

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

ABOLGHASSEM AHMAD-VAZIRI

**Sur quelques courbes liées au mouvement d'une courbe
plane dans son plan**

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1938

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__205__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__205__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

THÈSE N° 24

توانا بود هر که دانا بود

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

(SCIENCES MATHÉMATIQUES)

PAR

ABOLGHASSEM AHMAD-VAZIRI

(IRANIEN)

Licencié ès Sciences mathématiques

Diplômé de l'École normale supérieure de Téhéran

1^{re} THÈSE. — SUR QUELQUES COURBES LIÉES AU MOUVEMENT D'UNE COURBE PLANE DANS SON PLAN.

2^e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1938, devant la Commission d'Examen

MM. E. TURRIÈRE... *Président*

SOULA }
VASILESCO } *Assesseurs*

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, boulevard Saint-Michel, V^e

PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

	MM.	
<i>Doyen</i>	M. GODECHOT, Correspondant de l'Institut, Profes-	
	seur de Chimie.	
<i>Doyen honoraire</i>	S. DAUTHEVILLE.	
<i>Professeurs honoraires</i>	{ E. FABRY, O. DUBOSQ, J. CURIE, F. BEAULARD	
	DE LENAIZAN, E. BATAILLON, R. JACQUES,	
	J. PAVILLARD, J. CABANNES et E. CHATTON.	
<i>Maître de Conférences honoraire</i> .	F. MOURGUES.	
	MM.	
	G. REBOUL.....	Physique.
	E. TURRIÈRE.....	Mécanique rationnelle.
	P. HUMBERT.....	Mathématiques pures.
	L. GAY.....	Chimie.
	J. SOULA.....	Mathématiques.
<i>Professeurs</i>	{ E. CARRIÈRE.....	Chimie.
	J. DURAND.....	Chimie.
	L. EMBERGER.....	Botanique.
	Ch. BOUHET.....	Physique.
	P. MATHIAS.....	Zoologie et Biologie
		générale.
	M. THORAL.....	Géologie.
	MM.	
	F. VASILESCO.....	Mathématiques.
<i>Maîtres de Conférences</i>	{ O. TUZET (Mlle).....	Zoologie.
	P. CHATELAIN.....	Minéralogie.
	MM.	
<i>Secrétaire</i>	A. BABY.	
<i>Secrétaire honoraire</i>	L. DUBOIS.	

Membres du Jury

MM.	
TURRIÈRE	<i>Président.</i>
SOULA.....	{ <i>Assesseurs</i>
VASILESCO	



A MON MAITRE,
MONSIEUR. LE PROFESSEUR E. TURRIÈRE.

Hommage de respectueuse reconnaissance.

A MON PÈRE.

A MA MÈRE.

PREMIÈRE THÈSE

**SUR QUELQUES COURBES
LIÉES AU MOUVEMENT
D'UNE COURBE PLANE
DANS SON PLAN**

PREMIÈRE PARTIE

**La théorie moderne
des courbes de la cinématique plane**

CHAPITRE PREMIER

LES ROULETTES

I. — LES ROULETTES A BASE RECTILIGNE

1. Les roulettes produites dans les roulements sur une base ont donné lieu à de nombreuses recherches géométriques ; des cas particuliers se rattachant à des courbes spéciales plus ou moins remarquables ont fréquemment été signalés.

DE LA HIRE (1) montra le premier que toute courbe plane est susceptible d'être engendrée comme roulette. E. CATALAN (2) établit en outre que la courbe *base* peut être choisie arbitrairement dans le plan de la roulette assignée à l'avance.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE a consacré en 1911 à cette question un substantiel mémoire, dont nous allons reprendre les principaux résultats, dans cette introduction consacrée à l'examen des travaux les plus récents.

2. **La roulette du pôle d'une roulante.** — Supposons que la courbe (C) roule sur une droite (axe Ox), un point O invariablement lié à (C) décrit alors une courbe que l'on appelle la roulette du point O.

Soit

$$r = f(\theta)$$

l'équation, en coordonnées polaires, de la roulante (C) ; si le point décrivant O est le pôle de (C), l'équation différentielle de la roulette s'obtiendra en éliminant θ entre les deux relations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} y = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} ; \\ y' = \frac{r'}{r} . \end{cases}$$

(1) *Traité des roulettes, Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, 1706-1707.*

(2) *Nouvelles Annales de mathématiques* [I], XV, 1856, p. 102-108.

Nous allons citer quelques exemples les plus intéressantes. Si la roulante est une spirale logarithmique, la roulette sera une droite.

Si la roulante est une *hyperbole équilatère* d'équation

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta};$$

l'équation différentielle de la roulette décrite par son centre sera

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{a^4 - y^4}};$$

d'où

$$R \cdot y = \text{const};$$

(R est le rayon de courbure de la roulette).

La roulette est donc une *élastique particulière (la radioïde aux abscisses)*.

La roulette du pôle d'une spirale hyperbolique est une tractrice.

La roulette du foyer d'une parabole ordinaire est une chaînette ordinaire.

Si la roulante est une ellipse, l'équation différentielle de la roulette du foyer sera

$$dx = \frac{(y^2 + b^2) dy}{\sqrt{4a^2 y^2 - (y^2 + b^2)^2}};$$

cette roulette s'appelle *la courbe de Delaunay*.

L'équation différentielle de la roulette du centre d'une ellipse est

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}.$$

3. Rayon de courbure de la roulette.

$$(2) \quad R = \frac{r(r^2 + 2r'^2 - rr'')}{r'^2 - rr''}.$$

Rayon de courbure de la roulette des *spirales sinusoïdes*

$$r^n = \sin n\theta,$$

est

$$R = \frac{n+1}{n} r,$$

de l'expression de R résulte que *les roulettes du pôle des spirales sinusoïdes sont des courbes de Ribaucour*.

On peut écrire aussi

$$R = \frac{n+1}{n} y^{\frac{1}{n+1}};$$

pour $n = -2$, on trouve

$$R.y = \frac{1}{2},$$

donc la variété considérée de *courbe élastique est une courbe de Ribaucour*.

4. Problème inverse des roulettes. — Étant donné la roulette $y = \varphi(x)$, chercher la roulante correspondante.

L'équation de la roulante s'obtient en éliminant x entre les deux relations suivantes

$$(3) \quad \begin{cases} r = \varphi(x) \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}, \\ r' = \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}. \end{cases}$$

Supposons que la roulette est la *sinusoïde*

$$y = \sin x;$$

l'équation différentielle de la roulante est

$$r'^4 = r^4(1 - r^2);$$

introduisons les coordonnées tangentielles polaires, on a :

$$\varpi = y = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$\frac{\varpi'}{\varpi} = y' = \frac{r'}{r},$$

on a donc l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\varpi}{d\varphi}\right)^2 = \varpi^2(1 - \varpi^2);$$

l'intégration donne

$$\varpi \operatorname{ch} \varphi = 1$$

la roulante est donc l'*antipodaire de la spirale de Poinso*l.

Si la roulette est la *parabole* $y^2 = 2x$, nous trouvons, de la même manière, que la roulante est une *développante de cercle* ($\varpi = \varphi$).

Si la roulette est l'*exponentielle* $y = e^x$, la roulante sera la *spirale hyperbolique* ($\varpi \varphi = 1$).

II. — ROULETTES A BASE CURVILIGNE

5. Coordonnées cartésiennes. — Soient (C_1) la base fixe du roulement, rapportée à des axes fixes $\xi O \eta$, (C) la roulante, ω son pôle ; il s'agit de trouver la roulette engendrée par le pôle ω .

Soient ξ, η les coordonnées du pôle ω , x, y celles du centre instantané de rotation I , on a

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = x + r \cos \zeta; \\ \eta = y + r \sin \zeta. \end{cases}$$

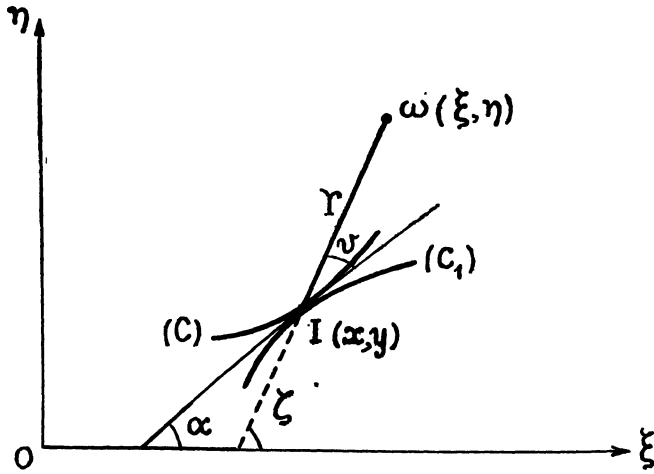


FIG. 1

Application. — Roulette du pôle d'une cardioïde qui roule sur une cycloïde.

Supposons donc que (C) soit la cardioïde

$$r = a(1 - \cos \theta),$$

qui roule sur la cycloïde

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$$

la condition du roulement donne

$$\theta = t,$$

on a d'autre part

$$v = \pi - \frac{\theta}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2};$$

d'où

$$\zeta = \frac{3\pi}{2} - t,$$

les équations paramétriques de la roulette sont donc

$$\begin{cases} \xi = a(t - 2 \sin t + \sin t \cos t), \\ \eta = a(1 - \cos t)^2. \end{cases}$$

Cette courbe est la *développée d'une cycloïde* d'équations

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t \cos t), \\ y = a \sin^2 t. \end{cases}$$

6. Coordonnées intrinsèques. — Soit s_2 l'arc de la roulette. On sait que la vitesse d'un point du plan mobile est la même que, si ce point tournait avec une vitesse angulaire Ω autour du point I

$$\frac{ds_2}{dt} = r\Omega$$

Ω , est la vitesse angulaire de la rotation instantanée. Il est connu que :

$$\Omega = \frac{ds}{dt} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right);$$

R et R_1 sont les rayons de courbure de la roulante et de la base, de là, en posant

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{K};$$

on a

$$ds_2 = r \cdot \frac{1}{K} \cdot ds;$$

posons :

$$R = \frac{ds}{d\omega}, \quad R_1 = \frac{ds}{d\omega_1};$$

alors :

$$ds_2 = r(d\omega + d\omega_1).$$

L'arc de la roulette est :

$$(5) \quad s_2 = \int \frac{r}{K} ds.$$

Le rayon de courbure R_2 de la roulette se déduit de la formule d'EULER

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{K \sin \theta};$$

d'où

$$r' = r + \frac{r^2}{K \sin \theta - r};$$

de là

$$(6) \quad R_2 = r - r' = \frac{r^2}{r - K \sin \theta}.$$

L'élimination de s entre R_2 et s_2 conduira à l'équation intrinsèque de la roulette.

Dans le cas de la roulette à base rectiligne, on a

$$R = K ;$$

d'où :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2 = \int \frac{r}{R} ds ; \\ R_2 = \frac{r^2}{r - R \sin \theta} . \end{array} \right.$$

III. — GÉNÉRATION DE LA LIGNE DROITE COMME ROULETTE

7. Les coordonnées du pôle ω de la roulante sont données par les expressions (4). Nous trouvons pour l'arc s la relation suivante

$$ds = \pm \frac{dr}{\cos v} .$$

Pour être sûr du signe à donner, nous considérons la condition d'orthogonalité :

$$(\xi - x) \frac{d\xi}{ds} + (\eta - y) \frac{d\eta}{ds} = 0 ;$$

qui nous donne ;

$$\cos v + \frac{dr}{ds} = 0 ,$$

ou

$$ds = - \frac{dr}{\cos v} .$$

Supposons que le point ω décrit une droite. Prenons cette droite pour axes des x .

On voit de suite que $y = r$.

De là

$$\zeta = - \frac{\pi}{2}$$

L'égalité de deux arcs s'écrit

$$dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = dr \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} ;$$

si on fait $y = r$ on aura

$$dx = r d\theta.$$

D'où la proposition très importante :

si l'équation de la roulante est $\theta = f(r)$

$$d\theta = f'(r) dr = f'(y) dy$$

l'équation différentielle de la base sera

$$(8) \quad x = \int y f'(y) dy.$$

Réciproquement, si $x = F(y)$ est l'équation de la base, l'équation de la ligne roulante sera :

$$(9) \quad \theta = \int \frac{F'(r)}{r} dr.$$

Nous allons citer quelques exemples :

1) Prenons par exemple une *parabole* de degré quelconque

$$x = ay^m;$$

la courbe roulante aura pour équation

$$\theta = \int ma \frac{r^{m-1}}{r} dr = \frac{am}{m-1} r^{m-1}.$$

Donc, si on fait rouler sur une *parabole d'ordre m*, une *spirale algébrique d'ordre (m — 1)*, le pôle de la spirale décrit une droite.

Pour $m = 1$, la base est une droite, la roulante sera, à la limite, une spirale logarithmique.

Si on permute le rôle des axes de coordonnées, en changeant l'ordre m de la parabole en $\frac{1}{m}$, on trouve, pour la courbe roulante une autre spirale, laquelle sera perpendiculaire à la précédente et qui a pour équation

$$\theta = \frac{a}{1-m} r^{\frac{1-m}{m}}$$

Pour la parabole ordinaire $y^2 = 2px$, les courbes roulantes sont la *spirale d'Archimède*

$$r = p\theta$$

ou la courbe

$$r = \frac{2p}{\theta^2}.$$

Les deux spirales conjuguées d'une parabole sont identiques, si

$$m - 1 = \frac{1 - m}{m}$$

d'où $m = 1$ ou $m = -1$

Le cas $m = 1$ est signalé.

Le cas $m = -1$ fournit l'hyperbole équilatère $xy = a$ comme base et la roulante sera le lituus de CÔTES

$$\theta = \frac{a}{2r^2},$$

la seule courbe de ce groupe pour laquelle les deux axes de coordonnées jouent des mêmes rôles.

La rectification de la spirale d'Archimède qui fut effectuée presque en même temps par B. CAVALIERI (1635), Grégoire de Saint-Vincent (1647) et P. FERMAT (1659) mit en évidence l'identité de cette rectification et de celle de la parabole ordinaire, PASCAL, HUYGENS et TORRICELLI généralisèrent la proposition précédente en l'étendant aux spirales d'ordre supérieur et aux paraboles d'ordre supérieur.

ROBERVAL et MERSENNE avaient tenté d'expliquer cette égalité d'arcs se correspondant sur la parabole et la spirale d'Archimède par le double mouvement d'un point décrivant chacune des courbes.

Les considérations qui précèdent concernant l'isométrie (incluse dans la condition même du roulement) entre une courbe représentée en coordonnées polaires et une courbe associée en coordonnées cartésiennes expliquent la proposition de CAVALIERI et jette sur elle une nouvelle lumière.

2) *La roulante est une spirale sinusoïde* d'équation

$$r^n = \sin n\theta;$$

l'équation de la base est alors

$$x = \int y^n (1 - y^{2n})^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Pour $n = 1$, la roulante est un cercle, la base est *le cercle* qui a pour rayon le diamètre de la roulante.

Pour $n = -1$, la base est *la chaînette ordinaire*.

3) *La roulante est la spirale hyperbolique*

$$r = \frac{1}{\theta};$$

la base sera la courbe :

$$y = e^{-x}.$$

4) *La roulante est la lemniscate de Bernoulli*

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta;$$

la base est la courbe élastique particulière de Jacques Bernoulli :

$$x = - \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{a^4 - y^4}}.$$

5) *La roulante est la spirale de Poinso*

$$rchm\theta = 1;$$

la base est la sinusoïde

$$y = \sin mx.$$

6) *La roulante est la conique*

$$r = \frac{1}{1 + e \cos \theta},$$

la base sera définie par

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2(e^2 - 1) + 2y - 1}},$$

pour $e = 1$, la roulante est une *parabole*, la base sera une autre *parabole* d'équation

$$x^2 = 2y - 1.$$

7) *La roulante est l'inverse de la spirale de Poinso*

$$r = chm\theta;$$

la base est l'*hyperbole*

$$m^2 x^2 - y^2 + 1 = 0.$$

8) *La roulante est la spirale tractrice*

$$\theta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - \arccos \frac{r}{a};$$

la base sera la *tractrice ordinaire*

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Remarque. — Si on change dans l'équation de la roulante θ en $m\theta$, dans l'équation de la base x sera changé en mx .

La transformation consistant à substituer $m\theta$ à θ dans l'équation polaire d'une courbe plane (m étant un nombre constant) est la « ductévolvement » de M. AUBRY (1895).

Envisageons par exemple les rosaces ;

$$r = \sin m\theta ;$$

elles se déduisent par la transformation de l'équation d'un cercle lequel vient de nous donner un autre cercle. Leurs bases fixes seront donc des ellipses, ayant comme rapport d'axes le module de la rosace.

Ainsi pour la droite roulant sur une chaînette

$$r \sin \theta = 1$$

en changeant θ en $m\theta$

$$r \sin m\theta = 1$$

la roulante est alors un épi de M. Aubry, et la base sera encore une chaînette.

8. Le théorème de M. Santangelo. — A la formule générale de correspondance (entre base et roulante pour génération d'une roulette rectiligne) se rattache une belle proposition due à M. SANTANGELO et qui concerne la courbe de MANNHEIM et la radiale de TUCKER d'une courbe quelconque du plan.

Soit $\varphi = f(R)$ l'équation de la radiale d'une courbe (C), on a

$$d\varphi = f'(R) dR ;$$

de là

$$s = \int R f'(R) dR.$$

C'est l'équation intrinsèque de la courbe (C).

L'équation de la courbe de Mannheim est alors [paragraphe (41)]

$$(8 \text{ bis}) \quad x = \int y f'(y) dy.$$

Donc, si on fait rouler la radiale d'une courbe quelconque sur la courbe de Mannheim de la même courbe le pôle de la radiale décrira une droite (D).

Inversement : *La radiale est la base sur laquelle doit rouler la courbe de Mannheim pour que la droite (D) passe par un point fixe* (pôle de la radiale).

IV. — L'INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES DANS LA THÉORIE DU ROULEMENT (1)

9. — La base (C) est représentée dans le plan fixe xOy par ;

$$z = x + iy = z(u).$$

La roulante (Γ) est représentée dans le plan mobile $\xi A\eta$ par ;

$$\zeta = \xi + i\eta = \zeta(v).$$

Soit A le point de coordonnées X, Y tel que :

$$Z = X + iY ;$$

on a :

$$\begin{cases} x = X + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ y = Y + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha ; \end{cases}$$

α est l'angle de $A\xi$ et Ox .

Nous trouvons :

$$z = Z + e^{i\alpha} \zeta$$

La condition de l'égalité des deux arcs est :

$$dx^2 + dy^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

La condition de roulement de la roulante sur la base s'exprime par les équations

$$(10) \quad \begin{cases} dx = d\xi \cos \alpha - d\eta \sin \alpha, \\ dy = d\xi \sin \alpha + d\eta \cos \alpha ; \end{cases}$$

elles donnent :

$$(11) \quad dz = e^{i\alpha} d\zeta.$$

Soit M un point du plan, de coordonnées (x', y') dans le plan fixe et (ξ', η') dans le plan mobile :

$$z' = x' + iy', \quad \zeta' = \xi' + i\eta' ;$$

le point M est invariablement lié au plan mobile, on a :

$$z' = Z + e^{i\alpha} \zeta'$$

(1) M. BUSCHEGUENNE. Sur le roulement des courbes. — *L'Enseignement mathématique*, t. XXXVI, 1937, p. 195-199.

d'où

$$(12) \quad z' = z + e^{i\alpha} (\zeta' - \zeta) = z + (\zeta' - \zeta) \frac{dz}{d\zeta}.$$

1° On donne la base et la roulante. Chercher la roulette.

L'équation de la roulette est :

$$(12 \text{ bis}) \quad z' = z + (\zeta' - \zeta) \frac{dz}{d\zeta};$$

il faut trouver une relation entre u et v ; soient z_0 et ζ_0 , les nombres complexes conjugués de z et de ζ , nous avons la relation

$$\sqrt{dz \cdot dz_0} = \pm \sqrt{d\zeta \cdot d\zeta_0};$$

ou

$$(13) \quad \sqrt{\frac{dz}{du} \cdot \frac{dz_0}{du}} du = \pm \sqrt{\frac{d\zeta}{dv} \cdot \frac{d\zeta_0}{dv}} dv;$$

c'est la relation cherchée.

2° On donne la base et la roulette. Chercher la roulante.

Soit $z' = z'(w)$ l'équation de la roulette. La roulante est

$$(12 \text{ bis}) \quad \zeta = \zeta' - (z' - z) e^{-i\alpha}$$

il s'agit de trouver une relation entre u et w . En différentiant l'équation de la roulante et remplaçant dans la relation $dz = e^{i\alpha} d\zeta$, $d\zeta$ par sa valeur, on trouvera :

$$dz' = i(z' - z) d\alpha,$$

et

$$dz'_0 = -i(z'_0 - z_0) d\alpha;$$

de là ;

$$\frac{dz'}{z' - z} + \frac{dz'_0}{z'_0 - z_0} = 0;$$

ou

$$(14) \quad \frac{1}{z' - z} \frac{dz'}{dw} + \frac{1}{z'_0 - z_0} \frac{dz'_0}{dw} = 0.$$

Cette relation donne w en fonction de u . En intégrant la relation

$$i d\alpha = \frac{dz'}{z' - z},$$

nous trouvons une relation entre θ et u , telle que $\theta = \theta(u)$, fonction réelle, car $\frac{dz'}{z' - z}$ est une quantité imaginaire pure.

3° On donne la roulante et la roulette, chercher la base.

L'équation de la base est :

$$(12 \text{ bis}) \quad z = z' - (\zeta' - \zeta) e^{i\alpha}.$$

Il faut chercher une relation entre v et w .

La relation :

$$dz' = i (\zeta' - \zeta) e^{i\alpha} d\alpha$$

et sa conjuguée,

$$dz'_0 = -i (\zeta'_0 - \zeta_0) e^{-i\alpha} d\alpha$$

donnent :

$$\begin{aligned} \sqrt{dz' dz'_0} &= \pm \sqrt{(\zeta' - \zeta) (\zeta'_0 - \zeta_0)} d\alpha \\ \frac{dz'}{dz'_0} &= -\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta'_0 - \zeta_0} e^{2i\alpha}; \end{aligned}$$

en éliminant α , on obtiendra l'équation différentielle entre v et w ;

$$(15) \quad d \log \left(\frac{dz'}{dz'_0} \right) + \frac{d\zeta}{\zeta' - \zeta} - \frac{d\zeta_0}{\zeta'_0 - \zeta_0} = 2i \sqrt{\frac{dz' dz'_0}{(\zeta' - \zeta) (\zeta'_0 - \zeta_0)}};$$

puis on peut obtenir α par une quadrature.

Application aux roulettes circulaires. — Supposons que la roulette est un cercle du centre O et de rayon a , elle est représentée par la relation

$$z' = a e^{iw}.$$

La roulante est rapportée à un système de coordonnées polaires (r, v) ayant pour pôle le point décrivant M, on a dans ce cas

$$\zeta' = 0, \quad \zeta'_0 = 0.$$

La roulante sera représentée par la relation

$$\zeta = r e^{iv}.$$

L'équation de la base est donc

$$z = a e^{iw} + r e^{iv},$$

les deux relations

$$\begin{aligned} \sqrt{dz' dz'_0} &= \pm \sqrt{(\zeta' - \zeta) (\zeta'_0 - \zeta_0)} d\alpha \\ \frac{dz'}{dz'_0} &= \frac{\zeta - \zeta'}{\zeta_0 - \zeta'_0} e^{2i\alpha} \end{aligned}$$

donnent ici :

$$\begin{aligned} w &= \alpha + v, \\ adw &= \pm r d\alpha, \end{aligned}$$

la première relation exprime que la normale à la roulette passe par le point I (centre instantané de rotation).

La courbe base est donc représentée par les deux relations suivantes :

$$(16) \quad \begin{cases} z = (a + r) e^{iw}, \\ dw = \frac{r dv}{r + a}. \end{cases}$$

Soit r_1 le rayon vecteur de la base, on a donc

$$r_1 = a + r;$$

en supposant que l'équation de la roulante est

$$v = f(r)$$

l'équation différentielle de la base sera

$$(17) \quad dw = \frac{r_1 - a}{r_1} f'(r_1 - a) dr_1;$$

ce résultat est identique à celui que G. TEIXEIRA (1) a déjà trouvé.

10. — **Roulement sur une base rectiligne.** — Soit ω le pôle de la roulante de coordonnées (ξ, η) par rapport aux axes fixe xOy , on a :

$$(18) \quad \begin{cases} \xi = s - r \cos v \\ \eta = r \sin v \end{cases}$$

soit α , l'angle de la tangente à la roulante avec l'axe polaire

$$\alpha = v + \theta$$

on a les relations :

$$\frac{\sin v}{r d\theta} = \frac{\cos v}{dr} = \frac{1}{ds}$$

et :

$$\frac{d\xi}{\sin v} = \frac{d\eta}{\cos v} = \sin v ds + r dv = r d\alpha$$

Remarque de Saussure. — Introduisons le nombre complexe

$$z = \xi + i\eta$$

(1) G. TEIXEIRA. *Traité de courbes spéciales remarquables*, 1915, t. III, p. 239.

d'où

$$z = s - re^{-iv};$$

$$\frac{d\xi + i d\eta}{\sin v + i \cos v} = r d\alpha;$$

de là

$$dz = ire^{-iv} . d\alpha.$$

En éliminant l'exponentielle on obtient l'équation différentielle

$$(19) \quad \frac{dz}{d\alpha} + iz = is;$$

c'est l'équation de *Saussure*.

CHAPITRE II

LES GLISSETTES

I. — DÉFINITION

11. Les glissettes sont par définition (1) des courbes décrites par des points fixés à une courbe constante lorsque celle-ci se déplace en passant par des points donnés, ou tangente à deux droites données, ou tangente à une droite donnée en un point donné.

Dans ce chapitre nous traitons d'abord le dernier cas, le plus important. *Une courbe (C) du plan xOy reste en contact avec la droite fixe Ox au point fixe O ; un point A invariablement lié à cette courbe engendre une courbe (Γ), la glissette de ce point.* On peut obtenir l'équation de la glissette d'un point par une transformation en coordonnées polaires. Supposons que le point O soit le pôle de la courbe (C), OA est le rayon vecteur r , soient x et y les coordonnées du point A ; on a donc, en supposant que l'équation de (C) est $r = f(\theta)$

$$(20) \quad \begin{cases} x = r \cos v = \frac{rr'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \\ y = r \sin v = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}; \end{cases}$$

ou

$$\text{tang } v = \frac{r d\theta}{dr};$$

l'élimination de θ entre x et y donne l'équation cartésienne de la glissette.

12. **Roulette correspondant du point A.** — Supposons que la glissette du point A ait une équation de la forme

$$\frac{x}{y} = f(y);$$

(1) H. BROCARD. *Notes de Bibliographie des courbes géométriques*, Bar-le-Duc, 1897, p. 147.

et que la courbe (C) roule sur l'axe Ox . Le point A décrira une roulette, la droite OA est la normale à la roulette au point A, donc

$$\text{tang } xOA = -\frac{dx}{dy},$$

et d'autre part

$$\frac{y}{x} = \text{tang } xOA,$$

on a donc

$$\frac{dy}{dx} = -f(y),$$

qui représente l'équation différentielle de la roulette du point A. Il résulte la proposition suivante :

L'équation de la glissette d'un point d'une courbe étant

$$\frac{x}{y} = f(y),$$

l'équation différentielle de la roulette de ce point sera

$$\frac{dy}{dx} = -f(y)$$

et réciproquement.

On peut citer quelques exemples pour les glissettes :

1) La glissette du pôle de la *spirale d'ARCHIMÈDE* et celle du pôle de la *spirale hyperbolique* sont des *Cappa* ;

2) La glissette du centre du cercle générateur d'une *développante* de cercle est une *droite* ;

3) La glissette du centre de la *lémnisque* de BERNOULLI est la courbe

$$r = \pm a \sqrt{\sin \alpha},$$

c'est la *méridienne du solide de plus grande attraction* (1).

4) La glissette du pôle de la *spirale sinusoïde*

$$r^n = a^n \sin n\theta,$$

est une courbe de CLAIRAULT (2).

5) La glissette du pôle d'une *cardioïde*

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

(1) J. BERTRAND. *Traité de calcul intégral*, t. II, p. 430.

(2) GOMES TEIXEIRA, t. III, p. 187.

est une autre *cardioïde*

$$\rho = a(1 - \cos 2\alpha).$$

6) *La glissette du centre du cercle générateur d'une épicycloïde ou hypocycloïde quelconque est une ellipse* (1).

13. Les glissettes ont été étudiées aussi par M. E. TURRIÈRE (2), sous le point de vue suivant :

Supposons que dans le plan fixe xOy se déplace une courbe (C) invariable en grandeur, cette courbe est supposée rapportée à des axes $\xi\omega\eta$, mobiles, mais invariablement liés à (C). Le déplacement du plan $\xi\omega\eta$ par rapport au plan fixe xOy est défini par les conditions suivantes : la courbe (C) doit constamment passer par O et y toucher la droite fixe Ox ; soit

$$\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = \varpi,$$

ϖ étant une fonction donnée de l'azimut φ , l'équation de la tangente à la courbe (C) en un point quelconque, par rapport aux axes mobiles $\xi\omega\eta$; cette fonction ϖ étant la distance du point ω à la tangente et sa dérivée $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ représentant la distance du même point à la normale correspondance de (C), on peut donc poser les relations suivantes entre ϖ , sa dérivée, et les coordonnées par rapport aux axes fixes xOy du point ω :

$$(21) \quad y = \varpi, \quad x = \frac{d\varpi}{d\varphi};$$

le lieu du point ω est la glissette cherchée (Γ).

L'équation de la normale à la glissette du point ω est

$$(X - x) dx + (Y - y) dy = 0$$

elle rencontre l'axe Oy au point d'ordonnée

$$y = \varpi + \frac{d^2 \varpi}{d\varphi^2},$$

(à moins que $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ ne soit nul, c'est-à-dire que ω ne soit sur Oy : la normale à la trajectoire de ω est alors Oy). En interprétant la relation précédente, on est conduit donc à considérer le centre de courbure de (C) correspondant à la normale Oy comme étant le centre instantané de rotation.

(1) GOMES TEIXEIRA. Extrait d'une lettre à Haton de La Goupillière. *Journal de Liouville*, [6], t. IX, 1913.

(2) L'Enseignement mathématique, XV^e année, n^o 4, 1913.

Si la courbe (C) est donnée, l'élimination de φ entre les équations (21) conduira à une équation entre x et y qui sera l'équation cartésienne de la glissette.

Nous allons citer quelques exemples :

1) *Glissette du foyer d'une ellipse d'équation*

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec

$$p = \frac{b^2}{a};$$

l'équation polaire tangentielle de la conique est

$$\varpi^2 - 2c\varpi \cos \varphi = b^2;$$

en dérivant cette équation par rapport à φ et en appliquant les relations (21), il résulte que la glissette est la courbe d'équation

$$(x^2 + y^2)(y^2 + b^2)^2 = 4a^2 y^4$$

ou

$$r(2a - r) \sin^2 \theta = b^2,$$

généralisant la courbe *Campyle*.

2) *Glissette du centre d'une ellipse :*

la même méthode conduit à la quartique circulaire

$$x^2 y^2 + (y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0.$$

3) *Glissette du foyer d'une parabole* dont l'équation polaire tangentielle est

$$\varpi = \frac{p}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \quad \text{avec} \quad p = 2a$$

la glissette est une quartique

$$a^2(x^2 + y^2) = y^4 \quad \text{ou} \quad r \sin^2 \theta = a;$$

c'est le *Campyle*.

4) *Glissette décrite par le pôle de la courbe de CÉSARO* d'équation tangentielle polaire

$$\varphi - \text{const} = \int \frac{d\varpi}{\sqrt{a^2 - \varpi^2 + A\varpi^k}}$$

la glissette est la courbe

$$r^2 - a^2 = Ay^k. \quad (r^2 = x^2 + y^2).$$

Cette courbe est algébrique ou interscandante, suivant que l'indice de la courbe de Césaro considérée est rationnel ou non.

n est l'indice de la courbe de Cesàro, et k une constante telle que

$$n + 1 = \frac{2}{k}.$$

Les cas particuliers intéressants sont ceux des courbes de Cesàro d'indice 1 (cercle), d'indice zéro (courbes cycloïdales), auxquelles correspondent ainsi des glissettes qui sont des cercles ou des coniques.

Aux courbes d'indices 3 et $\frac{1}{3}$ correspondent des quartiques circulaires.

Aux courbes d'indices 2 et 5 correspondent des sextiques.

5) *Considérons la courbe élastique plane sous pression normale uniforme étudiée par HALPHEN (1), à la suite de Maurice Lévy ; cette courbe rencontrée dans l'étude de la forme d'équilibre d'une verge élastique de forme circulaire, soumise à une pression toujours normale et uniforme, est représentée par l'équation polaire*

$$d\theta = \frac{Ar^4 + Br^2 + C}{\sqrt{r^2 - (Ar^4 + Br^2 + C)^2}} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Celle-ci entraîne la relation :

$$\varpi = Ar^4 + Br^2 + C;$$

la glissette de cette courbe est donc une quartique bicirculaire

$$y = A(x^2 + y^2)^2 + B(x^2 + y^2) + C.$$

6) *Considérons les courbes de RIBAUCCOUR dont l'équation polaire tangentielle est*

$$Am\varpi = (\varpi^2 + \varpi'^2) \left[1 + C(\varpi^2 + \varpi'^2)^{\frac{m}{2}} \right].$$

La glissette a donc pour équation

$$Amy = x^2 + y^2 + C(x^2 + y^2)^{\frac{m+2}{2}}$$

ou

$$Amy = r^2 + Cr^{m+2};$$

ce sont des courbes algébriques-interscendantes.

(1) G.-H. HALPHEN. *Sur une courbe élastique*. (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 18 février 1884, t. XCVIII, p. 422-425.)

14. Problème inverse. — Etant donnée la glissette, il s'agit de déterminer la courbe (C). Si $x = f(y)$ est l'équation de la glissette, l'équation de (C) sera

$$(22) \quad \varphi = \int \frac{d\omega}{f(\omega)} + \text{const};$$

la courbe (C) dépend donc alors d'une constante arbitraire qui n'a aucune influence sur la forme de cette courbe : deux courbes différant par les valeurs de cette constante arbitraire se déduisent en effet, l'une de l'autre par une rotation autour du pôle ω . Il était d'ailleurs évident *a priori* que les courbes (C) correspondant à une glissette imposée (Γ) devaient dépendre d'une équation différentielle du premier ordre, admettant la rotation autour de ω pour transformation infinitésimale.

Exemple. — Supposons que la glissette soit une circonférence. Ce problème se présente dans l'étude de la forme qu'il convient de donner aux tiges qui dirigent les *vannes des écluses* de certains canaux. Dans le cas particulier où le cercle imposé est tangent à la droite Oy , la courbe (C) est l'inverse par rapport au pôle A, d'une développante de cercle de centre A ou une courbe parallèle à cette inverse de développante ; ce résultat s'établit immédiatement sans aucun calcul ; une figure montre que la courbe (C) correspondant à un cercle (Γ) tangente en O à l'axe Oy doit avoir sa tangente polaire constante, cette courbe est donc la tractrice compliquée de M. Loria. Dans le cas où le cercle (Γ) touche Oy en un point autre que O, la courbe (C) est une parallèle de la précédente.

Dans le cas général d'un cercle (Γ) quelconque, d'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \quad (a > 0)$$

la courbe (C) a pour équation

$$(23) \quad \varphi = \int \frac{d\omega}{a + \sqrt{R^2 - (\omega - b)^2}};$$

l'intégration s'effectue élémentairement, mais trois cas sont à distinguer : lorsque R est supérieur à a , on doit introduire la fonction logarithmique ; lorsque $R = a$ (cas de la tractrice compliquée et de ses parallèles) et lorsque R est inférieur à a , l'intégrale dépend des fonctions circulaires. Il est facile de démontrer que ces diverses courbes ne sont autres que les tractrices du cercle ($b \neq 0$) ou des parallèles à ces tractrices ($b \neq 0$), soit par un raisonnement géométrique, soit par un calcul simple. Vérifions cette propriété analytiquement, ce qui nous permettra d'établir l'équation des tractrices du cercle par une méthode

bien plus simple que celles de MORLEY et de BORDONI. Considérons en effet un cercle de centre O, d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

soit (C) une tractrice de ce cercle ; la tangente à (C) en un point M coupe le cercle en deux points : soit N un de ces points ; la condition imposée est $MN = \text{const} = l$. Projetons en P le centre O du cercle sur la droite MN ; on a

$$OP = \varpi, \quad PM = \frac{d\varpi}{d\varphi},$$

et par suite

$$R^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\varphi} - l \right)^2;$$

d'où :

$$d\varphi = \frac{d\varpi}{l \pm \sqrt{R^2 - \varpi^2}},$$

qui s'identifie immédiatement avec l'équation (23).

Pour trouver l'équation de MORLEY et de BORDONI, il suffit de remarquer que l'on a

$$r^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\varphi} \right)^2, \quad \frac{1}{\varpi^2} = \frac{1}{r^2} + \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2$$

Ces deux relations donnent ϖ^2 et $\left(\frac{d\varpi}{d\varphi} \right)^2$ en fonctions de r^2 et $\frac{dr}{d\theta}$, en substituant dans l'équation différentielle (3) de la tractrice on obtient l'équation de MORLEY et de BORDONI.

Remarque. — Lorsque la courbe (C) de forme invariable est assujettie à se mouvoir dans son plan en touchant, en un point fixe O, une droite fixe Ox, le déplacement envisagé peut être considéré comme produit par le roulement de la développée de cette courbe, sur une base rectiligne Oy. Cette remarque a été faite d'abord par l'abbé d'Aoust (1), puis par E. DUPORCQ (2), et enfin par M. E. TURRIÈRE (3).

(1) *Analyse infinitésimale des courbes planes*, 1873, p. 250 251.

(2) *Nouvelles Annales mathématiques* (à propos de la Question, 1861, p. 43).

(3) *Nouvelles Annales*, juillet 1909, Sur les surfaces de Monge.

Remarque. — GOMÈS TEIXEIRA (1) a déduit l'équation de la glissette d'un point au moyen de la roulette à glissement proportionnelle. Cette courbe a comme coordonnée,

$$(24) \quad \begin{cases} x = \lambda \int_{u_0}^u \sqrt{\rho^2 \theta'^2 + \rho'^2} du - \frac{\rho \rho'}{\sqrt{\rho^2 \theta'^2 + \rho'^2}}; \\ y = \frac{\rho^2 \theta'}{\sqrt{\rho^2 \theta'^2 + \rho'^2}}; \end{cases}$$

(ρ et θ sont des fonctions de u).

Quand λ tend vers zéro, la courbe représentée par ces équations tend vers la courbe engendrée par le point M du plan de la courbe (C), quand cette courbe glisse sur l'axe Ox de manière qu'elle soit toujours tangente à cette droite en un même point N. On appelle cette courbe la glissette de la courbe (C) par rapport à la droite et ses équations paramétriques, rapportées à la droite Nx et à une perpendiculaire à cette droite menée par le point N, sont :

$$(25) \quad \begin{cases} x = -\frac{\rho \rho'}{\sqrt{\rho^2 \theta'^2 + \rho'^2}}, \\ y = \frac{\rho^2 \theta'}{\sqrt{\rho^2 \theta'^2 + \rho'^2}}. \end{cases}$$

15. L'algèbricité ou transcendance d'une glissette. — Nous avons obtenu précédemment les deux coordonnées cartésiennes du pôle générateur de la glissette, qui sont respectivement

$$y' = \varpi, \quad x = \varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi}$$

par rapport aux axes Ox et Oy . Pour obtenir l'équation de la glissette, il suffit de former une relation indépendante du paramètre φ entre ϖ et ϖ' . En d'autres termes, il suffit de connaître ou de savoir former l'équation différentielle du premier ordre des courbes qui résultent de la courbe (C) par une rotation arbitraire autour du pôle générateur de la glissette ; on obtient l'équation de la glissette en remplaçant, dans cette équation, ϖ et ϖ' par y et x . Il est manifeste que, lorsque la courbe (C) est algébrique, les deux fonctions ϖ et ϖ' sont aussi algébriques par rapport aux lignes trigonométriques de φ , l'élimination de φ conduira à une relation algébrique entre ϖ et ϖ' , d'où résulte que la glissette sera algébrique. La condition nécessaire et suffisante pour que la glissette

(1) *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, t. III, p. 94.

soit algébrique est la suivante : il faut que la courbe (C) soit l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre admettant la rotation infinitésimale autour du pôle générateur de la glissette pour transformation infinitésimale. La courbe (C) n'est pas nécessairement algébrique, contrairement à l'affirmation de H. BROCARD que : la glissette d'une courbe est toujours une courbe de même nature que la proposée (algébrique ou transcendante).

La condition qui vient d'être établie, pour assurer l'algébricité d'une glissette entraîne donc la panalgébricité de la courbe (C), lorsque celle-ci n'est pas algébrique elle-même. Il faut que l'équation différentielle rationnelle du premier ordre associée à cette courbe panalgébrique soit invariante, dans la rotation infinitésimale autour du pôle.

Étant donnée une courbe transcendante, même panalgébrique, il n'existera pas toujours dans son plan un point qui admette une glissette algébrique. Si un tel point existe, il est nécessairement unique. Soit, en effet, une courbe panalgébrique qui admet deux points distincts dont les glissettes sont algébriques ; soit ϖ_1 la fonction caractéristique de la courbe (C) quand celle-ci est rapportée au premier pôle et soit ϖ_2 la fonction analogue, lorsque (C) est rapportée au second pôle ; on a :

$$\varpi_2 = \varpi_1 + a \cos \varphi + b \sin \varphi$$

a et b sont deux constantes non simultanément nulles (ce sont les coordonnées du second point par rapport à certains axes issus du premier point) ; alors la courbe (C) satisfait aux deux équations rationnelles suivantes :

$$f_1(\varpi_1, \varpi'_1) = 0, \quad f_2(\varpi_2, \varpi'_2) = 0$$

et en tenant compte de la relation entre ϖ_1 et ϖ_2 , on obtient deux équations différentielles rationnelles du premier ordre toutes deux satisfaites par la même fonction ϖ_1 , ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur la courbe (C) qui est panalgébrique.

D'une manière plus générale, supposons que la courbe (C) soit de l'ordre de transcendance $\omega = n$, la courbe (C) satisfait à une équation rationnelle de l'ordre n et qui est unique de cet ordre. Il résulte des relations (21) que l'on a :

$$\varpi'' = x \frac{dx}{dy}, \quad \varpi''' = x \frac{d}{dy} \left(x \frac{dx}{dy} \right), \text{ etc,}$$

la dérivée du n^{e} ordre de la fonction par rapport à φ introduit donc la dérivée d'ordre $n-1$ d'une coordonnée cartésienne de la glissette ; donc, si φ ne figure pas sous forme explicite dans l'équation diffé-

rentielle considérée de (C), la glissette sera nécessairement de l'ordre $n - 1$: aucune réduction d'ordre ne pourra se produire, puisque les termes du n^{e} ordre proviennent de la seule dérivée d'ordre n de la fonction ϖ .

Si au contraire, φ intervient sous forme explicite dans l'équation différentielle définissant la transcendance de la courbe (C), il sera nécessaire de différentier encore une fois cette équation pour éliminer φ , on obtiendra alors une équation rationnelle du $(n + 1)^{\text{e}}$ ordre ne contenant pas explicitement φ . La glissette sera, par conséquent, de cet ordre $n + 1$. En résumé, la conclusion est que :

1^o L'ordre de transcendance d'une glissette est généralement égal à celui de la courbe génératrice. Il peut s'abaisser d'une unité au plus : il faut et il suffit que l'équation différentielle rationnelle d'ordre minimum associée à la courbe génératrice admette la rotation autour du pôle du profil générateur pour transformation infinitésimale. Un tel pôle, lorsqu'il existe, est nécessairement unique ;

2^o Réciproquement, si une glissette est de l'ordre n de transcendance, la courbe génératrice est du même ordre de transcendance ou de l'ordre immédiatement supérieur. Si deux glissettes relatives à une même courbe génératrice et à deux points distincts (et *a fortiori* si les glissettes de plusieurs points) sont d'un même ordre de transcendance, la courbe génératrice est de toute nécessité de ce même ordre de transcendance.

Ces résultats précis relatifs aux glissettes étant formulés, il est aisé d'en déduire des résultats correspondants touchant les roulettes à base rectiligne (1).

II. — LA GLISSETTE ENGENDRÉE PAR UN POINT INVARIABLEMENT LIÉ A UNE COURBE (C) QUAND CELLE-CI RESTE TANGENTE A DEUX DROITES PERPENDICULAIRES

16. Soit xOy l'angle droit ; supposons que le point décrivant est le pôle de la courbe (C) (en coordonnées tangentielles polaire) la glissette a pour coordonnées du point générateur :

$$(26) \quad \begin{cases} y = \varpi(\varphi), \\ x = \varpi\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

(1) Voir à ce sujet : E. TURRIÈRE. *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, 1935, t. XIX.

Exemples :

1) *La courbe (C) est une spirale logarithmique*

$$\varpi = e^{m\varphi},$$

la glissette du pôle est alors *la droite*

$$x = ye^{\frac{m\pi}{2}}.$$

2) *La courbe (C) est une développante de cercle*

$$\varpi = \varphi,$$

la glissette est donc *la droite*

$$x - y = \frac{\pi}{2}.$$

3) *La courbe (C) est l'antipodaire de la courbe Kappa*

$$\varpi = a \tan \varphi,$$

la glissette est donc une *hyperbole équilatère*

$$xy = -a^2.$$

4) *La courbe (C) est l'antipodaire de l'ovale double*

$$\varpi = \cos^2 \varphi,$$

la glissette est *la droite*

$$x + y = 1.$$

17. Ellipse de grandeur invariable tangente aux côtés d'un angle droit. — La glissette du centre de l'ellipse est un cercle de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et de centre O.

Prenons un point A (α , β) du lieu, l'ellipse est déterminée. Du point A comme le centre, avec a pour rayon, traçons une circonférence qui coupe en B et C les axes des coordonnées, le point F qui complète le rectangle OBCF peut être regardé comme un des foyers.

Avec la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2;$$

on peut poser

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \varphi, \\ \beta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \varphi. \end{cases}$$

La glissette du foyer F est :

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \varphi \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi}, \\ y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \varphi \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}, \end{cases}$$

en coordonnées cartésiennes son équation est :

$$\frac{(x^2 + b^2)^2}{x^2} + \frac{(y^2 + b^2)^2}{y^2} = 4(a^2 + b^2),$$

ou (sextique circulaire)

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 4a^2) + b^4 (x^2 + y^2) = 0;$$

en coordonnées polaires :

$$r^2 = 2a^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{b^4}{a^4 \sin^2 \theta}} \right).$$

Distance du foyer F à la tangente à l'ellipse. — On trouve

$$\varpi = b \frac{1 - e \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}} = b \sqrt{\frac{1 - e \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}}.$$

Cela étant, considérons deux tangentes rectangulaires Ox, Oy de l'ellipse, elles correspondront à deux anomalies φ et φ_1 , liées par la condition d'orthogonalité $\text{Tang } \varphi \cdot \text{Tang } \varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$.

Les coordonnées du point F sont :

$$\begin{cases} x = \varpi = b \sqrt{\frac{1 - e \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}}; \\ y = b \sqrt{\frac{1 - e \cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1}}; \end{cases}$$

l'élimination de φ et de φ_1 donnera la trajectoire de F.

On trouve

$$\frac{1}{\cos \varphi} = e \frac{b^2 + x^2}{b^2 - x^2}, \quad \frac{1}{\cos \varphi_1} = e \frac{b^2 + y^2}{b^2 - y^2}.$$

d'où :

$$\text{tang}^2 \varphi = b^2 \left[\frac{4e^2 x^2}{(x^2 - b^2)^2} - \frac{1}{a^2} \right];$$

en remplaçant dans la relation

$$\text{tang } \varphi \cdot \text{tang } \varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}$$

on trouve l'équation de la sextique, glissette du foyer.

Équation des axes de l'ellipse mobile :

axe focal :

$$\frac{X - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - b^2}} = \frac{Y - \beta}{\sqrt{\beta^2 - b^2}};$$

petit axe :

$$\sqrt{\alpha^2 - b^2} (X - \alpha) + \sqrt{\beta^2 - b^2} (Y - \beta) = 0.$$

Équation de l'ellipse

$$\frac{[\sqrt{\alpha^2 - b^2} (x - \alpha) + \sqrt{\beta^2 - b^2} (y - \beta)]^2}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2 b^2) a^2} + \frac{[\sqrt{\beta^2 - b^2} (x - \alpha) - \sqrt{\alpha^2 - b^2} (y - \beta)]^2}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2 b^2) b^2} = 1,$$

ou

$$\frac{[\sqrt{\alpha^2 - b^2} (x - \alpha) + \sqrt{\beta^2 - b^2} (y - \beta)]^2}{a^2} + \frac{[\sqrt{\beta^2 - b^2} (x - \alpha) - \sqrt{\alpha^2 - b^2} (y - \beta)]^2}{b^2} = c^2,$$

ou

$$a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - R^2 b^2 (x - \alpha)^2 + (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - R^2 b^2) (y - \beta)^2 - 2 c^2 \sqrt{(\alpha^2 - b^2) (b^2 - \beta^2)} (x - \alpha) (y - \beta) = a^2 b^2 c^2.$$

Posons

$$\begin{cases} \alpha = R \cos \varphi, \\ \beta = R \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - b^2} = c \cos \omega, \\ \sqrt{\beta^2 - b^2} = c \sin \omega, \end{cases}$$

de là :

$$R^2 c^2 \sin^2 \varphi (x - \alpha)^2 + R^2 c^2 \cos^2 \varphi (y - \beta)^2 - 2 c^4 \sin \omega \cos \omega (x - \alpha) (y - \beta) = a^2 b^2 c^2,$$

ou :

$$\sin^2 \varphi (x - \alpha)^2 + \cos^2 \varphi (y - \beta)^2 - \frac{c^2}{R^2} \sin^2 \omega (x - \alpha) (y - \beta) = \frac{a^2 b^2}{R^2}.$$

Les angles φ et ω sont liés par la relation :

$$R^2 \cos 2 \varphi = c^2 \cos 2 \omega, \quad \text{ou} \quad \frac{\cos 2 \omega}{\cos 2 \varphi} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

En résumé avec ces notations :

$$\text{grand axe} \quad - (X - \alpha) \sin \omega + (Y - \beta) \cos \omega = 0.$$

$$\text{petit axe} \quad (X - \alpha) \cos \omega + (Y - \beta) \sin \omega = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{ellipse mobile} \quad & \sin^2 \varphi (x - \alpha)^2 - \frac{c^2}{R^2} \sin 2 \omega (x - \alpha) (y - \beta) + \\ & + \cos^2 \varphi (y - \beta)^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2}. \end{aligned}$$

L'ellipse touche les axes aux points

Ox au point $x = \alpha - \frac{1}{\beta} \sqrt{(\alpha^2 - b^2)(\beta^2 - b^2)}.$

et Oy au point $y = \beta - \frac{1}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - b^2)(\beta^2 - b^2)}.$

Autre forme de l'équation de l'ellipse :

$$x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi - \frac{c^2}{R^2} \sin 2 \omega xy + \\ + \left(\frac{c^2}{R} \sin 2 \omega - R \sin 2 \varphi \right) \left(x \sin \varphi + y \cos \varphi - \frac{R}{2} \sin 2 \varphi \right) = \frac{8 b^2}{R^2}$$

Centre instantané de rotation I : il a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\beta} [\alpha \beta - \sqrt{(\alpha^2 - b^2)(\beta^2 - b^2)}] \\ y = \frac{1}{\alpha} [\alpha \beta - \sqrt{(\alpha^2 - b^2)(\beta^2 - b^2)}]. \end{cases}$$

Les points O, I, A sont alignés : c'est d'ailleurs une formule de DESBOVES dans le cas des tangentes orthogonales.

Courbe base. — Dans le déplacement de l'ellipse, soient ρ et φ les coordonnées polaires de I, on a :

$$\rho = \frac{R}{\alpha \beta} [\alpha \beta - \sqrt{(\alpha^2 - b^2)(\beta^2 - b^2)}],$$

L'équation polaire de la base est donc :

$$\frac{\rho}{R} = 1 - \frac{\sqrt{(R^2 \cos^2 \varphi - b^2)(R^2 \sin^2 \varphi - b^2)}}{R^2 \sin \varphi \cos \varphi}$$

$$\frac{\rho}{R} = 1 - \sqrt{1 - \frac{4 a^2 b^2}{R^4 \sin^2 2 \varphi}},$$

ou :

$$(x^2 + y^2) [R^2 x^2 y^2 + a^2 b^2 (x^2 + y^2)]^2 = 4 R^6 x^4 y^4.$$

la base est donc une courbe du 10^e degré circulaire.

La courbe roulante. — Les coordonnées du point I par rapport aux axes fixes sont :

$$\begin{cases} x = \alpha - \frac{c^2 \sin \omega \cos \omega}{R \sin \varphi} \\ y = \beta - \frac{c^2 \sin \omega \cos \omega}{R \cos \varphi}. \end{cases}$$

La distance de I aux axes de l'ellipse mobile est :

$$\begin{cases} X = \pm \frac{c^2}{R} \sin \omega \cos \omega \left(\frac{\cos \omega}{\sin \varphi} + \frac{\sin \omega}{\cos \varphi} \right) = \pm \frac{c^2}{R} \frac{\sin 2 \omega}{\sin 2 \varphi} \cos (\varphi - \omega) \\ Y = \pm \frac{c^2}{R} \sin \omega \cos \omega \left(\frac{-\sin \omega}{\sin \varphi} + \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} \right) = \pm \frac{c^2}{R} \frac{\sin 2 \omega}{\sin 2 \varphi} \sin (\varphi - \omega); \end{cases}$$

soient r et θ les coordonnées polaires de I dans le plan mobile, on a

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi - \omega, \\ \pm r &= \frac{c^2}{R} \frac{\sin 2 \omega}{\sin 2 \varphi}, \end{aligned}$$

la relation :

$$\frac{\cos 2 \varphi}{c^2} = \frac{\cos 2 \omega}{R^2} = \frac{\cos 2 \varphi + \cos 2 \omega}{2 a^2} = \frac{\cos 2 \varphi - \cos 2 \omega}{-2 b^2};$$

donne :

$$\frac{\cos (\varphi + \omega) \cos (\varphi - \omega)}{a^2} = \frac{\sin (\varphi + \omega) \sin (\varphi - \omega)}{b^2};$$

ou :

$$\text{tang} (\varphi + \omega) \text{tang} (\varphi - \omega) = \frac{b^2}{a^2};$$

mais

$$\frac{\pm r + \frac{c^2}{R}}{c^2} = \frac{\sin 2 \omega + \sin 2 \varphi}{\sin 2 \omega - \sin 2 \varphi} = -\frac{\text{tang} (\varphi + \omega)}{\text{tang} (\varphi - \omega)} = -\frac{b^2}{a^2} \cotg^2 \theta;$$

de là

$$\begin{aligned} \pm r &= \frac{c^2}{R} \frac{1 - \frac{b^2}{a^2} \cotg^2 \theta}{1 + \frac{b^2}{a^2} \cotg^2 \theta} = \frac{1 - \frac{a^2}{b^2} \text{tang}^2 \theta}{1 + \frac{a^2}{b^2} \text{tang}^2 \theta} \cdot \frac{c^2}{R}; \\ r &= \frac{c^2}{R} \frac{R^2 \cos 2 \theta - c^2}{R^2 - c^2 \cos 2 \theta}; \end{aligned}$$

ou finalement :

$$(a^2 + b^2) (x^2 + y^2) (b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 - c^4 (b^2 x^2 - a^2 y^2)^2 = 0;$$

équation d'une courbe du 6^e degré.

18. Parabole de grandeur invariable tangente aux axes ox , oy . — Cette parabole a pour équation)

$$(x - \rho \sin \omega)^2 + (y - \rho \cos \omega)^2 = (x \cos \omega + y \sin \omega)^2;$$

la paramètre p est

$$p = 2 \rho \sin \omega \cos \omega ;$$

l'équation de la parabole sera donc :

$$\left(x - \frac{p}{2 \cos \omega}\right)^2 + \left(y - \frac{p}{2 \sin \omega}\right)^2 = (x \cos \omega + y \sin \omega)^2.$$

La glissette du foyer F est :

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2 \cos \omega}, \\ y = \frac{p}{2 \sin \omega}, \end{cases}$$

ou :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2} \quad \text{ou} \quad r \sin 2\theta = p \text{ (Kreuzkurve elliptique).}$$

Centre instantané de rotation I. Courbe base. — La parabole touche l'axe Ox au point : $x = \frac{p}{\sin \omega \sin 2\omega}$ et Oy au point $y = \frac{p}{\cos \omega \sin 2\omega}$, soient r, ω les coordonnées polaires de I ; la base a donc pour équation

$$\begin{aligned} r \sin^2 2\omega &= 2p, \\ p^2 (x^2 + y^2)^2 &= 4x^4 y^4 \end{aligned}$$

la base est une courbe du 8^e degré.

Équation de la corde de contact. — Cette droite passe par F ; elle a pour équation

$$x \sin \omega + y \cos \omega = \frac{p}{\sin 2\omega};$$

l'enveloppe de la corde de contact est donc la courbe d'équation magique

$$\varpi = \frac{p}{\sin 2\varphi}.$$

Axe focal de la parabole. — Elle passe par F ; perpendiculaire à la directrice, a comme équation :

$$-x \sin \omega + y \cos \omega = p \cotg 2\omega.$$

Enveloppe de l'axe focal :

$$\begin{cases} x = p \frac{1 - \cos 2\omega \sin^2 \omega}{2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}, \\ y = p \frac{1 - \cos 2\omega \cos^2 \omega}{2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}, \end{cases}$$

l'enveloppe est donc une hyperbole d'équation

$$4 y^2 - 2 xy - 11 py + 3 px + 18 p^2 = 0.$$

Équation de la tangente au sommet s de la parabole ; cette équation est

$$x \cos \omega + y \sin \omega = \frac{p}{2};$$

l'enveloppe est :

$$x = \frac{p}{2} \cos \omega, \quad y = \frac{p}{2} \sin \omega ;$$

l'enveloppe est donc le cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}.$$

La glissette du sommet s de la parabole. — Le point s a pour coordonnées

$$x = p \frac{\sin^2 \omega}{2 \cos \omega}, \quad y = p \frac{\cos^2 \omega}{2 \sin \omega};$$

l'élimination de ω entre x et y donne l'équation cartésienne de la glissette

$$x^2 y^2 \left(x^2 + y^2 + 3 \frac{p^2}{4} \right) = \left(\frac{p}{2} \right)^6.$$

c'est une courbe du 6^e degré.

La courbe roulante. — Le point I, dans le plan fixe, a pour coordonnées

$$x = \frac{p}{\sin \omega \sin 2 \omega}, \quad y = \frac{p}{\cos \omega \sin 2 \omega}.$$

Cherchons la distance du point I aux deux axes mobiles
axe focal

$$-x \sin \omega + y \cos \omega = p \cotg 2 \omega ;$$

tangente

$$x \cos \omega + y \sin \omega = \frac{p}{2};$$

la roulante a pour coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{p}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \omega \cos^2 \omega} - 1 \right); \\ y = -p \cotg 2 \omega. \end{array} \right.$$

L'élimination de ω donne pour la courbe roulante la parabole

$$4 y^2 = p (2 x - 3 p).$$

Enveloppe de la parabole mobile.

$$P = x^2 \sin^2 \omega + y^2 \cos^2 \omega - xy \sin^2 \omega - p \left(\frac{x}{\cos \omega} + \frac{y}{\sin \omega} \right) + \frac{p^2}{\sin^2 2 \omega} = 0;$$

l'équation dérivée est :

$$P' = (x^2 - y^2) \sin 2 \omega - 2 xy \cos 2 \omega - \\ - p \left(\frac{x \sin \omega}{\cos^2 \omega} - \frac{y \cos \omega}{\sin^2 \omega} \right) - \frac{4 p^2 \cos 2 \omega}{\sin^3 2 \omega} = 0$$

Cette équation est celle de l'hyperbole d'APOLLONIUS de (P, I).

Formons l'expression $\sin 2 \omega P' - 2 \cos \omega P \equiv H$

$$H \equiv 2 (x^2 \sin^2 \omega - y^2 \cos^2 \omega) + \\ + \frac{3 \cos^2 \omega - 1}{\cos \omega} px + \frac{3 \cos 2 \omega + 1}{\sin \omega} py - \frac{6 p^2 \cos 2 \omega}{\sin^2 2 \omega} = 0$$

$$H \equiv 2 \left(x \sin \omega + y \cos \omega - \frac{p}{\sin 2 \omega} \right) \left(\frac{x}{2 \cos \omega} - \frac{y}{2 \sin \omega} + \frac{3 p \cos 2 \omega}{\sin^2 2 \omega} \right) = 0$$

d'où

$$H \equiv 2 \left(x \sin \omega + y \cos \omega - \frac{p}{\sin 2 \omega} \right) (x \sin \omega - y \cos \omega + 3 p \cotg 2 \omega) = 0.$$

L'enveloppe comprend Ox , Oy et une courbe lieu des points communs à la parabole et à la droite Δ d'équation

$$x \sin \omega - y \cos \omega + 3 p \cotg 2 \omega = 0;$$

qui est parallèle à l'axe de la parabole.

Représentons cette droite par :

$$\begin{cases} y = y_0 + \rho p \sin \omega, \\ x = x_0 + \rho p \cos \omega; \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} x_0 = - 3 p \cotg 2 \omega \sin \omega, \\ y_0 = + 3 p \cotg 2 \omega \cos \omega; \end{cases}$$

l'intersection de la droite Δ avec la parabole

$$(x \sin \omega - y \cos \omega)^2 - 2 p \frac{x \sin \omega + y \cos \omega}{\sin 2 \omega} + \frac{p^2}{\sin^2 2 \omega} = 0;$$

donne :

$$\rho = \frac{1 + 3 \cos^2 2 \omega}{2 \sin^2 2 \omega};$$

le point caractéristique a donc pour coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{p}{4} \frac{(1 - 3 \cos 2 \omega)^2}{\sin \omega \sin 2 \omega}, \\ y = \frac{p}{4} \frac{(1 + 3 \cos 2 \omega)^2}{\cos \omega \sin 2 \omega}. \end{array} \right.$$

DEUXIÈME PARTIE

**Développôides et nouvelles extensions
des courbes de MANNHEIM**

CHAPITRE III

ÉTUDE SUR LES DÉVELOPPOÏDES

I. — CAS OÙ L'ANGLE θ EST CONSTANT

19. Une application immédiate du déplacement d'une figure plane est celle des développoides.

Lorsqu'un point M décrit une courbe plane (C), la droite d qui coupe (C) en M sous un angle θ enveloppe une courbe (D) qui touche d en point D. La courbe (D) s'appelle la *développoides* de (C).

Le déplacement est celui de l'équerre droite de sommet M, de côtés MT (tangente), MN (normale). Le centre instantané de rotation n'est autre ici que le *centre de courbure* de (C) en M.

La droite d invariablement liée à la figure mobile touche donc son enveloppe (c'est-à-dire la développoides) au point D projection du centre de courbure M_1 de (C) sur d .

Pour les diverses droites d issues du même point M, les positions correspondantes de D ont pour lieu le cercle décrit sur le rayon R de courbure de (C) comme diamètre.

Cherchons l'équation de (D), soit

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi,$$

l'équation magique de (C). La droite d a pour équation

$$(27) \quad x \cos (\varphi + \theta) + y \sin (\varphi + \theta) = \varpi \cos \theta + \varpi' \sin \theta.$$

Les coordonnées de D sont données par les deux équations

$$(28) \quad \begin{cases} -x \cos (\varphi + \theta) + y \sin (\varphi + \theta) = \varpi \cos \theta + \varpi' \sin \theta, \\ -x \sin (\varphi + \theta) + y \cos (\varphi + \theta) = \varpi' \cos \theta + \varpi'' \sin \theta; \end{cases}$$

d'où

$$(29) \quad \begin{cases} x = \varpi \cos \theta \cos (\varphi + \theta) - \varpi' \sin \varphi - \varpi'' \sin \theta \sin (\varphi + \theta), \\ y = \varpi \cos \theta \sin (\varphi + \theta) + \varpi' \cos \varphi + \varpi'' \sin \theta \cos (\varphi + \theta). \end{cases}$$

Cherchons le lieu D lorsque θ varie, M étant fixe, $\varpi, \varpi', \varpi''$ et φ sont donc fixes. Nous pouvons prendre M comme origine, la tangente pour axe des x , la normale pour axe des y , alors :

$$\varpi = 0, \quad \varpi' = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

Les coordonnées de D sont alors

$$(30) \quad \begin{cases} x = -\varpi'' \sin \theta \cos \theta, \\ y = -\varpi'' \sin^2 \theta, \end{cases}$$

et le lieu de D est le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = -\varpi'' y.$$

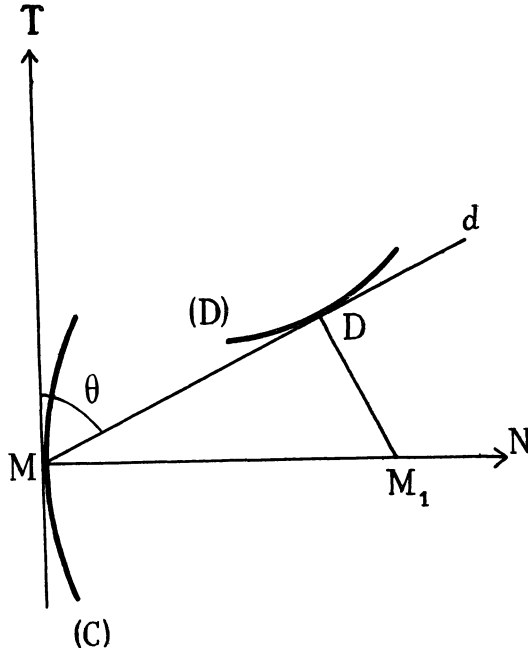


FIG. 2

Le rayon de courbure en M a pour valeur

$$R = |\varpi + \varpi''|;$$

c'est-à-dire ici

$$R = |\varpi''|.$$

Le cercle précédent qui passe par le centre de courbure et a pour diamètre le rayon de courbure est donc le cercle décrit sur le rayon de courbure en M comme diamètre. Le lieu est entièrement décrit. Ce résultat s'étend aussi aux courbes gauches.

On peut encore démontrer ce résultat d'une autre manière. Considérons une courbe (C), gauche ou plane. Au voisinage de M, elle se comporte comme son cercle osculateur, du point de vue de la courbure.

Considérons un cercle (G), la droite d , lorsque M varie sur la circonférence, enveloppe un cercle concentrique et par suite le point D est la projection sur d du centre O du cercle (G) (fig. 3).

20. **Le centre de courbure de la courbe (D) au point D de contact.** — Ce centre de courbure s'obtient au moyen de ces deux équations :

$$(31) \quad \begin{cases} -x \sin (\varphi + \theta) + y \cos (\varphi + \theta) = \varpi' \cos \theta + \varpi'' \sin \theta, \\ -x \cos (\varphi + \theta) - y \sin (\varphi + \theta) = \varpi'' \cos \theta + \varpi''' \sin \theta; \end{cases}$$

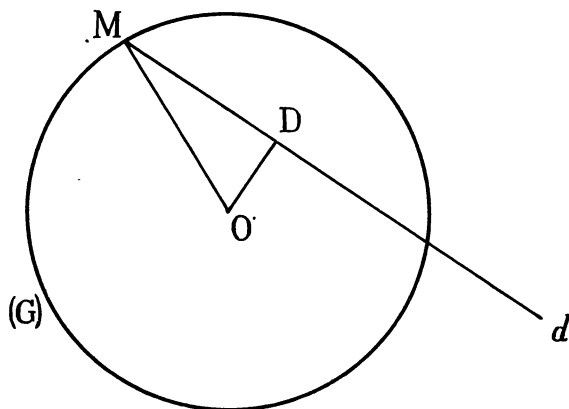


FIG. 3

on en tire

$$(32) \quad \begin{cases} x = -\varpi' \cos \theta \sin (\varphi + \theta) - \varpi'' \cos \varphi - \varpi''' \sin \theta \cos (\varphi + \theta), \\ y = \varpi' \cos \theta \cos (\varphi + \theta) - \varpi'' \sin \varphi - \varpi''' \sin \theta \sin (\varphi + \theta), \end{cases}$$

en prenant le point M pour l'origine et la tangente pour l'axe de x , d'où

$$\varpi = 0, \quad \varpi' = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

on aura pour les coordonnées x et y

$$(33) \quad \begin{cases} x = \varpi''' \sin^2 \theta, \\ y = -\varpi'' - \varpi''' \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

d'où le lieu

$$x^2 + (y + \varpi'')^2 = \varpi'''^2 x;$$

le lieu est donc un cercle ayant pour diamètre en grandeur et en position le rayon de courbure de la développée de (C) au point de contact

de la normale à (C) en M. Ce cercle (C₂) et le cercle (C₁) lieu des points D, sont donc orthogonaux (fig. 4).

Remarque. — Supposons (C) rectifiable, ϖ est alors une dérivée connue ; $\int \varpi \cos \theta \, d\varphi$ et $\int \varpi' \sin \theta \, d\varphi$ étant séparément exprimables à l'aide de fonctions élémentaires, la courbe (D) est rectifiable.

Supposons maintenant (D) rectifiable, si $\cos \theta$ est différent de zéro,

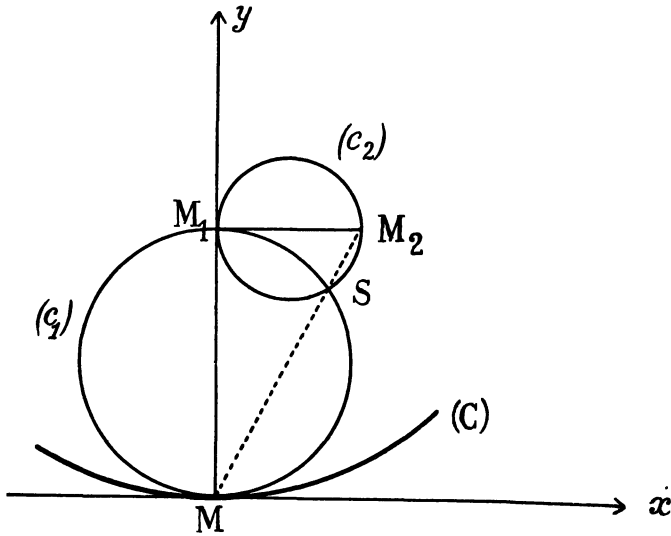


FIG. 4

$\int \varpi \, d\varphi$ sera une quadrature exprimable à l'aide des fonctions élémentaires et (C) sera rectifiable. Mais si $\cos \theta$ est nul (D) étant alors rectifiable (C) ne le sera pas nécessairement. En résumé, si (C) est rectifiable (D) est toujours rectifiable, si (D) est rectifiable et si (D) n'est pas la développée de (C), (C) sera rectifiable.

Soient s et s_0 les abscisses curvilignes de points correspondants de (C) et (D), on a

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \varpi + \varpi'', \\ \frac{ds_0}{d\varphi} &= \frac{ds}{d\varphi} \cos \theta + \frac{d^2 s}{d\varphi^2} \sin \theta, \end{aligned}$$

$$(35) \quad s_0 = s \cos \theta + \frac{ds}{d\varphi} \sin \theta ;$$

avec un choix convenable d'origine sur les courbes ; remarquer que $\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)$ est le rayon de courbure de (C).

De la relation précédente il résulte une construction géométrique du rayon de courbure de (D) au point D, en appelant rayon de courbure de (C) la quantité algébrique $\frac{ds}{d\varphi}$, on voit qu'il suffit de porter sur deux axes rectangulaires, le rayon de (C) en abscisse, le rayon de la développée en ordonnée, de projeter sur le rayon d'azimut θ , et de faire la somme des vecteurs ainsi obtenus.

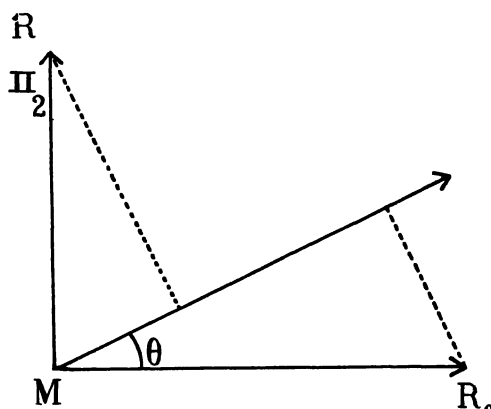


FIG. 5

21. Équation intrinsèque de la courbure (D). — Soit $s = F(\varphi)$ l'équation naturelle de (C), celle de (D) est alors

$$(35 \text{ bis}) \quad s_{\theta} = F(\varphi) \cos \theta + F'(\varphi) \sin \theta.$$

Application à la *développante de cercle* :

$$\varpi = a\varphi,$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \varpi + \varpi' = a\varphi,$$

$$s = \frac{a}{2} \varphi^2;$$

par un choix convenable d'origine des axes (point de rebroussement), on a,

$$\begin{cases} s_{\theta} = a \left(\frac{\varphi^2}{2} \cos \theta + \varphi \sin \theta \right), \\ R_{\theta} = a (\varphi \cos \theta + \sin \theta); \end{cases}$$

on trouve

$$R^2\theta = 2 a \cos \theta \cdot s_\theta + a^2 \sin^2 \theta,$$

la courbe (D) est une autre *développante de cercle*.

Pour la *cycloïde*

$$R^2 + s^2 - 8 as = 0,$$

son équation naturelle est

$$\begin{cases} s = 4 a (1 + \cos \varphi), \\ R = -4 a \cos \varphi; \end{cases}$$

on a pour (D)

$$\begin{cases} s_\theta = 4 a [\cos \theta + \cos (\varphi + \theta)], \\ R_\theta = -4 a \sin (\varphi + \theta); \end{cases}$$

donc

$$s^2_\theta + R^2_\theta - 8 as_\theta \cos \theta = 16 a^2 \sin^2 \theta;$$

donc (D) est une *cycloïde* égale à (C) (au changement d'origine près).

Spirale logarithmique :

$$s = e^{m\varphi},$$

on a

$$s_\theta = e^{m\varphi} (\cos \theta + m \sin \theta);$$

la courbe (D) est une spirale logarithmique homothétique.

Clothoïde :

$$Rs = \frac{1}{2}, \quad s = \sqrt{\varphi}$$

on a :

$$s_\theta = \sqrt{\varphi} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{2\sqrt{\varphi}}.$$

Tractrice (développante de la *chaînette* $s = \tan \varphi$); elle a pour équation naturelle

$$s = -\text{Log} (\cos \varphi);$$

on a :

$$s_\theta = -\cos \theta \text{Log} (\cos \varphi) + \sin \theta \tan \varphi.$$

Chaînette de Coriolis :

$$R \sin \varphi = 1,$$

d'où

$$s = \log \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right),$$

on trouve :

$$s\theta = \cos \theta \log \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}.$$

Épicycloïdes :

$$s = \frac{m-1}{m} \cos m\varphi,$$

d'où

$$s\theta = \frac{m-1}{m} \cos m(\varphi + \varphi_0);$$

(φ_0 est une constante)

la courbe (D) est une *épicycloïde* semblable.

22. L'intersection des deux cercles orthogonaux (C_1) et (C_2). — De la construction du rayon de courbure de (D) en D, il résulte que pour la droite MM_2 qui joint M au centre de courbure M_2 de la développée, le rayon de courbure de D est nul. Le point S correspondant est le point autre que M d'intersection des deux cercles. Le lieu du point S est une courbe (S).

Cherchons la tangente à (S) en S. Supposons le déplacement de M_2 infiniment petit négligeable, c'est-à-dire supposons M_2 fixe, M_1 décrit un cercle de centre M_2 , M décrit une développante de cercle. Comme S est la projection sur MM_2 de M_1 , on a

$$(36) \quad \overline{M_1 M_2}^2 = \overline{M_2 S} \cdot \overline{M_2 M}$$

le point S décrit donc l'inverse de la développante décrite par M, c'est-à-dire la tractrice polaire.

La normale à (S) en S passe par le milieu de MM_1 et la tangente passe au milieu de $M_1 M_2$: (S) est donc tangente au cercle (C_1).

23. Coordonnées du point S. — Soient R et R_1 les rayons de courbure de (C) et de sa développée en M et M_1 , on a

$$\overline{SM} \times R^2 = \overline{SM_2} \times R^2;$$

si donc on désigne par (x, y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (ξ, η) les coordonnées des points M, M_1 , M_2 et S, on a :

$$(37) \quad \begin{cases} \xi (R^2 + R_1^2) = xR^2 + x_1 R^2, \\ \eta (R^2 + R_1^2) = yR^2 + y_1 R^2; \end{cases}$$

et comme on a :

$$(38) \quad \begin{cases} x = \varpi \cos \varphi - \varpi' \sin \varphi, \\ y = \varpi \sin \varphi + \varpi' \cos \varphi; \end{cases}$$

et :

$$(39) \quad \begin{cases} x_2 = -\varpi'' \cos \varphi + \varpi''' \sin \varphi, \\ y_2 = -\varpi''' \sin \varphi - \varpi'' \cos \varphi; \end{cases}$$

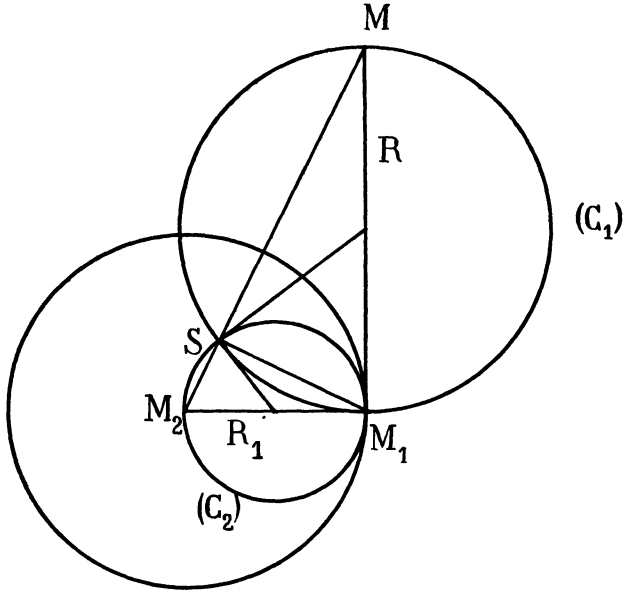


FIG. 6

on obtient :

$$(40) \quad \begin{cases} \xi = A \cos \varphi - B \sin \varphi, \\ \eta = A \sin \varphi + B \cos \varphi. \end{cases}$$

avec

$$A = \frac{\varpi R_1^2 - \varpi'' R^2}{R^2 + R_1^2}, \quad B = \frac{\varpi' R_1^2 - \varpi''' R^2}{R^2 + R_1^2}.$$

Remarque. — Il est préférable de chercher l'équation intrinsèque de (S), lieu du point S. Le point S s'obtiendra en remplaçant θ par la valeur définie en fonction de φ par l'équation

$$(41) \quad \frac{ds}{d\varphi} \cos \theta + \frac{d^2 s}{d\varphi^2} \sin \theta = 0,$$

d'où

$$\text{tang } \theta = - \frac{\frac{ds}{d\varphi}}{\frac{d^2s}{d\varphi^2}}.$$

Pour la *développante de cercle*, la courbe (S) est l'*inverse de la développante* par rapport au cercle développé.

Dans le cas de la *cycloïde*

$$\begin{cases} \varpi = \varphi \sin \varphi, \\ \varpi' = \varphi \cos \varphi + \sin \varphi, \\ \varpi'' = 2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi; \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\varphi} = -(\varpi + \varpi'') = -2 \cos \varphi, \\ \frac{d^2s}{d\varphi^2} = -(\varpi' + \varpi''') = 2 \sin \varphi; \end{cases}$$

donc

$$\text{tang } \theta = \cotang \varphi;$$

d'où

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2};$$

les coordonnées du point D sont alors :

$$\begin{cases} x = -(1 + \cos^2 \varphi), \\ y = \varphi + \sin \varphi \cos \varphi. \end{cases}$$

et celles du point S sont

$$\begin{cases} \xi = -(1 + \cos^2 \varphi), \\ \eta = \varphi + \sin \varphi \cos \varphi, \end{cases}$$

donc, les courbes (D) et (S) sont les mêmes : ce sont deux *cycloïdes* égales à (C).

II. — CAS GÉNÉRAL OÙ L'ANGLE θ EST VARIABLE

24. L'équation de la droite d est alors

$$(42) \quad (Y - y)(\cotang \theta - y') = (X - x)(1 + y' \cotang \theta);$$

l'équation dérivée est donc

$$(43) \quad (1 + y'^2) + (Y - y)(\cotang \theta - y'') = (X - x) \left(y' \frac{\theta'}{\sin^2 \theta} - y'' \cotg \theta \right).$$

Les coordonnées du point de contact D sont

$$(44) \quad \begin{cases} X = x + \frac{\sin \theta (\cos \theta - y' \sin \theta) (1 + y'^2)}{y'' - (1 + y'^2) \theta'}, \\ Y = y + \frac{\sin \theta (\sin \theta + y' \cos \theta) (1 + y'^2)}{y'' - (1 + y'^2) \theta'}. \end{cases}$$

Le segment MD est

$$(45) \quad MD = r = \pm \frac{\sin \theta (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' - (1 + y'^2) \theta'};$$

la quantité r s'appelle le *rayon de courbure oblique* et on a

$$(46) \quad \frac{\sin \theta}{r} = \pm \left(\frac{1}{R} + \frac{d\theta}{ds} \right), \quad \text{ou} \quad r = \pm \frac{R \sin \theta}{1 + \frac{d\theta}{d\varphi}}.$$

Cherchons l'arc S de la courbe (D) lieu des points D de contact ;
on a

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = r^2,$$

d'où en différentiant :

$$(X - x) dX + (Y - y) dY = (X - x) dx + (Y - y) dy + r dr,$$

on a de plus

$$\frac{X - x}{r} \frac{dx}{dS} + \frac{Y - y}{r} \frac{dY}{dS} = 1.$$

Ces deux dernières relations donnent

$$1 = \frac{X - x}{r} \frac{dx}{dS} + \frac{Y - y}{r} \frac{dy}{dS} + \frac{dr}{dS},$$

et de là

$$(47) \quad dS = dr + \cos \theta ds.$$

25. Soient maintenant M d et M d_1 , deux droites issues du point M, faisant avec la tangente à (C) en M les angles θ et θ_1 , et posons

$$\theta = \theta_1 + \theta_0,$$

θ_0 est constant, on a la relation

$$r = R \frac{r_1}{R_1},$$

la normale à la courbe (D) au point D de contact, coupe la normale MN en un point I, tel que

$$(48) \quad MI = \frac{R r_1}{R_1} : \sin \theta = + \frac{R}{1 + \theta'};$$

le point I ne dépend pas de θ_0 ; c'est le centre instantané de rotation de ce système de droites d invariablement liées.

Aux diverses droites d correspondent des points caractéristiques D dont le lieu est un cercle de diamètre MI.

Pour $\theta' = 0$ (développôïde) on a

$$MI = + R,$$

donc le point I est le centre de courbure de la courbe (C) en M. Pour

$$\theta = K\varphi,$$

I est le point générateur de la développée intermédiaire générale de Braudé.

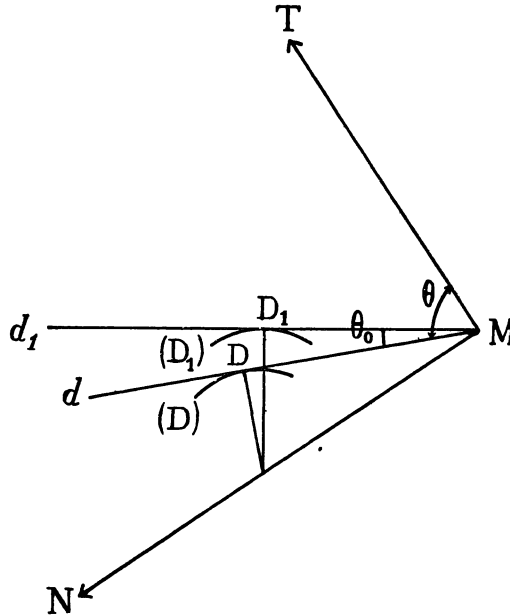


FIG. 7

26. On peut procéder d'une autre manière pour calculer le rayon de courbure oblique r . Nous avons trouvé l'équation de la droite d

$$X \cos (\varphi + \theta) + Y \sin (\varphi + \theta) = \varpi \cos \theta + \varpi' \sin \theta ;$$

dérivons cette équation par rapport à φ ; θ est variable, on a

$$(1 + \theta') [-X \sin (\varphi + \theta) + Y \cos (\varphi + \theta)] = \varpi' \cos \theta + \varpi'' \sin \theta + \theta' (\varpi' \cos \theta - \varpi \sin \theta) ;$$

X et Y sont les coordonnées du point de contact D et on a

$$(49) \quad \begin{cases} X = x - r \sin (\varphi + \theta), \\ Y = y + r \cos (\varphi + \theta) : \end{cases}$$

en posant

$$r = MD ;$$

et (x, y) les coordonnées du point M, tel que

$$(50) \quad \begin{cases} x = \varpi \cos \varphi - \varpi' \sin \varphi, \\ y = \varpi \sin \varphi + \varpi' \cos \varphi ; \end{cases}$$

remplaçons dans l'équation dérivée (x, y) et (X, Y) par leurs valeurs, on obtient :

$$(\varpi' \cos \theta - \varpi \sin \theta + r)(1 + \theta') = \varpi' \cos \theta + \varpi'' \sin \theta + \theta'(\varpi' \cos \theta - \varpi \sin \theta),$$

en simplifiant :

$$r(1 + \theta') = (\varpi + \varpi'') \sin \theta,$$

soit

$$R = |\varpi + \varpi''| ;$$

donc le rayon de courbure oblique a pour expression

$$(46 \text{ bis}) \quad r = \frac{|R| \sin \theta}{1 + \theta'}.$$

27. Application à la théorie du navire (1). — Soit une courbe base (B) ; sur la tangente courante en m à (B), on prend un point M dont la position est repérée par la distance $mM = \lambda$, fonction de l'azimut ω de cette tangente avec un axe fixe. Le point M décrit alors une courbe (C), facilement représentable en fonction d'un paramètre.

Inversement une courbe (C), quelconque, étant donnée, dans le plan, on suppose qu'elle est représentée par une équation également donnée $f(\lambda, \omega)$ dans le système de représentation précédente, quelle est alors la courbe base (B) correspondante ?

Soient ξ, η , les coordonnées d'un point du plan par rapport aux axes mobiles (MT, MN), on a

$$(51) \quad \begin{cases} \xi = -x \sin \varphi + y \cos \varphi - \varpi', \\ \eta = x \cos \varphi + y \sin \varphi - \varpi. \end{cases}$$

Pour un point m de la droite Mm inclinée de l'angle α sur MN, λ étant la distance Mm ;

$$\xi = \lambda \sin \alpha, \quad \eta = \lambda \cos \alpha,$$

Pour que le point m soit le point de contact de Mm avec son enveloppe, il faut

$$(52) \quad \frac{\frac{d\eta}{d\varphi} - \xi}{\cos \alpha} = \frac{\frac{d\xi}{d\varphi} + \eta - R}{\sin \alpha} ;$$

(1) E. GUYOU. *Théorie du navire*, 1894, p. 345. [développements de géométrie du navire, note de GUYOU et SIMART, p. 341-372].

puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{dy}{d\varphi} \sin \varphi &= \frac{d\eta}{d\varphi} - \xi, \\ -\frac{dx}{d\varphi} \sin \varphi + \frac{dy}{d\varphi} \cos \varphi &= \frac{d\xi}{d\varphi} + \eta - R; \end{aligned}$$

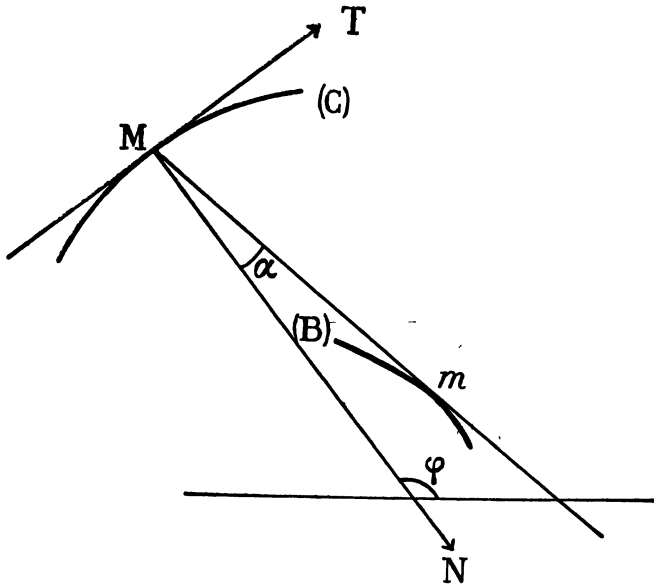


FIG. 8

avec

$$-R = \varpi + \frac{d^2 \varpi}{d\varphi^2};$$

d'où la condition

$$\frac{-\lambda \sin \alpha \cdot \alpha' + \lambda' \cos \alpha - \lambda \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\lambda \cos \alpha \cdot \alpha' + \lambda' \sin \alpha + \lambda \cos \alpha - R}{\sin \alpha};$$

d'où

$$(53) \quad \lambda = \frac{R \cos \alpha}{1 + \frac{d\alpha}{d\varphi}};$$

nous retrouvons le rayon de courbure oblique.

Pente de la droite Mm : l'équation de cette droite est :

$$-\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = 0,$$

ou

$$-x \sin (\alpha + \varphi) + y \cos (\alpha + \varphi) = -\varpi \sin \alpha + \varpi' \cos \alpha,$$

l'angle avec Ox est donc

$$\omega = \alpha + \varphi.$$

d'où

$$(53 \text{ bis}) \quad \lambda = \frac{R \cos \alpha}{\frac{d\omega}{d\varphi}}.$$

Inversement, étant donnée la courbe (C) et $f(\lambda, \omega) = 0$, chercher la base (B). Supposons que la courbe (C) est représentée par son équation naturelle $C(R, \varphi) = 0$.

De l'équation $f(\lambda, \omega) = 0$, résulte immédiatement

$$f\left(\frac{R \cos (\omega - \varphi) d\varphi}{d\omega}, \omega\right) = 0.$$

Des deux équations

$$(54) \quad \begin{cases} C(R, \varphi) = 0, \\ f\left(R \cos (\omega - \varphi) \frac{d\varphi}{d\omega}, \omega\right) = 0, \end{cases}$$

résulte une équation différentielle du premier ordre générale entre ω et φ . De sorte que la détermination de la base (B) dépend de cette équation différentielle que l'on peut former immédiatement. Réciproquement toute équation différentielle du premier ordre entre ω et φ est susceptible d'être envisagée comme liée à un problème de cette espèce.

CHAPITRE IV

UNE GÉNÉRALISATION DES DÉVELOPPOÏDES

28. Considérons deux courbes (C) et (C₁), représentées par leurs équations magiques

$$(55) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi,$$

$$(56) \quad x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi = \varpi_1;$$

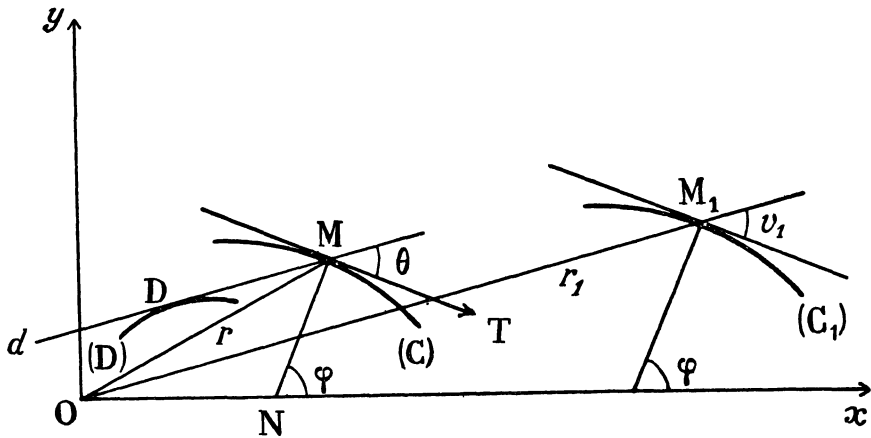


FIG. 9.

associées point par point avec parallélisme des tangentes ; considérons la droite d d'équation

$$(57) \quad X \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\varpi_1} \right) + Y \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{\varpi_1} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varpi}{\varpi_1} \right);$$

nous allons démontrer que cette droite est parallèle au rayon vecteur OM_1 et qu'elle passe par le point M .

Les coordonnées du point M sont :

$$(58) \quad \begin{cases} x = \varpi \cos \varphi - \varpi' \sin \varphi, \\ y = \varpi \sin \varphi + \varpi' \cos \varphi; \end{cases}$$

et celles du point M₁ :

$$(59) \quad \begin{cases} x_1 = \varpi_1 \cos \varphi - \varpi'_1 \sin \varphi, \\ y_1 = \varpi_1 \sin \varphi + \varpi'_1 \cos \varphi; \end{cases}$$

développons l'équation de la droite d, on a

$$(60) \quad -Xy_1 + Yx_1 = \varpi_1 \varpi' - \varpi \varpi'_1$$

Cette équation montre que la droite d est parallèle à OM₁. On peut écrire encore l'équation (60) sous la forme

$$(60 \text{ bis}) \quad (-X \sin \varphi + Y \cos \varphi - \varpi') \varpi_1 = (X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \varpi) \varpi'_1;$$

donc la droite d passe par le point M (x, y).

On peut montrer que toute droite issue du point M est réciproquement susceptible d'une représentation de cette nature. Considérons donc une droite d issue du point M et qui fait avec la tangente au point M à (C) un angle θ, cette droite a pour équation

$$(27 \text{ bis}) \quad X \cos (\varphi + \theta) + Y \sin (\varphi + \theta) = \varpi \cos \theta + \varpi' \sin \theta;$$

on obtient les relations :

$$\frac{\cos (\varphi + \theta)}{\varpi_1 \sin \varphi + \varpi'_1 \cos \varphi} = \frac{\sin (\varphi + \theta)}{-\varpi_1 \cos \varphi + \varpi'_1 \sin \varphi} = \frac{\varpi \cos \theta + \varpi' \sin \theta}{\varpi \varpi'_1 - \varpi_1 \varpi'}.$$

d'où la condition unique

$$\frac{\cos \theta}{\varpi'_1} = -\frac{\sin \theta}{\varpi_1}.$$

ou

$$(61) \quad \cotang \theta = -\frac{\varpi'_1}{\varpi_1}.$$

on a donc

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\varpi_1 \varpi''_1 - \varpi^2_1}{\varpi^2_1 + \varpi'^2_1}.$$

soient ρ et ρ₁, les rayons de courbures de (C) et de (C₁),

$$\begin{cases} \rho = \varpi + \varpi''; \\ \rho_1 = \varpi_1 + \varpi''_1; \end{cases}$$

et en posant

$$r = OM; \quad r_1 = OM_1;$$

on a

$$r^2 = \varpi^2 + \varpi'^2, \quad r^2_1 = \varpi^2_1 + \varpi'^2_1;$$

on aura donc

$$(62) \quad 1 + \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\varpi_1 \rho_1}{r^2_1},$$

expression identique au rayon de courbure oblique. Introduisons l'angle θ , tel que

$$\text{tang } \theta_1 = \frac{y_1}{x_1},$$

nous trouvons

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \varphi,$$

et

$$\varphi - \theta_1 = \frac{\pi}{2} - v_1,$$

donc

$$\theta = v_1;$$

v_1 est l'angle du rayon vecteur OM, avec la tangente en M_1 à (C_1) .

Nous obtenons aussi les relations

$$(63) \quad \frac{\cos \theta}{\varpi'_1} = \frac{\sin \theta}{-\varpi_1} = \frac{1}{r_1}.$$

29. Enveloppe de la droite d. — L'enveloppe de la droite d s'obtient en dérivant par rapport à φ l'équation (27 bis), d'où

$$-X \sin (\varphi + \theta) + Y \cos (\varphi + \theta) = \varpi' \cos \theta - \varpi \sin \theta + \frac{\rho \sin \theta}{1 + \theta'},$$

ou

$$(64) \quad -X \sin (\varphi + \theta) + Y \cos (\varphi + \theta) = \varpi' \cos \theta - \varpi \sin \theta - r_1 \frac{\rho}{\rho_1},$$

Posons :

$$(65) \quad \begin{cases} X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \varpi = \eta, \\ -X \sin \varphi + Y \cos \varphi - \varpi' = -\xi; \end{cases}$$

(pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $X = \xi$, $Y = \eta$)

La droite d a donc, dans le plan mobile $\xi M \eta$, une équation de la forme

$$-\xi \sin \theta + \eta \cos \theta = 0.$$

ou

$$(66) \quad \eta = \xi \tan \theta.$$

(θ est donc l'angle de d avec la tangente $M\xi$).

Le point de contact D de la droite d avec son enveloppe est à l'intersection de d avec une seconde droite orthogonale à d

$$\cos \theta (-X \sin \varphi + Y \cos \varphi - \varpi') - \sin \theta (X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \varpi) = r_1 \frac{\rho}{\rho_1},$$

ou

$$\eta \sin \theta + \xi \cos \theta = r_1 \frac{\rho}{\rho_1} = -\frac{r_1^2 \rho}{\varpi_1 \rho_1} \sin \theta,$$

ou

$$(67) \quad \eta - \eta_1 = -\xi \cotang \theta.$$

en posant

$$\eta_1 = -\frac{\rho r_1^2}{\rho_1 \varpi_1}$$

c'est une droite perpendiculaire à d menée par le point

$$\xi = 0, \quad \eta_1 = -\frac{\rho r_1^2}{\rho_1 \varpi_1},$$

de la normale en M à la courbe (C).

Les coordonnées du point du contact D sont données par ces deux relations

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta = 0, \\ \xi \cos \theta + \eta \sin \theta = \frac{\rho}{\rho_1} r_1; \end{array} \right.$$

on obtient donc

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\rho}{\rho_1} r_1 \cos \theta, \\ \eta = \frac{\rho}{\rho_1} r_1 \sin \theta; \end{array} \right.$$

tel que le segment MD sera

$$MD = \frac{\rho}{\rho_1} r_1.$$

MD est donc le *rayon de courbure oblique*.

On peut écrire aussi

$$(69 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\rho}{\rho_1} \varpi'_1, \\ \eta = -\frac{\rho}{\rho_1} \varpi_1. \end{cases}$$

Dans le plan fixe les coordonnées du point D sont exprimées par les deux équations

$$(70) \quad \begin{cases} X \sin \varphi - Y \cos \varphi + \varpi' = \frac{\rho}{\rho_1} \varpi'_1, \\ X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \varpi = -\frac{\rho}{\rho_1} \varpi_1; \end{cases}$$

d'où

$$(71) \quad \begin{cases} X = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \varpi'_1 - \varpi' \right) \sin \varphi + \left(\varpi - \frac{\rho}{\rho_1} \varpi_1 \right) \cos \varphi, \\ Y = -\left(\frac{\rho}{\rho_1} \varpi'_1 - \varpi' \right) \cos \varphi + \left(\varpi - \frac{\rho}{\rho_1} \varpi_1 \right) \sin \varphi; \end{cases}$$

de là

$$(72) \quad \begin{cases} X = x - \frac{\rho}{\rho_1} x_1, \\ Y = y - \frac{\rho}{\rho_1} y_1. \end{cases}$$

(la droite d est parallèle à OM_1 , déjà remarqué).

Remarque. — Soit g le centre de gravité de M et M_1 affectés des densités respectives ρ et $-\rho_1$ les coordonnées de ce point sont

$$\frac{X}{\frac{\rho}{\rho_1} - 1}, \quad \text{et} \quad \frac{Y}{\frac{\rho}{\rho_1} - 1},$$

donc les trois points O , D et g sont alignés, et on a :

$$\frac{OD}{Og} = \frac{\rho}{\rho_1} - 1.$$

30. Applications aux développoides. — Dans ce cas θ est constant ; donc

$$\frac{\varpi'_1}{\varpi_1} = \text{const},$$

d'où

$$\varpi_1 = e^{m\varphi}, \quad \cotang \theta = -m, \quad m = \text{const.}$$

Il résulte que l'image (C_1) est une spirale logarithmique. Réciproquement si (C_1) est une spirale logarithmique, on a :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= (1 + m^2) \varpi_1, \\ r_1 &= \sqrt{1 + m^2} \varpi_1,\end{aligned}$$

donc

$$MD = \frac{\rho}{\sqrt{1 + m^2}} = \rho \sin \theta,$$

l'expression du rayon *de courbure oblique pour les développoides*.

Application. — De l'équation de la droite d résulte que si cette droite passe constamment par un point fixe, on aura

$$\frac{\varpi}{\varpi_1} = \text{const};$$

donc les deux courbes (C) et (C_1) sont *homothétiques*.

Application. — Supposons que la droite d soit invariable, par exemple Ox , on a

$$\frac{\varpi_1}{\cos \varphi} = 0$$

l'image (C) est une *droite*.

31. Coordonnées tangentielles de d . — Ces coordonnées sont

$$(73) \quad u = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\varpi_1} \right), \quad v = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{\varpi_1} \right), \quad w = -\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varpi}{\varpi_1} \right)$$

ou bien :

$$u = \frac{-y_1}{\varpi_1^2}, \quad v = \frac{x_1}{\varpi_1^2}.$$

Donnons-nous l'enveloppe de d par son équation tangentielle

$$F(u, v, w) = 0;$$

ou

$$(74) \quad F \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\varpi_1} \right), \quad \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{\varpi_1} \right), \quad -\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varpi}{\varpi_1} \right) \right] = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en ϖ_1 , homogène, type *Monge*.

Si (C) est connue ϖ_1 est déterminée par une équation

$$(75) \quad \frac{\varpi'_1}{\varpi_1} = f(\varphi);$$

donnant une famille de courbes homothétiques par une intégrale.

Si (C_1) est connue, ϖ en résulte par une quadrature.

32. Application. — Prenons pour la courbe (C_1) l'image de Minkowski de (C) , nous montrons que la droite d est, dans ce cas, identique au diamètre de la parabole surosculatrice en M à (C) et l'enveloppe de d est le lieu du centre de la conique surosculatrice en M à (C) .

L'image de courbure de Minkowski. — Une courbe plane (C) étant définie par sa tangente

$$(55 \text{ bis}) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ;$$

et son rayon de courbure ρ étant l'expression

$$\rho = \varpi + \frac{d^2 \varpi}{d\varphi^2} ;$$

l'image de courbure (1) de Minkowski de cette courbe (« Das Minkowskische Krümmungsbild ») est (par définition) l'enveloppe de la droite

$$(76) \quad X \cos \varphi + Y \sin \varphi = \rho^{-\frac{1}{3}}.$$

Le rayon de courbure de l'image de courbure est donc ρ_1

$$(77) \quad \rho_1 = \frac{1}{9} \rho^{-\frac{7}{3}} (9 \rho^2 - 3 \rho \rho'' + 4 \rho'^2) ;$$

ρ' et ρ'' désignant les dérivées première et seconde de ρ (φ).

L'image se réduit à un point lorsque la courbe (C) est une parabole ($\rho_1 = 0$).

Cherchons les courbes telles que $\frac{\rho_1}{\rho}$ soit constant. On a alors

$$\frac{MD}{r_1} = \text{const} ;$$

ces courbes sont définies par l'équation différentielle du second ordre

$$(78) \quad 9 \rho^2 + 4 \rho'^2 - 3 \rho \rho'' = A \rho^{\frac{10}{3}} ;$$

A est une constante. Posons

$$\rho = \frac{z^3}{3}, \quad A = B \times 3^{\frac{10}{3}} ;$$

(1) BÖLMER, Ueber elliptisch-konvexe Ovale, *Mathematische*, LX, p. 256-262.
H. MOHRMANN. Über beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke. *Math. Annalen*, 1912, LXXII p. 593-595.

on trouve une autre équation différentielle

$$(79) \quad z^2 + 2 z'^2 - z z'' = B z^6 ;$$

posant

$$z = \frac{1}{\xi},$$

d'où

$$\xi + \xi'' = \frac{B}{\xi^3} ;$$

c'est l'équation différentielle du mouvement d'un point soumis à une force centrale proportionnelle à la distance à un centre fixe, la trajectoire est une conique à centre.

D'où :

$$\xi^2 + \xi'^2 = C - \frac{B}{\xi^2}$$

C est une autre constante. Finalement :

$$(80) \quad \xi^2 = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes})$$

(à la rotation près). *La propriété est caractéristique des coniques à centre.*

33. Dans le cas où la courbe (C) est l'image de Minkowski de la courbe (C) on a

$$(76 \text{ bis}) \quad \varpi_1 = \rho^{-\frac{1}{3}} ;$$

l'équation de la droite d est alors

$$-X \sin \varphi + Y \cos \varphi - \varpi' = -\frac{1}{3} (X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \varpi) \frac{\rho'}{\rho} ;$$

où

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

si on prend le point M pour l'origine des coordonnées et la tangente pour l'axe des x

$$\varphi = 0, \quad \varpi = 0, \quad \varpi' = 0,$$

on aura

$$(81) \quad \frac{Y}{X} = -\frac{\rho'}{3\rho} ;$$

qui exprime la direction de la droite d .

Considérons maintenant une parabole surosculatrice en M à la courbe (C) ;

$$(82) \quad (Ax + By)^2 + 2 Cx + 2 Dy + E = 0$$

La direction de son diamètre est donnée par

$$(83) \quad Ay''' + B (y' y''' - 3 y''^2) = 0$$

ou

$$A (3 \rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi) + B [\tan \varphi (3 \rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi) - 3 \rho \cos \varphi] = 0;$$

pour

$$\varphi = 0;$$

on trouve

$$(84) \quad A \rho' + 3 B \rho = 0;$$

d'où

$$\frac{B}{A} = -\frac{\rho'}{3\rho}.$$

Donc la droite *d* et le diamètre de la parabole surosculatrice sont confondus.

34. Considérons maintenant une conique ayant en O un contact du quatrième ordre avec la courbe (C), son équation est

$$(85) \quad 18 \rho^3 y = 9 \rho^2 x^2 - 6 \rho \rho' xy + (5 \rho'^2 + 9 \rho^2 - 3 \rho \rho'') y^2$$

le centre de cette conique est donné par les deux relations

$$(86) \quad \begin{cases} 3 \rho x - \rho' y = 0 \\ -3 \rho \rho' x + (5 \rho'^2 + 9 \rho^2 - 3 \rho \rho'') y = 9 \rho^3 \end{cases}$$

en posant

$$\Delta = 9 \rho^2 + 4 \rho'^2 - 3 \rho \rho'';$$

les coordonnées du centre sont alors

$$(87) \quad x = \frac{3 \rho^2 \rho'}{\Delta}, \quad y = \frac{9 \rho^3}{\Delta}.$$

Considérons la courbe (C) tangente en O à l'axe des *x*, sa tangente a pour l'équation (α l'angle de la tangente en M à (C) avec *Ox*)

$$(88) \quad x \sin \alpha - y \cos \alpha = p;$$

une droite *d* inclinée de l'angle ω sur la tangente et passant par un point M de la courbe a pour équation

$$(89) \quad x \sin (\alpha + \omega) - y \cos (\alpha + \omega) = p \cos \omega + p' \sin \omega;$$

en O, $\alpha = 0$, l'équation de d est alors

$$x \sin \omega - y \cos \omega = 0.$$

Cette droite sera le diamètre de la conique surosculatrice

$$3 \rho x - \rho' y = 0 ;$$

si

$$(90) \quad \frac{\sin \omega}{3 \rho} = \frac{\cos \omega}{\rho'} = \frac{1}{\sqrt{9 \rho^2 + \rho'^2}}.$$

L'enveloppe de la droite d est exprimée par l'équation (89) et son équation dérivée (en dérivant par rapport à α)

$$(91) \quad \left(1 + \frac{d\omega}{d\alpha}\right) [x \cos (\alpha + \omega) + y \sin (\alpha + \omega)] = p' \cos \omega + p'' \sin \omega + \frac{d\omega}{d\alpha} (p' \cos \omega - p \sin \omega) ;$$

en prenant

$$p = \frac{1}{2} \rho \alpha^2 ;$$

on a à l'origine

$$p_0 = 0, \quad p'_0 = 0, \quad p''_0 = \rho, \quad \alpha = 0,$$

donc, l'équation (91) est alors

$$(x \cos \omega + y \sin \omega) \left(1 + \frac{d\omega}{d\alpha}\right) = p'' \sin \omega ;$$

mais

$$\text{tang } \omega = \frac{3 \rho}{\rho'},$$

donc

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{-3 \rho \rho'' + \rho'^2}{9 \rho^2 + \rho'^2},$$

et

$$1 + \frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\Delta}{9 \rho^2 + \rho'^2} ;$$

nous obtenons donc deux relations

$$(92) \quad \begin{cases} 3 \rho y + \rho' x = 3 \rho^2 (9 \rho^2 + \rho'^2) ; \\ 3 \rho x - \rho' y = 0 ; \end{cases}$$

qui donnent

$$y = \frac{9 \rho^3}{\Delta}.$$

Il résulte que, le point de contact de la droite d avec son enveloppe est bien le centre de la conique surosculatrice du (quatrième ordre du contact).

L'équation de la droite d prend la forme

$$x (\rho' \sin \alpha + 3 \rho \cos \alpha) + y (3 \rho \sin \alpha - \rho' \cos \alpha) = \rho' p + 3 \rho \rho';$$

ou

$$(93) \quad x \frac{d}{d\alpha} \left(\rho^{\frac{1}{3}} \sin \alpha \right) - y \frac{d}{d\alpha} \left(\rho^{\frac{1}{3}} \cos \alpha \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(\rho^{\frac{1}{3}} \right);$$

en prenant

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi,$$

avec

$$\varpi_1 \rho^{\frac{1}{3}} = 1;$$

l'équation (93) devient

$$x \frac{d}{d\varphi} \left(\rho^{\frac{1}{3}} \cos \varphi \right) + y \frac{d}{d\varphi} \left(\rho^{\frac{1}{3}} \sin \varphi \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\rho^{\frac{1}{3}} \varpi \right);$$

donc la courbe (C_1) est l'image de Minkowski de la courbe (C) .

Réciproquement si on pose

$$\tan \theta = \frac{3 \rho}{\rho'};$$

et

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{3 (\rho'^2 - \rho \rho'')}{9 \rho^2 + \rho'^2};$$

$$1 + \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{4 \rho'^2 + 9 \rho^2 - 3 \rho \rho''}{9 \rho^2 + \rho'^2};$$

le rayon de courbure oblique qui a pour l'expression

$$\lambda = \frac{\rho \sin \theta}{1 + \frac{d\theta}{d\varphi}};$$

sera

$$\lambda = \frac{3 \rho^2 \sqrt{9 \rho^2 + \rho'^2}}{9 \rho^2 + 4 \rho'^2 - 3 \rho \rho''};$$

donc le point de contact de la droite d avec son enveloppe est bien le centre de la conique surosculatrice.

Application. — Vérification pour une conique à centre

$$\rho \varpi^3 = \text{const} ;$$

les coordonnées tangentielles de la droite d sont donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\varpi} \right), \\ v = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\cos \alpha}{\varpi} \right), \\ w = 0 ; \end{array} \right.$$

ou

$$u = \frac{y}{\varpi^2}, \quad v = -\frac{x}{\varpi^2}$$

d'où

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$$

(X et Y sont les coordonnées du point de contact de la droite d avec son enveloppe) ; la droite d est bien le rayon OM.

Pour une parabole d'axe parallèle à Ox ou à Oy , on a bien $u = 0$ ou $v = 0$.

Application. — Supposons que le lieu du centre de la conique sur-osculatrice (ou l'enveloppe de la droite d) soit un cercle de centre O et de rayon égal à l'unité, on dans ce cas

$$\begin{aligned} \varpi \cos \theta + \varpi' \sin \theta &= 1 \\ \varpi \rho' + 3 \varpi' \rho &= \sqrt{9 \rho^2 + \rho'^2} \end{aligned}$$

ou

$$\rho'^2 (\varpi^2 - 1) + 6 \rho' \rho \varpi \varpi' + 9 \rho (\varpi'^2 - 1) = 0$$

qui donne une équation compliquée ; mais on peut écrire aussi

$$u^2 + v^2 = w^2 ;$$

d'où une équation de la forme

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0 ;$$

(type Monge) équation des lignes de longueur nulle de l'espace (lignes minima).

Application. — Prenons

$$\varpi_1 = \rho^m$$

nous avons trouvé que

$$\cotang \theta = - \frac{\varpi'_1}{\varpi_1} = - m \frac{\rho'}{\rho};$$

pour

$$m = - \frac{1}{3};$$

la courbe (C_1) est l'image de Minkowski de la courbe (C) et la droite d est le diamètre de la parabole surosculatrice.

Pour .

$$m = - 1;$$

on a

$$\varpi_1 = \frac{1}{\rho},$$

et

$$\cotang \theta = \frac{\rho'}{\rho};$$

donc la droite d est la droite qui joint le point M au pôle de la spirale logarithmique osculatrice en M à la courbe (C) .

Cette propriété résulte de la propriété de la spirale logarithmique osculatrice à une courbe propriété que nous étudierons dans le chapitre V.

35. Autre forme de l'équation de la droite d . — Nous avons trouvé que l'équation de la droite d , dans le cas où (C) est l'image Minkowski de (C) , est de la forme

$$x(\rho' \cos \varphi - 3 \rho \sin \varphi) + y(\rho' \sin \varphi + 3 \rho \cos \varphi) - \varpi \rho' - 3 \rho \varpi' = 0.$$

Considérons une droite quelconque d'équation

$$ux + vy + w = 0;$$

on a donc pour la droite d

$$(94) \quad \begin{cases} nu = \rho' \cos \varphi - 3 \rho \sin \varphi, \\ nv = \rho' \sin \varphi + 3 \rho \cos \varphi, \\ nw = - \rho' \varpi - 3 \rho \varpi'; \end{cases}$$

Pósons

$$\rho^{\frac{1}{3}} = r;$$

d'où

$$\frac{\rho'}{3 \rho} = \frac{r'}{r};$$

les relations (94) deviennent :

$$(95) \quad \begin{cases} nu = \frac{3\rho}{r} (r' \cos \varphi - r \sin \varphi), \\ nv = \frac{3\rho}{r} (r' \sin \varphi + r \cos \varphi), \\ nw = -\frac{3\rho}{r} (r' \varpi + r \varpi'); \end{cases}$$

ou enfin

$$(96) \quad \begin{cases} nu = \frac{3\rho}{r} (r \cos \varphi)', \\ nv = \frac{3\rho}{r} (r \sin \varphi)', \\ nw = -\frac{3\rho}{r} (r \varpi)'. \end{cases}$$

L'équation de la droite prend donc la forme

$$(97) \quad x d(r \cos \varphi) + y d(r \sin \varphi) = d(r \varpi).$$

Application. — Supposons que l'enveloppe de la droite d soit une parabole

$$y^2 = 2ax;$$

la droite d est donc

$$uy^2 + 2avy + 2aw = 0;$$

c'est une équation du second degré en y ; on a donc la relation

$$av^2 - 2uw = 0.$$

Prenons

$$a = -2;$$

la parabole est alors

$$y^2 + 4x = 0;$$

et on a

$$v^2 + uw = 0.$$

Remplaçons u , v , et w par leurs valeurs, on a

$$(98) \quad \left[\frac{d}{d\varphi} (r \sin \varphi) \right]^2 = \frac{d}{d\varphi} (r \cos \varphi) \frac{d}{d\varphi} (r \varpi);$$

ou

$$(r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2 = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) (r' \varpi + r \varpi').$$

Posons

$$\begin{aligned} r &= e^{\sigma}; \\ r' &= r\sigma'; \end{aligned}$$

donc

$$(99) \quad (\sigma' \sin \varphi + \cos \varphi)^2 = (\sigma' \cos \varphi - \sin \varphi) (\sigma' \varpi + \varpi');$$

équation différentielle du second degré en σ' .

On peut poser aussi

$$r \cos \varphi = X, \quad r \sin \varphi = Y, \quad -r\varpi = Z;$$

l'équation (98) devient

$$(100) \quad dY^2 + dX dZ = 0.$$

Posons encore

$$X = \xi + i\eta, \quad Y = \zeta, \quad Z = \xi - i\eta;$$

l'équation (100) devient

$$(101) \quad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0;$$

donc en prenant

$$\zeta = r \sin \varphi, \quad \xi = \frac{r}{2} (\cos \varphi - \varpi), \quad \eta = \frac{r}{2} i (\cos \varphi + \varpi);$$

on se ramène aux lignes de longueur nulle de l'espace.

Comme dans le cas de cercle, on arrive à une équation de MONGE

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0,$$

équivalente à

$$dX dZ + dY^2 = 0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$\begin{cases} X = -f'', \\ Y = tf'' - f', \\ Z = t^2 f'' - 2ff' + 2f; \end{cases}$$

$f(t)$ est une fonction arbitraire d'un paramètre t , f' , f'' ses dérivées. Il s'agit alors de déterminer $f(t)$.

Soit $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ une telle ligne minima, φ , r et ϖ seront alors des fonctions du paramètre t , aussi que X , Y et Z , il reste à trouver la fonction $f(t)$ qui intervient dans l'équation des lignes minima.

Posons

$$(102) \quad \begin{cases} X = \alpha + \gamma = \cos \varphi, \\ Y = \beta = r \sin \varphi, \\ Z = \alpha - \gamma = -r\varpi; \end{cases}$$

de là

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = d\gamma^2;$$

γ est donc l'arc d'une courbe (α, β) .

On posera donc

$$(103) \quad \begin{cases} \alpha = u' \cos t - u'' \sin t, \\ \beta = u' \sin t + u'' \cos t, \\ \gamma = u + u''; \end{cases}$$

on a alors pour les équations (102)

$$(104) \quad \begin{cases} X = u + u' \cos t + u'' (1 - \sin t), \\ Y = u' \sin t + u'' \cos t, \\ Z = -u + u' \cos t - u'' (1 + \sin t); \end{cases}$$

la fonction $u(t)$ est quelconque.

On a les relations :

$$(105) \quad \begin{cases} r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma, \\ r\varpi = \gamma - \alpha, \\ \text{tang } \varphi = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}, \\ r^3 = \varpi + \varpi''. \end{cases}$$

CHAPITRE V

LES SPIRALES LOGARITHMIQUES OSCULATRICES

36. **Étude sur l'enveloppe des cercles (C_1) de diamètre R** (R est le rayon de courbure de (C)) **tangentes en chaque point M à une courbe plane (C) .** — Soit M_1 le centre de courbure de (C) associé en M . Une droite d issue du point M et faisant avec la normale MN un angle indépendant de la position de M sur la courbe (C) touche la développée (D) en un point D qui est la projection orthogonale de M_1 sur d . Le lieu des divers points D , ainsi associés à un même point M , est le cercle (C_1) de diamètre MM_1 .

A chaque point M correspond un cercle (C_1) . Le cercle (C_1) touche son enveloppe en un point S , autre que M . Nous allons indiquer une construction géométrique du point S .

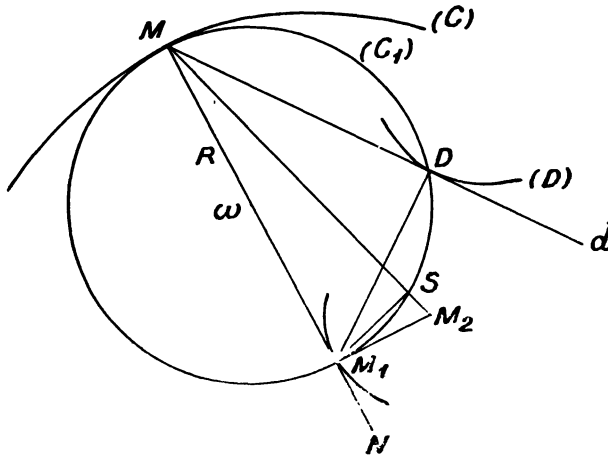


FIG. 10

Soit

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ;$$

l'équation magique de la courbe (C). Les coordonnées du point M sont :

$$(106) \quad \begin{cases} x = \varpi \cos \varphi - \varpi' \sin \varphi, \\ y = \varpi \sin \varphi + \varpi' \cos \varphi. \end{cases}$$

Les coordonnées du point M₁ sont :

$$(107) \quad \begin{cases} x_1 = -\varpi' \sin \varphi - \varpi'' \cos \varphi, \\ y_1 = \varpi' \cos \varphi - \varpi'' \sin \varphi. \end{cases}$$

Le centre ω du cercle (C₁) milieu du segment MM₁, a donc pour coordonnées :

$$(108) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{\varpi - \varpi''}{2} \cos \varphi - \varpi' \sin \varphi, \\ y_0 = \varpi' \cos \varphi + \frac{\varpi - \varpi''}{2} \sin \varphi. \end{cases}$$

Les points de contact M et S du cercle (C₁) avec les deux parties de son enveloppe sont symétriques par rapport à la tangente au centre ω du cercle (C₁) au lieu de ce point ω . Cherchons donc les expressions de $\frac{dx_0}{d\varphi}$ et $\frac{dy_0}{d\varphi}$, on a :

$$(109) \quad \begin{cases} \frac{dx_0}{d\varphi} = -\frac{1}{2} [(\varpi + \varpi'') \sin \varphi + (\varpi' + \varpi''') \cos \varphi], \\ \frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{1}{2} [(\varpi + \varpi'') \cos \varphi - (\varpi' + \varpi''') \sin \varphi]. \end{cases}$$

Ce même calcul des dérivées de x_0 et y_0 peut être effectué en formant la combinaison $x_0 + iy_0 = \left(\frac{\varpi - \varpi''}{2} + i\varpi' \right) e^{i\varphi}$; sa dérivée par rapport à φ est

$$\frac{dx_0}{d\varphi} + i \frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{1}{2} [i (\varpi + \varpi'') - (\varpi' + \varpi''')] e^{i\varphi}.$$

Il suffit alors d'égaliser respectivement les parties réelles et les parties purement imaginaires pour obtenir les relations (109).

En posant

$$R = -(\varpi + \varpi'')$$

R désigne un nombre algébrique dont la valeur absolue est le rayon de courbure de (C) ; les expressions (109) deviennent :

$$(109 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{dx_0}{d\varphi} = \frac{1}{2} (R \sin \varphi + R' \cos \varphi), \\ \frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{1}{2} (-R \cos \varphi + R' \sin \varphi); \end{cases}$$

la droite MS a donc pour coefficients directeurs :

$$R \cos \varphi - R' \sin \varphi, \quad R \sin \varphi + R' \cos \varphi ;$$

et son équation est

$$(110) \quad X(R \sin \varphi + R' \cos \varphi) + Y(-R \cos \varphi + R' \sin \varphi) = \varpi R' - R\varpi'.$$

Soit M_2 le deuxième centre de courbure. Les coordonnées de M_2 sont données par les équations

$$(111) \quad \begin{cases} x \cos \varphi + y \sin \varphi = -\varpi'', \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi = -\varpi'''. \end{cases}$$

Les coordonnées du point M_2 vérifient l'équation de la droite MS, en tenant compte que $\varpi R' - R\varpi' = R\varpi''' - R\varpi''$; donc la droite MS passe par le point C_2 .

Ainsi donc pour obtenir le point S, il suffit de projeter orthogonalement M_1 sur la droite MM_2 .

Application. — Supposons que la courbe (C) soit une développante de cercle : le point M_2 est alors un point fixe, centre de la développée de (C), qui est un cercle ; les points M et S sont inverses l'un de l'autre par rapport au cercle. La courbe (S) est donc la courbe inverse de la développante de cercle. C'est la spirale tractrice compliquée. Puisque la droite MS passe constamment par le point fixe O, origine des coordonnées, donc $\varpi R' - R\varpi'$ est nulle, cherchons les courbes (C) qui jouissent de cette propriété, on a :

$$\frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{R'}{R},$$

de là :

$$\frac{R}{\varpi} = \text{const},$$

ou encore

$$\varpi'' = k\varpi ;$$

k étant une constante arbitraire, positive, nulle ou négative. Pour $k = 0$, la courbe est précisément la développante de cercle antérieurement envisagée. Pour $k < 0$, l'équation différentielle du second ordre

caractérise des épicycloïdes. Pour $k > 0$, l'intégrale est une courbe nécessairement transcendante ; ϖ est en effet de la forme

$$\varpi = ae^{m\varphi} + be^{-m\varphi} ;$$

pour $a = 0$ et pour $b = 0$ les courbes sont les spirales logarithmiques.

Application. — Déterminer la courbe (C) par la condition que la courbe (S) soit une ligne droite.

Soit Ox cette droite ; elle est le lieu des points S et tangente aux cercles (C_1), on a donc

$$(112) \quad y + y_1 = R.$$

Formons l'expression de (112), on a : avec les relations (106) et (107)

$$y - y_1 = -R \sin \varphi ;$$

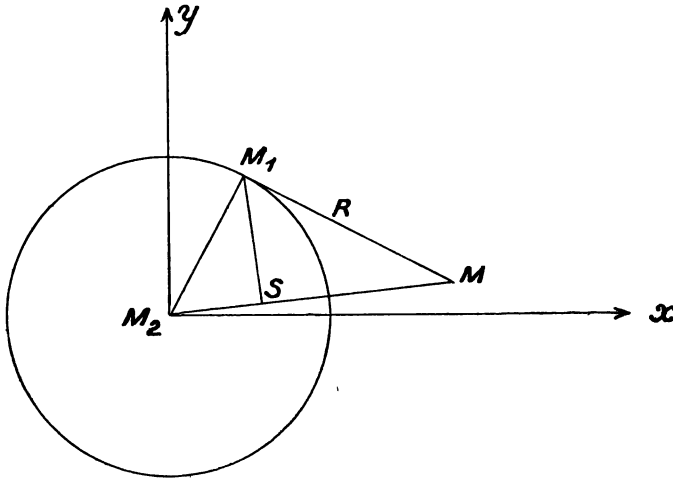


FIG. 11

mais

$$y' = -\cotang \varphi ;$$

donc

$$y - y_1 = -\frac{R}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

La condition (112) devient

$$2y + \frac{R}{\sqrt{1 + y'^2}} = R ;$$

d'où, l'équation différentielle du second ordre

$$2yy'' = (1 + y'^2)(\sqrt{1 + y'^2} - 1).$$

Cette équation qui ne dépend que de y et de ses dérivées ; on sait que la méthode classique d'intégration de cette équation consiste à la transformer en une équation du premier ordre en prenant y' pour nouvelle variable. Posons donc

$$\sqrt{1 + y'^2} = u ;$$

on trouve :

$$\frac{dy}{y} = \frac{2 du}{u(u-1)} ;$$

ou

$$y = a \left(1 - \frac{1}{u}\right)^2 ;$$

a , une constante arbitraire.

Partant alors de la relation entre u et y' , on obtient l'expression suivante de la différentielle dx .

$$dx = 2a \sqrt{\frac{u-1}{u+1}} \cdot \frac{du}{u^3} ;$$

faisons le changement de variable

$$\frac{u-1}{u+1} = t^2,$$

ce changement de variable conduit aux formules :

$$(113) \quad \begin{cases} x = 8a \int \frac{t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^3} dt + \text{const} ; \\ y = \frac{4a t^4}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$$

En posant

$$t = \tan \frac{\theta}{2},$$

on aura pour (113) :

$$(114) \quad \begin{cases} x = b + a(2 \sin \theta - \theta - \sin \theta \cos \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta)^2. \end{cases}$$

Cette courbe transcendante est une développante de la *cycloïde* ordinaire d'équation

$$\begin{cases} 2x_1 = \sin 2\theta - 2\theta, \\ 2y_1 = 1 - \cos 2\theta. \end{cases}$$

On peut construire géométriquement le point M appartenant à la courbe (C) développante d'une cycloïde ordinaire. Le milieu du seg-

ment $M_1 M_2$ est sur Ox . Le cercle de diamètre $M_1 M_2$ coupe Ox au point S ; l'intersection de la droite $M_2 S$ et de la tangente en M_1 à la cycloïde, est le point M de la développante (C) .

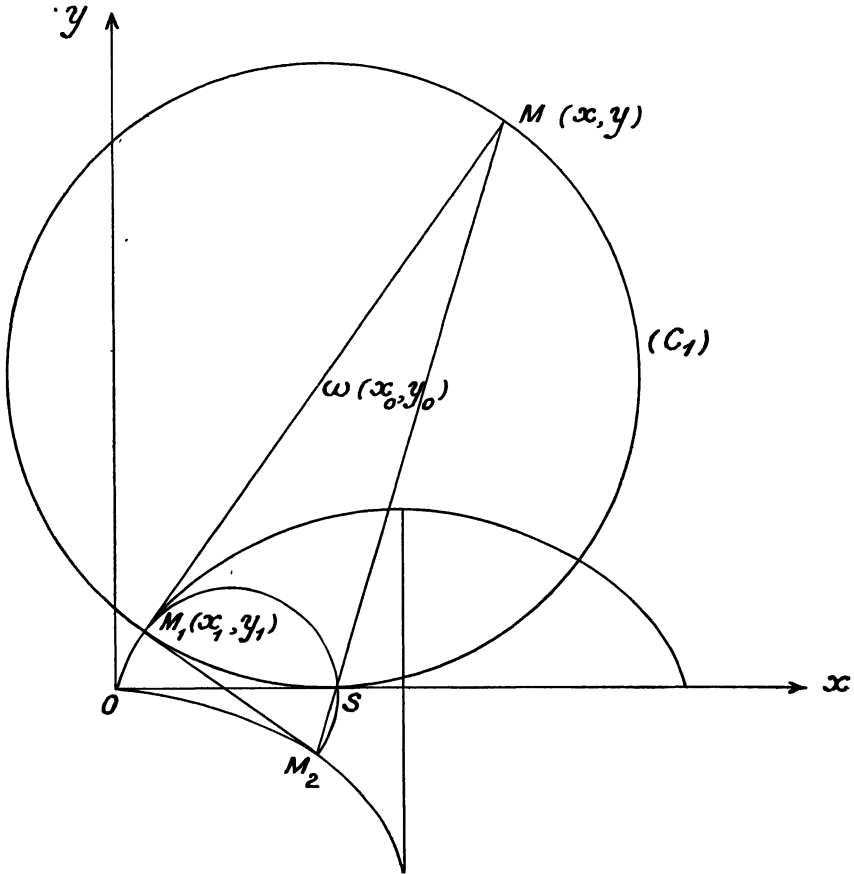


FIG. 12

Équation naturelle de la courbe (C). — Dérivons l'expression (112) on a

$$\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dy_1}{d\varphi} = R',$$

en remplaçant $\frac{dy}{d\varphi}$, $\frac{dy_1}{d\varphi}$, par leurs valeurs, on trouvera la relation

$$(\varpi + \varpi') \cos \varphi - (\varpi' + \varpi''') \sin \varphi = R',$$

où

$$\frac{dR}{R} = \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sin \varphi - 1};$$

qui donne :

$$R = (1 - \sin \varphi) \text{ const.}$$

On trouve aussi une autre relation

$$2y = R(1 - \sin \varphi).$$

Application. — *Réciprocité entre les deux courbes (C) et (S).* — Il faut et il suffit que ω soit le milieu du rayon de courbure de la courbe (S). Il est donc nécessaire que les rayons de courbure en M et S soient égaux.

Soient x, y les coordonnées du point ω , s l'abscisse curviligne de ce point, soient X, Y les coordonnées du point M, on a :

$$(115) \quad \begin{cases} X = x + \rho \cos(\alpha + \zeta), \\ Y = y + \rho \sin(\alpha + \zeta); \end{cases}$$

α l'angle qui repère la tangente de (ω) , et ζ celui qui repère le point M sur la circonférence et par rapport à la tangente à (ω) . Les coordonnées du point S s'obtiennent en changeant ζ en $-\zeta$ dans les expressions de X et Y .

L'angle ζ est donné par l'équation

$$\cos \zeta = -\frac{d\rho}{ds}.$$

La droite ωM touche son enveloppe en un point M_1 , tel que

$$\omega M_1 = \lambda_1 = -\frac{\sin \zeta}{\alpha' + \zeta'}.$$

La droite ωS touche son enveloppe en M_2 tel que

$$\omega M_2 = \lambda_2 = +\frac{\sin \zeta}{\alpha' - \zeta'}.$$

Il faut qu'on ait $\lambda_1 = \lambda_2$, d'où $\alpha' = 0$: la courbe lieu du point ω doit être une droite, les courbes (C) et (S) sont symétriques par rapport à cette droite. Les rayons de courbure de ces deux courbes sont divisés en deux parties égales par une droite fixe, donc (C) et (S) sont deux cycloïdes ordinaires.

En prenant Ox pour la droite fixe, nous pouvons tracer la figure suivante :

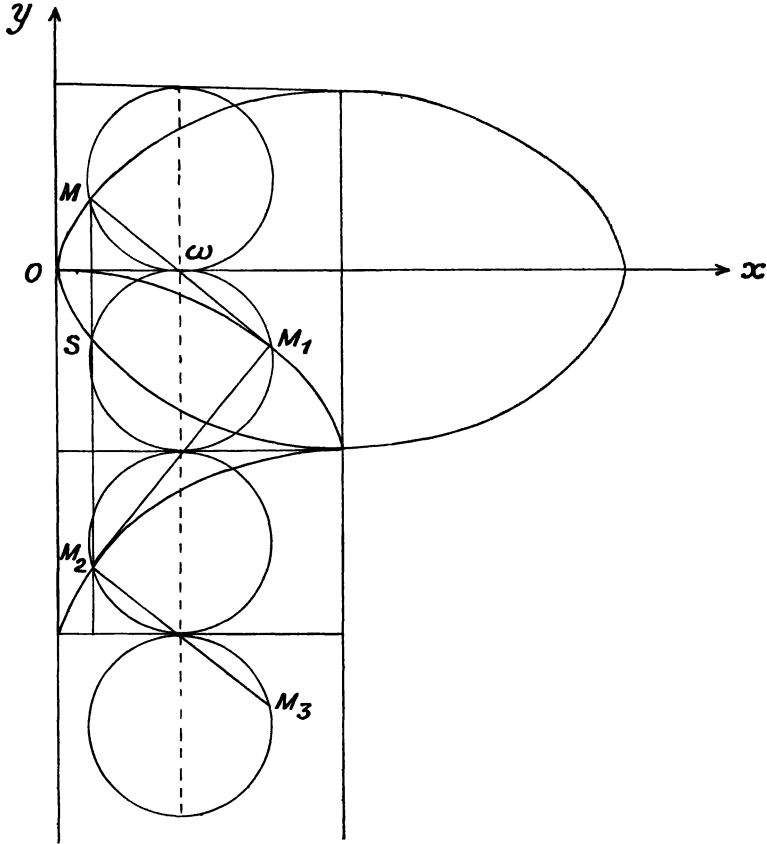


FIG. 13

Application. — Cherchons la courbe (C) telle que la courbe (S) dégénère en un point fixe. Soit O l'origine de coordonnées de ce point fixe. Le cercle (C₁) doit passer par ce point, on a donc, d'après les équations (4)

$$\frac{R^2}{4} = \varpi'^2 + \frac{(\varpi - \varpi'')^2}{4};$$

ou

$$\varpi\varpi'' - \varpi'^2 = 0;$$

de là

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varpi'}{\varpi} \right) = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\varpi = Ae^{m\varphi};$$

A et m sont deux constantes arbitraires. Cette équation polaire tangentielle est celle de la *spirale logarithmique*. Le point S est fixé et coïncide avec le pôle de la spirale logarithmique. *La courbe caractérisée par la propriété d'avoir un centre de courbure oblique fixe est la spirale logarithmique.*

37. La propriété des spirales logarithmiques osculatrices à la courbe (C). — En chaque point M d'une courbe (C), une spirale logarithmique est osculatrice à (C); le contact entre deux courbes est du troisième ordre; la spirale logarithmique ne traverse pas en général la courbe (C).

Supposons la courbe (C) rapportée à la tangente Mx et à la normale My au point M non singulier; on a :

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^3}{6P} + \dots$$

Les coordonnées de M₁ sont :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = R;$$

et celles de M₂ :

$$x_2 = \frac{R^3}{P}, \quad y_2 = R.$$

Le point S a donc pour coordonnées :

$$a = \frac{PR^3}{R^4 + P^2}, \quad b = \frac{PR^3}{R^4 + P^2}.$$

On peut trouver les coordonnées du point S par la manière suivante; le centre M₁ est l'intersection de deux droites

$$(116) \quad \begin{cases} -x \sin \varphi + y \cos \varphi = \varpi', \\ x \cos \varphi + y \sin \varphi = -\varpi''; \end{cases}$$

la droite M₁S a donc une équation de la forme

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi - \varpi' + \lambda (x \cos \varphi + y \sin \varphi + \varpi'') = 0;$$

cette droite devant être perpendiculaire à MM₂, on a :

$$\lambda = \frac{R}{R_1};$$

avec

$$R_1 = \frac{dR}{d\varphi} = R \frac{dR}{ds}.$$

Les coordonnées a, b du point S sont données par le système

$$(117) \quad \begin{cases} a \cos \varphi + b \sin \varphi - \varpi = \frac{R^3}{R^2 + R_1^2}, \\ -a \sin \varphi + b \cos \varphi - \varpi' = \frac{R^2 R'}{R^2 + R_1^2}; \end{cases}$$

en prenant M pour origine et la tangente pour axe des x , d'où

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varpi = 0, \quad \varpi' = 0;$$

on a

$$a = \frac{-R^2 R_1}{R^2 + R_1^2}, \quad b = \frac{R^3}{R^2 + R_1^2};$$

mais

$$P = -\frac{R^3}{R_1};$$

donc :

$$a = \frac{PR^3}{R^4 + P^2}, \quad b = \frac{PR^2}{R^4 + P^2}.$$

Considérons maintenant la spirale logarithmique osculatrice à (C) en M, S son pôle, a et b les coordonnées de S, soit

$$\rho = \rho_0 e^{m\theta}$$

son équation par rapport à des axes issus du pôle S et parallèles aux axes (Mxy). En écrivant que la spirale passe par M et touche Mx, on obtient

$$(118) \quad \begin{cases} m = -\frac{a}{b}, \\ a^2 + b^2 = \rho_0^2 e^{2m \arctan \frac{b}{a}}; \end{cases}$$

l'équation de la spirale est donc

$$(119) \quad \frac{2a}{b} \arctan \frac{bx - ay}{ax + by - a^2 - b^2} = \log \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2}{a^2 + b^2};$$

elle vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$(120) \quad y'(ax + by - a^2 - b^2) + bx - ay = 0,$$

en dérivant cette équation deux fois, il vient pour $x = 0, y = 0$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = \frac{ab}{(a^2 + b^2)^2};$$

pour exprimer que les courbes (C) et la spirale ont à l'origine un contact du second ordre, il suffit d'identifier ces expressions avec les suivantes :

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{R}, \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 = \frac{1}{P};$$

on obtient ainsi les expressions de a et de b

$$(121) \quad a = \frac{PR^3}{R^4 + P^2}, \quad b = \frac{P^2 R}{R^4 + P^2};$$

elles sont identiques à celles que l'on avait obtenues pour les coordonnées de la projection de M_1 sur MM_2 .

La courbe (S) enveloppe du cercle (C_1) est le lieu des pôles des spirales logarithmiques osculatrices à la courbe (C).

Lorsque (C) est algébrique, (S) l'est aussi (intermédiaire d'un cercle). Il est curieux que par l'intermédiaire de la spirale logarithmique, qui est transcendante, se correspondent deux courbes algébriques.

Dans son *Traité des courbes spéciales remarquables* (1), GOMES TEIXEIRA relève la proposition ci-dessus due à M. E. TURRIÈRE et en donne une nouvelle démonstration.

38. *Étude primitive de la courbe (S).* — La courbe (S) a été primitivement étudiée par E. CESÁRO (2) sous le nom de ligne de rebroussement (3) de (C).

Parmi les points M_1 , correspondant à M, sur les différentes développées, il en est un, P, qui constitue, pour la courbe correspondante, un point de rebroussement. Cette développée sépare toutes les développées en deux classes, suivant qu'elles sont ou ne sont pas des lignes de poursuite proprement dites.

La ligne de rebroussement d'une spirale logarithmique se réduit à un point.

Si (M) est une développante de cercle, la ligne de rebroussement est inverse de (M), donc une tractrice polaire de Neuberg.

La ligne de rebroussement d'une cycloïde est une autre cycloïde, symétrique de la première par rapport à la base.

Les tangentes à une courbe et à sa ligne de rebroussement, en deux points correspondants, sont également inclinées sur la droite qui joint ces deux points.

(1) E. TURRIÈRE. *L'Enseignement mathématique*, Genève, 1913, p. 123. — G. TEIXEIRA. *Traité des courbes spéciales remarquables, planes et gauches*, t. III, 1915, p. 105-107.

(2) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1886, p. 65-83.

(3) Cette dénomination de ligne de rebroussement donne lieu à l'équivoque et ne convient nullement pour désigner une courbe liée aux développées.

Équation intrinsèque de la ligne de rebroussement est donnée par :

$$(122) \quad \rho' = \frac{\rho^2 \frac{d^2 \rho}{ds^2}}{1 + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + 2\rho \frac{d^2 \rho}{ds^2}}, \quad ds' = \rho d\omega.$$

Il faut éliminer ρ et s entre ces deux relations et l'équation de (M).
Pour la chaînette

$$\rho = a + \frac{s^2}{a};$$

on est conduit à une équation compliquée.

Parmi les alysoïdes

$$a\rho = s^2 + C^2,$$

il en est une remarquable : $C = \frac{a}{2}$; pour elle :

$$\rho' = \frac{\rho}{4}, \quad s' = \frac{s}{2},$$

la ligne de rebroussement de cette alysoïde particulière est une autre alysoïde.

Le point de rebroussement se trouve à une distance constante de la tangente à la courbe. Sa distance à la normale est égale à la longueur de la courbe, comptée à partir du sommet.

La courbe dont il vient d'être question est loin d'être caractérisée par les propriétés énoncées. Il y a, par exemple, la chaînette d'égale résistance de Coriolis représentée par l'équation intrinsèque :

$$\rho = ach \frac{s}{a},$$

qui jouit de propriétés analogues ; pour elle, en effet,

$$\rho' = \frac{\rho}{3}, \quad s' = s.$$

La ligne de rebroussement est alors :

$$\rho' = \frac{a}{3} ch \frac{s}{a}.$$

La distance de tout point, au point de rebroussement, qui lui correspond, est constante.

39. **Coordonnées du pôle S de la spirale logarithmique osculatrice.** — Elles sont données par les deux équations :

$$(117 \text{ bis}) \quad \begin{cases} a \cos \varphi + b \sin \varphi = \varpi + \frac{R}{R'^2 + 1}, \\ -a \sin \varphi + b \cos \varphi = \varpi' + \frac{RR'}{R'^2 + 1}; \end{cases}$$

où

$$R' = \frac{dR}{ds}, \quad R = -(\varpi + \varpi') = \frac{ds}{d\varphi}, \quad \varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi};$$

on a :

$$(123) \quad \begin{cases} \frac{da}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{db}{d\varphi} \sin \varphi = -\frac{2 R^2 R' R''}{(1 + R'^2)^2}, \\ -\frac{da}{d\varphi} \sin \varphi + \frac{db}{d\varphi} \cos \varphi = \frac{R^2 R'' (1 - R'^2)}{(1 + R'^2)^2}. \end{cases}$$

L'arc σ de la ligne de rebroussement est donc défini par la formule

$$(124) \quad \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{R^2 R''}{1 + R'^2},$$

ou

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{RR''}{1 + R'^2}.$$

Les expressions (123) deviennent :

$$(125) \quad \begin{cases} \frac{da}{d\sigma} \cos \varphi + \frac{db}{d\sigma} \sin \varphi = -\frac{2 R'}{1 + R'^2} = \sin 2\delta, \\ -\frac{da}{d\sigma} \sin \varphi + \frac{db}{d\sigma} \cos \varphi = \frac{1 - R'^2}{1 + R'^2} = -\cos 2\delta. \end{cases}$$

En posant $\cotang \delta = -R'$, $\frac{1}{\sin^2 \delta} = R'' : \frac{d\delta}{ds}$;

on a :

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{R''}{1 + R'^2},$$

d'où

$$(126) \quad \frac{d\sigma}{d\delta} = R.$$

Dérivons de nouveau les expressions (125) :

$$(127) \quad \begin{cases} \frac{d^2 a}{d\sigma^2} \cos \varphi + \frac{d^2 b}{d\sigma^2} \sin \varphi = 2 \cos 2\delta \frac{d\delta}{d\sigma} + \cos 2\delta \frac{d\varphi}{d\sigma}, \\ -\frac{d^2 a}{d\sigma^2} \sin \varphi + \frac{d^2 b}{d\sigma^2} \cos \varphi = 2 \sin 2\delta \frac{d\delta}{d\sigma} + \sin 2\delta \frac{d\varphi}{d\sigma}; \end{cases}$$

soit ρ le rayon de courbure de (S), on a, au moyen de (127)

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{d\delta}{d\sigma} + \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{2}{R} + \frac{1 + R'^2}{RR''} = \frac{1 + R'^2 + 2 RR''}{R^2 R''},$$

de là

$$(122 \text{ bis}) \quad \rho = \frac{R^2 R''}{1 + R'^2 + 2 RR''}.$$

Cette formule jointe à la formule de rectification (124) conduit à la représentation intrinsèque de la ligne de rebroussement à partir de celle de la courbe donnée.

Posons :

$$R_1 = \frac{dR}{d\varphi} = RR',$$

$$R_2 = \frac{d^2 R}{d\varphi^2} = R^2 R'' + RR'^2,$$

on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R^2 + 2 RR_2 - R_1^2}{R(RR^2 - R_1^2)},$$

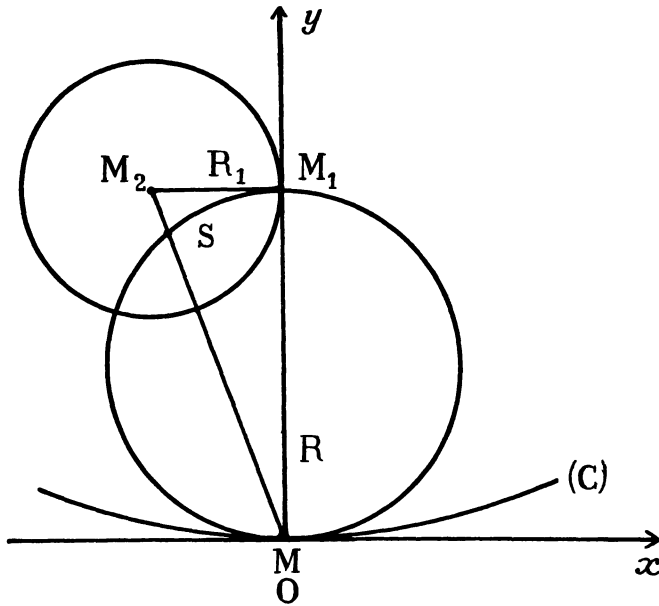


FIG. 14

ou

$$1 - \frac{2\rho}{R} = \frac{R^2 + R_1^2}{R^2 + 2RR_1 - R_1^2}.$$

On peut construire géométriquement le pôle S de la *spirale osculatrice* en O ; faisons la figure dans le cas où $\frac{dR}{ds} > 0$, le centre de courbure M_1 a pour coordonnées, dans le système tangente-normale, O et R, le deuxième centre de courbure M_2 ($-R_1, R$) et

$$R_1 = \frac{dR}{d\alpha} = R \frac{dR}{ds} > 0$$

le pôle S est l'intersection de deux cercles orthogonaux, l'un de diamètre R et le second de rayon R_1 . Les coordonnées du pôle S sont :

$$(128) \quad X = -\frac{R \frac{dR}{ds}}{1 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}, \quad Y = \frac{R}{1 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2};$$

ou :

$$(128 \text{ bis}) \quad X = -\frac{R^2 R_1}{R^2 + R_1^2}, \quad Y = \frac{R^3}{R^2 + R_1^2};$$

(les axes mobiles sont la tangente Mx et la normale My) (fig. 14).

40. Enveloppe des cercles de rayon λR (λ est une constante) **tangents à la courbe (C)**. — Considérons la courbe (C), Ox sa tangente, Oy la normale ; soient x, y les coordonnées d'un point M sur (C), s l'arc de (C), R le rayon de courbure, α l'angle de la tangente en M à (C) avec Ox . Prenons un point μ sur le rayon de courbure MM_1 le divisant en un rapport donné constant ; soient ξ, η les coordonnées de μ , on a :

$$(129) \quad \begin{cases} \xi = x - \lambda R \sin \alpha, \\ \eta = y + \lambda R \cos \alpha; \end{cases}$$

en prenant la longueur $M\mu = \lambda R$.

En dérivant les expressions (129)

$$(130) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{ds} = (1 - \lambda) \cos \alpha - \lambda \frac{dR}{ds} \sin \alpha, \\ \frac{d\eta}{ds} = (1 - \lambda) \sin \alpha + \lambda \frac{dR}{ds} \cos \alpha; \end{cases}$$

supposant $R > 0$, au point O , on a :

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, & x_0 &= 0, & y_0 &= 0, & \alpha &= 0; \\ \xi_0 &= 0, & \eta_0 &= \lambda R; \\ \left(\frac{d\xi}{ds}\right)_0 &= 1 - \lambda, & \left(\frac{d\eta}{ds}\right)_0 &= \lambda \frac{dR}{ds}; \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{d\eta_0}{d\xi_0} = \frac{\frac{dR}{ds}}{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

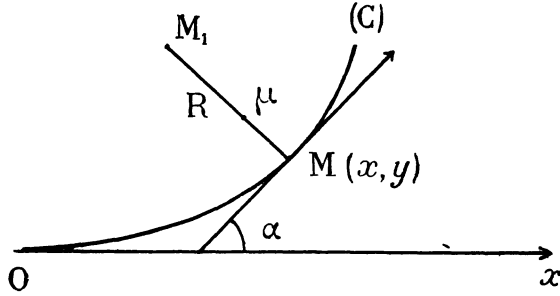


FIG. 15

Considérons maintenant le cercle de centre μ , tangente à (C) en M. Son rayon est λR , son équation est

$$(131) \quad (X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 = \lambda^2 R^2.$$

Cherchons le point, autre que M, de contact avec son enveloppe :

$$(132) \quad (X - \xi) \frac{d\xi}{ds} + (Y - \eta) \frac{d\eta}{ds} + \lambda^2 R \frac{dR}{ds} = 0;$$

à la limite :

$$(133) \quad \begin{cases} X^2 + Y^2 - 2\lambda R Y = 0, \\ X \frac{d\xi}{ds} + Y \frac{d\eta}{ds} = 0. \end{cases}$$

Il est évident que le point de contact P est symétrique de M par rapport à la tangente au lieu du centre μ du cercle considéré. La droite MP relative au point M en Q a pour équation

$$(134) \quad X \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) + Y \frac{dR}{ds} = 0.$$

Considérons le cas où $\lambda = \frac{1}{2}$, les équations (133) deviennent ;

$$(135) \quad \begin{cases} X + Y \frac{dR}{ds} = 0, \\ X^2 + Y^2 - RY = 0 ; \end{cases}$$

d'où les coordonnées du point de contact [pôle S de la spirale logarithmique osculatrice à (C) en M] :

$$X = \frac{-R \frac{dR}{ds}}{1 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}, \quad Y = \frac{R}{1 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}.$$

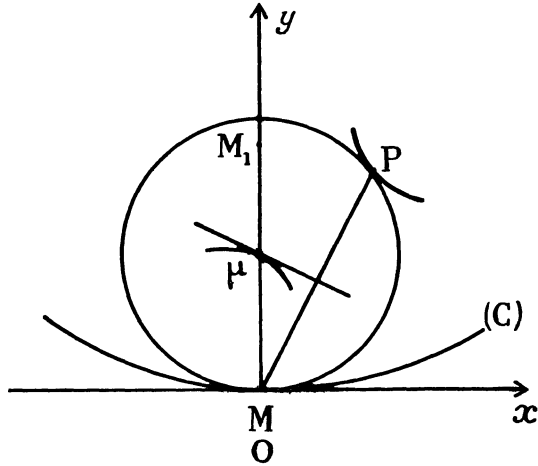


FIG. 16

Lieu du point P quand λ varie. — On avait :

$$(133 \text{ bis}) \quad \begin{cases} X^2 + Y^2 = 2\lambda RY, \\ X \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) + YR' = 0 ; \end{cases}$$

le lieu est la cubique circulaire

$$(136) \quad (X - R' Y) (X^2 + Y^2) = 2 RXY.$$

Le point O est un point double, OX, OY sont tangentes à la cubique.

Il y a une asymptote réelle, qui a pour équation

$$(137) \quad X = YR' + \frac{2RR'}{1 + R'^2},$$

ou

$$\begin{aligned} X &= R' (Y + 2 Y_s). \\ YR' &= X + 2 X_s. \end{aligned}$$

CHAPITRE VI

LA COURBE DE MANNHEIM GÉNÉRALISÉE

41. Courbes de Mannheim. — Lorsqu'une courbe plane (C) de grandeur invariable roule sur une droite Ox , le centre de courbure de (C) relatif au point de contact de (C) et de Ox engendre une courbe (Γ), qui n'est point une roulette de (C) puisque le point générateur de (Γ) n'est pas invariablement lié à (C). L'équation cartésienne $y = f(x)$ de (Γ) s'obtient en substituant respectivement x et y à l'abscisse curviligne s et au rayon de courbure R dans l'équation intrinsèque $R = f(s)$ de la courbe (C); de sorte que cette courbe (Γ) interprète géométriquement l'équation intrinsèque de la courbe (C). Le premier exemple d'une telle correspondance entre (C) et (Γ) semble dû à RICCATI (1) qui aurait établi que lorsque (C) est une épicycloïde, (Γ) est une conique. Le cas particulier où (C) est une astroïde régulière à laquelle correspond une ellipse comme courbe (Γ), a été examinée par O. BÖKLEN (2). Mais ce fut A. MANNHEIM (3) qui consacra aux courbes (Γ) le premier travail important; il établit par des considérations géométriques que (Γ) est une droite lorsque (C) est une spirale logarithmique, une parabole lorsque (C) est une chaînette ou une développante de cercle; une circonférence lorsque (C) est une cycloïde, une ellipse lorsque (C) est une épicycloïde ordinaire. C'est pour cette raison que E. WOLFFING (4) a donné à la courbe (Γ) le nom de courbe de Mannheim associée à (C).

Diverses généralisations des courbes de Mannheim ont été données par H. WIELEITNER, P. ERNST, E. TURRIÈRE, L. BRAUDE. Si l'on substitue, par exemple, à la base rectiligne une circonférence de

(1) L. Aoust, p. 99.

(2) O. BÖKLEN. *Archiv. math. Phys.* — XXXVII, 1856, p. 105.

(3) A. MANNHEIM. *Journal de mathématiques pures et appliquées* [2], t. IV, 1859, p. 93-104. — *Principes et développements de géométrie cinématique*, Paris, 1894, p. 500 et 509. — HATON DE LA GOUPIILLIÈRE. *Journal de l'école polytechnique*. II. Cahier 15, 1911, p. 24.

(4) E. WOLFFING. *Zeitschrift Math. Physik.*, XLIV, 1899, p. 140.

rayon a , à une courbe (C) correspondront deux courbes de Mannheim généralisées d'équations polaires

$$(138) \quad r = a \pm f(a\theta);$$

à la spirale logarithmique sont ainsi associées deux spirales d'Archimède, à la courbe de Delaunay deux conchoïdes focales de coniques dont l'une est la courbe de *Jerabek*; à la chaînette ou plus généralement à toute courbe alysoïde sont associées deux spirales de Galilée, à la chaînette de Coriolis, deux conchoïdes de l'inverse de la spirale de Poinsoot; à la développante de cercle, deux spirales de Fermat.

42. Courbes de Mannheim généralisée (Σ) pour le pôle S de la spirale logarithmique osculatrice. — Supposons que la courbe (C) roule sur une droite Ox , le pôle S décrit alors une courbe les coordonnées de S sont :

$$(139) \quad \begin{cases} \bar{x} = s + X = s - \frac{RR'}{1 + R'^2}, \\ \bar{y} = \frac{R}{1 + R'^2}; \end{cases}$$

nous lui donnerons le nom de courbe de Mannheim généralisée.

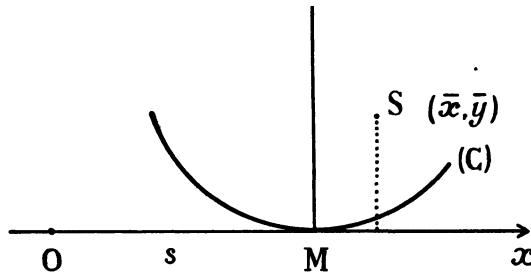


FIG. 17

Application. — Quand (C) est une spirale logarithmique $R = ms$, $m = \cotang v$. Les coordonnées du pôle S sont :

$$X = \frac{-mR}{1 + m^2}, \quad Y = \frac{R}{1 + m^2},$$

ou :

$$X = -s \cos^2 v, \quad Y = s \sin v \cos v.$$

La courbe de Mannheim généralisée a donc pour équations :

$$(140) \quad \begin{cases} \bar{x} = s \cdot \sin^2 v, \\ \bar{y} = s \cdot \sin v \cos v; \end{cases}$$

ou

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \cotg v = m;$$

le lieu de S est la droite $\bar{y} = m\bar{x}$.

Application. — Cas où la courbe (C) est la chaînette de Coriolis.

$$R = chs.$$

La courbe de Mannheim généralisée est dans ce cas

$$(141) \quad \begin{cases} \bar{x} = s - ths, \\ \bar{y} = \frac{1}{chs}; \end{cases}$$

c'est la *tractrice*.

Application. — La courbe (C) est la chaînette ordinaire

$$R = a + \frac{s^2}{a};$$

la courbe de Mannheim généralisée est

$$(142) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{s}{1 + 4 \frac{s^2}{a^2}} \left(2 \frac{s^2}{a^2} - 1 \right), \\ \bar{y} = \frac{a + \frac{s^2}{a}}{1 + 4 \frac{s^2}{a^2}}; \end{cases}$$

posons

$$s = \frac{at}{2};$$

d'où :

$$(142 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{a t (t^2 - 2)}{4 (1 + t^2)}, \\ \bar{y} = \frac{a t^2 + 4}{4 (1 + t^2)}; \end{cases}$$

on trouve

$$t = \frac{2x}{a - 2y};$$

l'élimination de t donne

$$4 \bar{y} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - a (\bar{x}^2 + 8 \bar{y}^2) + 5 a^2 \bar{y} - a^3 = 0.$$

La courbe (Σ) est donc une cubique circulaire.

Prenons

$$a = 2 ;$$

et faisons le changement d'axe tel que

$$\begin{cases} \bar{x} = X, \\ \bar{y} = Y + 1 ; \end{cases}$$

l'équation de la cubique devient

$$(143) \quad 2 Y (X^2 + Y^2) + X^2 - 2 Y^2 = 0.$$

L'axe des y est un axe de symétrie ; l'origine nouvelle est un point double.

Cette cubique unicursale a la forme suivante :

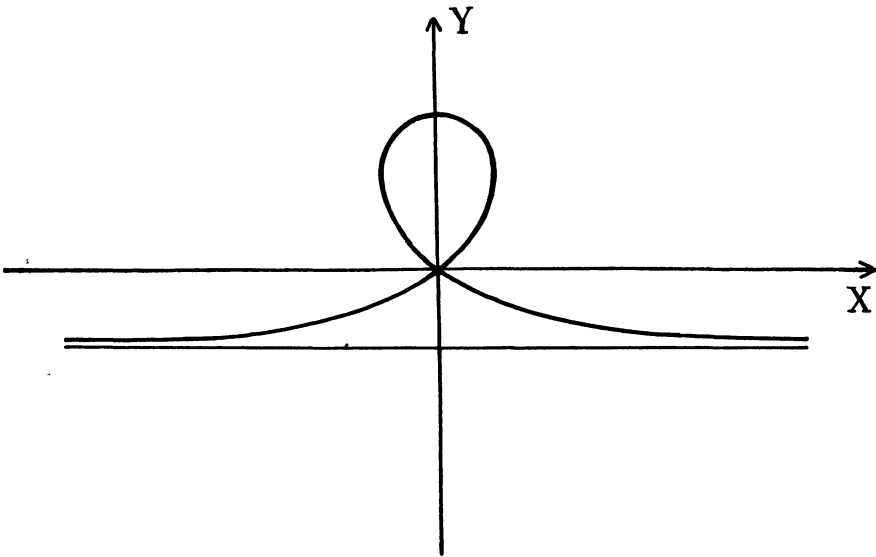


FIG. 18

Application. — *Plus généralement, prenons*

$$R = \frac{A}{2} + \frac{s^2}{2} ;$$

la courbe de Mannheim généralisée est

$$(144) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{s}{2(1+s^2)} (2 - A - s^2), \\ \bar{y} = \frac{1}{2} \frac{A + s^2}{1 + s^2}; \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{A - 2\bar{y}}{2\bar{y} - 1}, \quad s^2 + 1 = \frac{A - 1}{2\bar{y} - 1}, \\ 2 - A - s^2 &= 2(A - 1) \frac{1 - \bar{y}}{2\bar{y} - 1}, \end{aligned}$$

d'où

$$(145) \quad s = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{y}};$$

éliminons le paramètre s , on obtient

$$(146) \quad 2\bar{y}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - [\bar{x}^2 + (A + 4)\bar{y}^2] + 2(A + 1)\bar{y} - A = 0.$$

La courbe de Mannheim généralisée est une cubique circulaire appartenant à un faisceau, quand A varie.

Pour $A = 4$ (chaînette $a = 2$) on retrouve bien

$$2\bar{y}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - (\bar{x}^2 + 8\bar{y}^2) + 10\bar{y} - 4 = 0.$$

Pour $A = 1$, on a :

$$\bar{y} = \frac{1}{2};$$

dans ce cas

$$R = \frac{1 + s^2}{2};$$

la courbe de Mannheim généralisée est une *droite* parallèle à Ox .

Pour $A = 0$, on a

$$R = \frac{s^2}{2};$$

la courbe de Mannheim généralisée est

$$(147) \quad 2\bar{y}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - (\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2) + 2\bar{y} = 0;$$

en posant

$$\bar{y} = Y + 1$$

la nouvelle origine est un point double isolé, l'équation de la cubique est alors

$$2(Y + 1)(X^2 + Y^2) - X^2 = 0, \text{ ou } 2Y(X^2 + Y^2) + X^2 + 2Y^2 = 0.$$

Si

$$s^2 = A - 2$$

on a :

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 1 ;$$

supposant $A \neq 1$, la courbe de Mannheim généralisée est *une droite* parallèle à Ox .

Dans le cas général, on peut rendre l'équation (146) sous la forme

$$(148) \quad 2 \bar{y} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - (\bar{x}^2 + 4 \bar{y}^2) + 2 \bar{y} = A (\bar{y} - 1)^2.$$

L'équation de la cubique rapportée à son point double est ; en posant

$$(149) \quad \begin{aligned} &\bar{y} = 1 + Y; \\ &2 Y (X^2 + Y^2) = (A - 2) Y^2 - X^2. \end{aligned}$$

Dans le cas $A = 3$, la cubique est une *strophoïde*, et dans le cas $A = 2$, c'est une *cissoïde*.

Application. — *Pour la cycloïde*

$$R^2 = a^2 - s^2$$

la courbe généralisée de Mannheim est

$$(150) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{s}{a^2} (2 a^2 - s^2), \\ \bar{y} = \frac{1}{a^2} (a^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

posons

$$s = a \cos t ;$$

on a :

$$(150 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \bar{x} = a \cos t (1 + \sin^2 t), \\ \bar{y} = a \sin^3 t ; \end{cases}$$

la courbe (Σ) est une courbe *unicursale*.

Application. — *Pour la clothoïde*

$$R = \frac{1}{s};$$

la courbe généralisée de Mannheim est

$$(151) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{2 R^4 + 1}{R (R^4 + 1)}, \\ \bar{y} = \frac{R}{R^4 + 1}; \end{cases}$$

c'est une *quintique unicursale*.

Cherchons la ligne de rebroussement correspondant à la clothoïde, puisque

$$R' = -R^2, \quad R'' = 2R^3;$$

on trouve :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{s}{2} (s^4 + 5);$$

$$\sigma = 4 \int \frac{ds}{1 + s^4}.$$

Application. — Supposons que la courbe (C) soit une développante de cercle

$$R^2 = 2as;$$

les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de la courbe de Mannheim généralisée sont ;

$$(152) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{s(2s - a)}{2s + a}, \\ \bar{y} = \frac{2s\sqrt{2as}}{2s + a} \end{cases}$$

En élevant aux carrés et en ajoutant, on obtient la relation

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = s^2;$$

posons :

$$\bar{x} = \rho \cos \theta, \quad \bar{y} = \rho \sin \theta;$$

d'où

$$\rho = s;$$

l'équation de la courbe (Σ) en coordonnées polaires est donc

$$\rho = \frac{a}{2} \cotang^2 \frac{\theta}{2};$$

ou

$$\rho = c \cotang^2 \varphi.$$

L'équation de la courbe généralisée de Mannheim en coordonnées cartésiennes est

$$(153) \quad 4(\bar{y}^2 - 2a\bar{x})(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = a^2\bar{y}^2$$

C'est une quadrique circulaire passant par l'origine et ce point est un point de rebroussement pour cette quadrique.

43. Problème inverse. — Cherchons la courbe (C) telle que la courbe généralisée de Mannheim soit la droite

$$\bar{x} = 0.$$

On obtient l'équation différentielle intrinsèque de (C)

$$(154) \quad s = \frac{R \cdot \frac{dR}{ds}}{1 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}$$

l'équation homogène entre R et s.

L'intégration, de cette équation, donne R et s en fonction d'un paramètre u :

$$(155) \quad \begin{cases} s = c u e^{-\frac{u^2}{2}}. \\ R = c (1 + u^2) e^{-\frac{u^2}{2}}. \end{cases}$$

c est une constante arbitraire. Prenons $c = 1$, alors l'argument φ est donné par la relation suivante (en fonction de u)

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2};$$

ou

$$(156) \quad \varphi = 2 \operatorname{arc tang} u - u.$$

La radiale est alors définie paramétriquement, par les expressions de R et de φ en fonction de u.

Application. — Déterminer (C) pour que la courbe de Mannheim généralisée (Σ) soit une droite parallèle à Ox

$$\bar{y} = a$$

d'où

$$(157) \quad \frac{R}{a} = 1 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2;$$

l'intégration de (157) donne

$$R = \frac{s^2 + 4 a^2}{4 a};$$

équation intrinsèque d'une *alysode*.

44. Prenons maintenant le problème inverse dans toute sa généralité. — Soit donnée $X = F(y)$ l'équation de la courbe de Mannheim généralisée, cherchons l'équation de la courbe (C).

Partons des expressions :

$$(139 \text{ bis}) \quad X = s - \frac{RR'}{1 + R'^2}, \quad Y = \frac{R}{1 + R'^2},$$

dérivons X et Y par rapport au paramètre s

$$(158) \quad \begin{cases} X' = \frac{1 + R'^2 + RR''(R'^2 - 1)}{(1 + R'^2)^2}, \\ Y' = R' \frac{1 + R'^2 - 2RR''}{(1 + R'^2)^2}; \end{cases}$$

mais :

$$X' = F'(Y) Y';$$

on obtient l'équation différentielle de (C) en remplaçant X' et Y' par leurs expressions (158) :

$$(159) \quad 1 + R'^2 + RR''(R'^2 - 1) = R'(1 + R'^2 - 2RR'') F'(Y);$$

mais

$$R'' = R' \frac{dR'}{dR};$$

l'équation (159) devient

$$(160) \quad 1 + R'^2 + RR' \frac{dR'}{dR} (R'^2 - 1) = R' \left(1 + R'^2 - 2RR' \frac{dR'}{dR} \right) F'(Y).$$

Remplaçons dans l'équation (160) R par

$$R = Y(1 + R'^2);$$

et divisons par $1 + R'^2$, il reste

$$1 + Y(R'^2 - 1) R' \frac{dR'}{dR} = \left(1 - 2YR' \frac{dR'}{dR} \right) F' R',$$

ou

$$(161) \quad \frac{dR}{dR'} + YR'(R'^2 - 1) = \frac{dY}{dR'} (1 + R'^2) R' F'.$$

Dérivons la relation $R = Y(1 + R'^2)$ par rapport à R'

$$\frac{dR}{dR'} = \frac{dY}{dR'} (1 + R'^2) + 2R' Y;$$

remplaçons dans (161) $\frac{dR}{dR'}$ par son expression ci-dessus ; l'équation différentielle de (C) devient

$$(162) \quad \frac{dY}{dR'} + YR' = \frac{dY}{dR'} R' F'(Y).$$

Posons

$$R' = \frac{1}{\rho};$$

l'équation différentielle (162) prend la forme

$$(163) \quad \frac{d\rho}{dY} = \frac{\rho^2}{Y} (\rho - F');$$

posons

$$Y = e^\eta,$$

l'équation (163) devient

$$(164) \quad \frac{d\rho}{d\eta} = \rho^2 (\rho - H);$$

où

$$F'(Y) = H(\eta).$$

Ainsi le problème de détermination de la courbe (C) connaissant sa courbe de Mannheim généralisée est une nouvelle application géométrique de l'équation différentielle du type général

$$\frac{dy}{dx} = a_0 y^3 + 3 a_1 y^2 + 3 a_2 y + a_3,$$

primitivement considérée par R. LIOUVILLE et qui a fait l'objet d'un important Mémoire de P. APPELL (1).

Tout récemment de nombreuses applications géométriques de cette équation ont été indiquées par M. D. MITRINOVITCH (2) et par M. E. TURRIÈRE (3).

P. APPELL (p. 382), donne quelques cas d'intégrabilité de l'équation différentielle :

$$(165) \quad \frac{dy}{dx} = y^3 + 3 y^2 \varphi(x);$$

(1) P. APPELL. Sur les invariants de quelques équations différentielles. *Journal de mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 4^e série, t. V, 1895, p. 361 423.

(2) D. MITRINOVITCH. Remarque sur une équation différentielle du premier ordre. *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, 1934, t. III. — Sur l'intégration d'une équation différentielle importante du premier ordre. *Bulletin de l'Académie royale des Sciences serbe* (section A), 1936. — Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre. *Publications math. de l'Université de Belgrade*, 1936, t. V. — Intégration d'une équation différentielle du premier ordre et polynômes d'Hermite qui s'y rattachent. *Revista de Ciencias*, Lima, n° 419, XXXVIII, 1937. — Sur l'équation différentielle des lignes géodésiques des surfaces spirales. *C. R.*, 13 décembre 1937, t. 205, p. 1194. — Sur une équation différentielle du premier ordre intervenant dans divers problèmes de géométrie. *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. LXI, novembre 1937.

(3) E. TURRIÈRE. De l'intégration des équations des problèmes de poursuite et d'ambiance en géométrie plane. *Bulletin de la Société mathématique de France*, LXV, 1937, p. 168 174. — Sur des courbes spéciales définies par des équations différentielles non intégrables. *L'Enseignement mathématique* (sous presse).

l'équation (165) est intégrable si $\varphi(x)$ a l'une des quatre formes

$$\varphi(x) = \frac{K}{\sqrt{x}}, \quad \varphi(x) = Ke^x, \quad \varphi(x) = Kx, \quad \varphi(x) = \frac{K}{x^2}.$$

Posons donc dans l'équation différentielle (164)

$$-H(\eta) = 3\varphi(\eta)$$

de là

$$(166) \quad \frac{d\rho}{d\eta} = \rho^3 + 3\rho^2\varphi(\eta);$$

l'équation différentielle (166) est donc intégrable si

$$\varphi(\eta) = \frac{K}{\sqrt{\eta}}, \quad \varphi(\eta) = Ke^\eta, \quad \varphi(\eta) = K\eta, \quad \varphi(\eta) = \frac{K}{\eta^2},$$

mais

$$H(\eta) = F'(Y);$$

donc

$$-F'(Y) = 3\varphi(Y);$$

les cas d'intégrabilités sont alors, en tenant compte que $Y = e^\eta$

$$(167) \quad \begin{cases} F'(Y) = \frac{-3K}{\sqrt{\log Y}}, \\ F'(Y) = -3KY, \\ F'(Y) = -3K \log Y, \\ F'(Y) = \frac{-3K}{(\log Y)^2}. \end{cases}$$

L'équation différentielle (164) est intégrable si la courbe de Mannheim généralisée est l'une des courbes suivantes :

$$1^\circ \quad X = -3K \int \frac{dY}{\sqrt{\log Y}} + \text{const}$$

posons

$$\log Y = t^2$$

de là :

$$\begin{cases} X = -6K \int e^{t^2} dt + \text{const}, \\ Y = e^{t^2} \end{cases}$$

2°

$$X = -3K \int Y dY + \text{const};$$

la courbe de Mannheim généralisée est une *parabole* de la forme

$$Y^2 = A - BX;$$

A et B sont deux constantes.

$$3^o \quad X = -3K \int \log Y \, dY + \text{const};$$

la courbe de Mannheim généralisée est donc

$$X = 3KY(1 - \log Y) + \text{const.}$$

$$4^o \quad X = -3K \int \frac{dY}{(\log Y)^2} + \text{const};$$

la courbe de Mannheim généralisée est

$$X = 3K \left(\frac{Y}{\log Y} - \int \frac{dY}{\log Y} \right) + \text{const},$$

(X dépend d'un logarithme intégral).

Application. — Dans le cas, où la courbe de Mannheim généralisée est la droite

$$X = KY, \quad F' = K,$$

l'équation différentielle (163) devient

$$(168) \quad \frac{d\rho}{dY} = \frac{\rho^2(\rho - K)}{Y},$$

d'où :

$$\frac{dY}{Y} = \frac{d\rho}{\rho'(\rho - K)};$$

l'intégration de cette équation donne la relation

$$Y^{K^2} = \frac{\rho - K}{\rho} e^{\frac{K}{\rho}};$$

ensuite, en remplaçant ρ par $\frac{1}{R'}$, on obtient l'équation différentielle intrinsèque du premier ordre de la courbe (C)

$$R^{K^2} = (1 + R'^2)^{K^2} e^{KR'}.$$

45. **Cas où la courbe de Mannheim généralisée est un cercle.** — Soit :

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1,$$

ce cercle; l'équation différentielle intrinsèque de (C) est alors :

$$(169) \quad R'^2 - 2 \frac{SR}{S^2 - 1} R' + \frac{s^2 + R^2 - 1}{s^2 - 1} = 0;$$

faisons les changements de variables tels que :

$$s = \sin v, \quad R = -\frac{\cos^2 v}{\sin u};$$

l'équation différentielle (169) prend la forme :

$$(170) \quad \frac{du}{dv} + \tan u \cdot \tan v = \pm \frac{\sin u}{\cos v}.$$

L'équation différentielle (169) est un cas particulier de l'équation différentielle

$$y'^2 - 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0;$$

étudié par E. LAINÉ (1).

L'équation

$$P^2 - Q = 0;$$

représente une courbe (γ), lieu des points de rebroussement de la courbe intégrale (en général).

Ici, on a

$$P = \frac{sR}{s^2 - 1}, \quad Q = \frac{s^2 + R^2 - 1}{s^2 - 1};$$

la courbe (γ) a comme équation :

$$P^2 - Q = R^2 - (s^2 - 1)^2 = 0.$$

Si l'on regarde s et R comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires, le lieu de rebroussement de la courbe intégrale de l'équation différentielle (169) sera l'une des courbes

$$R = \pm (s^2 - 1).$$

46. Propriété géométrique entre la courbe de Mannheim ordinaire et la courbe de Mannheim généralisée. — Considérons la courbe de Mannheim (Γ) de la courbe (C), sa tangente, au point de coordonnées (s , R), coupe le cercle (C_1) de diamètre R , tangent en M à la courbe (C), en un point S , nous allons démontrer que le point S est un point de la courbe de Mannheim généralisée, soit

$$(171) \quad (X - s)^2 + Y^2 - RY = 0;$$

l'équation du cercle (C_1),

(1) E. LAINÉ, *Précis d'analyse mathématique*, t. II, p. 20.

la tangente au point (s, R) à la courbe de Mannheim (Γ) , a pour équation

$$Y - R = \frac{dR}{ds} (X - s);$$

Cette droite coupe le cercle (C_1) en un point dont ses coordonnées sont :

$$\begin{cases} X = s - \frac{RR'}{1 + R'^2}, \\ Y = \frac{R}{1 + R'^2}; \end{cases}$$

donc :

la projection de M sur la tangente à la courbe de Mannheim est un point de la courbe de Mannheim généralisée.

Le point où le cercle (C_1) touche son enveloppe est l'intersection du cercle (G) avec la droite

$$2(X - s) + R'Y = 0;$$

Cette droite passe par le point M et coupe l'axe Oy en un point tel que

$$OH = \frac{2s}{R'}.$$

La droite MH touche son enveloppe au point D, tel que D' a pour coordonnées

$$(172) \quad \begin{cases} X = s - \frac{R'}{R''}, \\ Y = \frac{2}{R''}. \end{cases}$$

Quant à la droite MS, perpendiculaire à la tangente à la courbe de Mannheim (Γ) , son équation est

$$(X - s) + R'Y = 0;$$

elle coupe l'axe Oy au point H' , tel que

$$OH' = \frac{s}{R};$$

donc il résulte que

$$(173) \quad \overline{OH} = 2 \overline{OH'}.$$

MS touche son enveloppe au point D', tel que

$$(174) \quad \begin{cases} X = s - \frac{R'}{R''}, \\ Y = \frac{1}{R''}. \end{cases}$$

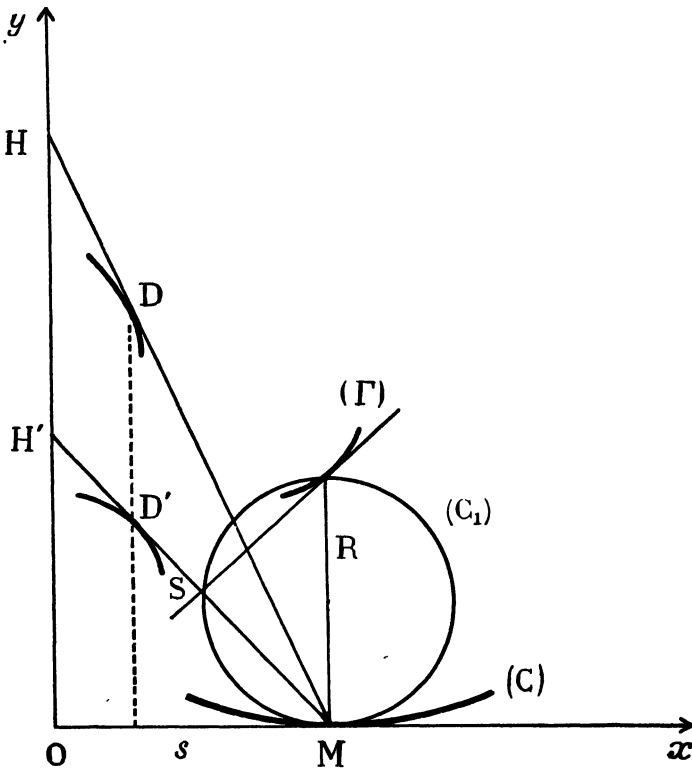


FIG. 19

Il résulte que : les points D et D', où les droites MH et MH' touchent leur enveloppe, ont mêmes abscisses, et, l'ordonnée de D est le double de celle de D'.

Quelques exemples d'enveloppe (D') de la droite MS. Si on donne

la courbe (C), on peut chercher la courbe (D') enveloppe de la droite MS, soient X et Y les coordonnées du point D' de contact, on a :

$$(174 \text{ bis}) \quad \begin{cases} X = s - \frac{R'}{R''}, \\ Y = \frac{1}{R''}. \end{cases}$$

Nous allons donner quelques exemples :

1) Supposons que la courbe (C) est la *chaînette de Coriolis* d'équation :

$$R = ch s.$$

on a :

$$\begin{aligned} R' &= sh s, \\ R'' &= ch s; \end{aligned}$$

la courbe (D') est alors

$$\begin{cases} X = s - ths, \\ Y = \frac{1}{chs}; \end{cases}$$

donc (D') est une *tractrice*.

On remarque que, la courbe de Mannheim généralisée est en même temps, l'enveloppe de la droite MS.

2) La courbe (C) est la *chaînette d'ordinaire*, d'équation

$$R = a + \frac{s^2}{a};$$

l'enveloppe (D') est dans ce cas, une *droite* parallèle à l'axe Ox

$$X = 0, \quad Y = \frac{a}{2}.$$

3) La courbe (C) est une *cycloïde*

$$R^2 = a^2 - s^2;$$

l'enveloppe (D') est alors

$$\begin{cases} X = s + \frac{RR'}{1 + R'^2}, \\ Y = -\frac{R}{1 + R'^2}; \end{cases}$$

on voit que, dans ce cas, l'enveloppe (D') et la courbe de Mannheim généralisée ont même l'ordonnée mais de signe contraire, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{a^2} s^3, \\ Y = -\frac{1}{a^2} (a^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}; \end{array} \right.$$

Posons :

$$s = a \cos t$$

on a alors l'*hypocycloïde* à quatre rebroussements :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = a \cos^3 t, \\ Y = -a \sin^3 t. \end{array} \right.$$

4) La courbe (C) est une *clothoïde* (spirale de CORNU)

$$R = \frac{1}{s};$$

l'enveloppe (D') est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{3}{2} s, \\ Y = \frac{1}{2} s^3; \end{array} \right.$$

c'est la *parabole cubique* d'équation

$$4 X^3 - 27 Y = 0.$$

5) La courbe (C) est la *développante de cercle*

$$R^2 = 2 a s;$$

l'enveloppe de la droite MS est la parabole semi-cubique

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{3}{2} a R^2, \\ Y = -\frac{1}{a^2} R^3; \end{array} \right.$$

ou

$$8 X^3 - 27 a Y^2 = 0.$$

47. **L'intersection de la tangente et de la normale, en un point de la courbe de Mannheim généralisée, avec la normale au point de contact M de la courbe (C).** — Soient X et Y les coordonnées d'un point de (Σ), ξ et η les coordonnées courantes, l'équation de la tangente à (Σ) est
(175) $(\xi - X) Y' = (\eta - Y) X';$

remplaçons (X, Y) et (X', Y') par (139) et (158), et faisons dans (175)

$$\xi = s ;$$

on obtient

$$MT = R + \frac{R^2 R' R''}{1 + R' + RR''(R' - 1)}.$$

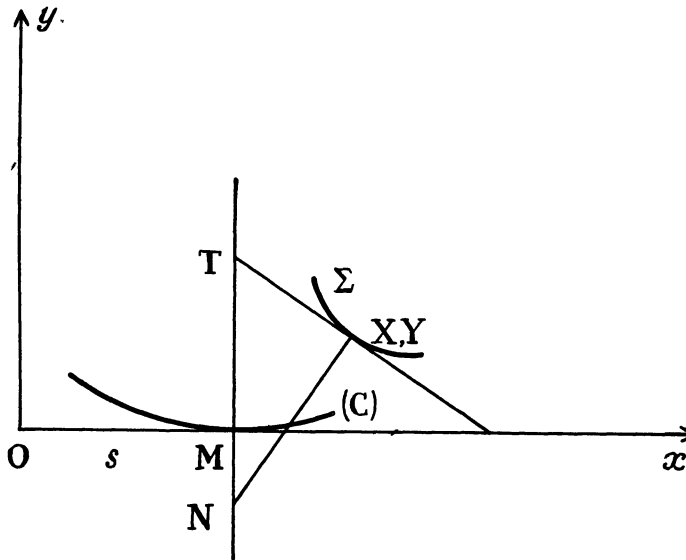


FIG. 20

L'intersection de la normale

$$(176) \quad (\xi - X) X' + (\eta - Y) Y' = 0;$$

avec la droite

$$\xi = s$$

donne

$$MN = -\frac{R^2 R''}{1 + R'^2 - 2RR''}.$$

Dans le cas où la courbe (C) est une spirale logarithmique

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{0}$$

on trouve que :

$$\begin{aligned} MT &= R, \\ MN &= 0 ; \end{aligned}$$

donc, la normale à la courbe de Mannheim généralisée, attachée à la spirale logarithmique, passe par le point de contact M.

Considérons le cas où le point N va à l'infini, c'est-à-dire

$$1 + R'^2 = 2 RR'' ;$$

la courbe (C) est donc une alysoïde (157), et la courbe de Mannheim généralisée est une droite parallèle à Ox.

CHAPITRE VII

LA PSEUDO-GLISSETTE DE MANNHEIM

48. **Définition.** — Supposons que la courbe (C) de grandeur invariable soit assujettie à toucher la droite fixe Ox au point fixe O . Un point du plan mobile invariablement lié à la courbe (C) engendre alors une glissette (§ 11). Dans les mêmes conditions, le centre de courbure engendre l'axe Oy et le pôle S de la spirale osculatrice engendre une courbe que nous pouvons nommer « une pseudo-glissette de Mannheim », puisqu'elle est en quelque sorte une image des propriétés intrinsèques de la courbe mobile.

Dans le système des axes mobiles (Mx, My) , les coordonnées X, Y du pôle S ont été données au § 42 :

$$X = -\frac{RR'}{1 + R'^2}, \quad Y = \frac{R}{1 + R'^2}.$$

Ce sont précisément les coordonnées du point S générateur du nouveau lieu, par rapport aux axes fixes Ox, Oy , qui viennent d'être considérés.

49. Étant donnée la courbe (C), on peut chercher la pseudo-glissette correspondante. On peut trouver l'équation de cette courbe en éliminant s entre les deux relations suivantes :

$$(177) \quad \frac{X}{Y} = -R', \quad \frac{X^2 + Y^2}{Y} = R.$$

Nous allons donner quelques exemples intéressants :

1° La courbe (C) est la *spirale logarithmique*

$$R = ms ;$$

la pseudo-glissette est alors la *droite*

$$Y' = -mX.$$

2° La courbe (C) est la *chaînette de Coriolis*

$$R = chs ;$$

la pseudo-glissette est alors le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

3° La courbe (C) est une *clothoïde*

$$R = \frac{1}{s};$$

la pseudo-glissette est alors une *lemniscate de BERNOULLI* :

$$(X^2 + Y^2)^2 - XY = 0.$$

$$\rho^2 = \frac{1}{2} \sin 2\omega.$$

4° La courbe (C) est la *développante de cercle*

$$R^2 = 2as$$

la pseudo-glissette est une *cissoïde de DIOCLÈS*

$$X(X^2 + Y^2) + aY^2 = 0.$$

5° La courbe (C) est la *chaînette ordinaire*

$$R = a + \frac{s^2}{a}$$

la pseudo-glissette est encore une *cubique circulaire*, à point double isolé (*conchoïde de Sluse*) :

$$4Y(X^2 + Y^2) = a(X^2 + 4Y^2);$$

inverse d'ellipse par rapport à un sommet du petit axe.

6° La courbe (C) est une *cycloïde*

$$R^2 + s^2 = a^2;$$

la pseudo-glissette est alors une *sexlique (de Clairault)*

$$(X^2 + Y^2)^3 - a^2 Y^4 = 0;$$

$$r = a \sin^2 \theta.$$

50. Problème inverse. — Étant donné la pseudo-glissette de Mannheim, chercher la courbe (C) correspondante.

Des relations (177) résultent (en posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) :

$$(178) \quad \begin{cases} r = R \sin \theta \\ \cotg \theta = -R'. \end{cases}$$

Soit

$$r = f(\theta);$$

l'équation, en coordonnées polaires, de la pseudo-glissette, on a les relations :

$$(179) \quad \begin{cases} r \sqrt{1 + R'^2} - R = 0, \\ r = F(R'); \end{cases}$$

on obtient donc, en éliminant r , entre ces deux relations, une équation différentielle entre R et R'

$$(180) \quad F(R') \sqrt{1 + R'^2} - R = 0;$$

R' peut être trouvé en fonction de R , tel que

$$R' = \frac{1}{\varphi(R)};$$

d'où :

$$(181) \quad s = \int \varphi(R) dR + \text{const};$$

équation intrinsèque de la courbe (C).

Voici quelques exemples :

1) Supposons que la pseudo-glissette est un *cercle* tangent à Ox en O :

$$r = a \sin \theta;$$

on a donc pour la courbe (C)

$$R = a;$$

la courbe (C) est un autre *cercle* de rayon a .

2) Supposons que la pseudo-glissette est une *droite* parallèle à Ox :

$$r = \frac{1}{\sin \theta};$$

l'équation différentielle (180) est ici

$$R = 1 + R'^2;$$

la courbe (C) est donc une *chainette ordinaire*

$$R = 1 + \frac{s^2}{4}.$$

3) La pseudo-glissette est une *cardioïde*

$$r = a(1 - \cos \theta);$$

on a donc les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + R'^2; \\ \frac{a(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} = R; \\ \cotg \theta = -R'; \end{array} \right.$$

l'équation différentielle (180) est

$$R^2 - a^2 = 2 a R R';$$

l'équation intrinsèque de (C) est donc

$$R^2 = a^2 + e^{\frac{s}{a}}.$$

4) La pseudo-glissette est la *courbe de Clairault* :

$$r = a \sin^n \theta;$$

l'équation intrinsèque de (C) est

$$s = \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{2}{1-n}} - 1}}$$

la courbe (C) est donc une courbe *particulière de CÉSARO*.

CHAPITRE VIII

PROPRIÉTÉS D'ISOMÉTRIE

La remarquable proposition de M. SANTANGELO relative à l'égalité des arcs (*isométrie*) de la courbe de Mannheim et de la radiale de Tucker de toute courbe plane (C) nous amène à examiner de près les questions d'isométrie entre diverses courbes ici considérées.

51. **L'arc de la courbe (Σ) de Mannheim généralisée.** — On peut écrire les expressions (158) sous cette forme :

$$(182) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{1}{1 + R'^2} \left(1 + RR'' \frac{R'^2 - 1}{R'^2 + 1} \right), \\ \frac{d\bar{y}}{ds} = \frac{R'}{1 + R'^2} \left(1 - \frac{2 RR''}{R'^2 + 1} \right); \end{cases}$$

tel que

$$\frac{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}{ds^2} = \frac{(RR'' - 1)^2 + R'^2}{(1 + R'^2)^2};$$

R' et R'' sont les dérivées de R par rapport à l'arc s .

On peut écrire les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de la courbe (Σ) d'une autre manière. Soient a et b les coordonnées de pôle S , on avait :

$$a = -\frac{R^2 R'}{R^2 + R'^2}, \quad b = \frac{R^3}{R^2 + R'^2};$$

où :

$$R' = \frac{dR}{d\alpha} = R_1;$$

on a donc :

$$(183) \quad \begin{cases} \frac{da}{d\alpha} = R \frac{RR''(R'^2 - R^2) - 2R'^4}{(R^2 + R'^2)^2}; \\ \frac{db}{d\alpha} = R^2 R' \frac{R^2 + 3R'^2 - 2RR''}{(R^2 + R'^2)^2}; \end{cases}$$

il résulte :

$$\begin{cases} \bar{x} = s + a = s - \frac{R^2 R'}{R^2 + R'^2}, \\ \bar{y} = \frac{R^2}{R^2 + R'^2}; \end{cases}$$

on a aussi :

$$(184) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\alpha} = \frac{R}{(R^2 + R'^2)^2} [R^4 + 2 R^2 R'^2 - R'^4 + R R'' (R'^2 - R'^2)] \\ \frac{d\bar{y}}{d\alpha} = \frac{R^2 R'}{(R^2 + R'^2)^2} [R^2 + 3 R'^2 - 2 R R'']. \end{cases}$$

52. L'arc de la pseudo-glissette de Mannheim. — A pour expression

$$(185) \quad X'^2 + Y'^2 = \frac{(R R'' - R'^2)^2 + R'^2}{(1 + R'^2)^2};$$

où

$$X' = \frac{dX}{ds}, \quad Y' = \frac{dY}{ds}.$$

(s est l'arc de la courbe (C)).

Si on pose

$$R_1 = \frac{dR}{d\alpha}, \quad R_2 = \frac{d^2 R}{d\alpha^2};$$

on aura :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{ds} &= R' = \frac{R_1}{R}, \\ R'' &= \frac{1}{R} \left(\frac{R_2}{R} - \frac{R_1^2}{R^2} \right); \end{aligned}$$

d'où :

$$(185 \text{ bis}) \quad \frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = \frac{(R R_2 - 2 R_1^2)^2 + R^2 R_1^2}{(R^2 + R_1^2)^2}.$$

53. Condition d'isométrie entre la courbe de Mannheim ordinaire et la courbe (Σ) de Mannheim généralisée. — La condition d'égalité des arcs de ces deux courbes est l'équation différentielle du second ordre,

$$(186) \quad 1 + R'^2 = \frac{(R R'' - 1)^2 + R'^2}{(1 + R'^2)^2}.$$

La variable s est absente ; pour intégrer, introduisons la fonction elliptique de WEIERSTRASS, en posant

$$1 + R'^2 = pu ;$$

l'équation (186) devient

$$(187) \quad (RR'' - 1)^2 = pu^3 - pu + 1.$$

Comparons avec l'équation de définition :

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 pu - g_3 ;$$

l'équation (187) devient

$$(188) \quad RR'' - 1 = \frac{1}{2} p' u,$$

les invariants des fonctions elliptiques étant :

$$g_2 = 4, \quad g_3 = -4, \quad \Delta = -23 \times 16 < 0 ;$$

l'équation du troisième degré ($p' u = 0$)

$$p^3 u - pu + 1 = 0$$

a une seule racine réelle ($e = -1,324$).

On a ensuite :

$$R'' = \frac{R' dR'}{dR} = \frac{1}{2} p' u \frac{du}{dR} ;$$

l'équation (188) devient

$$Rp' u \frac{du}{dR} = 2 + p' u ;$$

d'où

$$\frac{dR}{R} = \frac{p' u du}{p' u + 2} = \frac{p' u (p' u - 2)}{4 (p^3 u - pu)} du ;$$

en intégrant :

$$(189) \quad \log R = \int \frac{p^3 u - pu + 1}{pu (p^2 u - 1)} du - \frac{1}{2} \int \frac{p' u du}{p^3 u - pu} ;$$

$$\log R = \int \frac{p^3 u - pu + 1}{pu (p^2 u - 1)} du - \frac{1}{2} \int \frac{dp u}{pu (p^2 u - 1)} ;$$

finalement

$$(190) \quad \log R = \frac{1}{2} \log \frac{pu}{\sqrt{p^3 u - 1}} + u + \int \frac{du}{pu (p^2 u - 1)}.$$

La quadrature s'opère immédiatement.

On aura ensuite :

$$\frac{ds}{d\alpha} = R,$$

d'où

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{R'}, \\ R' d\alpha &= \frac{p' u (p' u - 2)}{4 p u (p^2 u - 1)} du; \end{aligned}$$

remplaçons R' par sa valeur $\sqrt{pu - 1}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{pu - 1} d\alpha &= \frac{p^3 u - pu + 1}{pu (p^2 u - 1)} du - \frac{dpu}{2 pu (p^2 u - 1)}; \\ \sqrt{pu - 1} d\alpha &= \left[1 + \frac{1}{pu (p^2 u - 1)} \right] du - \frac{1}{2} \frac{dpu}{p^3 u - pu}; \end{aligned}$$

d'où une quadrature ne pouvant pas s'exprimer en termes finis :

$$(191) \quad d\alpha = \frac{du}{\sqrt{pu - 1}} + \frac{du}{pu (pu + 1) (pu - 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{dpu}{2 pu (pu + 1) (pu - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donnons pour terminer quelques précisions sur la cubique de Weierstrass définissant la fonction elliptique :

$$p'^2 u = 4 (p^3 u - pu + 1);$$

on a

$$p'' u = 6 p^2 u - 2;$$

les points de la cubique de Weierstrass où la tangente est parallèle à l'axe de symétrie Op sont :

$$\begin{aligned} p'' u &= 0, & p^2 u &= \frac{1}{3} \\ pu &= \frac{\sqrt{3}}{3} & p' u &= \pm 1,5685 \\ pu &= -\frac{\sqrt{3}}{3} & p' u &= \pm 2,3536. \end{aligned}$$

On a

$$p^2 u = \frac{(p^2 u + 1)^2 - 8 pu}{4 (p^3 u - pu + 1)};$$

on a le tableau suivant :

u	pu	$p' u$	$p'' u$	$p^2 u$
u_1	0	2	— 2	$\frac{1}{4}$
u_2	+ 1	2	4	— 1
u_3	— 1	2	4	+ 3

on a de plus

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0;$$

la partie utile de la courbe de Weierstrass est la partie pour laquelle $pu > 1$.

54. Courbe déterminée par son isométrie avec la courbe de Mannheim généralisée. — La condition d'isométrie

$$\frac{dS}{ds} = 1,$$

s'écrit sous la forme de l'équation

$$(192) \quad (RR'' - 1)^2 + R'^2 = (1 + R'^2)^2;$$

c'est encore une équation différentielle du second ordre.

Observons que cette équation est du second degré entre R'^2 et RR'' ; elle figure alors une conique *figurative*

$$(192 \text{ bis}) \quad R^2 R'' - 2 RR'' = R'^2 (R'^2 + 1),$$

qui peut être représentée paramétriquement en fonction d'un paramètre λ par les formules :

$$(193) \quad \left\{ \begin{array}{l} RR'' = \frac{\lambda - 2}{\lambda^2 - 1}, \\ R'^2 = \frac{\lambda(2 - \lambda)}{\lambda - 1}; \\ 1 + R'^2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 - 1}; \end{array} \right.$$

d'où :

$$(194) \quad \left\{ \begin{array}{l} RR'' = \frac{\lambda - 2}{\lambda^2 - 1}, \\ R' R'' = \frac{-1 + \lambda - \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \cdot \frac{d\lambda}{ds}; \end{array} \right.$$

en divisant, on obtient

$$(195) \quad \frac{dR}{R} = \frac{-\lambda^2 + \lambda - 1}{(\lambda - 2)(\lambda^2 - 1)} d\lambda;$$

$$2 \frac{dR}{R} = \left[-\frac{1}{\lambda + 1} - \frac{2}{\lambda - 2} + \frac{1}{\lambda - 1} \right] d\lambda;$$

et, à un facteur constant près de similitude :

$$(196) \quad R^2 = \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 2)}, \quad R'^2 = \frac{\lambda(2 - \lambda)}{\lambda^2 - 1}.$$

Cherchons l'arc s en fonction de λ

$$(197) \quad ds = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1) d\lambda}{(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 \sqrt{\lambda(2 - \lambda)}};$$

la condition de possibilité est

$$\lambda(2 - \lambda) > 0$$

λ étant une fonction de R , cette dernière équation représente l'équation différentielle de l'équation intrinsèque de la courbe (C).

Posons

$$\lambda = \frac{2}{1 + z^2};$$

on a :

$$\begin{cases} 2 - \lambda = \frac{2z^2}{1 + z^2}, \\ \lambda - 1 = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}; \end{cases}$$

donc, en fonction de z (197) et (195) :

$$(198) \quad \begin{cases} R^2 = \frac{(1 - z^2)(1 + z^2)^2}{4z^4(3 + z^2)}, \\ R'^2 = \frac{4z^2}{(1 - z^2)(3 + z^2)}, \\ \frac{1}{R} \frac{dR}{dz} = \frac{2(3 + z^4)}{z(z^4 - 1)(3 + z^2)}. \end{cases}$$

On a ensuite l'arc s donné par (197) en fonction de z :

$$(199) \quad 2 ds = \pm \frac{3 + z^4}{z^4(z^2 + 3)} dz;$$

posons

$$z = \frac{1}{\omega}, \quad \lambda = \frac{2\omega^2}{1 + \omega^2},$$

(199) devient

$$\pm 2 ds = \frac{1 + 3\omega^4}{1 + 3\omega^2} d\omega;$$

l'intégration nous donne

$$\pm 6s = \omega(\omega^2 - 1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{3\omega}{\sqrt{3}}.$$

Posons

$$\frac{3\omega}{\sqrt{3}} = \tan \varphi;$$

finalemant

$$(200) \quad \pm \frac{54}{\sqrt{3}} s = \tan \varphi (\tan^2 \varphi - 3) + 12 \varphi.$$

L'équation entre s et ω représente l'équation intrinsèque de la courbe cherchée. On a aussi les relations

$$(201) \quad \left\{ \begin{array}{l} R^2 = \frac{(\omega^2 - 1)(\omega^2 + 1)^2}{4(\omega^2 + 3)}, \\ R'^2 = \frac{4\omega^2}{(\omega^2 - 1)(3\omega^2 + 1)}, \\ RR'' = \frac{-2(\omega^2 + 1)}{(\omega^2 - 1)(3\omega^2 + 1)}. \end{array} \right.$$

Soit

$$ds = R d\alpha;$$

on a

$$(202) \quad d\alpha = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{(\lambda - 2)\sqrt{\lambda(2 - \lambda)(\lambda^2 - 1)}} d\lambda;$$

posons

$$\lambda = -\frac{1}{\mu};$$

l'équation (202) devient

$$(203) \quad \pm \alpha = \int \frac{\mu^2 + \mu + 1}{\mu(2\mu + 1)\sqrt{(\mu^2 - 1)(2\mu + 1)}} d\mu;$$

introduisons la fonction elliptique de WEIERSTRASS, en posant

$$\mu = 2 \left(pu - \frac{1}{12} \right);$$

on a :

$$\begin{cases} 2\mu + 1 = 4 \left(pu + \frac{1}{6} \right), \\ \mu - 1 = 2 \left(pu - \frac{7}{12} \right), \\ \mu + 1 = 2 \left(pu + \frac{5}{12} \right); \end{cases}$$

on a donc

$$(\mu^2 - 1) (2\mu + 1) = 16 \left(pu + \frac{1}{6} \right) \left(pu + \frac{5}{12} \right) \left(pu - \frac{7}{12} \right);$$

on peut écrire que

$$(\mu^2 - 1) (2\mu + 1) = 4 p'^2 u;$$

donc

$$e_1 = \frac{7}{12}, \quad e_2 = -\frac{1}{6}, \quad e_3 = -\frac{5}{12};$$

avec

$$e_1 > e_2 > e_3,$$

donc

$$p'^2 u = 4 (pu - e_1) (pu - e_2) (pu - e_3);$$

ensuite

$$p'^2 u = 4 p^3 u - \frac{13}{12} pu - \frac{35}{216};$$

on a donc

$$g_2 = \frac{13}{12}, \quad g_3 = \frac{35}{216} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{9}{16} > 0;$$

Δ est positif, donc $p'^2 u$ possède trois racines réelles, on a aussi

$$\begin{cases} e_1 - e_2 = \frac{3}{4}, \\ e_2 - e_3 = \frac{1}{4}, \\ e_3 - e_1 = -1, \\ (e_3 - e_1) (e_3 - e_2) = \alpha_3 = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

on obtient donc pour (203)

$$(204) \quad \pm 8 \alpha = \int \frac{4 p^2 u + \frac{4}{3} p u + \frac{31}{36}}{\left(p u - \frac{1}{12}\right) \left(p u + \frac{1}{6}\right)} du,$$

ou

$$\begin{aligned} \pm 2 \alpha &= \int \frac{p^2 u + \frac{1}{3} p u + \frac{31}{144}}{\left(p u - \frac{1}{12}\right) \left(p u + \frac{1}{6}\right)} du; \\ \pm 2 \alpha &= \int \frac{\left(p u + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3}{16}}{\left(p u - \frac{1}{12}\right) \left(p u + \frac{1}{6}\right)} du; \\ \pm 2 \alpha &= \int \left(1 + \frac{\frac{1}{4}}{p u - \frac{1}{12}}\right) du + \frac{3}{4} \int \left(\frac{1}{p u - \frac{1}{12}} - \frac{1}{p u + \frac{1}{6}}\right) du; \end{aligned}$$

et finalement

$$(205) \quad \pm 2 \alpha = u + \int \frac{du}{p u - \frac{1}{12}} - \frac{3}{4} \int \frac{du}{p u + \frac{1}{6}}.$$

Si on pose

$$p v = \frac{1}{12};$$

on a alors

$$\begin{cases} p v - e_1 = -\frac{1}{2}, \\ p v - e_2 = \frac{1}{4}, \\ p v - e_3 = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

d'où

$$p'^2 v = 4 (p v - e_1) (p v - e_2) (p v - e_3);$$

ou

$$\begin{aligned} p'^2 v &= -\frac{1}{4} \\ p' v &= \frac{i}{2}; \end{aligned}$$

la formule générale

$$2 p'' v = 12 p^2 v - g_2, \quad \text{où} \quad g_2 = \frac{13}{12}$$

donne

$$p'' v = -\frac{1}{2};$$

on a aussi

$$p^2 v + 2 p v = \frac{1}{4} \left(\frac{p'' v}{p' v} \right)^2;$$

qui donne

$$p^2 v = -\frac{5}{12} = e_2;$$

ou bien

$$p^2 v = e_2 = p \omega_2;$$

d'où

$$v = \frac{\omega_2}{2}.$$

De

$$\mu = 2 (pu - pv)$$

on déduit :

$$(204 \text{ bis}) \quad \pm 8 \alpha = \int \frac{4 pu^2 + \frac{4}{3} pu + \frac{31}{36}}{(pu - pv)(pu - e_2)} du;$$

ou

$$\pm 8 \alpha = \int \frac{4 (pu - e_2)^2 + \frac{3}{4}}{(pu - pv)(pu - e_2)} du;$$

l'intégration s'achève sans difficulté.

Les expressions (196) deviennent :

$$(205) \quad \left\{ \begin{array}{l} R^2 = \frac{\mu^2 (1 + \mu)}{(1 - \mu)(1 + 2\mu)^2}; \\ R'^2 = \frac{2\mu + 1}{\mu^2 - 1}; \quad \text{et} \quad RR'' = \frac{\mu(1 + 2\mu)}{\mu^2 - 1}; \end{array} \right.$$

de là :

$$(206) \quad \begin{cases} R^2 = \frac{(pu - pv)^2 (pu - e_2)}{4 (e_1 - pu) (pu - e_2)^2}; \\ R'^2 = \frac{pu - e_2}{(pu - e_1) (pu - e_3)}; \\ RR'' = \frac{2 (pu - pv) (pu - e_2)}{(pu - e_1) (pu - e_3)}. \end{cases}$$

Nous trouvons aussi :

$$\begin{aligned} R^2 R'^2 R''^2 &= \frac{\mu^2 (2\mu + 1)^3}{(\mu^2 - 1)^3}; \\ R^2 R''^2 &= -\frac{(2\mu + 1)^5}{(\mu + 1)^4 (\mu - 1)^2}; \end{aligned}$$

(avec la condition de possibilité $2\mu + 1 < 0$)

$$R^2 R''^2 = -16 \frac{(pu - e_2)^5}{(pu - e_2)^4 (pu - e_1)^2};$$

avec la condition

$$pu - e_2 < 0.$$

Quant à l'arc s

$$(207) \quad \pm s = \frac{1}{4} \int \sqrt{\frac{pu - e_3}{e_1 - pu}} du + \frac{3}{64} \int \sqrt{\frac{pu - e_3}{e_1 - pu}} \frac{du}{(pu - e_2)^2}.$$

55. Donnons enfin quelques précisions sur la courbe de Weierstrass correspondante

$$\begin{aligned} p'^2 u &= 4 p^3 u - \frac{13}{12} pu - \frac{35}{216}, \\ p'^2 u &= 4 (pu - e_1) (pu - e_2) (pu - e_3); \end{aligned}$$

on a la condition

$$(pu - e_1) (pu - e_2) (pu - e_3) > 0;$$

mais, on avait, la condition

$$2\mu + 1 < 0;$$

donc

$$pu - e_2 < 0$$

de là

$$(pu - e_1) (pu - e_3) < 0;$$

donc, pu varie entre e_3 et e_1

$$e_3 < pu < e_1.$$

La partie utile est l'ovale de la cubique de Weierstrass.

Le maximum (point à tangente parallèle à l'axe Op) de p' correspond à :

$$p''u = 6 p^2 u - \frac{13}{24} = 0;$$

c'est-à-dire pour le point :

$$pu = -\frac{\sqrt{13}}{12} = -0,3005;$$

$$p'u = 0,054.$$

55. Isométrie entre la courbe (C) et la pseudo-glissette de Mannheim.

— La condition est ici :

$$dX^2 + dY^2 = ds^2;$$

d'où

$$(RR'' - R'^2)^2 + R'^2 = (1 + R'^2)^2;$$

ou

$$(208) \quad R^2 R''^2 - 2 R'^2 (RR'') = 1 + R'^2.$$

C'est une équation du second degré entre RR'' et R'^2 qui peut être figurée par une conique. Posons donc, en vue d'obtenir une représentation paramétrique :

$$RR'' = \lambda;$$

d'où

$$R'^2 = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda + 1};$$

dérivons cette relation par rapport à s , on a,

$$R' R'' = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(2\lambda + 1)^2} \frac{d\lambda}{ds};$$

remplaçons R'' par sa valeur, on obtient :

$$(209) \quad \frac{R'}{R} = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda (2\lambda + 1)^2} \frac{d\lambda}{ds};$$

ou

$$\text{Log } R = \int \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda (2\lambda + 1)^2} d\lambda + \text{const};$$

on peut intégrer

$$(210) \quad \text{Log } R = \text{Log} \frac{\lambda}{(2\lambda + 1)^{\frac{3}{4}}} + \frac{3}{4(2\lambda + 1)} + \text{const.}$$

Ayant calculé R en fonction de λ ; relation (210) s'écrit

$$R = f(\lambda);$$

l'arc s de la courbe (C) sera donné par

$$\frac{ds}{dR} = \sqrt{\frac{1 + 2\lambda}{\lambda^2 - 1}};$$

ou

$$(211) \quad s = \int \Psi(\lambda) d\lambda + \text{const.}$$

Quant à l'angle de contingence α

$$d\alpha = \frac{ds}{R} = \frac{1}{R} \frac{dR}{R'};$$

avec l'équation (209), on obtient

$$d\alpha = \sqrt{\frac{1 + 2\lambda}{\lambda^2 - 1}} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda(2\lambda + 1)^2} d\lambda;$$

ou

$$(212) \quad d\alpha = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda(2\lambda + 1) \sqrt{(\lambda^2 - 1)(2\lambda + 1)}} d\lambda;$$

relation identique à (203) que nous avons rencontrée dans le § 54.

56. Isométrie entre la pseudo-glissette et la courbe de Mannheim généralisée. — La condition est ici :

$$\frac{(RR'' - R'^2)^2 + R'^2}{(1 + R'^2)^2} = \frac{(RR'' - 1)^2 + R'^2}{(1 + R'^2)^2};$$

elle se réduit à :

$$(213) \quad RR'' - R'^2 = \pm (RR'' - 1)$$

avec deux cas distincts :

$$1^\circ \quad R'^2 = 1$$

c'est-à-dire

$$R = s;$$

d'où

$$s = ce^{\alpha};$$

la courbe (C) est donc, dans ce cas, une *spirale logarithmique*.

$$2^{\circ} \quad 2 RR'' = 1 + R'^2;$$

qui s'écrit sous la forme

$$\frac{2 R' R''}{1 + R'^2} = \frac{R'}{R};$$

une première intégration donne

$$1 + R'^2 = \frac{R}{a};$$

(a une constante arbitraire).

On a alors par une seconde intégration (avec un choix convenable d'origine des arcs) :

$$R = a + \frac{s^2}{4a};$$

équation intrinsèque de la chaînette.

57. Isométrie entre la pseudo-glissette et la courbe ordinaire de Mannheim. — La condition est

$$(214) \quad (RR'' - R'^2)^2 + R'^2 = (1 + R'^2)^3;$$

posons

$$1 + R'^2 = pu;$$

la condition (214) devient

$$(215) \quad (RR'' - R'^2)^2 = p^3 u - pu + 1;$$

dans ce cas on a comme au paragraphe (53) ;

$$g_2 = 4, \quad g_3 = -4;$$

et

$$p'^2 u = 4 (p^3 u - pu + 1);$$

on a alors

$$RR'' - R'^2 = \frac{1}{2} p' u;$$

d'où

$$RR'' = \frac{1}{2} p' u + pu - 1.$$

Dérivons, par rapport à s , la relation

$$1 + R'^2 = pu ;$$

il vient

$$2 R' R'' = p' u \frac{du}{ds} ;$$

on a donc pour (215)

$$\frac{R}{R'} p' u \frac{du}{ds} = p' u + 2 pu - 2 ;$$

ou

$$(216) \quad \frac{dR}{R} = \frac{p' u du}{p' u + 2 pu - 2} ;$$

qui s'écrit

$$4 \frac{dR}{R} = \frac{p' u (p' u - 2 pu + 2)}{pu (p^2 u - pu + 1)} du ;$$

ou

$$(217) \quad \begin{aligned} 2 \log R &= 2 \int \frac{p^3 u - pu + 1}{pu (p^2 u - pu + 1)} du + \\ &+ \int \frac{(1 - pu)}{p (p^2 u - pu + 1)} dp u + \text{const.} \end{aligned}$$

Calculons d'abord la deuxième intégrale ; on a :

$$\int \frac{(1 - pu) dp u}{pu (p^2 u - pu + 1)} = \log \frac{pu}{\sqrt{p^2 u - pu + 1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tang} \frac{2 pu - 1}{\sqrt{3}}.$$

La première intégrale :

$$\begin{aligned} \int \frac{p^3 u - pu + 1}{pu (p^2 u - pu + 1)} du &= u + \int \frac{du}{pu} - \frac{1}{i \sqrt{3}} \\ &\left[\int \frac{du}{pu - \left(\frac{1 + i \sqrt{3}}{2} \right)} - \int \frac{du}{pu - \left(\frac{1 - i \sqrt{3}}{2} \right)} \right] ; \end{aligned}$$

si on pose

$$\begin{aligned} \frac{1 + i \sqrt{3}}{2} &= pv, \\ \frac{1 - i \sqrt{3}}{2} &= pw ; \end{aligned}$$

on aura

$$\int \frac{p^3 u - pu + 1}{pu (p^2 u - pu + 1)} du = u + \int \frac{du}{pu} - \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\int \frac{du}{pu - pv} - \int \frac{du}{pu - pw} \right);$$

et on a

$$\begin{cases} pv + pw = 1; \\ pv - pw = i\sqrt{3}; \end{cases}$$

d'où l'intégration théorique.

Quant à l'angle α

$$d\alpha = \frac{dR}{R} \cdot \frac{1}{R'}; .$$

d'où, avec la relation (216)

$$\begin{aligned} (218) \quad \alpha &= \int \frac{p' u du}{\sqrt{pu-1} (p' u + 2 pu - 2)} + \text{const}; \\ \alpha &= \frac{-1}{2} \int \frac{\sqrt{pu-1}}{pu (p^2 u - pu + 1)} dpu + \\ &+ \int \frac{(p^3 u - pu + 1) du}{\sqrt{pu-1} \cdot pu (p^2 u - pu + 1)} + \text{const.} \end{aligned}$$

La première intégrale est :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{pu-1} dpu}{pu (p^2 u - pu + 1)} = \text{arc tang } \sqrt{pu-1} + \\ & + \frac{i}{\sqrt{6}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \text{arc tg } \sqrt{\frac{2(pu-1)}{\alpha}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \text{arc tg } \sqrt{\frac{2(pu-1)}{\beta}} \right] \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} \alpha = 1 + i\sqrt{3}; \\ \beta = 1 - i\sqrt{3}; \end{cases}$$

la deuxième intégrale reste compliquée ; la présence du radical l'empêchant d'être exprimée simplement.

BIBLIOGRAPHIE

- L. Aoust. — *Analyse infinitésimale des courbes planes*, 1873.
- L. BRAUDE. — Ueber einige verallgemeinerungen des Begriffesden Mannheimschen Kurve, Pirmasens, 1911 (inaugural Dissertation).
 — *Les coordonnées intrinsèques*, théorie et applications (Collection Scientia, 1914).
 — Ueber Roll und Fusspunktkurven, *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, XXXIV, 1912.
 — Sur quelques généralisations d'une transformation de M. E. KOESTLIN, *Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, Coimbra, IX, 1914.
- H. BROCARD. — *Notes de Bibliographie des courbes géométriques*, Bar le Duc, 1897.
- P. ERNST. — Eine analozon zur Mannheimsche Kurve, *Monatshefte fur math. und Physik*, XVIII, n° 315 316.
- Haton de LA GOUPILLIÈRE. — Etude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 2^e série, cahier 15, 1911, p. 1 107.
- E. KÖSTLIN. — Ueber eine transzendente Kurve von der die gemeine Cycloide ein Grenzfall ist, *Math... Mitteilungen*, Wurtemberg, 1907, p. 21 30 ; 55 64 ; 66 78.
- Gino LORIA. — *Curve piane speciali algebriche e traszendenti*, Milano, t. I (1930); t. II (1930).
 — *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, 1910.
- A. MANNHEIM. — Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite, *Journal de Liouville* [2], t. IV, 1859, p. 93 104.
- G. B. SANTANGELO. — Sulle curve di Mannheim sulle radiali e sopra una generalizzazione di esse. *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, XXIX, 1910.
- Gomes TEIXEIRA. — *Traité des courbes spéciales remarquables*, Coimbra, t. I (1908); t. II (1909); t. III (1915).
- E. TURRIÈRE. — Sur l'interprétation géométrique, d'après Mannheim, de l'équation intrinsèque d'une courbe plane. *L'Enseignement mathématique*, 1911, XIII^e année, p. 24 26.
 — Généralisation des courbes de Ribaucour. *Nouvelles Annales de math.* [4], t. XIII, 1913, p. 275 287.
 — Sur les spirales logarithmiques osculatrices à une courbe plane, *L'Enseignement mathématique*, 1913, XIV^e année, p. 123 129.
 — Sur les roulettes a base rectiligne, *E. M.*, 1913, XIV, p. 319 325.
 — Sur les courbes de Ribaucour, *E. M.*, 1913, XIV, p. 468 477.
 — Sur les courbes de Cesàro, *Giornale di mat. di Battaglini*, t. LI, 1913, p. 11-18.
 — Sur des questions relatives à la théorie et à l'histoire des courbes spéciales, *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, t. XIX, 1935.
- H. WIELEITNER. — Das Abrollen von Kurven bei geradliniger Bewegung eines Punktes, *Archiv der Mathematik und Physik*, 1907, p. 307 314.
 — Ueber eine Verallgemeinerung des Begriffes der Mannheimschen Kurven, *Math... Mitteilungen* (Wurtemberg), 1907, p. 1 8.
 — Sur quelques generalisations de la courbe de Mannheim (à propos d'un article de M. E. TURRIÈRE), *L'Enseignement mathématique*, 15 septembre 1911.
 — *Spezielle ebene Kurven*, Leipzig, 1908.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

La théorie moderne des courbes de la cinématique plane

CHAPITRE PREMIER. — Les roulettes	PAGES
Les roulettes à base rectiligne	5
Les roulettes à base curviligne	7
Génération de la ligne droite comme roulette	10
Introduction de nombres imaginaires dans la théorie du roulement	15
CHAPITRE II. — Les glissettes	
Glissette engendrée par un point invariablement lié à une courbe quand celle-ci reste tangente en un point d'une droite fixe..	20
Algèbricité ou transcendance d'une glissette	27
Glissette engendrée par un point invariablement lié à une courbe quand celle-ci reste tangente à deux droites perpendiculaires	29

DEUXIÈME PARTIE

Développôides et nouvelles extensions des courbes de Mannheim

CHAPITRE III. — Étude sur les développôides	
Le cas où l'angle θ est constant	41
Le cas où l'angle θ est variable	49
Application à la théorie du navire	52
CHAPITRE IV. — Une généralisation des développôides	
Propriété entre deux courbes associées point par point avec parallélisme des tangentes	55
Application aux développôides	59
L'image de courbure de Minkowski et son application aux développôides	61
CHAPITRE V. — Les spirales logarithmiques osculatrices	
Etude sur l'enveloppe des cercles (C_1) de diamètre R tangentes en chaque point M à une courbe (C) et applications.....	71
La propriété des spirales logarithmiques osculatrices à (C).....	79

	PAGES
CHAPITRE VI. — La courbe de Mannheim généralisée	
Courbe de MANNHEIM	89
Courbe de MANNHEIM généralisée pour le pôle de la spirale logarithmique osculatrice	90
Problème inverse et les cas d'intégrabilités	96
CHAPITRE VII. — La pseudo-glissette de Mannheim	
Définition de la pseudo-glissette.....	108
Problème inverse	109
CHAPITRE VIII. — Propriétés d'isométrie	
L'arc de la courbe de MANNHEIM généralisée.....	112
L'arc de la pseudo-glissette de MANNHEIM.....	113
Condition d'isométrie entre la courbe de MANNHEIM ordinaire et la courbe de MANNHEIM généralisée.....	113
Courbe déterminée par son isométrie avec la courbe de MANNHEIM généralisée	116
Isométrie entre la courbe (C) et la pseudo-glissette de MANNHEIM	123
Isométrie entre la pseudo-glissette et la courbe de MANNHEIM généralisée	124
Isométrie entre la pseudo-glissette et la courbe ordinaire de MANNHEIM	125