingénieux.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA TRANSFORMATION DE BROWN.

1. Les propriétés fondamentales de la transformation. — Étant donné une fonction $f(t)$ du temps et un nombre T , qui représente un certain nombre d'années, la relation (1) définit une « transformation de Brown » de module T .

$$(1) \quad \Phi(t) = f\left(t + \frac{T}{6}\right) + f\left(t - \frac{T}{6}\right) - f(t).$$

(1) *Loc. cit.*, p. 367.

Au développement

$$(2) \quad F(t) = A_0 + A_1 t + a_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) \\ + a_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\ + a_3 \sin(2\pi f_3 t + \varphi_3) \\ + \dots\dots\dots,$$

la transformation de Brown fait correspondre le développement

$$(3) \quad \Phi(t) = A_0 + A_1 t + F_1 a_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) \\ + F_2 a_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\ + F_3 a_3 \sin(2\pi f_3 t + \varphi_3) \\ + \dots\dots\dots,$$

$F_1, F_2, F_3, \dots$, sont des facteurs constants dits : « facteurs transformants ». Un facteur F_k est fonction du rapport entre la fréquence f_k et la fréquence modulaire f définie par

$$T = \frac{1}{f}.$$

Un calcul facile montre qu'on a rigoureusement

$$F_k = 1 - 4 \sin^2 \frac{f_k}{f} \frac{\pi}{6}.$$

Le calcul de F_k résulte de l'application de la règle de Fresnel pour la composition des vibrations sinusoïdales de même période. Le Tableau XXXII donne les valeurs du facteur transformant en fonction du rapport $\frac{f_k}{f}$. Remarquons immédiatement que

$$(4) \quad F_k = 0, \quad \text{si } f_k = f$$

et

$$(5) \quad F_k = 1, \quad \text{si } f_k = 0.$$

Donc la transformation permet d'éliminer, dans une somme de plusieurs fonctions, toutes les composantes périodiques ayant pour période le module T donné; elle ne modifie pas les composantes linéaires $A_0 + A_1 t$.

TABLEAU XXXII.

$\frac{f_k}{f}$	F_k	$\frac{f_k}{f}$	$\frac{f_k}{f}$	F_k	$\frac{f_k}{f}$
0,0	+1,00	6,0	1,6	-1,21	4,4
0,1	+0,99	5,9	1,7	-1,42	4,3
0,2	+0,96	5,8	1,8	-1,62	4,2
0,3	+0,90	5,7	1,9	-1,82	4,1
0,4	+0,83	5,6	2,0	-2,00	4,0
0,5	+0,73	5,5	2,1	-2,18	3,9
0,6	+0,62	5,4	2,2	-2,34	3,8
0,7	+0,49	5,3	2,3	-2,49	3,7
0,8	+0,34	5,2	2,4	-2,62	3,6
0,9	+0,18	5,1	2,5	-2,73	3,5
1,0	+0,00	5,0	2,6	-2,83	3,4
1,1	-0,19	4,9	2,7	-2,90	3,3
1,2	-0,38	4,8	2,8	-2,96	3,2
1,3	-0,58	4,7	2,9	-2,99	3,1
1,4	-0,79	4,6	3,0	-3,00	3,0
1,5	-1,00	4,5			

On a de même

$$(6) \quad |F_k| = 2, \quad \text{si } f_k = 2f \text{ ou } f_k = 4f;$$

$$(7) \quad |F_k| = 3, \quad \text{si } f_k = 3f.$$

Donc la transformation multiplie par deux et par trois les composantes ayant des fréquences double, triple ou quadruple de la fréquence modulaire f .

Brown n'envisage pas le cas des fonctions $F(t)$ de la forme

$$(8) \quad F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k t \cos(k\zeta + \varphi),$$

où

$$(9) \quad \zeta = 2\pi ft;$$

toutefois voici les propriétés générales de la fonction correspon-

dante $\Phi(t)$, dont nous aurons besoin plus loin :

$$(10) \quad \Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k A_k t \cos(k\zeta + \varphi) + (TF'_k) A_k \cos(k\zeta + \varphi + \alpha_k),$$

F'_k et α_k sont donnés par le Tableau XXXIII.

TABLEAU XXXIII.

k	F_k	$6F'_k$	α_k	k	F_k	$6F'_k$	α_k
1	0	$\sqrt{3}$	90°	4	-2	$\sqrt{3}$	-90°
2	-2	$\sqrt{3}$	90	5	0	$\sqrt{3}$	-90
3	-3	0	0	6	+1	0	0

Lorsque la transformation est appliquée à un terme périodique mixte d'amplitude A_k , le terme transformé est multiplié par F_k , mais il y a en plus un terme singulier, simplement périodique, et de très grande amplitude.

Pratiquement

$$T = 84 \text{ ans (période d'Uranus); } TF'_k \neq 24, 25.$$

2. Les applications de la transformation. — 1° *L'élimination de la « réduction » Δv .* — Les équations de condition qui expriment la comparaison de la théorie avec les observations s'écrivent, avec les notations des parties précédentes (1),

$$(11) \quad \delta v + \Delta v = \text{résidus.}$$

Nous avons déjà vu (2) qu'en négligeant les termes en e on a

$$(12) \quad \Delta v = \Delta e + t \Delta n + 2 \Delta e \sin \zeta - 2 e \Delta \varpi \cos \zeta.$$

(1) Voir p. 15.

(2) Voir p. 116.

Appliquons à la « réduction » Δv la transformation de Brown, en prenant comme module T la période de la révolution sidérale de la planète troublée P.

Il vient, d'après les formules (4), (5) et (9),

$$(13) \quad \boxed{\Delta v_{\text{transformée}} = \Delta \varepsilon + t \Delta n.}$$

Ainsi la transformation de Brown élimine la partie de la « réduction » relative aux changements éventuels de l'excentricité et de la longitude du périhélie de la planète P. Du moins, si on limite la valeur de Δv à l'expression (12).

2° *La forme canonique des perturbations transformées.* — Dans la méthode classique de variation des constantes, la commensurabilité des moyens mouvements introduit dans les éléments des inégalités à très longue période et à très grande amplitude (1).

Les inégalités à longue période des *éléments* se traduisent, dans la longitude vraie v , par des oscillations ayant pour période T, période de révolution sidérale de la planète P (2). Ces oscillations l'emportent de beaucoup sur toutes les autres composantes périodiques de v . Le mécanisme de cette « transmutation » est très simple. Les inégalités à longue période varient si lentement qu'on peut les développer en séries suivant les puissances du temps. Supposons qu'on ait trouvé ainsi

$$(14) \quad \begin{cases} \delta l = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + \dots, \\ \delta e = E_0 + E_1 t + E_2 t^2 + \dots, \\ \delta \varpi = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

Les termes les plus forts sont (1) L_0, L_1, E_0, P_0 , et nous avons déjà montré (3) que l'expression correspondante de la perturbation en longitude vraie s'écrit en première approximation

$$(15) \quad \delta v_c = L_0 + L_1 t + 2E_0 \sin \zeta + 2e(L_0 - P_0) \cos \zeta.$$

(1) Voir p. 18 et TISSERAND, *loc. cit.*, t. I, p. 200.

(2) Insistons sur ce que le mot d'inégalité « à longue période » peut suggérer comme représentation inexacte du phénomène relatif à la longitude. La commensurabilité produit dans cette dernière des oscillations de forte amplitude et de période T. C'est le phénomène bien connu de la résonance.

(3) Deuxième partie, p. 89, formules (2) et (3).

Dans le cas où les moyens mouvements sont presque commensurables, la courbe représentative de la perturbation en longitude vraie se réduit donc à une sinusoïde inclinée de pseudo-période T . L'ensemble des courbes ci-dessous (*fig. 25*), empruntées à Brown,

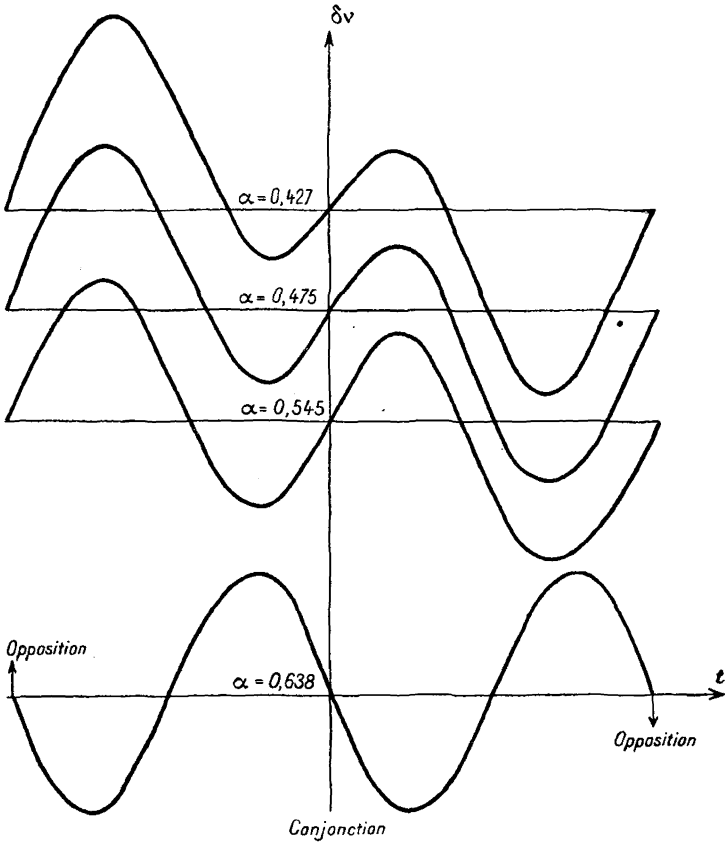


Fig. 25.

représente les perturbations en longitude vraie pour les planètes à orbite circulaire se mouvant dans le plan de l'écliptique, lorsque le rapport des distances moyennes α croît de 0,427 à 0,638. On remarque justement que la courbe $\alpha = 0,638$, cas Uranus-Neptune, a une allure nettement différente des autres courbes. Cela provient de ce que l'on a approximativement $n = 2n'$, et condamne,

soit dit en passant, l'usage qu'en fait Pickering comme courbe type.

Supposons maintenant qu'on applique aux perturbations en longitude vraie la transformation de Brown avec un module égal à T.

En vertu de la propriété fondamentale de la transformation [formule (4)] les termes en $\zeta = 2\pi ft$ seront éliminés, et le réseau des courbes transformées ne présentera plus aucune singularité spéciale aux points de commensurabilité des moyens mouvements.

La figure 26 représente $\Phi(\delta v)$, perturbations transformées, pour $\alpha = 0,475$ et $\alpha = 0,723$, soit, approximativement, pour les cas Pluton-Uranus et Pluton-Neptune.

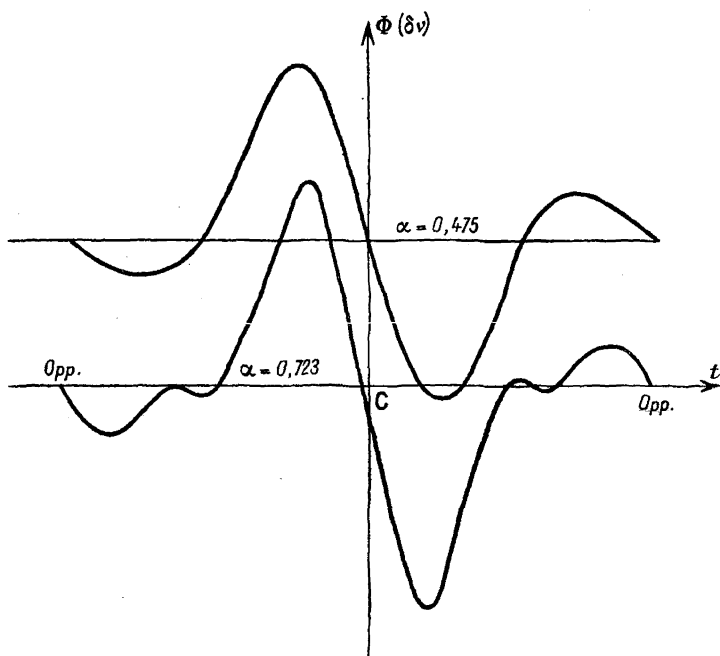


Fig. 26. — Courbes canoniques de Brown.

La transformation donne par conséquent une *courbe canonique*, caractéristique des perturbations, pour une étendue considérable des valeurs de α . *Le trait principal de la courbe canonique est le grand maximum qui précède la conjonction.*

Remarquons que Brown présente ces résultats un peu autrement ⁽¹⁾. Au lieu de raisonner sur la méthode de variation des constantes, il rappelle qu'on peut déterminer le mouvement en longitude au moyen des variations du rayon vecteur. Ce dernier est déterminé par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, dont l'intégrale contient des termes ayant des diviseurs tendant vers zéro quand P et P' sont en résonance. La transformation élimine ces termes et rétablit la continuité des solutions.

Le mode d'expositions que nous avons adopté nous paraît plus simple et découle plus naturellement des méthodes dont il a été souvent question au cours des précédents chapitres.

3° *La détection des perturbations dans une série donnée de résidus.* — D'après ce qui précède, l'équation symbolique

$$(\text{perturbations}) + (\text{réduction}) = (\text{résidus})$$

devient, après la transformation de Brown appliquée au deux membres,

$$(\text{perturbations transformées}) + \Delta\varepsilon + t \Delta n = (\text{résidus transformés}).$$

Les perturbations transformées ont une forme canonique, la correction linéaire $\Delta\varepsilon + t \Delta n$ ne saurait altérer cette forme, donc les *résidus transformés devront avoir la même forme canonique*.

Du moins, en sera-t-il ainsi, si les résidus contiennent effectivement des perturbations, et ne sont pas dus simplement à des erreurs accidentelles ou systématiques et surtout si e et e' sont *voisines de zéro, comme on l'a supposé dans tout ce qui précède*.

Ainsi, en appliquant la transformation aux résidus en longitude d'une planète P, on pourra déceler facilement les traces de perturbations produites par une planète P' encore inconnue.

Brown va alors plus loin et il montre que sa transformation permet de trouver, approximativement, la longitude de la planète troublante par l'étude des résidus transformés de la planète troublée. Autrement dit, la transformation de Brown fournit une nou-

(1) Cf. *Monthly Notices*, 1931, t. 92, p. 82, § 3.

velle méthode pour la recherche des planètes inconnues, méthode qui vient s'ajouter à celles de Le Verrier, Lowell et Pickering.

3. Application de la transformation à la recherche des planètes inconnues. — Le Tableau XXXIV donne l'intervalle de temps qui s'écoule entre le maximum principal de la perturbation transformée et la conjonction, en fonction du rapport α des distances au Soleil. Cet intervalle est exprimé en fractions de la période synodique T_s , et désigné par $(C - A)$; on remarque qu'il varie peu pour les faibles valeurs de α . La dernière colonne donne le rapport $\frac{M}{m}$ des maxima et des minima des valeurs absolues des perturbations transformées.

TABLEAU XXXIV.

α	$C - A$	$\frac{M}{m}$	α	$C - A$	$\frac{M}{m}$
0,427	0,122 T_s	3,3	0,638	0,097 T_s	5,6
0,475	0,117	4,0	0,723	0,086	5,2
0,545	0,106	5,3			

Rappelons que, T' étant la période de la révolution sidérale de la planète perturbatrice, on a

$$T_s = T' \frac{\sqrt{\alpha^3}}{1 - \sqrt{\alpha^3}}.$$

Donc, T_s dépend non seulement de α , mais aussi de T' et par conséquent $(C - A)$ dépend à son tour de T' . [Brown, au contraire, semble considérer $(C - A)$ comme fonction de α et de T_s seuls ⁽¹⁾.]

Soit A la date du maximum de la courbe des résidus transformés. Cette date est évidemment peu affectée par la correction

⁽¹⁾ *Monthly Notices*, 1931, t. 92, p. 86, § 6, Table III. Brown exprime $(C - A)$ en fractions de 360°, ce qui peut prêter à confusion si l'on perd de vue qu'il représente T_s par 360°.

linéaire inconnue ($\Delta\epsilon + t\Delta n$). En faisant une hypothèse sur la distance moyenne a' de la planète inconnue, on peut calculer les valeurs correspondantes de α , T' et T_s . Le Tableau XXXIV donne alors, par interpolation, $(C - A)$ et, en ajoutant cette valeur à A , on trouve la date approximative de la conjonction. Dès lors la longitude de la planète inconnue, au moment de la conjonction, est connue; elle n'est autre que celle de la planète perturbée.

Le moyen mouvement correspondant à la distance moyenne adoptée permet ensuite de calculer la longitude de la planète P' pour une date quelconque.

Brown signale que, si l'on veut plus de précision, on peut revenir à la méthode analytique de la résolution des équations de condition, mais, au lieu d'opérer sur les équations ordinaires, prendre les équations transformées. Toutefois, il est évident qu'à partir du moment où l'on revient à l'analyse, la méthode proposée perd une grande partie de son intérêt : elle perd en clarté et en rapidité tout en gardant ses défauts d'approximation que nous mettons en évidence plus loin.

La méthode de Brown, nettement inspirée de celle de Pickering, présente de nombreux avantages sur cette dernière. D'abord, la « réduction » n'est plus effectuée par une suite de tâtonnements suivis d'un choix plus ou moins arbitraire, comme c'est le cas avec la sinusoïde inclinée de Pickering. Elle est opérée par une méthode nettement définie et bien pratique, d'où un gain en objectivité et économie de temps.

Ensuite, la détermination des longitudes n'est plus basée sur une vague analogie entre les forces et leurs effets, mais sur l'allure des effets eux-mêmes. N'oublions pas que les courbes canoniques de Brown sont la représentation des *perturbations en longitude*, alors que les fonctions représentées par les courbes de la composante tangentielle de la force perturbatrice de Pickering devraient subir une double intégration avant de ressembler aux perturbations véritables.

Enfin, la transformation de Brown élimine, en partie, la discontinuité qui pourrait s'introduire par suite de la commensurabilité des moyens mouvements. Ce dernier problème n'a même pas été abordé par Pickering, et pourtant il joue un rôle très important, comme on l'a vu à propos de Neptune et de Pluton.

Mais, malgré ces grandes qualités, la méthode de Brown est encore loin de posséder la précision et l'objectivité de celle de Le Verrier-Lowell.

Tout d'abord, elle ne donne pratiquement aucun moyen de déterminer la distance moyenne de la planète inconnue, car l'intervalle des observations continues a jusqu'ici été toujours trop court pour donner *deux* maxima transformés. Donc, même si l'on admet que la position du maximum transformé est invariablement liée à la date de la conjonction, et ceci n'est qu'approximatif, nous n'aurons aucun moyen objectif de calculer la longitude de la planète à une date éloignée de la conjonction.

Ensuite, elle ne permet pas d'utiliser les observations isolées, comme le sont généralement les observations anciennes, qui sont pourtant souvent plus riches en renseignements que les observations modernes.

Enfin, elle tombe sous le coup des critiques générales que l'on peut adresser à la transformation de Brown et que nous exposerons au prochain paragraphe.

4. Les défauts de la transformation. — On se rappelle que les différentes applications de la transformation de Brown supposent que les orbites de la planète troublante et de la planète troublée sont circulaires. Comme aucune de ces deux hypothèses n'est vérifiée dans la réalité, il en résultera plusieurs inconvénients qui seront d'autant plus marqués qu'on s'éloignera davantage des conditions idéales postulées par Brown.

1° Le reste de la réduction. — Nous avons d'abord admis, avec Brown, que la transformation éliminait la réduction et la ramenait à la forme linéaire $\Delta\epsilon + t\Delta n$. Mais cela n'est plus exact si l'on suppose $e \neq 0$. Si dans l'expression de Δv on garde les termes négligés par Brown, et qu'on applique les formules (8) et (10) aux termes périodiques mixtes introduits par $\frac{\partial v}{\partial \epsilon}$ il vient, dans le cas d'Uranus,

$$\begin{aligned}\Delta v_{\text{transformée}} = & \Delta\epsilon + t\Delta n - 0,0107\Delta\epsilon - 2,24\Delta n \sin \zeta \\ & - 0,231(\Delta e \sin 2\zeta - e\Delta\varpi \cos 2\zeta) \\ & - 1,07\left(\frac{t}{100}\right)\Delta n \cos 2\zeta + \dots;\end{aligned}$$

pour peu que Δn , Δe , $\Delta \varpi$ soient considérables Δv transformée n'aura plus la forme linéaire, surtout à cause du terme en $t\Delta n \cos 2\zeta$ qui croît avec le temps et des termes en Δe et $e\Delta \varpi$ qui ressemblent aux « oscillations fictives » ⁽¹⁾.

2° *Le reste des termes discontinus.* — De même que la transformation n'élimine pas toute la réduction, elle n'élimine pas tous les termes discontinus : car alors que les termes en $\sin \zeta$ et $\cos \zeta$ sont multipliés par un facteur transformant nul, ceux en $\sin 2\zeta$ et $\cos 2\zeta$, pour ne mentionner que ceux-là, sont multipliés par (-2) comme l'indique le Tableau XXXII.

D'où.

$$(\delta v_d)_{\text{transformée}} = L_0 + L_1 t + \dots - 5e(E_0 \sin 2\zeta - eP_0 \cos 2\zeta) + \dots$$

Cette formule découle d'ailleurs immédiatement de la formule (3) de la page 89. Elle montre que dans certains cas, comme Uranus-Neptune ou Uranus-Pluton, quand L_0 , E_0 , P_0 sont considérables, $(\delta v_d)_{\text{transformée}}$ se rapproche d'une sinusoïde d'une fréquence double de celle de la planète perturbée. Cela seul suffirait pour altérer la forme canonique des courbes de Brown.

3° *Altération de la forme canonique du fait que e' est différente de zéro.* — Le moyen le plus simple de mettre en évidence l'influence de l'excentricité de la planète perturbatrice c'est d'appliquer la transformation de Brown aux perturbations réduites exactes d'Uranus par Pluton. Nous avons effectué ce calcul et la figure 27 représente les perturbations transformées exactes. On reconnaît immédiatement des différences profondes entre cette courbe et la courbe canonique de Brown (*fig.* 26; $\alpha = 0,475$). Les maxima et les minima sont fortement déplacés par rapport aux conjonctions et leurs amplitudes ne sont pas dans le même rapport que sur la courbe canonique ⁽²⁾. Ce n'est qu'au voisinage immédiat d'une conjonction « proche » que les caractères canoniques se retrouvent dans la courbe des perturbations réelles. Partout ailleurs, et en particulier au voisinage de la conjonction

⁽¹⁾ Voir p. 91.

⁽²⁾ Les éléments canoniques de Brown sont reproduits schématiquement sur la partie supérieure de la figure 27.

de 1853, les caractères canoniques disparaissent pour ainsi dire complètement. A moins qu'on ne tienne compte *a posteriori* de l'excentricité de Pluton et qu'on ne s'arrange, comme nous l'avons fait sur la figure 27, à faire coïncider les conjonctions et les oppositions de la courbe canonique avec les conjonctions et les oppositions réelles *par un changement proportionnel de l'échelle des temps*. Cela rétablit, dans une certaine mesure, la correspondance entre les positions des maxima et des minima mais les amplitudes restent encore très différentes.

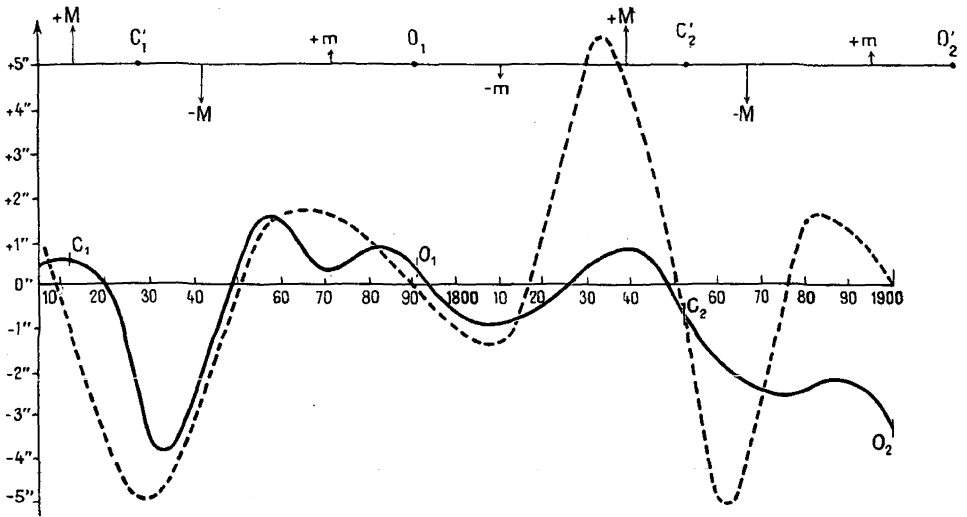


Fig. 27. — Perturbations réduites exactes d'Uranus (solution L_1 avec $m' = 1,65 T$) après transformation de Brown.

En pointillé : la courbe canonique de Brown ajustée par changement d'échelle des temps.

Les flèches indiquent les éléments canoniques, sans changement d'échelle, à partir de O_1 avec $T_s = 126$ ans.

5. La valeur de la transformation de Brown en tant que critérium de la découverte de Neptune et de Pluton. — Brown applique son critérium :

- 1° aux résidus qui ont servi à la découverte de Neptune;
- 2° à une partie des résidus qui ont servi à Lowell;
- 3° à une partie des résidus qui ont servi à Pickering.

Il montre que, dans le cas de la découverte de Neptune, les résidus transformés avaient la forme canonique et il en conclut que les travaux de Le Verrier et ceux d'Adams *pouvaient être* valables. Par contre, quand il applique sa transformation aux résidus de Gaillot *postérieurs* à 1780, il constate que la courbe des résidus transformés présente deux maxima (1853-1883) et deux minima (1830-1870) de presque égale profondeur, allure nettement différente de la courbe canonique comme on le voit facilement sur les figures 27 et 28. Pour les résidus de Neptune son raisonnement est un peu différent : il transforme les résidus *postérieurs* à 1846 et montre que l'arc des résidus transformés est trop court pour mettre en évidence le maximum caractéristique de la courbe canonique (voir *fig.* 29). Brown en déduit que les travaux de Lowell et de Pickering *ne peuvent pas* être valables.

Le fait que le critérium s'applique bien au cas de la découverte de Neptune est, *en apparence*, un argument sérieux en faveur de la théorie de Brown et le fait qu'il ne s'applique plus au cas de Pluton, sous la forme utilisée par Brown, semble de prime abord fatale à la validité des travaux de Lowell et de Pickering.

Nous sommes cependant assez avancé dans l'analyse de la question pour montrer, une fois pour toutes, que les conclusions de Brown dépassent de beaucoup les faits incriminés.

En effet l'argument le plus impressionnant : *le fait que la transformation s'applique très bien à la découverte de Neptune à très peu de valeur en ce qui concerne Pluton*. N'oublions pas, en effet, que *l'excentricité de Neptune est presque nulle* et que les observations utilisées formaient *une suite continue qui comprenait l'époque du maximum des perturbations*. L'amplitude des perturbations était très sensible à cause de la proximité de Neptune à Uranus et de la grande masse de la planète troublante. Il n'y a rien d'étonnant qu'une méthode approchée comme celle du critérium, *construite précisément dans l'hypothèse $e' = 0$* et destinée à l'étude de *séries continues* de résidus, s'applique admirablement au cas de Neptune.

Dans le cas de Pluton nous sommes dans des conditions absolument différentes. D'abord l'amplitude des perturbations est beaucoup moins sensible, ce qui rend *a priori* très peu indiqué l'usage d'une théorie approchée comme celle du critérium.

Ensuite l'excentricité de Pluton est aussi considérable que celle de Neptune est petite, et nous avons déjà signalé les différentes difficultés qui en résultent pour la transformation de Brown. D'ailleurs Brown l'avoue lui-même puisqu'il dit : « *l'excentricité de l'orbite de Pluton et sa proximité à l'orbite de Neptune sont si grandes que la théorie sur laquelle est basé le critérium ne peut être appliquée à proprement parler* » ⁽¹⁾. Mais Brown oublie de mentionner que la difficulté s'étend aussi à Uranus puisque le critérium est, comme on l'a vu, indépendant de la distance mutuelle des planètes.

Cependant il nous sera facile de mettre en évidence l'erreur de Brown même sans mettre en doute le degré d'approximation de la transformation. Il nous suffira de remarquer que *l'application du critérium exige* qu'on dispose d'une série continue de résidus, ou plus précisément qu'on puisse représenter les résidus par une courbe continue. Il en résulte immédiatement que Brown est amené à *négliger les résidus anciens* dans l'application du critérium. Il tente de justifier cette omission par l'incertitude qui règne sur l'erreur probable de ces résidus, mais en fait, même si ces résidus étaient très précis, Brown n'aurait pas pu les faire intervenir dans le critérium simplement parce qu'ils sont isolés. Or, nous avons déjà montré l'extrême importance des résidus anciens dans la solution de Lowell. Il en est de même du résidu isolé de 1798 utilisé par Pickering pour l'étude des perturbations de Neptune et omis par Brown au moment où il applique la transformation.

Nous avons trouvé un moyen indirect de tenir compte des résidus anciens dans l'application de la transformation : ce moyen consiste à se servir de la courbe des perturbations réduites que Lowell et Pickering font passer parmi l'ensemble des résidus étudiés et de transformer cette courbe. On réalise ainsi une interpolation graphique entre les résidus isolés. L'application de ce procédé montre, contrairement aux affirmations de Brown, que la transformation appliquée à l'ensemble des résidus, ainsi reliés, donne une courbe canonique aussi bien au voisinage des perturbations maximum de Neptune (1892) qu'au voisinage

⁽¹⁾ *Monthly Notices*, 1931, t. 92, p. 99. C'est nous qui soulignons.

des perturbations maximum d'Uranus (1712), c'est-à-dire dans le domaine de validité du critérium lui-même.

La courbe en pointillé de la figure 28 a été obtenue en transformant les perturbations réduites de la solution X_1 de Lowell par la méthode de Brown. On remarque immédiatement qu'elle a bien la forme canonique et qu'à un léger retard près, que nous avons déjà expliqué, elle reste parallèle à la courbe des perturbations transformées exactes d'Uranus par Pluton.

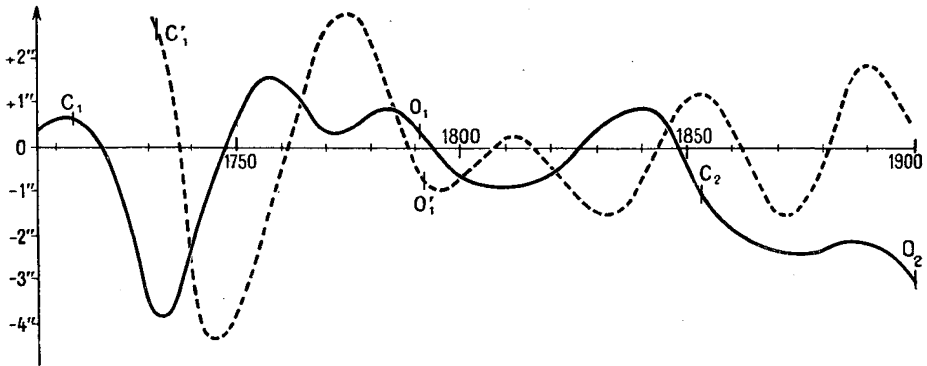


Fig. 28.

En plein : perturbations réduites exactes d'Uranus (solution L_1 avec $m' = 1,65 T$) après transformation de Brown.

En pointillé : perturbations réduites de la solution X_1 de Lowell après transformation de Brown.

De même la courbe en pointillé de la figure 29 a été obtenue en transformant la courbe des résidus réduits de Neptune tracée par Pickering en 1919 et 1928 à travers l'ensemble des résidus, 1795 inclus⁽¹⁾. On voit immédiatement que *l'allure de la courbe des résidus transformés de Pickering est bien canonique* et qu'elle est sensiblement parallèle à la courbe des perturbations transformées exactes de Neptune par Pluton, d'après Nicholson et Mayall, avec une masse de Pluton voisine de $1,4 T$.

L'insuffisance du procédé de Brown, *tel qu'il l'a appliqué*, apparaît nettement sur la courbe en petits cercles que nous

(¹) Voir fig. 20, p. 127.

empruntons à Brown ⁽¹⁾ et qui montre à combien peu se réduit la courbe des résidus transformés de Neptune quand on ne tient pas compte du résidu ancien de 1793.

Du reste Brown s'est posé lui-même la grave question suivante : « On peut se demander si après la transformation les observations gardent toute leur valeur en ce qui concerne la prédiction » ⁽²⁾. Brown n'a pas répondu à sa question, mais il suffit de comparer l'arc de résidus transformés qu'il obtient en négligeant l'observation de 1793 avec l'arc complet correspondant aux travaux réels de Pickering (*fig. 29*) pour voir immédiatement que la

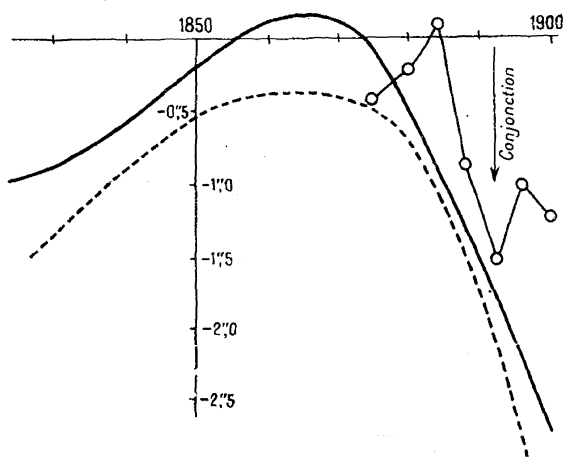


Fig. 29.

En plein : perturbations exactes de Neptune (Nicholson et Mayall)
après transformation de Brown ($m' = 1,4 T$).
En pointillé : résidus réduits de Neptune de Pickering (1919-1928) transformés.
Petits cercles : résidus de Neptune transformés par Brown.

réponse est entièrement négative : *la transformation, appliquée brutalement, ne permet pas de tenir compte de toutes les données.*

⁽¹⁾ *Monthly Notices*, 1931, t. 92, p. 100, fig. 6.

⁽²⁾ « It may be questioned whether the full value of observations is retained in the transformation as far as the prediction is concerned. »

Il est exact que « s'il n'y a rien d'observable, toute prédiction basée sur les observations ne peut avoir aucune valeur » ⁽¹⁾, mais il n'y a pas lieu d'appliquer cette remarque à la découverte de Pluton quand on a prouvé seulement qu'il n'y a rien d'observable dans *une partie*, la moins importante, de *l'ensemble des données*.

CHAPITRE III.

CONCLUSION DE LA QUATRIÈME PARTIE.

Les conclusions qui se dégagent de l'étude de la transformation de Brown sont très différentes selon qu'il s'agit de la transformation en tant que *critérium* de la découverte de Pluton ou de la transformation en tant que nouvelle *méthode de recherche*.

Comme critérium elle est inacceptable pour de nombreuses raisons :

1° Il n'y a pas lieu de l'appliquer aux résidus modernes d'Uranus puisque les perturbations d'Uranus par Pluton n'ont été sensibles qu'antérieurement à 1780 et ne le redeviendront qu'après 1950-1960. La transformation de Brown ne nous apprend donc rien de nouveau pour la période 1780-1910 et ne fait que confirmer l'existence dans les résidus de Gaillot des oscillations fictives que nous avons trouvées, de notre côté, dans les perturbations correspondantes de Lowell.

2° La transformation ne s'applique pas directement aux résidus anciens parce que ceux-ci sont *isolés*, et cependant c'est surtout de ces résidus que dépend la solution de Lowell. Quand on applique la transformation indirectement, en se servant de la courbe que les perturbations de Lowell tracent parmi les résidus anciens, on constate que *les résidus satisfont au critérium*; dans la mesure où ce critérium lui-même s'applique à une planète de très forte excentricité comme Pluton. La courbe des perturbations transformées de Lowell suit bien celle des perturbations exactes.

⁽¹⁾ *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 1932, vol. 44, p. 26.

3° Les résidus transformés de Pickering, ont bien, dans l'ensemble, une allure canonique, dans la mesure où l'on peut parler d'allure canonique pour une fraction de période synodique aussi faible que celle couverte par les résidus en question. En tout cas le trait principal de la courbe canonique, à savoir, le maximum précédant la conjonction, est présent. Nous avons montré également le parfait parallélisme des résidus transformés de Pickering avec les perturbations transformées de Neptune calculées par Nicholson et Mayall. Si ces importants résultats n'apparaissent pas chez Brown c'est que là, comme pour Uranus, il commence par rejeter une observation ancienne de Neptune (1793) de Lalande, et n'envisage que les résidus postérieurs à 1846, alors que nous considérons l'ensemble des résidus dont s'est servi Pickering.

Revenons maintenant à la transformation en tant que méthode de recherche de nouvelles planètes. Elle se présente comme une méthode intermédiaire entre celle de Pickering et celle de Lowell.

Plus objective et plus précise que celle de Pickering, mais aussi rapide et facile que cette dernière, elle est entachée à peu près des mêmes défauts d'approximation dus principalement à l'hypothèse trop simple $e' = 0$. Cependant dans les cas où cette hypothèse est voisine de la vérité, comme ce fut pour la découverte de Neptune, la méthode peut donner d'excellents résultats.

Par contre la méthode de Brown est nettement moins puissante et moins rigoureuse que celle de Le Verrier-Lowell qui seule permet de tirer des données tout ce qu'elles contiennent et cela seulement.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

La déduction, l'observation et le hasard : tels sont les trois facteurs essentiels, indissolublement liés, de la découverte de Neptune, de celle de Pluton et, au fond, de toute grande découverte scientifique.

Prétendre ramener la découverte de Pluton au seul hasard est aussi contraire à la stricte vérité, que de prétendre ramener la découverte de Neptune à la Mécanique céleste seule, comme on l'a fait quelquefois.

Le rôle prépondérant que l'analyse avait joué dans la découverte de Neptune fit oublier à certains que, même dans ce cas, le hasard favorable eut sa part dans le succès : qu'on songe seulement à l'excentricité exceptionnelle de Neptune, aux 18° d'incertitude sur la longitude prédite, ou à l'écart actuel entre le vrai Neptune et le Neptune de Le Verrier.

Dans le cas de Pluton, la part du hasard fut incontestablement plus grande que dans le cas de Neptune; mais nos recherches prouvent : que *c'est seulement grâce à la Mécanique céleste que le hasard put exercer son rôle bienfaisant*. Car il apparaît dans *l'allure des résidus* d'Uranus et de Neptune et non dans quelque circonstance fortuite relative aux recherches photographiques de l'astre. La Mécanique céleste eut sa part directe dans la découverte de Pluton : c'est elle qui transforma l'idée de *l'existence de l'astre*, d'une hypothèse gratuite, en *une certitude absolue*; c'est elle aussi qui permit de le localiser dans « la vaste étendue du ciel ». Nous avons vu, enfin, que le zèle des observateurs et l'incomparable instrument de recherche que constitue la photographie avec le « blink-microscop » eurent aussi leur part dans le succès de l'Observatoire Lowell.

Dans le problème qui nous occupe, *on ne peut adopter un point de vue trop limité sans déformer entièrement la vérité.*

La thèse du « pur hasard » est absolument insoutenable. Pluton fut « découvert » dès 1913 par Lowell, et « redécouvert » en 1919 par Pickering, grâce à la Mécanique céleste.



ADDITION.

TABLEAU I.

Valeurs des transcendantes $b_n^{(i)}$, $c_n^{(i)}$, $e_n^{(i)}$,

i	$b^{(i)}$	$b_1^{(i)}$	$b_2^{(i)}$	$b_3^{(i)}$	$b_4^{(i)}$
0.....	2,136 483	0,318 066	0,536 121	0,932 566	2,848 243
1.....	0,535 810	655 394	449 315	1,022 979	800 040
2.....	197 239	443 650	679 430	0,995 462	969 874
3.....	080 229	261 781	646 296	1,282 179	3,042 099
4.....	034 189	146 031	501 498	392 903	594 218
5.....	014 968	078 988	348 497	277 357	4,072 210
6.....	006 670	041 897	226 099	039 052	122 736
7.....	003 010	021 924	139 989	0,776 683	3,751 926
8.....	001 371	011 359	083 789	545 803	132 102
9.....	000 629	005 841	048 883	366 046	2,442 570
10.....	000 290	002 985	027 955	236 663	1,804 600
11.....	000 134	001 518	015 731	148 647	276 426
12.....	000 063	000 768	008 733	091 163	0,871 192
13.....	000 029	000 386	004 796	054 81	577 22
14.....	000 014	000 190	002 609	032 40	373 00
15.....	000 007	000 087	001 408	018 88	235 93

i	$b_5^{(i)}$	$b_6^{(i)}$	$b_7^{(i)}$	$b_8^{(i)}$	$b_9^{(i)}$
0.....	10,716 74	51,346	291,88	1937,9	1467 (2)
1.....	882 33	391	293,09	1941,5	1470 (0)
2.....	979 86	52,222	295,43	1955,8	1477 (8)
3.....	11,482 57	53,200	300,50	1978,2	1491 (6)
4.....	957 89	55,267	307,18	2013,4	1511 (2)
5.....	13,460 54	57,757	317,90	2060,0	1538 (4)
6.....	15,289 45	63,178	331,82	2126,2	1573 (9)
7.....	16,330 87	70,874	356,46	2213,2	1620 (8)
8.....	058 29	77,545	393,46	2348,8	1682 (3)
9.....	14,596 04	80,178	433,19	2552,1	1771 (4)
10.....	12,392 89	77,666	461,12	2803,1	1893 (4)
11.....	9,942 18	70,584	468,29	3009,0	2100 (3)
12.....	7 602 98	60,741	447,63	3189,8	2165 (6)

TABLEAU I (suite.)

i	$e^{(i)}$	$e_1^{(i)}$	$e_2^{(i)}$	$e_3^{(i)}$	$e_4^{(i)}$
0.....	3,626 802	4,885 435	14,201 3	51,272 0	240,437
1.....	2,415 498	5,235 738	13,555 4	51,427 4	238,298
2.....	1,418 664	4,392 611	13,335 3	49,654 3	235,368
3.....	0,789 807	3,204 757	12,017 3	47,836 8	228,182
4.....	426 763	2,148 014	9,834 1	44,305 8	219,152
5.....	226 226	1,361 084	7,437 8	38,614 2	205,823
6.....	118 336	0,828 834	5,291 4	31,613.0	186,012
7.....	061 294	490 036	3,589 2	24,467 7	160,451
8.....	031 510	283 197	2,344 3	18,048 7	132,035
9.....	016 103	160 727	1,485 3	12,784 6	103,938
10.....	008 189	089 886	0,917 9	8,751 (3)	78,629

i	$e_3^{(i)}$	$e_6^{(i)}$	$e_7^{(i)}$	$e_8^{(i)}$	$e_9^{(i)}$
0.....	1345,2	8832,1	6630.10	5606.10 ²	527.10 ³
1.....	1342,1	8804,6	6617	5597	526
2.....	1325,7	8737,3	6575	5570	524
3.....	1302,1	8613,7	6507	5524	521
4.....	1264,8	8444,9	6408	5459	516
5.....	1216,8	8214,6	6280	5373	509
6.....	1153,1	7924,7	6117	5267	501
7.....	1065,5	7560,2	5918	5139	492
8.....	951,9	7087,5	5675	4982	480
9.....	818,7	6484,1	5374	4800	467
10.....	677,6	5759,(0)	4998	4577	451

i	$e^{(i)}$	$e_1^{(i)}$	$e_2^{(i)}$	$e_3^{(i)}$	$e_4^{(i)}$
0.....	9,004 51	28,583	128,83	701,5	4529
1.....	7,725 51	27,996	125,48	692,9	4483
2.....	5,686 32	24,709	117,96	663,4	4355
3.....	3,827 85	19,825	105,18	617,4	4139
4.....	2,431 42	14,757	88,34	555,2	3849
5.....	1,482 86	10,367	70,06	479,3	3489
6.....	0,8776	6,962	52,84	396,4	3072
7.....	5075	4,511	38,16	314,5	2618

TABLEAU I (suite.)

i	$e_0^{(i)}$	$e_6^{(i)}$	$e_7^{(i)}$	$e_8^{(i)}$	$e_9^{(i)}$
0.....	336.10 ²	282.10 ³	263.10 ⁴	271.10 ⁵	304.10 ⁶
1.....	334	280	262	270	303
2.....	326	275	258	267	300
3.....	314	268	252	260	296
4.....	298	257	244	255	289
5.....	277	243	234	246	281
6.....	253	228	222	235	270
7.....	226	209	207	223	259

i	$f^{(i)}$	$f_1^{(i)}$	$f_2^{(i)}$	$f_3^{(i)}$	$f_4^{(i)}$
0.....	26,734	136,2	854,9	6222	5148.10
1.....	24,754	132,2	836,4	6132	5091
2.....	20,367	119,5	784,9	5861	4923
3.....	15,380	100,8	704,6	5432	4653
4.....	10,902	79,9	603,9	4876	4293
5.....	7,364	60,2	494,7	4231	3864
6.....	4,791	43,2	388,4	3545	3388
7.....	3,024	30,1	293,5	2872	2889

i	$f_5^{(i)}$	$f_6^{(i)}$	$f_7^{(i)}$	$f_8^{(i)}$	$f_9^{(i)}$
0.....	476.10 ³	486.10 ⁴	544.10 ⁵	660.10 ⁶	863.10 ⁷
1.....	472	483	541	657	860
2.....	460	473	531	647	850
3.....	440	457	516	632	833
4.....	414	435	496	611	809
5.....	381	407	470	585	779
6.....	344	376	440	553	743
7.....	305	341	407	518	703

TABLEAU II.

Valeurs des coefficients $a'A_n^{(i)}$, $a'B_n^{(i)}$, $a'E_n^{(i)}$,

$$aa' \frac{dA_n^{(i)}}{da}, aa' \frac{dB_n^{(i)}}{da}, aa' \frac{dE_n^{(i)}}{da}, \dots$$

i	$a'A^{(i)}$	$a'A_1^{(i)}$	$a'A_2^{(i)}$	$a'A_3^{(i)}$	$a'A_4^{(i)}$
0.....	2,136 483	0,318 066	0,268 060	0,155 428	0,118 677
1.....	0,535 810	655 394	224 658	170 497	116 668
2.....	197 239	443 650	339 715	165 910	123 745
3.....	080 229	261 781	323 148	213 696	126 754
4.....	034 189	146 031	250 749	232 150	149 759
5.....	014 968	078 988	174 248	212 893	169 675
6.....	006 670	041 897	113 050	173 175	171 781
7.....	003 010	021 924	069 994	129 447	156 330
8.....	001 371	011 359	041 894	090 967	130 504
9.....	000 629	005 841	024 441	061 008	101 774
10.....	000 290	002 985	013 976	039 450	075 192
11.....	000 134	001 518	007 864	024 776	053 184
12.....	000 063	000 769	004 366	015 194	036 300

i	$a'A_5^{(i)}$	$a'A_6^{(i)}$	$a'A_7^{(i)}$	$a'A_8^{(i)}$	$a'A_9^{(i)}$
0.....	0,089 306	0,071 315	0,057 913	0,048 063	0,040 43
1.....	090 686	071 377	058 152	048 153	040 51
2.....	091 499	072 531	058 618	048 506	040 72
3.....	095 688	073 889	059 624	049 061	041 10
4.....	099 649	076 759	060 948	049 935	041 64
5.....	112 171	080 218	063 075	051 090	042 40
6.....	127 412	087 748	065 837	052 732	043 37
7.....	136 090	098 436	070 727	054 891	044 66
8.....	133 819	107 702	078 067	058 254	046 36
9.....	121 634	111 358	085 951	063 297	048 81
10.....	103 274	107 869	091 493	069 522	052 18
11.....	082 851	098 033	092 915	074 628	057 88
12.....	063 358	084 362	088 815	079 113	059 68

TABLEAU II (suite.)

i	$aa' \frac{dA_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dA_2^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dA_3^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dA_4^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dA_5^{(i)}}{da}$
0.....	0,318 066	0,854 187	1,002 404	0,940 990	0,921 238
1.....	655 394	1,104 710	0,960 805	978 163	920 104
2.....	443 650	123 080	1,177 161	992 710	952 473
3.....	261 781	0,908 078	287 386	1,148 106	985 357
4.....	146 031	647 529	197 949	295 488	1,097 282
5.....	078 988	427 485	0,987 175	317 380	239 557
6.....	041 897	267 997	745 625	206 649	324 183
7.....	021 924	161 913	528 330	013 662	305 774
8.....	011 359	095 148	356 690	0,794 918	191 113
9.....	005 841	054 723	231 906	590 118	015 263
10.....	002 985	030 937	146 303	419 117	0,817 137
11.....	001 518	017 246	090 057	287 067	626 995
12.....	000 769	009 502	054 315	190 780	461 990

i	$aa' \frac{dA_6^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dA_7^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dA_8^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dA_9^{(i)}}{da}$	
0.....	0,874 419	0,833 276	0,789 89	0,748 39	
1.....	881 690	835 326	792 29	749 81	
2.....	892 682	845 513	798 38	754 56	
3.....	921 774	860 701	809 86	762 43	
4.....	958 801	887 193	826 12	774 28	
5.....	1,042 166	922 837	850 25	790 29	
6.....	163 547	987 344	882 71	812 20	
7.....	271 072	1,085 707	934 21	841 10	
8.....	315 308	192 681	1,012 50	883 26	
9.....	276 317	269 809	108 04	945 71	
10.....	163 587	287 667	196 63	1,025 77	
11.....	002 454	238 604	247 44	117 95	
12.....	0,822 963	127 877	254 61	170 00	

i	$a'B_1^{(i)}$	$a'B_2^{(i)}$	$a'B_3^{(i)}$	$a'B_4^{(i)}$	$a'B_5^{(i)}$
0.....	1,760 104	4,131 029	5,816 903	7,593 07	9,008 97
1.....	172 253	3,713 182	830 183	448 91	8,978 29
2.....	0,688 485	2,820 240	367 588	252 08	775 62
3.....	383 297	1,938 581	4,471 322	6,785 27	483 32

TABLEAU II (*suite.*)

i	$a' B^{(i)}$	$a' B_1^{(i)}$	$a' B_2^{(i)}$	$a' B_3^{(i)}$	$a' B_4^{(i)}$
4.....	0,207 110	1,249 552	3,428 701	5,969 89	8,015 09
5.....	109 788	0,770 329	2,465 330	4,928 06	7,285 23
6.....	057 429	459 666	1,686 208	3,840 96	6,318 32
7.....	029 746	267 563	108 737	2,849 97	5,223 55
8.....	015 292	152 729	0,706 293	028 71	4,129 73
9.....	007 815	085 816	438 422	1,394 49	3,135 82
10.....	003 974	047 596	266 348	0,930 56	2,297 8
i	$a' B_5^{(i)}$	$a' B_6^{(i)}$	$a' B_7^{(i)}$	$a' B_8^{(i)}$	$a' B_9^{(i)}$
0.....	10,302	11,393	12,34	13,13	13,8
1.....	10,246	11,362	12,31	13,11	13,8
2.....	10,121	11,251	12,22	13,04	13,7
3.....	9,880	11,072	12,07	12,91	13,6
4.....	9,547	10,807	11,86	12,74	13,5
5.....	9,083	10,458	11,58	12,51	13,3
6.....	8,425	10,005	11,23	12,23	13,0
7.....	7,554	9,405	10,80	11,88	12,8
8.....	6,520	8,627	10,24	11,46	12,4
9.....	5,413	7,682	9,55	10,95	12,0
10.....	4,330	6,622	8,69	10,32	11,5
i	$aa' \frac{dB^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dB_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dB_2^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dB_3^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dB_4^{(i)}}{da}$
0.....	4,131 029	15,764 8	34,413	58,815	87,546
1.....	3,713 182	373 5	34,007	58,260	87,144
2.....	2,820 240	13,555 4	32,491	56,859	85,706
3.....	1,938 581	10,881 2	29,298	54,289	83,334
4.....	249 552	8,107 0	24,767	49,970	79,793
5.....	0,770 329	5,701 0	19,715	43,925	74,556
6.....	459 666	3,832 1	14,895	36,796	67,397
7.....	267 563	2,485 0	10,767	29,444	58,663
8.....	152 729	1,565 3	7,499	22,605	49,117
9.....	085 816	0,962 7	5,060	16,727	39,608
10.....	047 596	580 3	3,324	11,983	30,841

TABLEAU II (suite.)

i	$aa' \frac{dB_8^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dB_6^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dB_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dB_3^{(i)}}{da}$	
0.....	119,87	154,7	191,4	229	
1.....	119,40	154,3	191,0	229	
2.....	118,11	153,0	189,8	228	
3.....	115,83	150,9	187,8	226	
4.....	112,58	147,9	185,0	223	
5.....	108,16	143,8	181,2	220	
6.....	102,15	138,6	176,5	215	
7.....	94,20	132,0	170,6	210	
8.....	84,36	123,4	163,4	204	
9.....	73,16	112,9	154,4	196	
10.....	61,38	100,6	143,4	186	

i	$a'E^{(i)}$	$a'E_1^{(i)}$	$a'E_2^{(i)}$	$a'E_3^{(i)}$	$a'E_4^{(i)}$
0.....	1,172 253	3,713 182	5,830 183	7,448 91	8,978 3
1.....	224 295	475 635	592 246	422 57	892 3
2.....	0,777 775	2,825 881	150 752	117 09	730 8
3.....	447 797	034 896	4,398 144	6,610 98	395 4
4.....	246 543	1,354 455	3,468 326	5,856 67	7,884 3
5.....	132 269	0,854 609	2,557 454	4,905 43	166 7
6.....	069 767	518 946	1,787 034	3,889 02	6,254 4
7.....	036 361	306 198	196 251	2,934 83	5,224 0
8.....	018 781	176 690	0,773 580	122 23	4,179 7
9.....	009 633	100 163	486 321	1,479 63	3,213 8

i	$a'E_5^{(i)}$	$a'E_6^{(i)}$	$a'E_7^{(i)}$	$a'E_8^{(i)}$	$a'E_9^{(i)}$
0.....	10,246	11,362	12,31	13,11	13,8
1.....	10,211	11,322	12,28	13,08	13,8
2.....	10,063	11,217	12,19	13,01	13,7
3.....	9,834	11,029	12,04	12,89	13,6
4.....	9,482	10,765	11,83	12,71	13,4
5.....	8,986	10,406	11,55	12,49	13,3
6.....	8,318	9,932	11,19	12,20	13,0
7.....	7,472	9,316	10,74	11,85	12,7
8.....	6,483	8,543	10,17	11,42	12,4
9.....	5,425	7,624	9,47	10,89	12,0

TABLEAU II (suite.)

i	$aa' \frac{dE_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dE_2^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dE_3^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dE_4^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dE_5^{(i)}}{da}$
0.....	3,713 182	15,373 55	34,007 11	58,260	87,144
1.....	475 635	14,660 13	33,452 21	57,837	86,626
2.....	2,825 881	13,127 39	31,652 78	56,274	85,239
3.....	034 896	10,831 18	28,629 24	53,414	82,749
4.....	1,354 455	8,291 11	24,506 66	49,107	78,945
5.....	0,854 609	5,969 52	19,831 19	43,383	73,595
6.....	518 946	4,093 01	15,241 11	36,685	66,610
7.....	306 198	2,698 70	11,197 00	29,701	58,257
8.....	176 690	1,723 85	7,913 85	23,085	49,136
9.....	100 163	072 80	5,411 54	17,294	39,980
i	$aa' \frac{dE_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dE_2^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dE_3^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dE_4^{(i)}}{da}$	
0.....	119,40	154,3	191,0	228,(9)	
1.....	118,99	153,9	190,6	228,(4)	
2.....	117,62	152,6	189,4	227,(3)	
3.....	115,34	150,5	187,4	225,(4)	
4.....	111,99	147,4	184,5	222,(7)	
5.....	107,36	143,3	180,7	219,(1)	
6.....	101,18	137,9	175,9	214,(8)	
7.....	93,26	131,1	169,9	209,(3)	
8.....	83,68	122,5	162,5	202,(9)	
9.....	72,87	112,0	153,4	194,(9)	
i	$a' G^{(i)}$	$a' G_1^{(i)}$	$a' G_2^{(i)}$	$a' G_3^{(i)}$	$a' G_4^{(i)}$
0.....	4,185 6	22,834	66,285	141,7	253,6
1.....	3,749 7	21,613	64,141	138,9	250,2
2.....	018 9	18,595	58,559	131,0	240,5
3.....	2,165 6	14,723	49,415	118,4	224,7
4.....	1,438 7	10,888	40,606	102,6	203,7
5.....	0,906 8	7,625	31,052	85,2	178,8
i	$a' G_5^{(i)}$	$a' G_6^{(i)}$	$a' G_7^{(i)}$	$a' G_8^{(i)}$	$a' G_9^{(i)}$
0.....	405,2	598,3	833,1	110 (9)	142 (5)
1.....	401,4	594,1	828,6	110 (4)	142 (0)
2.....	390,1	581,5	814,9	109 (0)	140 (4)
3.....	371,7	560,8	792,3	106 (5)	137 (9)
4.....	346,6	532,4	761,1	103 (1)	134 (2)
5.....	315,8	496,9	721,9	98 (9)	129 (7)

TABLEAU II (suite.)

i	$aa' \frac{dG_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dG_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dG_2^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dG_3^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dG_4^{(i)}}{da}$
0.....	22,834	155,40	557,51	1439,2	3040,3
1.....	21,613	149,90	544,99	1417,7	3008,0
2.....	18,595	135,71	510,03	1354,8	2912,6
3.....	14,723	113,55	454,12	1254,1	2757,1
4.....	10,888	92,10	388,99	1122,6	2547,8
5.....	7,625	69,73	317,60	970,7	2294,2

i	$aa' \frac{dG_5^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dG_6^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dG_7^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dG_8^{(i)}}{da}$	
0.....	5615,8	9421,7	1470,10	2170,10	
1.....	5571,4	9364,1	1463	2161	
2.....	5439,5	9192,9	1442	2136	
3.....	5222,9	8910,5	1407	2093	
4.....	4927,3	8522,0	1358	2033	
5.....	4560,9	8034,8	1297	1959	

i	$a' L^{(i)}$	$a' L_1^{(i)}$	$a' L_2^{(i)}$	$a' L_3^{(i)}$	$a' L_4^{(i)}$
0.....	2,595 0	14,604	43,218	93,189	167,55
1.....	729 3	15,349	44,675	95,021	169,75
2.....	595 0	14,604	43,218	93,189	167,55
3.....	040 8	12,529	38,932	87,769	160,98
4.....	1,433 9	9,839	33,596	79,287	150,35
5.....	0,938 1	7,209	26,708	68,577	136,20
6.....	584 5	5,005	20,726	56,789	119,43
7.....	351 6	3,331	15,170	45,114	101,24

i	$a' L_5^{(i)}$	$a' L_6^{(i)}$	$a' L_7^{(i)}$	$a' L_8^{(i)}$	$a' L_9^{(i)}$
0.....	268,43	396,97	553,38	737,2	947,6
1.....	270,98	399,78	556,44	740,6	951,0
2.....	268,44	396,97	553,38	737,2	947,6
3.....	260,87	388,54	544,23	727,5	937,2
4.....	248,51	374,70	529,12	711,2	919,9
5.....	231,68	355,70	508,30	688,8	896,2
6.....	210,99	331,99	482,05	659,7	864,3
7.....	187,32	304,15	450,84	625,7	828,2

TABLEAU II (suite.)

i	$aa' \frac{dL^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dL_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dL_2^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dL_3^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dL_4^{(i)}}{da}$
0.....	14,604	101,04	366,00	949,76	2012,4
1.....	15,349	104,70	374,41	964,07	2033,9
2.....	14,604	101,04	366,00	949,76	2012,4
3.....	12,529	90,39	341,17	907,24	1948,3
4.....	9,839	77,03	305,05	839,24	1843,9
5.....	7,209	60,62	259,15	750,53	1703,2
6.....	5,005	46,46	211,82	648,09	1532,7
7.....	3,331	33,67	165,68	540,31	1341,6

i	$aa' \frac{dL^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dL_6^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dL_7^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dL_8^{(i)}}{da}$	
0.....	3724,0	6255,5	9771	1443,10	
1.....	3753,6	6293,8	9820	1448	
2.....	3724,0	6255,5	9771	1443	
3.....	3635,6	6140,8	9629	1425	
4.....	3490,7	5952,0	9393	1397	
5.....	3292,7	5692,3	9068	1358	
6.....	3046,9	5366,3	8652	1306	
7.....	2761,5	4980,8	8161	1246	

i	$a'S^{(i)}$	$a'S_1^{(i)}$	$a'S_2^{(i)}$	$a'S_3^{(i)}$	$a'S_4^{(i)}$
0.....	12,258	104,23	456,14	1400,7	3440,5
1.....	12,959	108,28	468,61	1428,4	3491,3
2.....	12,258	104,23	456,14	1400,7	3440,5
3.....	10,580	93,33	420,82	1320,5	3292,2
4.....	8,386	78,18	368,80	1197,3	3058,2
5.....	6,200	61,76	308,01	1044,7	2756,8
6.....	4,339	46,39	246,13	878,4	2411,6

i	$a'S_5^{(i)}$	$a'S_6^{(i)}$	$a'S_7^{(i)}$	$a'S_8^{(i)}$	$a'S_9^{(i)}$
0.....	7252,1	13 679	23 716	38 489	59 230
1.....	7334,2	13 801	23 886	38 718	59 526
2.....	7252,1	13 679	23 716	38 489	59 230
3.....	7010,5	13 318	23 209	37 811	58 357
4.....	6623,2	12 733	22 384	36 701	56 919
5.....	6112,4	11 950	21 264	35 181	54 934
6.....	5507,6	11 004	19 895	33 310	52 483

TABLEAU II (suite.)

i	$aa' \frac{dS(i)}{da}$	$aa' \frac{dS_1^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dS_2^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dS_3^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dS_4^{(i)}}{da}$
0.....	104,23	1016,5	5114,2	17 964	50 023
1.....	108,28	1045,5	5222,6	18 251	50 636
2.....	104,23	1016,5	5114,2	17 964	50 023
3.....	93,33	935,0	4803,2	17 130	48 221
4.....	78,18	815,8	4329,5	15 824	45 349
5.....	61,76	677,8	3750,1	14 161	41 589
6.....	46,39	538,7	3127,6	12 282	37 185
i	$aa' \frac{dS_5^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dS_6^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dS_7^{(i)}}{da}$	$aa' \frac{dS_8^{(i)}}{da}$	
0.....	118 33.10	248 08.10	473 92.10	840 98.10	
1.....	119 48	250 01	476 95	845 48	
2.....	118 33	248 08	473 92	840 98	
3.....	114 96	242 37	464 95	827 70	
4.....	109 52	233 09	450 29	805 88	
5.....	102 26	220 55	430 30	775 85	
6.....	93 56	205 29	405 75	738 83	

TABLEAU III. — *Calcul des*

DATE		LONGITUDE MOYENNE				LONGITUDE DU PÉRIHÉLIE		
t	z	l^{vi}	ΔL_s	$\delta L_{L.P.}$	L	$\varpi + \Delta\varpi_s$	$\delta\varpi_{L.P.}$	ϖ
		^G			^G	^G	^G	^G
1709,82...	— 9 α	165,19	+ 2"	—3125"	164,22	189,68	—2,88	186,80
1723,40...	— 8 α	239,34	2	3123	238,38	69	87	82
1740,97...	— 7 α	313,49	1	3121	312,53	71	87	84
1756,53...	— 6 α	387,64	1	3118	386,68	72	87	85
1772,12...	— 5 α	061,79	1	3112	060,83	74	86	88
1787,70...	— 4 α	135,94	0	3106	134,98	75	86	89
1803,27...	— 3 α	210,09	0	3096	209,13	77	85	92
1818,83...	— 2 α	284,24	0	3086	283,30	79	84	95
1834,42...	— 1 α	358,39	0	3074	357,44	80	83	186,97
1850,00...	0	032,54	0	3060	031,60	82	81	187,01
1865,57...	α	106,69	0	3044	105,75	83	80	03
1881,15...	2 α	180,84	0	3027	179,91	85	78	07
1896,72...	3 α	254,99	0	3008	254,06	86	77	09
1912,30...	4 α	329,14	1	2988	328,22	88	75	13
1927,88...	5 α	003,29	1	2966	002,37	89	73	16
1943,45...	6 α	077,44	1	2942	076,53	91	70	21
1959,03...	7 α	151,59	2	2916	150,69	92	68	24
1974,60...	8 α	225,74	2	2889	224,85	94	66	28
1990,18...	9 α	299,89	2	2860	299,01	96	63	33
2005,75...	10 α	374,04	3	2829	373,17	97	60	37
2021,33...	11 α	048,19	3	2797	047,33	189,99	57	42
2036,90...	12 α	122,34	4	2763	121,49	190,00	54	46
2052,48...	13 α	196,49	5	2728	195,65	02	51	51
2068,05...	14 α	270,64	6	2690	269,81	03	47	56
2083,63...	15 α	344,79	6	2650	343,97	05	44	61
2099,20...	16 α	018,94	7	2610	018,14	06	40	66
2114,78...	17 α	093,09	8	2568	092,30	08	36	72
2130,36...	18 α	167,24	9	2524	166,46	09	32	77
2145,93...	19 α	241,39	10	2478	240,63	11	28	83
2161,51...	20 α	315,54	11	2431	314,79	12	23	89
2177,08...	21 α	389,69	12	2382	388,96	14	19	187,95
2192,66...	22 α	063,84	13	2331	063,12	16	14	188,02
2208,23...	23 α	137,99	14	2279	137,29	17	09	08
2223,81...	24 α	212,14	+15	—2225	211,46	190,19	—2,04	188,15

positions d'Uranus.

EXCENTRICITÉ			ÉQUATION DU CENTRE (COEFFICIENTS)					POSITIONS dans l'orbite		LONGIT. du nœud
E _s	δE _{L. P.}	E	E ₁	E ₂	E ₃	B ₀	B ₁	v	r	θ _s
9570"	23"	9593"	G 5,92	G 0,17	G 0,01	1,0011	—0,0465	G 162,1	18,60	G 82,7
69	33	9602	92	»	»	»	»	242,8	18,79	6
68	43	11	93	»	»	»	»	317,9	19,76	4
67	53	20	94	»	»	»	»	386,7	20,27	3
66	63	29	94	»	»	»	»	55,5	19,77	1
65	73	38	95	»	»	»	»	130,5	18,79	82,0
64	83	47	95	»	»	»	»	211,3	18,55	81,8
64	93	57	96	»	»	»	»	289,3	19,37	7
63	102	65	96	»	»	»	»	360,0	20,19	5
62	113	75	97	0,17	»	»	»	27,8	20,08	4
61	122	83	97	0,18	»	»	»	99,9	19,16	2
60	132	9692	98	»	»	»	»	179,2	18,49	81,1
59	142	9701	98	»	»	»	—0,0465	259,4	18,96	80,9
59	152	11	99	»	»	»	—0,0470	332,8	19,95	7
58	163	21	5,99	»	»	»	»	1,0	20,26	6
57	172	29	6,00	»	»	»	»	70,7	19,57	4
56	182	38	00	»	»	»	»	147,3	18,64	3
55	192	47	01	»	»	»	»	228,4	18,64	1
54	202	56	01	»	»	»	»	304,8	19,58	80,0
54	212	66	02	»	»	»	»	374,4	20,27	79,8
53	222	75	03	»	»	»	»	42,6	19,94	6
52	232	84	04	»	»	»	»	116,1	18,95	5
51	242	9793	04	»	»	»	»	196,5	18,48	3
50	252	9802	05	»	»	»	—0,0470	275,7	19,17	2
49	262	11	06	»	»	»	—0,0475	347,6	20,10	79,0
48	272	20	06	»	»	»	»	15,5	20,20	78,9
47	282	29	07	»	»	»	»	86,2	19,35	7
46	292	38	07	»	»	»	»	164,3	18,52	6
45	302	47	08	»	»	»	»	245,3	18,79	4
45	312	57	08	»	»	»	»	320,2	19,79	3
44	322	66	09	»	»	»	»	388,9	20,30	1
43	332	75	09	»	»	»	»	57,6	19,76	78,0
42	342	84	10	»	»	»	—0,0475	132,7	18,76	77,8
9541	352	9893	6,10	0,18	0,01	1,0011	—0,0480	213,8	18,53	77,6

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION	I

PREMIÈRE PARTIE.

PERTURBATIONS PRODUITES PAR PLUTON DANS LE MOUVEMENT D'URANUS.

CHAPITRE I. — *Calcul des perturbations par la méthode classique.*

1. Les masses des planètes et les éléments de leurs orbites.....	7
2. Les variations des éléments d'Uranus sous l'action de Pluton.....	9
3. Mise sous la forme $\Sigma \Sigma t^k (M_{k,j} \sin jn't + N_{k,j} \cos jn't)$	13
4. Les « perturbations réduites » : conséquences de leur continuité quand $in + i'n'$ tend vers zéro.....	15

CHAPITRE II. — *Calcul des perturbations par la méthode d'interpolation.*

1. Introduction.....	21
2. Développement d'une fonction périodique $f(t)$ en somme de la forme $f(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \Sigma B_i \sin(in't + \varphi_i) + t \Sigma C_i \sin(in't + \psi_i)$	22
3. Valeurs particulières des dérivées des variations des éléments.....	30
4. Application des formules d'interpolation.....	32

CHAPITRE III. — *Comparaison des résultats des deux méthodes.....*

39

CHAPITRE IV. — *Résolution des équations de condition. La masse de Pluton.*

1. Introduction.....	42
2. Les résidus de Le Verrier : solutions L_1 et L_2 . Discussion des résultats.....	42
3. Les résidus de Gaillot : solution G_1 . Discussion des résultats.....	53

CHAPITRE V. — *Conclusion de la première partie.....*

56

DEUXIÈME PARTIE.

LE PLUTON DE LOWELL.

CHAPITRE I. — *Exposé de la méthode de Lowell.*

1. Introduction.....	60
2. Solution du premier ordre.....	62
3. Solution du second ordre.....	67
4. Perfectionnements apportés par Lowell à la méthode de Le Verrier.....	71
5. Transformation de la méthode de Lowell.....	72

	Pages.
CHAPITRE II. — <i>Analyse de la solution X_1 de Lowell.</i>	
1. Comparaison des positions de X_1 avec celles de Pluton	73
2. Comparaison des perturbations produites par X_1 et de celles produites par Pluton.....	77
3. Origine des oscillations fictives dans les perturbations réduites de la planète X_1 et explication de la solution H_{20}	88
4. Pseudo-dualité de la solution de Lowell.....	94
5. Le rôle des résidus anciens.....	97
6. « L'erreur probable » de la solution de Lowell.....	101
CHAPITRE III. — <i>Pluton : « planète Lowell ».</i>	
1. Introduction.....	103
2. La certitude de l'existence de Pluton.....	104
3. Les recherches de Pluton.....	104
4. L'identification de Pluton.....	105
5. La découverte photographique de Pluton.....	106
CHAPITRE IV. — <i>Conclusion de la deuxième partie.</i>	109

TROISIÈME PARTIE.

RECHERCHES DE W. H. PICKERING.

INTRODUCTION	113
CHAPITRE I. — <i>Exposé de la méthode de Pickering.</i>	
1. Les origines de la méthode	115
2. Correction des éléments elliptiques de la planète perturbée par la méthode de J. Herschell.....	115
3. Détermination graphique de l'accélération perturbatrice par la méthode de J. Herschell.....	117
4. La date du maximum des perturbations. — Repère A.....	119
5. La correction B.....	120
6. La correction C.....	121
7. Calcul de la masse et de la magnitude.....	121
CHAPITRE II. — <i>Analyse des solutions de Pickering.</i>	
1. Analyse du Mémoire de 1909.....	123
2. Analyse du Mémoire de 1919.....	126
3. Analyse du Mémoire de 1928.....	132
4. Les déterminations de l'inclinaison et de la longitude du nœud	137
5. Le calcul de la masse et de la magnitude.....	138
CHAPITRE III. — <i>Conclusion de la troisième partie</i>	139

QUATRIÈME PARTIE.

DISCUSSION DES CRITIQUES DE BROWN.

INTRODUCTION	144
CHAPITRE I. — <i>Les arguments indépendants du « critérium ».</i>	
1. La petitesse de la masse probable de Pluton	145
2. Le rôle des résidus anciens.....	147
3. La symétrie du système Pluton-Uranus par rapport au milieu de l'intervalle 1780-1910.....	148

	Pages.
CHAPITRE II. — <i>Étude de la transformation de Brown.</i>	
1. Les propriétés fondamentales de la transformation.....	150
2. Les applications de la transformation.....	153
3. Application de la transformation à la recherche de planètes inconnues.....	158
4. Les défauts de la transformation.....	160
5. La valeur de la transformation de Brown en tant que critérium de la découverte de Neptune et de Pluton.....	162
CHAPITRE III. — <i>Conclusion de la quatrième partie.</i>	167
CONCLUSION GÉNÉRALE.....	169
ADDITION (Tableaux numériques).....	171

Vu et approuvé :

Paris, le 19 juin 1941.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
chargé des fonctions de
RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CH. MAURAIN.

