

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

CHARLES BLANC

Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1937

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__188__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__188__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Série A, n° 1714
n° d'ordre: 2580

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. CHARLES BLANC

1^{re} THÈSE : LES SURFACES DE RIEMANN DES FONCTIONS MÉROMORPHES

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 1937 devant la Commission d'examen

MM. MONTEL,	<i>Président</i>
DENJOY	} <i>Examineurs</i>
VALIRON	

1 9 3 7

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI, ZÜRICH

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire

Doyen

M. MOLLIARD.

C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires :</i>	H. LEBESGUE.	Rémy FERRIER.	FREUNDLER.	LESPIEAU.
	A. FERNBACH.	Léon BRILLOUIN.	AUGER.	MARCHIS.
	A. LEDUC.	GUILLET.	BLAISE.	VESSIOT.
	Émile PICARD.	PÉCHARD.	DANGEARD.	PORTIER.

PROFESSEURS

G. BERTRAND	T	Chimie biologique.	L. JOLEAUD	Paléontologie.	
M. CAULLEY	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	ROBERT-LÉVY	T	Physiologie comparée.
G. URBAIN	T	Chimie générale.	F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	
Émile BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
Jean PERRIN	T	Chimie physique.	Ch. JACOB	T	Géologie.
H. ABRAHAM	T	Physique.	P. PASCAL	T	Chimie minérale.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.	M. FRÉCHET	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
M. MOLLIARD	T	Physiologie végétale.	E. ESCLANGON	T	Astronomie.
L. LAPICQUE	T	Physiologie générale.	M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
A. COTTON	T	Recherches physiques.	H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	FOCH	Mécanique expérimentale des fluides.	
Charles FABRY	T	Enseignement de Physique.	PAUTHENIER	Physique (P. C. B.).	
Charles PÉREZ	T	Zoologie.	De BROGLIE	T	Théories physiques.
Léon BERTRAND	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	CHRÉTIEN	Optique appliquée.	
E. RABAUD	T	Biologie expérimentale.	P. JOB	Chimie générale.	
M. GUICHARD	T	Chimie minérale.	LABROUSTE	Physique du Globe.	
Paul MONTEL	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	PRENANT	Zoologie.	
P. WINTREBERT	T	Anatomie et histologie comparées.	VILLEY	Mécanique physique et expérimentale.	
L. BLARINGHEM	T	Botanique.	BOHN	Zoologie (P. C. B.).	
O. DUBOSCQ	T	Biologie maritime.	COMBES	Botanique (P. C. B.).	
G. JULIA	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	GARNIER	T	Mathématiques générales.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.	PÈRES	Mécanique théorique des fluides.	
A. MICHEL-LÉVY	T	Pétrographie.	HACKSPILL	Chimie (P. C. B.).	
H. BÉNARD	T	Mécanique expérimentale des fluides.	LAUGIER	Physiologie générale.	
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	TOUSSAINT	Technique Aéronautique.	
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	M. CURIE	Physique (P. C. B.).	
Eugène BLOCH	T	Physique théorique et physique céleste.	G. RIBAUD	T	Hautes températures.
G. BRUHAT	T	Physique.	CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	GAULT	Chimie (P. C. B.).	
A. DEBIERNE	T	Physique Générale et Radioactivité.	CROZE	Recherches physiques.	
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.).	DUPONT	T	Théories chimiques.
L. DUNOYER	T	Optique appliquée.	LANQUINE	Géologie.	
A. GUILLIERMOND	T	Botanique.	VALIRON	Mathématiques générales.	
M. JAVILLIER	T	Chimie biologique.	BARRABÉ	Géologie structurale et géologie appliquée.	
			MILLOT	Zoologie (P. C. B.).	
			F. PERRIN	Théories physiques.	
			VAVON	Chimie organique.	
			G. DARMOIS	Calcul des Probabilités et Physique Mathématique.	

Secrétaire A. PACAUD.

Secrétaire honoraire D. TOMBECK.

A la mémoire de mon Maître

GUSTAVE JUVET

Introduction

Depuis quelques années, la recherche de critères de type de surfaces de Riemann simplement connexes a été l'objet de nombreux travaux. Ces critères concernent en général des surfaces assez simples, notamment ceux d'entre eux qui donnent des conditions suffisantes pour le type parabolique; le principe de Bloch (§ 11) permet d'indiquer dans quelle direction on peut trouver des généralisations de ces critères. M. Ahlfors a complété dans ce sens des conditions suffisantes pour le type hyperbolique (généralisation du théorème de Picard par exemple).

Dans le chapitre premier (§ 1 à 3), nous rappelons les résultats acquis concernant la définition des surfaces de Riemann, et leur représentation par des arbres ou des réseaux.

La classification, due à M. Iversen, des singularités des surfaces de Riemann simplement connexes, fait l'objet du § 4; nous donnons ensuite (§ 5) des exemples de singularités plus compliquées que celles qui rentrent dans cette classification.

Le chapitre 3 expose l'extension aux surfaces les plus générales de la représentation par les réseaux de M. Speiser; nous montrons qu'à tout réseau (avec quelques restrictions nécessaires) correspond une surface de Riemann. En passant, nous étudions les relations qui doivent exister entre deux réseaux d'une même surface.

Le chapitre 4 traite du type des surfaces de Riemann. Au § 11, nous exposons l'idée de M. Bloch et proposons une forme précise pour ce que nous appelons le principe de Bloch, à la place du terme de continuité topologique qu'il a donné lui-même et qui prête à confusion.

Le § 12 donne un critère de type qui constitue une démonstration partielle du principe de Bloch. Aux §§ 13 et 14, nous indiquons des généralisations (dans le sens indiqué par M. Bloch) d'un théorème de M. R. Nevanlinna. Le critère donné au § 15 est également inspiré par le principe de Bloch; celui du § 16 montre qu'on peut obtenir le type parabolique non seulement en raréfiant les singularités, mais aussi en les disposant de façon assez régulière.

Enfin, aux §§ 17 à 19, nous introduisons, pour l'étude du type des sur-

faces, une méthode nouvelle; elle peut être utile lorsqu'on s'occupe de surfaces dont la symétrie, ou la dissymétrie, joue un rôle prépondérant. Nous donnons quelques critères obtenus grâce à cette méthode, et indiquons, au § 19, comment une étude plus complète pourrait donner la démonstration du principe de Bloch dans sa forme la plus simple, celle où la transformation de la surface ne concerne qu'une singularité isolée.

En terminant, il m'est agréable de remercier tous ceux à qui je dois d'avoir pu préparer et faire imprimer ce travail; ma gratitude va en particulier à M. Valiron, dont les remarques et les bienveillants conseils m'ont été d'un si grand prix.

CHAPITRE I

Définitions. Rappel de résultats

§ 1. Définition de la surface de Riemann

La définition que nous donnons est due à *Radó*¹⁾; voir aussi *Bochner*²⁾ et *de Possel*³⁾.

Espace topologique: C'est un ensemble d'éléments, les „points“; à chaque „point“ P correspond un sous-ensemble, contenant P , appelé *voisinage* de P : $V(P)$. Un voisinage est tel qu'il peut être représenté topologiquement sur l'intérieur d'un cercle, l'image de P étant le centre du cercle. De plus, cet ensemble est tel que:

Axiome 1: Si V_1 et V_2 sont deux voisinages de P , P possède un voisinage contenu dans V_1 et V_2 .

Axiome 2: Si Q est contenu dans $V(P)$, on peut trouver un $V(Q)$ tel que

$$V(Q) \subset V(P)$$

Axiome 3: Si $P \neq Q$, on peut choisir $V(P)$ et $V(Q)$ avec

$$V(P) \cdot V(Q) = 0$$

Surface: Espace topologique topologiquement équivalent à un domaine plan („schlichtartig“).

¹⁾ Acta Szeged, 2, 1925, p. 101.

²⁾ Math. Annalen, 98, 1928, p. 26.

³⁾ Thèse, J. Ecole Polytechnique, 2^{me} série, 30, 1932, p. 9.

Surface de Riemann : Soit F une surface, $\{V\}$ le système des voisinages. Chaque voisinage est représenté topologiquement sur un cercle par une représentation $T(V)$. Soient V_1 et V_2 deux voisinages avec

$$V_1 \cdot V_2 = G$$

et soient G'_1 et G'_2 les images de G par $T(V_1)$ et $T(V_2)$. Si la transformation

$$T(V_1)^{-1} \cdot T(V_2)$$

qui représente G'_1 sur G'_2 est conforme et directe, alors on dit que F est une surface de Riemann.

On peut définir une surface de Riemann à partir d'une fonction analytique $z(w)$. Un „point“ est un élément de la fonction (régulier ou algébrique); le voisinage est formé des éléments d'un cercle concentrique et intérieur au cercle de convergence; $T(V)$ est donné par

$$\zeta = w$$

si l'élément est régulier, par

$$\zeta = (w - a)^{\frac{1}{p}}$$

si l'élément est algébrique.

Un élément algébrique sera considéré comme un „point“ distingué de F , „point“ que nous appellerons „point“ critique algébrique ou *singularité algébrique*.

La fonction $z(w)$ peut avoir des points *singuliers transcendants*. Il ne leur correspond aucun „point“ de F ; en effet, il ne serait pas possible de représenter le voisinage correspondant, l'image du point venant au milieu du cercle.

Soit a un point singulier transcendant de $z(w)$. Il est isolé si dans un domaine assez petit D de la sphère de Riemann, contenant a , la branche considérée de $z(w)$ est prolongeable rationnellement⁴⁾ sur tout chemin sauf en a . L'exemple du point zéro pour $\log w$ démontre l'existence de tels points singuliers.

Soit une suite de domaines emboîtés $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ tendant vers a . Il lui correspond une suite de domaines emboîtés $D'_1, D'_2, \dots, D'_n, \dots$ de F ; nous dirons que cette suite définit une singularité logarithmique (ou singularité isolée) de F . Cette singularité fait partie de la frontière de F . Par définition, elle ne peut être limite d'une suite infinie de points critiques algébriques.

⁴⁾ C'est-à-dire qu'en chaque point w_0 elle y admet un développement en série de puissances entières de $(w - w_0)$.

a est la trace de la singularité, de même que la trace d'un point de F est le point du plan ou de la sphère simple où on a l'élément correspondant de $z(w)$.

On sait que $z(w)$ peut posséder des points singuliers de nature plus complexe⁵⁾. Ils forment les singularités non isolées de F .

Chemin sur F : C'est un ensemble de points de F , topologiquement équivalent à un intervalle rectiligne ouvert. La *trace d'un chemin* est l'ensemble des traces de ses points, où on compte n fois un point de la sphère de Riemann ou du plan qui est trace de n points du chemin sur la surface. C'est une courbe, que nous supposons toujours rectifiable.

Distance de deux points de F : C'est la borne inférieure de la longueur de la trace des chemins ayant les deux points pour extrémités.

Distance d'un point à une singularité: C'est la borne inférieure de la longueur de la trace des chemins dont les extrémités sont le point et la singularité.

Distance de deux singularités: C'est la borne inférieure de la longueur de la trace des chemins dont les extrémités sont les deux singularités.

On définit de la même façon les *distances sphériques*, en mesurant les longueurs sur la sphère de Riemann.

Type d'une surface de Riemann simplement connexe: Une surface de Riemann simplement connexe peut être représentée conformément sur un cercle $|z| < 1$ ou sur le plan ouvert. Dans le premier cas, on dit que la surface est du type hyperbolique, dans le second, qu'elle est du type parabolique.

§ 2. Quelques définitions sur les surfaces de Riemann

Pavage δ de la sphère de Riemann. Soit $\delta > 0$. On dit qu'on a un pavage δ de la sphère de Riemann lorsque on l'a entièrement recouverte d'un nombre fini de domaines simplement connexes, sans points communs sinon les points frontières, et tels que deux points quelconques d'un même domaine ou de sa frontière peuvent toujours être joints par un chemin intérieur au domaine, et de longueur sphérique inférieure à δ .

On supposera que la frontière de chaque pavé est formée d'un nombre fini d'arcs analytiques. De plus, un point sera sur la frontière de trois pavés au plus.

Portion d'une surface de Riemann F : Soit P un point de F , dont la trace est intérieure à un pavé. On appelle *portion* de F l'ensemble Δ des

⁵⁾ voir Iversen, Thèse, Helsingfors 1914.

points de F qu'on peut atteindre par des chemins issus de P et dont la trace reste dans le pavé.

Une portion peut ne pas être simplement connexe, même si F l'est (par exemple si le pavé contient les points *zéro* et *infini*, et si F est la surface de $z = \log w$).

Supposons maintenant F simplement connexe; on appellera *portion étendue* Δ' la portion Δ à laquelle on a adjoint tout ce qu'il fallait pour la rendre simplement connexe; cela est possible, et d'une seule manière. On constate que $\Delta' - \Delta$ ne contient que des singularités algébriques.

Base singulière d'une surface de Riemann: C'est l'ensemble des traces des singularités algébriques et transcendentes de la surface. On dira qu'une surface a une base singulière finie si l'ensemble des traces des singularités est fini.

Portion circulaire: C'est une portion dont le pavé est un cercle.

§ 3. Réseau topologique d'une surface de Riemann

M. Speiser⁶⁾ a considéré les surfaces de Riemann simplement connexes dont toutes les singularités sont logarithmiques et ont pour traces trois points w_1, w_2, w_3 de la sphère de Riemann. Il donne une méthode pour construire ce qu'il appelle l'*arbre topologique* d'une telle surface. Voici comment on procède: on fait passer une courbe fermée L , sans points doubles, par les trois points w_1, w_2, w_3 , et on fait la représentation de la surface sur le cercle $|z| < R$ ($R \leq \infty$). La courbe L se transforme en courbes Δ du cercle $|z| < R$, et ces courbes Δ définissent des *domaines fondamentaux*. On choisit sur la sphère deux points I et E , l'un intérieur à L , l'autre extérieur. Pour finir, on joint par des courbes ne se coupant pas, les points du plan z qui correspondent à I et E et dont les domaines sont contigus. On forme ainsi un arbre, au sens topologique du mot, et c'est ce que M. Speiser appelle l'*arbre topologique* de la surface de Riemann.

Cette représentation peut s'étendre sans autre aux cas où l'on a p ($p \geq 2$) points au lieu de trois. On peut aussi le faire si la surface, simplement connexe ou non, comporte des points critiques algébriques. Mais alors on n'obtient plus un *arbre* (au sens topologique du mot), mais un *réseau*. On trouve un exposé sur ce sujet dans le texte de la conférence de M. R. Nevanlinna, au *Congrès International de Zurich*⁷⁾ et une étude très complète dans la récente thèse de M. Elfving⁸⁾.

⁶⁾ Comm. Math. Helv. 1, 1929 et 2, 1930.

⁷⁾ Verh. des Int. Math. Kongresses. Zürich 1932, 1, p. 221.

⁸⁾ Thèse. Acta Fennicae. Nov. Ser. A, 2, no. 3.

Le *réseau topologique* d'une surface découpe le plan en domaines; à chacun de ces domaines correspond *une* singularité de la surface. Ce sont les *domaines élémentaires*. Si la singularité d'un domaine est transcendante, le domaine a une infinité de côtés, et réciproquement. Si la singularité d'un domaine est algébrique de degré λ , le domaine a 2λ côtés, et réciproquement⁹⁾.

M. Elfving considère des réseaux un peu plus précis: ils sont constitués par l'image de p courbes IE passant chacune entre deux points w_i, w_{i+1} . Le réseau qu'on obtient est le même que le précédent si on considère comme confondues deux arêtes ayant les mêmes extrémités.

On peut parler alors de l'*ordre* d'un réseau; c'est le nombre p d'arêtes issues de chaque sommet (on voit que ce nombre est partout le même). Le nombre p est égal au nombre de traces de points singuliers.

M. Elfving donne le *théorème* suivant:

Soient p points $a_1, a_2, \dots, a_p$, une courbe L passant par ces points et un réseau R d'ordre p . Il existe une surface de Riemann dont les singularités ont pour traces les points a_i et qui a le réseau R .

Disons qu'on simplifie un réseau R , donné comme le fait M. Elfving, lorsqu'on considère comme identiques les arêtes qui ont mêmes extrémités, et qu'on le *complète* lorsqu'on opère en sens inverse.

On peut se demander si, un réseau R étant donné (au sens ordinaire du mot, sans que le nombre d'arêtes issues d'un sommet soit toujours le même), il est possible de le compléter en sorte qu'il devienne un réseau au sens de M. Elfving, avec un ordre fini p .

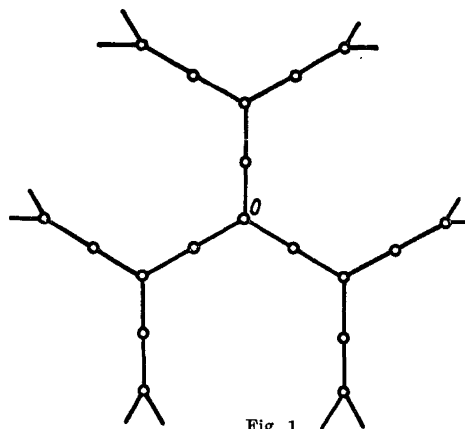


Fig. 1

⁹⁾ Ouvrage cité à la note ⁸⁾, p. 14 et 15.

Une première condition, nécessaire, est que le nombre d'arêtes issues d'un sommet soit toujours inférieur ou égal à p . *Cette condition n'est pas suffisante*; pour le montrer, considérons le réseau de la fig. 1.

Soit p le plus petit ordre possible. Nous disons que $p = \infty$. Prenons les trois arêtes issues de 0. Pour compléter le réseau, il faut adjoindre à chaque arête un certain nombre d'arêtes complémentaires. Il en faut au moins une pour chaque arête. En effet, si une arête restait inchangée, la suivante devrait se compléter de $(p-2)$ arêtes, d'où il résulte que le sommet suivant aurait $(p+1)$ arêtes. Donc il y a une arête adjointe au moins. Mais alors, supposons qu'il y en ait une exactement pour l'arête considérée plus haut; le sommet suivant aurait $(p+2)$ arêtes au moins; supposons enfin qu'il y ait q arêtes, alors le sommet suivant aurait au moins $(p+q)$ arêtes. On voit que p ne saurait être borné, d'où il résulte qu'il est impossible de faire de R un réseau au sens de M. Elfving, R ne peut pas correspondre à une surface ayant une base singulière finie. Nous verrons plus loin quelles surfaces on peut faire correspondre à ces réseaux.

Les réseaux nous renseignent sur l'ordre de connexion d'une surface de Riemann :

Si une surface de Riemann est multiplement connexe, il existe un polygone fermé du réseau qui sépare deux suites infinies de sommets, et réciproquement¹⁰⁾.

Faisons encore une remarque: les théorèmes que l'on énonce sur les réseaux utilisent uniquement les propriétés topologiques de ces réseaux¹¹⁾; mais il est clair que dans bien des démonstrations, on fera intervenir des propriétés métriques du réseau: on supposera fixées les courbes IE .

Division d'un réseau en générations: Prenons d'abord le cas d'un arbre. On choisit arbitrairement un sommet A de l'arbre, que l'on prend pour origine du système des générations. Il constitue la génération G_0 . La $n^{\text{ième}}$ génération G_n sera composée des sommets de l'arbre qu'on atteint de A par un polygone formé de n arêtes de l'arbre¹²⁾.

Dans le cas d'un réseau proprement dit, on choisit encore une origine A , qui forme G_0 . Puis on dit que le sommet B appartient à la $n^{\text{ième}}$ génération

¹⁰⁾ Ouvrage cité à la note ⁸⁾, p. 16.

¹¹⁾ Voir p. ex. *R. Nevanlinna*, Comm. Math. Helv., 5, 1932, p. 95.

¹²⁾ Il n'y a pas ambiguïté, puisque deux sommets ne peuvent être reliés que par un seul polygone, sans quoi on n'aurait pas un arbre.

G_n s'il existe un polygone de n côtés du réseau, reliant A à B , et aucun de moins de n côtés.

Si A correspond à un point I , tous les sommets du réseau qui correspondent à I appartiennent à des générations paires. Il en résulte que deux sommets consécutifs ne peuvent être de la même génération; de plus, ils appartiennent à deux générations consécutives. Soient en effet B et C deux sommets consécutifs, de générations m et n . Si $m \geq n + 3$ il existe un chemin qui relie A à B et qui est formé de $n + 1$ arêtes, donc de moins de m arêtes, ce qui est impossible. Donc on a $m = n \pm 1$.

CHAPITRE II

Les singularités des surfaces de Riemann simplement connexes

§ 4. Les résultats de M. Iversen

Après *Boutroux*, *M. Iversen*¹³⁾ a donné une classification des singularités des surfaces de Riemann simplement connexes. Nous allons la reprendre brièvement.

Dès le début, M. Iversen écarte le cas de l'accumulation de singularités transcendentes. Il considère des surfaces de Riemann correspondant à une fonction méromorphe $w = f(z)$, pour toute valeur finie de z . Il entoure d'un cercle C le point singulier ω de la fonction inverse $z = \varphi(w)$. Soit D le domaine correspondant de plan z . Voici la classification qu'il donne:

A. *Point directement critique* ω : C'est un point tel que $f(z) - \omega$ n'a aucune racine dans D , pour C assez petit;

1° de *première espèce* si $f'(z) \neq 0$ dans D ;

2° de *seconde espèce* si $f'(z)$ a une infinité de zéros dans D .

B. *Point indirectement critique* ω : c'est un point tel que C ne contient aucun rayon sur lequel $\varphi(w) \rightarrow \infty$ lorsque $w \rightarrow \omega$.

C. *Point directement et indirectement critique*: tout point singulier n'appartenant pas à une des catégories précédentes.

Dans chaque cas, M. Iversen étudie l'allure de $f(z)$ dans D et le prolongement de $\varphi(w)$ dans C ; il en donne des exemples très simples.

¹³⁾ Ouvrage cité à la note ⁵⁾.

§ 5. Singularités plus générales

M. Iversen a écarté de son étude les singularités dont le voisinage contient une infinité de singularités transcendentes. On pourrait alors distinguer, en dehors de sa classification :

1° les singularités dans le voisinage desquelles la surface possède une infinité de singularités transcendentes, mais aucune singularité algébrique ;

2° les singularités dont le voisinage contient une infinité de singularités, tant transcendentes qu'algébriques.

Nous donnerons un exemple de singularité dans les deux cas. Il s'agit de singularités directement critiques. Nous allons démontrer d'abord un lemme préliminaire.

Soit

$$f(z) = \int_0^z z \gamma_0(z) dz$$

où γ_0 est une fonction entière, périodique de période $2i\pi$. De plus on suppose que l'intégrale

$$\Gamma_1 = \int_0^\infty t \gamma_0(t) dt \quad t \text{ réel}$$

existe et est finie.

Posons

$$h_k = f(2ki\pi)$$

et

$$h_k^* = h_k + \int_0^\infty (t + 2ki\pi) \gamma_0(t + 2ki\pi) dt \quad t \text{ réel}$$

puis

$$\gamma_1(z) = \int_0^z \gamma_0(z) dz$$

et

$$\Gamma_0 = \int_0^\infty \gamma_0(t) dt$$

On suppose encore que

$$\int_0^{2i\pi} \gamma_0(z) dz = u \neq 0$$

On a, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} h_k &= 2i\pi u k^2 - \int_0^{2ki\pi} \gamma_1(z) dz \\ &= 2i\pi u k^2 - k \int_0^{2i\pi} \gamma_1(z) dz - 2i\pi u \frac{k(k-1)}{2} = ak^2 + bk \end{aligned}$$

avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Puis} \quad h_k^* &= h_k + \Gamma_1 + 2ki\pi \Gamma_0 \\ &= ak^2 + b'k + c' ; \end{aligned}$$

il en résulte que l'on a

$$h_k \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad h_k^* \rightarrow \infty \quad (1)$$

si $k \rightarrow \infty$, et de plus, l'inégalité

$$|f(2ki\pi + x)| > K_1 \quad (2)$$

est vérifiée, quel que soit K_1 , pour tout x positif, et $k > k_0(K_1)$. Si on a d'autre part $|\gamma_0(z)| < K_2$ pour $\Re z < 0$, $\Im z = 2ki\pi$, il en résulte que, quel que soit $\eta > 0$, on aura

$$|f(2ki\pi - x) - f(2ki\pi)| < k^2 \eta (\eta + 2i\pi) K_2 \quad , \quad 0 < x < \eta k$$

donc pour η assez petit

$$|f(2ki\pi - x)| > a'k^2, \quad 0 < x < \eta k \quad (3)$$

Cela établi, passons aux exemples annoncés. Soit

$$w = f(z) = \int_0^z z e^{-e^z} dz$$

Si on pose $\gamma_0(z) = e^{-e^z}$, on reconnaît que toutes les conditions du lemme sont vérifiées. Donc si $\omega_k = h_k^*$, on voit que $f(z)$ a des valeurs asymptotiques ω_k avec

$$|\omega_k| \rightarrow \infty \quad \text{pour} \quad k \rightarrow \infty$$

D'autre part, lorsque $\Re z \rightarrow +\infty$ sur une droite

$$\Im z = (2k + 1)\pi \quad k \text{ entier}$$

on a $|f(z)| \rightarrow \infty$, ce qui donne les singularités $\omega_k^* = \infty$ de la fonction inverse $z(w)$.

Évaluons la fonction $f(z)$ dans l'angle

$$|\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \eta .$$

et

$$\text{Pour } \Re z < -k, \text{ on a } |e^{-e^z} - 1| < \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(-k) + \int_{-k}^z z e^{-e^z} dz \\ &= f(-k) + \frac{z^2}{2} - \frac{k^2}{2} + \int_{-k}^z z (e^{-e^z} - 1) dz \end{aligned}$$

$$f(z) - \frac{z^2}{2} = f(-k) - \frac{k^2}{2} + \int_{-k}^z z (e^{-e^z} - 1) dz$$

donc

$$\left| f(z) - \frac{z^2}{2} \right| < |f(-k)| + \frac{k^2}{2} + \frac{|z^2|}{4} .$$

Ainsi, sur tout chemin de l'angle ci-dessus, tendant vers l'infini, on a $|f(z)| \rightarrow \infty$.

Soit W un chemin de détermination finie. Il coupe toute droite $\Im z = (2k+1)\pi$ en un nombre fini de points. D'autre part, pour $|z|$ assez grand, il est extérieur à l'angle $|\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \eta$. Il ne peut donc couper la droite $\Im z = 2k\pi$ qu'en un point tel que $\Re z > -k\eta'$; or le minimum de $|f(z)|$ sur ces droites tend vers l'infini, lorsque $k \rightarrow \infty$, cela en vertu de (2) et (3). Donc W ne peut pas couper toutes les droites $\Im z = 2k\pi$, il finit par rester dans une bande $(2k-1)\pi < \Im z < (2k+1)\pi$. S'il coupe indéfiniment la droite $\Im z = 2k\pi$, la valeur limite est ω_k .

Supposons qu'à la valeur limite de $f(z)$ sur W corresponde une singularité de $z(w)$ autre que les ω_k . Alors W est compris, d'après ce que nous venons de voir, dans une bande

$$2k\pi < \Im z < (2k+1)\pi$$

ou dans une bande

$$(2k-1)\pi < \Im z < 2k\pi$$

(ou du moins peut être déformé de façon que cela soit le cas, sans modifier la valeur limite).

Nous allons montrer qu'il ne peut exister un tel chemin W . Pour cela, on supposera W dans une bande

$$2k\pi < \Im z < (2k+1)\pi.$$

Si W est dans une bande $(2k-1)\pi < \Im z < 2k\pi$, la démonstration est la même.

Représentons la bande $2k\pi < \Im z < (2k+1)\pi$, $\Re z > 0$, sur le domaine $|\zeta| > 1$, $\Im \zeta > 0$, au moyen de la fonction

$$\zeta = e^z$$

et soit

$$g(\zeta) = f(\log \zeta)$$

Pour $\Re z$ assez grand

$$|f(z)| < e^{e^{\Re z + \varepsilon}}$$

donc

$$|g(\zeta)| < e^{|\zeta| + \varepsilon}$$

D'autre part, sur toute demi-droite

$$\arg \zeta = \varphi \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

on a

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} g(\zeta) = \omega_k$$

Soit W^* l'image de W dans le plan ζ : W^* ne peut couper aucune demi-droite

$$\arg \zeta = \varphi \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

il est donc compris dans l'angle $\frac{\pi}{2} - \delta < \arg \zeta < \pi$. Sur W^* et sur la demi-droite $\arg \zeta = \frac{\pi}{2} - \delta$, $g(\zeta)$ est borné; les deux chemins sont compris dans un angle d'ouverture $\alpha < \frac{\pi}{2} + 2\delta$, et on a dans cet angle

$$|g(\zeta)| < e^{|\zeta| + \varepsilon}.$$

Il en résulte que $|g(\zeta)|$ est borné dans l'angle formé par W^* et la demi-droite $\arg \zeta = \frac{\pi}{2} - \delta$ ¹⁴⁾. Donc la limite de $g(\zeta)$ sur W^* est la même que sur $\arg \zeta = \frac{\pi}{2} - \delta$: c'est ω_k .

Ainsi, il ne peut exister aucune autre singularité transcendante que

¹⁴⁾ Voir *Julia*, Principes géométriques d'Analyse II, p. 9 et suiv.

celles que nous avons étudiées. D'autre part, il n'y a qu'une singularité algébrique, qui correspond à $z = 0$.

Donc dans le demi-plan $\Im z > K_3$, tout chemin de détermination donne une valeur asymptotique de module supérieur à A . Soit Δ la partie de la surface de Riemann qui correspond au demi-plan $\Im z > K_3$; Δ ne contient que des singularités extérieures au cercle $|w| = A$. Soit γ un chemin de Δ dont les extrémités sont sur le cercle $|w| = A$, et sur lequel on a constamment $|w| < A$. Il peut, par une déformation continue sur Δ et intérieure à $|w| < A$ être amené à coïncider avec un arc du cercle $|w| = A$, puisque $|w| < A$ ne contient aucune singularité. Donc tout chemin reliant deux singularités de Δ peut être déformé sur la surface en un chemin pour lequel $|w| \geq A$; la portion définie par $|w| \geq A$ et qui contient Δ contient ainsi toutes les singularités de Δ ; elle en contient donc une infinité. Le point à l'infini est le seul point d'accumulation des traces de ces singularités, il est donc une singularité non isolée de $z(w)$, et le voisinage de l'infini ne contient aucune singularité algébrique, puisque $f'(z)$ n'a qu'un zéro (pour $z = 0$).

Il est aisé de donner un exemple où l'on a dans le voisinage de la singularité étudiée des singularités transcendentes et algébriques.

Soit

$$w = f(z) = \int_0^z z(e^z - 1)e^{-e^z} dz .$$

Là encore, les résultats du lemme peuvent s'appliquer, avec $\gamma_0 = (e^z - 1)e^{-e^z}$. Mais la fonction inverse $z(w)$ possède des singularités algébriques qui correspondent aux valeurs de z qui annulent $e^z - 1$, c'est-à-dire pour $z = 2ki\pi$; les singularités algébriques sont donc justement les quantités h_k étudiées dans le lemme, et on a $h_k \rightarrow \infty$. Pour le reste, tous les résultats concernant l'exemple précédent restent vrais. Comme plus haut, on montre que $f(z)$ ne possède pas d'autres valeurs asymptotiques finies que celles qui ont été étudiées. Cette fonction nous fournit donc l'exemple cherché.

CHAPITRE III

Les réseaux topologiques des surfaces de Riemann les plus générales

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étendre la représentation des surfaces par les réseaux aux surfaces les plus générales et en particulier aux surfaces dont les singularités sont isolées mais la base singulière infinie. Nous verrons ensuite les relations qui existent entre deux réseaux d'une même surface, puis nous résoudrons le problème de l'existence d'une surface de réseau donné.

§ 6. Première généralisation des réseaux

Soit F une surface de Riemann dont les singularités sont isolées, la distance sphérique de deux singularités (mesurée sur la surface) étant toujours supérieure à $\delta(> 0)$.

Effectuons un pavage $\frac{\delta}{3}$ de la sphère de Riemann. Soient $D_1, D_2, \dots, D_p$ les pavés. Supposons pour commencer qu'aucune trace de singularité ne se trouve sur la frontière d'un pavé. Soit Δ une portion de F , définie par le pavé D_k . Δ contient au plus une singularité; supposons en effet qu'il en contienne deux au moins; on pourrait les relier par un chemin de longueur inférieure à $\frac{\delta}{3}$, ce qui est impossible en vertu de la définition de F . Il y a donc une singularité au plus dans Δ .

Considérons un point a_k dans chaque D_k ; on a ainsi p points, nous les relierons par une courbe fermée sans points doubles C , et nous construisons le réseau de F comme celui d'une surface F^* dont les singularités seraient les points a_k ; la surface F^* résulte d'une déformation de F , déformation qu'on peut considérer comme légère en regard de la distance de deux singularités.

Considérons maintenant le cas où des singularités ont pour trace des points frontières d'un D_k . Soit par exemple a une singularité dont la trace se trouve sur la frontière de D_i, D_j et D_k (en vertu des hypothèses faites plus haut sur le pavage, un point ne peut pas être sur la frontière de quatre pavés). Je dis que toute portion de F définie par $D = D_i + D_j + D_k$ ne contient qu'une singularité au plus. En effet, s'il y avait deux singularités, on pourrait les relier au moyen d'un chemin de longueur inférieure à δ . On retombe sur la démonstration donnée plus haut. Pour construire le réseau, on considère la singularité a comme appartenant à une des portions définies par D_i, D_j, D_k .

§ 7. Comparaison des différents réseaux topologiques d'une même surface de Riemann

Supposons pour commencer que nous avons une surface de Riemann F de base singulière finie; la méthode de M. Speiser s'applique sans autre.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_p$ les points constituant la base singulière, et soient L et L^* deux courbes de Jordan passant chacune par tous les points a_i . On obtient à partir de L et de L^* deux réseaux R et R^* .

Disons que L^* se déduit de L par une déformation continue si cette déformation est possible sans passer sur un point a_k .

Théorème 1 : Si L^ se déduit de L par une déformation continue,*

$$R^* = R.$$

La démonstration est immédiate, de même que celle du théorème réciproque :

Théorème 2 : Si $R^ = R$, L^* se déduit de L par une déformation continue.*

Cela revient à dire que le réseau ne dépend pas de la courbe elle-même, mais de l'ordre des points a_k sur la courbe et des lacets qu'elle fait pour les relier.

Théorème 3 : p étant fixé, le nombre de contours essentiellement différents (c'est-à-dire donnant des réseaux différents) est illimité, dès que $p \geq 4$.

On voit que si $p = 3$ il n'y a que deux contours différents, l'un résulte de l'autre par l'échange de l'intérieur avec l'extérieur.

Pour $p = 4$, il y a plusieurs arrangements possibles, et différents, des a_i ; prenons les a_i dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4 et construisons L de la façon suivante: on part de a_1 , on fait une boucle B_1 autour de a_2 avant d'aller tourner autour de a_3 et a_4 , puis on vient faire une seconde boucle B_2 autour de a_2 , et ainsi de suite; on peut faire un nombre de boucles arbitrairement grand avant de passer en a_2 . Pour $p = 4$ le nombre des contours est donc illimité. Il l'est à plus forte raison pour $p > 4$.

Le théorème est démontré.

Comparons deux réseaux différents R et R^* d'une même surface de Riemann, donnés par deux contours L et L^* ; on peut choisir les deux points I et E communs aux deux contours. Or chaque point de F , de trace I ou E , donne un sommet du réseau; nous avons donc une correspondance biunivoque entre les sommets des deux réseaux: deux sommets se correspondent s'ils sont donnés par le même point de F . De même, à chaque singularité de F correspond un domaine polygonal D de R et un domaine D^* de R^* . Il y a donc correspondance biunivoque entre les domaines de R et de R^* ; de plus, deux domaines correspondants ont le même nombre de côtés.

Théorème 4 : Soient a et b deux sommets d'un réseau R , extrémités d'une même arête. Soient a^ et b^* les sommets correspondants de R^* . On peut relier a^* et b^* par un polygone de R^* , de q côtés avec*

$$q \leq R(L, L^*) + 1$$

$R(L, L^)$ étant un nombre qui ne dépend que de la surface et du choix de L et L^* , et non pas de a et b .*

Remarquons en passant que q est certainement impair, puisque le polygone en question relie un point I à un point E .

Considérons le chemin W sur F correspondant au segment ab de R ; W coupe L une fois (puisque a et b sont extrémités d'une même arête). Par contre W coupe L^* peut-être plusieurs fois, mais le nombre de points d'intersection est le même pour chaque rayon IE . Il y a un nombre fini $P = \frac{1}{2}p(p-1)$ de rayons IE , donc le nombre des points d'intersection est borné pour L et L^* donnés. Soit $R(L, L^*) + 1$ la borne supérieure. On a bien

$$q \leq R(L, L^*) + 1.$$

On a un théorème analogue pour les domaines élémentaires:

Théorème 5 : Soit a un sommet de R , D un domaine élémentaire de R , dont le contour comprend a ; a^ et D^* sont le sommet et le domaine correspondants de R^* . Il existe un polygone reliant a^* à D^* , dont le nombre de côtés est inférieur ou égal à $R(L, L^*)$.*

Soit, pour fixer les idées, I le point auquel correspond a , a_i la singularité contenue dans D . Le rayon Ia_i coupe L^* au plus $R(L, L^*)$ fois (R a la même définition que dans le théorème précédent). Il en résulte que dans R^* , le rayon Ia_i se décompose en $t \leq R(L, L^*)$ arêtes, ce qui démontre le théorème.

On déduit encore du théorème 4 le

Théorème 6 : Soient R et R^ deux réseaux d'une même surface, D_1 et D_2 deux domaines élémentaires de R , dont les frontières ont $\nu > 2R(L, L^*)$ sommets communs consécutifs. Alors les domaines D_1^* et D_2^* de R^* , correspondant à D_1 et D_2 , ont au moins $\nu - 2R(L, L^*)$ sommets communs.*

Considérons, dans la suite des sommets communs à D_1 et D_2 , ceux qui sont à une distance supérieure ou égale à $R(L, L^*)$ des extrémités (il y en a au moins un, par l'hypothèse sur ν). Soit a un de ces sommets, a^* son correspondant. a^* est un sommet de D_1^* et de D_2^* . Reprenons, pour le montrer, le raisonnement fait dans la démonstration du théorème précédent. Soient a_i et a_j les singularités correspondant aux domaines D_1 et D_2 (donc aussi D_1^* et D_2^*). Le rayon Ia_i (on suppose, pour fixer les idées, que a est un point I) coupe L^* au plus $R(L, L^*)$ fois; cela correspond donc à $R(L, L^*)$ lacets autour des points singuliers a_i et a_j . Mais, après ces $R(L, L^*)$ lacets, on a encore des sommets de D_1^* et D_2^* . Donc a^* est un

sommet de D_1^* et D_2^* . Cela se produit pour tout sommet choisi comme il a été dit, donc pour $\nu - 2R(L, L^*)$ sommets.

Le théorème est démontré. On en déduit immédiatement

Théorème 7 : Soient D_1 et D_2 deux domaines élémentaires infinis ayant un sommet commun pour toutes les générations G_n , $n > n_0$. Alors les domaines D_1^ et D_2^* correspondants ont un sommet commun pour toute génération G_n , $n > n_0^*$.*

Le théorème 6 affirme simplement que, dans ce cas, à chaque sommet commun d'une génération G_n , avec $n > n_0 + R(L, L^*)$ correspond un sommet commun à D_1^* et D_2^* , appartenant à la génération G_ν , avec $\nu = \nu(n)$. Posons

$$n'_0 = \min (\nu(n) + R(L, L^*))$$

pour

$$n > n_0 + R(L, L^*)$$

Il faut montrer que, pour $\nu > n'_0$, il y a toujours un sommet commun à D_1^* et D_2^* . Supposons que ce ne soit pas le cas. Il y aurait, entre D_1^* et D_2^* un domaine élémentaire D_3^* , dont le correspondant serait D_3 . Soit b un sommet frontière de D_1^* , D_2^* , D_3^* , a_k la singularité de D_3 (ou D_3^*). Nous considérons encore le chemin Ia_k relatif à L^* ; il coupe L en $R(L, L^*)$ points au plus, d'où il résulte que D_3 aurait un sommet commun avec D_1 et D_2 , à la génération G_μ , $\mu > \nu_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse du théorème.

On peut dire encore quelque chose de la correspondance entre R et R^* .

Soient $D_1, D_2, \dots, D_n$, des domaines élémentaires de R , $D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*$, les domaines correspondants de R^* . Choisissons une origine 0 dans R , et relierons 0 à $D_1, \dots, D_n$ par n polygones du réseau. On peut choisir ces polygones sans côtés communs, si ce n'est un certain nombre d'entre eux formant un polygone aboutissant à l'origine. De plus ces polygones n'ont pas de sommets communs isolés, si ce n'est l'origine. On peut numéroter ces chemins, et nous supposons que les indices ont été choisis en sorte que les indices des chemins sont ceux des D_k . Alors

Théorème 8 : Les D_k^ peuvent être reliés à l'origine 0^* de R^* par des polygones ne se coupant pas, et placés dans l'ordre naturel des indices du D_k^* correspondant.*

La démonstration est immédiate; il suffit de se reporter aux chemins correspondants sur la surface de Riemann elle-même.

On pourrait encore préciser les énoncés des théorèmes 4 à 7 en faisant intervenir pour chaque chemin IE le nombre de points d'intersection avec L^* . On aurait ainsi p valeurs $R_1(L, L^*), R_2(L, L^*), \dots, R_p(L, L^*)$, avec

$$R_k(L, L^*) \leq R(L, L^*)$$

$R_k(L, L^*)$ étant le nombre de points d'intersection, moins un, de L^* et d'un chemin IE coupant L en un point de l'arc a_k, a_{k+1} .

Pour un choix convenable de I et E , on a, pour un indice k au moins

$$R_k(L, L^*) = 0$$

Il est clair, d'autre part, que

$$R_i(L, L^*) \equiv 0 \pmod{2}$$

puisque L^* est une courbe de Jordan, et que $R_i(L, L^*)$ est le nombre de points d'intersection, moins un, de L^* et d'un contour qui va de l'intérieur à l'extérieur.

Théorème 9: Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, une suite de nombres positifs ou nuls, tous pairs; L un contour simple passant par les points $a_1, a_2, \dots, a_p$ dans l'ordre naturel des indices; de plus $\lambda_1 = 0$. Il y a une courbe L^ pour laquelle*

$$R_i(L, L^*) = \lambda_i.$$

On démontre ce théorème en construisant L^* .

Posons pour commencer

$$\begin{aligned} \lambda'_k &= 2 & \text{si } \lambda_k &\geq 2 \\ \lambda'_k &= 0 & \text{si } \lambda_k &= 0 \end{aligned}$$

et construisons le contour L' qui correspond à ce système $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_p$. Considérons le cercle $|w| = 1$ et les points a_k sur ce cercle avec

$$\arg a_k = k \frac{2\pi}{p}$$

Le cercle $|w| = 1$ constitue L ; on trace deux arcs de cercle concentriques, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de $|w| = 1$, le long de tout arc

(a_k, a_{k+1}) avec $\lambda'_k = 2$. Soit a_k le point qui correspond à l'extrémité d'un de ces arcs. On distingue deux cas :

$$1^\circ \quad \lambda'_{k-1} = 0 \quad \lambda'_k = 2 \quad ;$$

alors on relie l'arc (a_{k-1}, a_k) de $|w| = 1$ à l'arc intérieur de (a_k, a_{k+1}) , et, par a_k , l'arc extérieur et l'arc de $|w| = 1$ restant.

2° $\lambda'_{k-1} = 2, \lambda'_k = 0$. On relie l'arc extérieur de (a_{k-1}, a_k) à l'arc $|w| = 1$ de (a_k, a_{k+1}) , puis les deux arcs restants par a_k .

La courbe obtenue est simple et passe par chaque point a_k . En effet, elle ne peut pas se fermer le long d'un arc (a_k, a_{k+l}) ; elle ne revient en arrière que sur un arc du cercle $|w| = 1$, et ensuite se raccorde à un arc extérieur, ce qui exclut une fermeture de L' autrement que par un tour complet. D'autre part, on a bien

$$R_i(L, L') = \lambda'_i.$$

On construit ensuite une courbe L'' pour laquelle

$$\begin{aligned} \lambda''_i &= \lambda_i & \text{si } \lambda_i &\leq 4 \\ \lambda''_i &= 4 & \text{si } \lambda_i &> 4 \end{aligned}$$

On construit de nouveaux arcs concentriques là où $\lambda_i \geq 4$, et on les relie comme précédemment, c'est-à-dire :

1° si $\lambda''_{k-1} < \lambda''_k$, on relie l'arc de $|w| = 1$ entre a_k et a_{k+1} au premier arc extérieur de (a_k, a_{k+1}) , puis les autres arcs de façon à ne laisser aucune impasse;

2° si $\lambda''_{k-1} > \lambda''_k$, on relie l'arc (a_{k-1}, a_k) de $|w| = 1$ au premier arc intérieur de (a_{k-1}, a_k) , et ainsi de suite.

On passe ensuite à L''' , etc., jusqu'à ce qu'on ait atteint le maximum de λ_k (qui est fini). La courbe obtenue est L^* . En effet :

1° elle est d'un seul tenant (pour la même raison que L');

2° on a bien $\lambda_k = R(L, L^*)$.

Donnons un exemple: soit $p = 12$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = 6$, $\lambda_5 = 2$, $\lambda_6 = 0$, $\lambda_7 = 2$, $\lambda_8 = 2$, $\lambda_9 = 2$, $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{11} = 2$, $\lambda_{12} = 2$.

Dans la construction, on pourrait remplacer intérieur par extérieur, et vice-versa, partout ou en partie seulement. On voit par là qu'à un système de λ_k peuvent correspondre plusieurs courbes L^* .

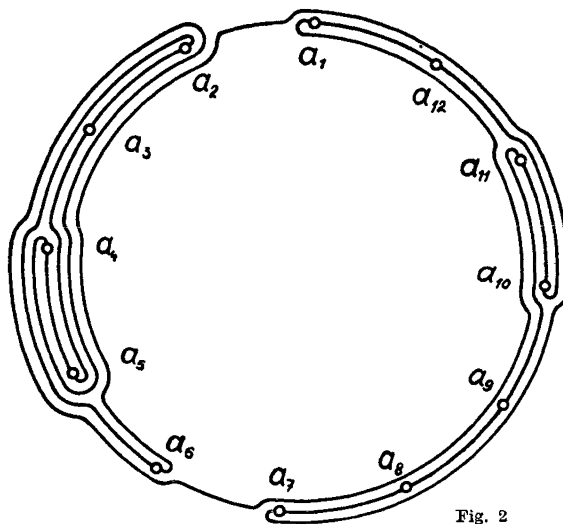


Fig. 2

Remarquons encore que ce théorème montre bien qu'il y a une infinité de courbes L passant par p ($p > 3$) points, donc une infinité de réseaux pour une même surface; ces quelques résultats révèlent la complexité du problème suivant: *deux réseaux R et R^* étant donnés, reconnaître s'ils peuvent provenir de la même surface de Riemann*. Nous avons donné quelques conditions nécessaires sans parvenir à fournir un critère général.

§ 8. Comparaison des différents réseaux topologiques d'une même surface de Riemann (suite)

Considérons une surface de Riemann F pour laquelle on peut construire un réseau topologique au sens du § 6, c'est-à-dire une surface de Riemann dont toutes les singularités peuvent être isolées au moyen d'un pavage δ ($\delta > 0$).

Le pavage δ choisi était arbitraire; un pavage tout à fait différent changerait considérablement l'allure du réseau, aussi nous bornerons-nous à une modification particulière: celle qui consiste à remplacer le pavage δ par un pavage plus fin, c'est-à-dire tel que chaque nouveau pavé soit intérieur à un ancien pavé; de plus, la nouvelle courbe L passe successivement en tous les points correspondant à un pavé du pavage primitif. Nous dirons alors qu'on a *divisé* le pavage primitif.

Théorème 10 : La division du pavage δ ne modifie pas le réseau de F .

Il s'agit du réseau au sens large, et non pas du réseau plus précis de M. Elfving.

La surface F a une singularité au plus dans une portion définie par un pavé du pavage δ ; tout circuit dans ce pavé est équivalent à un lacet autour du point de ce pavé; donc les domaines fondamentaux des deux réseaux sont les mêmes, ils s'ajustent de la même manière, donc les deux réseaux sont identiques.

En terminant, énonçons un théorème qui se déduit immédiatement de celui qu'a énoncé à ce sujet M. Elfving, dans le cas d'une surface à base singulière finie.

Théorème 11: Soit F une surface de Riemann multiplément connexe, R son réseau au sens du § 6. Il existe un polygone fermé de R qui sépare deux suites infinies de sommets de R .

La méthode du § 6 revient à faire une transformation topologique de F , pour l'amener à avoir une base singulière finie. Cette transformation conserve l'ordre de connexion, d'où notre théorème.

§ 9. Réseau topologique d'une surface de Riemann quelconque

Soit F une surface de Riemann. On appellera F_δ l'ensemble des points de F qu'on peut atteindre d'un point a_0 de F par un chemin tel que la somme des distances d'un point quelconque de ce chemin à deux singularités quelconques de F (algébriques ou transcendentes) soit toujours supérieur à δ ($\delta > 0$). Un tel chemin sera appelé chemin de largeur δ .

On choisit δ assez petit pour que la distance de a_0 à deux singularités de F soit supérieure à δ .

Théorème 12: On a
$$F = \lim_{\delta \rightarrow 0} F_\delta$$

Cela revient à dire que:

1° tout point a de F peut être relié à a_0 au moyen d'un chemin de largeur δ , pour δ assez petit;

2° si ω est une singularité de F , L un chemin tendant vers ω , L_δ la partie de L intérieure à F_δ , tout point de L finit par être intérieur à L_δ , lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Sous cette forme, le théorème est évident.

On dira qu'une singularité ω de F est intérieure à F_δ lorsqu'il existe un chemin aboutissant à ω et intérieur à F_δ . Il en résulte que les singularités de F_δ sont à des distances mutuelles supérieures à δ . On peut donc représenter F_δ au moyen d'un réseau topologique au sens du § 6; on passe ensuite à $F_{\frac{\delta}{2}}$; pour construire le réseau de $F_{\frac{\delta}{2}}$, on reprend le pavage

de F_δ et on le divise pour avoir un pavage assez fin. D'après le théorème 10, le réseau R_0 de F_δ se trouve conservé à l'intérieur du réseau R_1 de $\frac{F_\delta}{2}$, De même le réseau R_n de $\frac{F_\delta}{2^n}$ est conservé à l'intérieur du réseau de $\frac{F_\delta}{2^{n+1}}$.

Ces réseaux ne se modifient donc que par l'adjonction de nouvelles arêtes.

En général, les réseaux R_n n'ont pas de limite, c'est-à-dire qu'il n'existe pas un réseau R dont les ν premières générations sont identiques aux ν premières générations de R_n , pour $n > n_0(\nu)$.

On peut cependant énoncer ce résultat :

Théorème 13 : Si toutes les singularités de F sont isolées, les R_n ont une limite dans ce sens que pour $n > n_0(\nu)$ les ν premières générations des R_n sont identiques.

Supposons en effet que ce ne soit pas le cas : il existe alors une génération, la ν ème par exemple, qui s'enrichit indéfiniment ; le nombre des sommets de cette génération est illimité ; en d'autres termes, il existe un sommet S d'une des générations $G_0, \dots, G_\nu$ auquel se rattachent des arêtes en nombre indéfiniment croissant ; il y a donc une infinité de domaines D qui ont ce point pour sommet. Soit une suite de pavés $P_1, \dots, P_n, \dots$ emboîtés les uns dans les autres, et $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ une suite de portions définies respectivement par $P_1, \dots, P_n, \dots$, emboîtées les unes dans les autres et contenant des singularités des domaines D . Soit ω le point limite des P_n . ω est une singularité non isolée. En effet, chaque Δ_n contient une infinité de singularités ; de plus, un cercle de centre ω et de rayon ρ , contient P_n tout entier pour n assez grand ; une portion circulaire de centre ω et de rayon arbitrairement petit contient une infinité de singularités. Le théorème est ainsi démontré.

§ 10. Existence d'une surface de réseau donné

Pour que le problème de l'existence d'une surface correspondant à un réseau donné ait une solution, il faut évidemment supposer que le réseau n'a pas d'impasses et que tous les circuits ont un nombre pair de côtés.

Si l'on fait l'hypothèse qu'à chaque sommet se rattachent p arêtes, la question est résolue par un théorème de M. Elfving¹⁵⁾.

¹⁵⁾ Voir l'ouvrage cité à la note ⁸⁾.

Dans le cas général, on a le

Théorème 14 : Soit R un réseau sans impasses, dont tous les circuits ont un nombre pair de côtés. Il existe une surface de Riemann qui admet, au sens du § 9, le réseau R .

Supposons pour commencer que R soit un arbre. Choisissons une origine A_0 . On décompose ainsi R en générations $G_0, G_1, \dots$. Soit p_0 le nombre d'arêtes issues de A_0 ; le domaine fondamental de A_0 correspond à l'intérieur du cercle $|w| < 1$; les singularités $a_1, \dots, a_{p_0}$ contenues dans les domaines élémentaires qui ont A_0 pour sommet sont des points du cercle $|w| = 1$, avec $\arg a_k = \frac{2k\pi}{p_0}$.

Prenons un sommet A_1 de G_1 , celui par exemple qui se trouve entre les domaines de a_1 et de a_2 , et soit p_1 le nombre d'arêtes issues de A_1 . On prend pour domaine fondamental de A_1 l'extérieur du cercle, soit $|w| > 1$; les singularités sont a_1, a_2 et $p_1 - 2$ autres singularités choisies sur celui des deux arcs (a_1, a_2) du cercle $|w| = 1$ qui contient les singularités de A_0 . On prend les $p_1 - 2$ points qui divisent cet arc en $p_1 - 1$ arcs égaux.

On procède ainsi pour chaque sommet de G_1 , puis de G_2 , etc., en prenant toujours les nouvelles singularités sur l'arc qui contient les singularités du sommet précédent.

La surface qu'on obtient ainsi peut avoir des singularités non isolées: on voit par exemple que c'est le cas de la surface qui correspond à l'arbre de la fig. 1.

Cas d'un réseau en général. On peut, en laissant de côté certaines arêtes d'un réseau, le transformer en un arbre. Soit donc un réseau R , et R^* l'arbre obtenu en supprimant certaines arêtes, mais tel que deux domaines logarithmiques quelconques de R soient dans deux domaines différents de R^* . On construit comme plus haut une surface dont le réseau est R^* . Soit Δ un domaine élémentaire de R^* , dont la singularité est a , et soit D_1 un domaine élémentaire algébrique de R , contenu dans Δ et ayant sur la frontière de Δ les arêtes $S_0, S_1, \dots, S_p$. La frontière de Δ se compose de segments S_0, S_1, S_{-1}, S_2 , etc., qui correspondent à des demi-droites

$$\arg w = \varphi_k$$

On pose

$$\mu = \min |\varphi_k - \arg a| \quad \text{pour } 0 \leq k \leq p.$$

On reporte sur $|w| = 1$, à partir de a , sur l'arc qui relie a à $e^{i\varphi_0}$, et qui

ne contient pas $e^{i\varphi-1}$ un arc de longueur μ , d'extrémité P , et on divise cet arc aP en trois parties aM , MN , NP . On prend $a_1 = N$ pour singularité de D_1 et aux segments de la frontière de D_1 qui ne sont pas des S_k on fait correspondre alternativement les demi-droites $\arg w = \arg M$ et $\arg w = \varphi_0$, sauf pour le dernier, qu'on choisit dans l'angle déterminé par les demi-droites $\arg w = \arg a$ et $\arg w = \arg a_1$ qui ne contient pas la demi-droite $\arg w = \arg M$.

On a ainsi divisé le domaine Δ en deux parties: un domaine D_1 de R et un nouveau domaine Δ_1 , indéfini. On recommence pour Δ_1 ce qu'on a fait pour Δ ; puis on procède de la même manière pour tous les domaines de R^* . On obtient ainsi une surface F qui remplit bien les conditions requises.

CHAPITRE IV

Le type d'une surface de Riemann et son réseau

§ 11. Les transformations de Bloch

Dans une conférence à la Sorbonne, M. Ahlfors a dit que le problème de la recherche de critères de type de surfaces de Riemann était le plus important de la théorie des fonctions¹⁶⁾. On connaît un certain nombre de tels critères; la plupart d'entre eux sont des conditions suffisantes pour le cas hyperbolique. On peut se demander jusqu'à quel point le réseau d'une surface nous renseigne sur son type, le mot réseau étant pris dans son sens primitif ou suivant une de nos généralisations.

Certains critères connus sont basés sur l'étude du réseau (par exemple le critère relatif aux surfaces dont la base singulière est formée de trois points¹⁷⁾; d'autre part, M. Ahlfors a donné des critères où les *valeurs* sont remplacées par des *cercles*¹⁸⁾; c'est là une généralisation analogue à celle qu'on obtiendrait en passant d'un critère sur les réseaux au sens primitif, à un critère sur les réseaux au sens du § 6. Nous aurons l'occasion, au cours de ce chapitre, de donner de telles généralisations.

Cette idée du passage de critères sur des valeurs à des critères sur des cercles est due à M. Bloch¹⁹⁾.

Appelons *transformation de Bloch* une transformation d'une surface qui soit

¹⁶⁾ Bull. Soc. Math. de France, 60, 1932, p. 197.

¹⁷⁾ R. Nevanlinna, Comm. Math. Helv., 5, 1932, p. 95.

¹⁸⁾ Comptes Rendus, 194, 1932, p. 245 et 1145.

¹⁹⁾ A. Bloch, Enseignement Mathématique, 25, 1926, p. 83.

- 1° topologique,
 2° telle que si d est la distance de deux points, d^* la distance des points correspondants, on ait

$$\frac{1}{k} d^* < d < k d^*$$

quels que soient les deux points envisagés.

Le principe de continuité topologique de M. Bloch affirme en somme qu'une transformation telle que celle que nous venons de définir conserve le type d'une surface. Il ne s'agit pas, évidemment, de donner une démonstration de ce principe très général.

On voit que deux surfaces qui ont le même réseau, au sens du § 6, se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bloch. En effet, soit p l'ordre du réseau, F et F^* les deux surfaces; à F et F^* correspondent deux pavages formés de p pavés. Une première transformation de Bloch transformera F^* en une surface F_1 pour laquelle le pavage est le même que pour F . Puis on modifie F_1 à l'intérieur de chaque pavé, pour l'amener à coïncider avec F .

Soit a une singularité isolée d'une surface de Riemann F . On dira qu'on *déplace* a lorsqu'on remplace a par une autre singularité b , de même nature, située dans une portion Δ de F qui ne contient que la singularité a de F .

Théorème 15: Soient F et F^ deux surfaces de Riemann simplement connexes qui se déduisent l'une de l'autre par le déplacement d'un nombre fini de singularités algébriques. Alors F^* est du même type que F .*

Démonstration: Soient $a_1, a_2, \dots, a_p$ les singularités de F qui sont déplacées en $b_1, b_2, \dots, b_p$. Soit Δ_k la portion qui contient a_k .

Supposons F parabolique; $w = f(z)$ est la fonction qui représente le plan ouvert sur F . Supposons F^* hyperbolique; $w = g(\zeta)$ la fonction qui représente le cercle $|\zeta| < R$ sur F^* . Otons du plan z les domaines qui correspondent aux Δ_k par la fonction inverse de $w = f(z)$; la frontière de Δ_k est fermée, donc ces domaines sont intérieurs à un cercle de rayon fini. Soit D le reste du plan z , et Δ la partie correspondante du cercle $|\zeta| < R$ par la fonction

$$\zeta = g^{-1} [f(z)] .$$

Dans la représentation de D sur Δ , au point à l'infini de D correspond tout le cercle $|\zeta| = R$; on sait que cela est impossible. Donc F^* est parabolique, et le théorème est démontré.

Nous verrons au paragraphe suivant un exemple de conservation du type dans une transformation qui déplace une infinité de singularités algébriques.

§ 12. Surfaces de Riemann dont le réseau est le même que celui de fonctions inverses de fonctions périodiques

Soit $w = f(z)$ une fonction entière, réelle pour z réel, et périodique de période réelle. Nous nous proposons de reconnaître quel sera, dans certains cas, le type d'une surface de Riemann qui aurait le même réseau que la surface de $z(w)$.

La fonction $f'(z)$ a des racines pour z réel; on peut supposer $f'(0) \neq 0$. Soient u la période de $f(z)$, et $a_1, a_2, \dots, a_p$ les racines de $f'(z)$ pour $0 < z < 1$; $\omega_1, \dots, \omega_p$ les valeurs $f(a_1), \dots, f(a_p)$. Les points $\omega_1, \dots, \omega_p$ sont des singularités algébriques de la surface de Riemann F de l'inverse de $w = f(z)$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des segments intérieurs au segment $(0, 1)$ tels que:

- 1° a_k est intérieur à α_k ;
- 2° les segments α_k n'empiètent pas;
- 3° les segments $(0, \varepsilon)$ et $(1 - \varepsilon, 1)$ sont extérieurs aux α_k ($\varepsilon > 0$).

La fonction $w = f(z)$ fait correspondre aux points d'affixes $z = k + \zeta$ (k entier, et ζ dans un segment α_k), les segments Γ_k de trace γ_k de F ; toutes les singularités ω_k se trouvent dans les segments Γ_k .

Soit F^* une surface de Riemann que l'on peut obtenir à partir de F en déplaçant toutes les singularités ω_k à l'intérieur du segment Γ_k correspondant (deux singularités de F qui avaient même trace ont maintenant des traces qui peuvent être différentes, mais sont intérieures à γ_k).

Théorème 16 : F^ est du type parabolique.*

Démonstration: Soit $g(\zeta)$ la fonction qui représente le cercle $|\zeta| < c$ sur F^* . On supposera $c < \infty$. La surface F , coupée le long des segments Γ_k est identique à la surface F^* , coupée le long de ces mêmes segments. On peut donc représenter conformément le plan, pourvu des coupures α_k et de celles qu'on obtient par la translation $Z = z + k$ (k entier) sur le cercle $|\zeta| < c$, pourvu des coupures correspondantes; la représentation se fait au moyen de la fonction

$$\zeta = g^{-1} [f(z)] = h(z) .$$

Passons du cercle $|\zeta| < c$ à une bande de largeur 2π au moyen de la transformation

$$t = \log \zeta = H(z) .$$

Soit un cercle C_r $|z| = r$, $r = k + \eta$, k entier, $|\eta| < \varepsilon$. Il ne coupe aucun α ; la fonction $H(z)$ transforme ce cercle en une courbe L_r du plan t , courbe de longueur égale ou supérieure à 2π . On a donc

$$2\pi \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{dH}{dz} \right| r d\varphi \quad z = r e^{i\varphi}$$

ou, suivant l'inégalité de Schwarz

$$4\pi^2 \leq \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^{2\pi} \left| \frac{dH}{dz} \right|^2 r d\varphi = 2\pi r \int_0^{2\pi} \left| \frac{dH}{dz} \right|^2 r d\varphi$$

Donc

$$2\pi \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \frac{dr}{r} \leq \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \int_0^{2\pi} \left| \frac{dH}{dz} \right|^2 r dr d\varphi \quad k = 1, 2, \dots$$

L'expression de droite représente l'aire balayée par L_r lorsque r varie de $k-\varepsilon$ à $k+\varepsilon$. On a encore

$$2\pi \sum_1^N \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \frac{dr}{r} \leq \sum_1^N \iint \left| \frac{dH}{dz} \right|^2 r dr d\varphi$$

quel que soit N , entier positif. Le second membre est borné, si on suppose c fini. Donc

$$\sum_1^\infty \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \frac{dr}{r} < A$$

ce qui est une contradiction. Donc $c = \infty$, et le théorème est démontré.

§ 13. Généralisation d'un théorème de M. R. Nevanlinna

Il s'agit d'un théorème démontré par M. R. Nevanlinna dans son mémoire: *Ein Satz über die konforme Abbildung Riemann'scher Flächen*. Comm. Math. Helv. 5 (1932), p. 95—107.

L'auteur considère les surfaces de Riemann dont toutes les singularités sont logarithmiques et ont pour traces trois points du plan. On construit l'arbre topologique de cette surface, on y choisit une origine G_0 , d'où on déduit les générations $G_1, G_2, \dots$. Soit $\sigma(n)+2$ le nombre de sommets de G_n ; M. Nevanlinna démontre que si $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ diverge, la surface est du type parabolique.

Nous généralisons ce théorème, en remplaçant trois points par trois cercles du plan.

Supposons donc que la surface de Riemann F , simplement connexe, n'a que des singularités logarithmiques, que leurs traces sont toutes contenues dans trois cercles C_1, C_2, C_3 , sans points communs, ni points frontières communs, de rayons r_1, r_2, r_3 ; de plus, on ne passe d'une singularité d'un cercle à une autre singularité de ce cercle que par un détour autour d'une singularité d'un autre cercle.

Nous pouvons construire un arbre topologique de cette surface. Soient $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ trois nombres supérieurs à un , tels que l'un des cercles C_1^*, C_2^*, C_3^* de mêmes centres que C_1, C_2, C_3 et de rayons $r_1\varrho_1, r_2\varrho_2, r_3\varrho_3$ soit tangent aux deux autres, ces derniers ne se coupant pas. Soit I le point d'intersection de deux tangentes: il est clair que les tangentes menées de I à C_1, C_2, C_3 ne coupent aucun de ces cercles, et sont toutes distinctes.

Soit $z = \varphi(w)$ la fonction qui représente F sur le cercle $|z| < R (\leq \infty)$. Nous appelons arbre de F l'image, par $\varphi(w)$, des demi-droites $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_k$ étant une demi-droite issue de I et comprise entre C_k et C_{k+1} , et l'image de demi-droites de F , issues de I et passant par les singularités de F ; si, pour une branche de $\varphi(w)$, un cercle C_k ne contient aucune singularité, on prend une demi-droite quelconque, issue de I , et coupant ce cercle.

Pour simplifier les calculs, on supposera I à l'origine.

Puisque nous avons construit un arbre, nous pouvons introduire, comme M. Nevanlinna, les générations, puis les quantités $\sigma(n)$. Alors on a le

Théorème 17: Si $\sum \frac{1}{n \sigma(n)}$ diverge, F est du type parabolique.

La démonstration que nous donnons suit de très près celle de M. Nevanlinna.

On dira qu'un domaine élémentaire H appartient à la n -ième génération si n est le plus petit indice des générations auxquelles appartiennent les sommets de H . On appelle origine de la frontière Γ de H le sommet de Γ appartenant à G_n .

Soit donc H un domaine de G_n . Il lui correspond une singularité a de F , intérieure à C_k ; $w(z)$, fonction inverse de $\varphi(w)$, représente H sur une partie F_n de F , qui contient la seule singularité a . La frontière de F_n se compose de demi-droites $(0, \infty)$; elle contient la surface de recouvrement du domaine doublement connexe obtenu en ôtant a de l'angle des tangentes menées de I à C_k .

Soient A_1, A_2, A_3 , trois points du plan; A_k est situé dans l'angle formé par les tangentes menées de I à C_{k+1} et C_{k+2} , l'angle ne contenant aucun des trois cercles. Il est clair que F_n ne contient aucun point du secteur qui contient A_k .

Faisons la transformation

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{w(z) - A_k}{w(z) - a} + ic$$

où on prend une détermination quelconque du logarithme et où c , constante réelle, est telle que $\omega(z) = 0$ si z est à l'origine de H ; $\omega(z)$ représente H sur un domaine H_ω , et pour tout point de la frontière Γ_ω de H_ω on a $-K_2 < \Re \omega < K_1$, quel que soit H .

D'autre part, la droite $\Im \omega = \text{constante}$ coupe Γ_ω en un seul point.

Soit $r > n$; on construit la courbe L_r de la façon suivante:

- 1° le demi-cercle $|\omega - K_1| = r - n \quad \Re \omega \geq K_1$;
 - 2° les deux segments $\Im \omega = \pm (r - n)$, ω dans H_ω ;
- L_r coupe Γ_ω en deux points A_r et B_r .

Faisons encore la transformation $t = \log z$ en coupant le cercle $|z| < R$ le long d'un polygone de l'arbre. A H correspond un domaine H_t , et à L_r une section de H_t dont la longueur sera $s(r)$. On a

$$\begin{aligned} s^2(r) &= \left(\int_{L_r} \left| \frac{dt}{d\omega} \right| |d\omega| \right)^2 \leq \int_{L_r} |d\omega| \int_{L_r} \left| \frac{dt}{d\omega} \right|^2 |d\omega| \\ &< [\pi(r - n) + 2K_1 + 2K_2] \frac{dA(r)}{dr} \end{aligned}$$

$A(r)$ étant l'aire de H comprise entre $\Re t = \log R_0$ et la courbe qui correspond à L_r . R_0 est un nombre fixe inférieur à R , et on prend $r > r_0$, r_0 étant choisi assez grand pour que $A(r)$ ait un sens. On a alors

$$s^2(r) < K_3 \pi r \frac{dA(r)}{dr} \quad r > r_0$$

puis

$$\sum s^2(r) < K_3 \pi r \frac{d\Im(r)}{dr} \quad (1)$$

la somme étant étendue à tous les domaines H des générations $G_0, G_1, \dots, G_n$ ($n < r$) et $\Im = \Sigma A$. Soit $\lambda(r)$ le nombre des sections $s(r)$ et

$$\alpha(r) = \Sigma s(r).$$

On a

$$\sum s^2(r) \geq \frac{(\sum s(r))^2}{\lambda(r)} = \frac{\alpha^2(r)}{\lambda(r)} \quad (2)$$

Soit

$$\beta(r) = \max [0, 2\pi - \alpha(r)] \quad (3)$$

Alors

$$\frac{4\pi^2}{\lambda(r)} - \frac{4\pi\beta(r)}{\lambda(r)} < K_3 \pi r \frac{d\mathfrak{S}}{dr}$$

donc, si $r > r_0$

$$4\pi \int_{r_0}^r \frac{dr}{r\lambda(r)} \leq K_3 [\mathfrak{S}(r) - \mathfrak{S}(r_0)] + 4 \int_{r_0}^r \frac{\beta(r) dr}{\lambda(r)} ; \quad (4)$$

or, pour $\nu - 1 < r \leq \nu$, $\lambda(r) = \sigma(\nu) + 2$; donc si $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ diverge, il en est de même pour

$$\int \frac{dr}{r\lambda(r)} \quad (5)$$

d'où il résulte que si $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ diverge et si R est fini, $\int \frac{\beta(r) dr}{\lambda(r)}$ diverge.

Il faut montrer que cela est impossible.

Supposons donc R fini; on peut admettre que $R > 1$. Soit $a_r b_r$ la courbe du plan z qui correspond à L_r . Si r est entier, tous les arcs $a_r b_r$ forment un contour simple M_r . Soit r non entier: $n - 1 < r < n$. Les extrémités des $a_r b_r$ peuvent ne pas coïncider. Nous les relient par un segment γ_r de l'arête correspondante de l'arbre topologique, et soit encore M_r le contour fermé obtenu. On passe au plan $t = \log z$; M_r donne une courbe de longueur au moins égale à 2π ; soit $\gamma(r)$ la longueur, dans le plan t , d'un arc ajouté. On a

$$\alpha(r) + \sum \gamma(r) \geq 2\pi$$

donc, d'après (3)

$$\beta(r) \leq \sum \gamma(r) \quad (6)$$

Nous nous proposons d'évaluer les $\gamma(r)$.

Soit $P_1 P_2$ un polygone de l'arbre, sans autres points de ramification que P_1 et P_2 . P_1 appartient à G_m , P_2 à G_{m+2p+1} . Lorsque r varie de m à $m + 2p + 1$, les points a_r et b_r se déplacent, d'une façon continue, de P_1 à P_2 , en coïncidant aux sommets. Soit K le domaine constitué par les domaines élémentaires des sommets de $P_1 P_2$. A $P_1 P_2$ correspond, dans le plan w , une courbe qui a pour trace deux demi-droites, issues de

l'origine. Soient a et b les singularités qui correspondent aux domaines limités par P_1P_2 ; on supposera que P_1 correspond à $w = 0$. Posons

$$y = \log \frac{w-a}{w-b} + (-1)^p i\pi .$$

On choisit la détermination convenable du logarithme, en sorte qu'à P_1P_2 corresponde une certaine courbe Φ , passant par les points $-p2i\pi, -(p-1)2i\pi, \dots, 0, \dots, p2i\pi$. A $\gamma(r)$ correspond un arc de Φ , dont la longueur est bornée; soit K_4 cette borne, et $\bar{\gamma}(r)$ la longueur de γ_r .

Soit y_r le point de γ_r qui correspond à a_r . En appliquant, au besoin plusieurs fois, l'inégalité de Koebe (mais un nombre fini et borné de fois), on voit que

$$\left| \frac{dz}{dy} \right| < K_5 \left| \frac{dz}{dy} \right|_{y=y_r}$$

z étant un point de γ_r .

L'inégalité de Bieberbach donne

$$\left| \frac{dz}{dy} \right|_{y=y_r} < \frac{\sqrt{q}}{\varrho(r)}$$

πq étant l'aire (finie) de K , et $\varrho(r)$ le rayon d'un cercle de centre y_r , et contenu dans l'image de K .

Or, pour $m + p + |v| \leq r < m + p + |v| + 1$

$$\begin{cases} \varrho(r) > p - |v| & \text{si } |v| = 0, 1, \dots, p-1 \\ \varrho(r) > K_6 & \text{si } |v| = p \end{cases} \quad (7)$$

on en conclut que

$$\bar{\gamma}(r) < K_7 \frac{\sqrt{q}}{\varrho(r)}$$

donc

$$\bar{\gamma}(r) \begin{cases} < K_7 \frac{\sqrt{q}}{p - |v|} & |v| < p \\ < K_8 \sqrt{q} & |v| = p \end{cases}$$

et si on suppose r assez grand pour que P_1P_2 soit extérieur à $|z| = 1$

$$\gamma(r) < \begin{cases} K_7 \frac{\sqrt{q}}{p - |v|} \\ K_8 \sqrt{q} \end{cases} .$$

Alors

$$\int_m^{m+2p+1} \gamma(r) dr < 2 \left(K_8 + K_7 \sum_1^p \frac{1}{p} \right) \sqrt{q} < K_9 \sqrt{q} \log K_{10} p . \quad (8)$$

Cette relation peut s'écrire aussi entre des limites non entières

$$\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r) dr < K_9 \sqrt{q} \log K_{10} r_2 . \quad (9)$$

Soit maintenant n_0 (entier) assez grand pour que toute la partie correspondante de l'arbre soit extérieure à $|z| = 1$. Soit un intervalle (n_0, r) et $B(n_0, r)$ la partie correspondante de l'arbre. On divise $B(n_0, r)$ en segments $S(P_1 P_2)$. Le nombre de ces segments est au plus de $2\lambda(r)$. Pour l'un de ces segments S , avec $r_2 < r$, on a

$$\int_S \gamma(r) dr < K_9 \sqrt{q} \log K_{10} r < K_{11} \sqrt{q} \log r ; \quad (10)$$

posons

$$b(r) = \int_{n_0}^r \beta(u) du .$$

On a

$$b(r) \leq \int_{n_0}^r (\sum \gamma(u)) du$$

la somme étant étendue à tous les S qui correspondent à $r = u$. On a encore

$$b(r) < K_{11} \log r \cdot \sum \sqrt{q}$$

la somme étant étendue aux segments S de $B(n_0, r)$. Mais

$$\sum \sqrt{q} \leq \sqrt{2\lambda(r)} \cdot \sqrt{\sum q}$$

et

$$\sum q \leq 3 R^2 \quad (11)$$

donc

$$b(r) < K_{12} \sqrt{\lambda(r)} \cdot \log r$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \frac{\beta(r)}{r\lambda(r)} dr &= \int_{r_0}^r \frac{db(r)}{r\lambda(r)} < \frac{b(r)}{r\lambda(r)} + \int_{r_0}^r \frac{b(r) dr}{r^2 \lambda(r)} + \int_{r_0}^r \frac{b(r) d\lambda(r)}{r\lambda^2(r)} \\ &\leq K_{12} \frac{\log r}{r} + K_{12} \int_{r_0}^r \frac{\log r dr}{r^2} + K_{12} \int_{r_0}^r \frac{\log r}{r} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}} \\ &\leq K_{12} \left(\frac{\log r_0}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \int_{r_0}^r \frac{\log r}{r} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

d'où la convergence de l'intégrale. Le théorème est démontré.

§ 14. Généralisation du théorème précédent

Il y aurait peu à modifier dans la démonstration si, au lieu de trois cercles on avait p cercles $C_1, \dots, C_p$. En général, dans ce cas, on ne pourra pas trouver un point I et un point E répondant aux conditions requises; ces conditions servent uniquement à nous assurer que le cercle $|\omega| = r - n$ coupe Γ_ω en deux points seulement, ce qui permet d'affirmer ensuite que les arcs γ_r sont situés entièrement dans un intervalle entre deux sommets de l'arbre.

Si on a p cercles $C_1, \dots, C_p$, soit I un point quelconque, extérieur aux cercles, et E le point à l'infini. Nous relions I à E par des chemins entourant les C_i . On peut choisir ces chemins tels que le nombre de points sur chaque chemin pour lesquels

$$\arg \frac{a + w}{a - w} = 0$$

(a est un point intérieur quelconque de C_i) soit au plus égal à p . Alors un arc γ_r sera compris dans p intervalles au plus du réseau. La relation (9) devient

$$\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r) dr < K_9 \sum (\sqrt{q} \log K_{10} r) \quad (9')$$

la somme étant étendue à p intervalles consécutifs, c'est-à-dire à p valeurs de q consécutives. On a donc

$$\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r) dr < K_9 p \sum \sqrt{q} \log K_{10} (r_2 + p)$$

la somme étant étendue à p domaines du plan. Posons

$$Q = \sum q$$

on a

$$\sum \sqrt{q} \leq \sqrt{p} \sqrt{Q}$$

donc

$$\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r) dr < K_9 p \sqrt{p} \sqrt{Q} \log K_{10} (r_2 + p)$$

ce qui donne, à la place de (10)

$$\int_s \gamma(r) dr < K'_{11} \sqrt{Q} \log r \quad r > r_0. \quad (10')$$

De plus

$$\Sigma Q \leq p^2 R^2 \quad (11')$$

donc

$$b(r) < K'_{12} \sqrt{\lambda(r)} \cdot \log r$$

et le

Théorème 18 : Soit F une surface de Riemann dont toutes les singularités sont logarithmiques et groupées dans p cercles, extérieurs les uns aux autres, et soit $\sigma(n) + 2$ le nombre de sommets de la génération G_n du réseau correspondant; si $\sum \frac{1}{n \sigma(n)}$ diverge, F est parabolique.

§ 15. Un critère de type

Théorème 19 : Toutes les surfaces de Riemann qui ont, au sens du § 6, un même réseau que la surface de l'inverse de $w = e^z$, sont du type parabolique.

Démonstration: Pour plus de commodité, remplaçons e^z par

$$w = f(z) = \frac{a e^z + b}{c e^z + d}$$

en choisissant les constantes a, b, c, d en sorte que $1, \infty, 0$ deviennent $1, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. On choisit, pour construire le réseau de la surface de Riemann F^* de $f^{-1}(w) = \varphi(w)$ le cercle $|w|=1$ pour courbe L , et les points I et E tels que

$$I = f\left(\frac{i\pi}{2}\right) \quad E = f\left(-\frac{i\pi}{2}\right).$$

Le réseau est alors constitué par la droite $\Re z = 0$ et par les demi-droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi, \Re z > 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. On a, sur les droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$

$$\Im w(z) = 0.$$

Soit H_k la bande

$$(k + \frac{1}{2})\pi < \Im z < (k + 1 + \frac{1}{2})\pi.$$

Considérons maintenant la surface de Riemann simplement connexe F , qui a même réseau que F^* ; on suppose que la singularité qui correspond à un pour F^* a pour trace un , que celles qui correspondent à $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ont des traces intérieures à un cercle C_1 , celles qui correspondent à $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ des traces intérieures à un cercle C_2 , les cercles C_1 et C_2 con-

tenant respectivement $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, et étant assez petits pour ne pas être coupés par les courbes IE qui donnent les arêtes du réseau.

On peut découper F le long des courbes ayant pour trace les courbes IE qui ont divisé F^* en domaines élémentaires; soit F_k la partie de F qui correspond ainsi à la bande H_k . On peut représenter F_k conformément sur H_k de manière qu'aux points I de F_k correspondent les points M de la frontière de H_k pour lesquels on a

$$f(z) = I$$

En effet, F_k est une surface de recouvrement d'un demi-plan pourvu d'une singularité logarithmique ω_k . On peut représenter conformément le demi-plan $\Im w \geq 0$ sur lui-même en sorte que ω_k aille en $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$, et que I reste fixe. Soit $w_1 = \psi_k(w)$ la fonction qui effectue cette représentation. La fonction

$$z = \varphi(w_1) = \varphi[\psi_k(w)] = \Phi_k(w)$$

représente F_k sur H_k ; d'autre part on a

$$\Phi_k(I) = \varphi[\psi_k(I)] = \varphi(I) = M$$

ce qui montre que la représentation envisagée est bien possible. On procède ainsi pour chaque domaine H_k .

Soit $w = F(\zeta)$ la fonction qui représente le cercle $|\zeta| < c$ ($c \leq \infty$) sur F . On supposera $c < \infty$. La fonction

$$\zeta = F^{-1}[\Phi_k^{-1}(z)]$$

donne une représentation de H_k sur une partie du cercle $|\zeta| < c$. On coupe le cercle $|\zeta| < c$ le long de la frontière d'un domaine correspondant à un F_k et on pose

$$t = \log \zeta$$

en fixant une détermination du logarithme; l'image du cercle $|\zeta| < c$ est une bande B .

En vertu de l'hypothèse faite sur les cercles C_1 et C_2 , les points du plan z , sur les droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, pour lesquels on a

$$\Phi_k^{-1}(z) = 1$$

sont situés dans le demi-plan $\Re z < K_1$, et ceux pour lesquels

$$\Phi_k^{-1}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \infty$$

dans le demi-plan $\Re z > K'_1$, $K'_1 > K_1$, K_1 et K'_1 étant des constantes qui ne dépendent pas de k . Soit H_k^* la partie de H_k située dans le demi-plan $\Re z > K_1$. La fonction

$$Z = f^{-1}[\psi_k \{f(z)\}]$$

représente H_k^* sur une partie $\overline{H}_k$ de H_k . $\overline{H}_k$ est limité par une courbe L_k reliant les droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$ et $\Im z = (k + \frac{3}{2})\pi$. Les courbes L_k sont contenues dans une bande

$$-K_2 < \Re z < K_2$$

A $\overline{H}_k$ correspond un domaine T_k de B au moyen de la fonction

$$t = \log [F^{-1}(\Phi_k^{-1}(z))] = \chi_k(z)$$

Soit C_R une courbe fermée du plan z composée de la façon suivante :

- 1° un demi-cercle C' : $|z - K_2| = R$ $\Re z > K_2$;
- 2° un demi-cercle C'' : $|z + K_2| = R$ $\Re z < -K_2$;
- 3° deux segments situés respectivement sur les droites $\Im z = \pm R$, reliant les extrémités des deux demi-cercles.

La longueur de C_R est égale à $4K_2 + 2\pi R$.

Soit $\mathfrak{F}_1$ la partie de F qui correspond à l'ensemble des domaines T_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), et soit $\mathfrak{F}_2 = F - \mathfrak{F}_1$. On peut représenter le demi-plan $\Re z \leq 0$ sur $\mathfrak{F}_2$ par la fonction

$$w = f(z + K_1) .$$

On posera

$$t = \log [F^{-1}(f(z + K_1))] = \chi(z)$$

en choisissant la même détermination du logarithme que plus haut; $t = \chi(z)$ représente le demi-plan $\Re z < 0$ sur la partie T de B située hors des T_k .

Soit θ la partie de C_R contenue dans le demi-plan $\Re z < 0$, θ_k la partie de C_R contenue dans H_k ; $\theta(R)$ et $\theta_k(R)$ les longueurs de θ et de θ_k . Il faut remarquer que, pour certaines valeurs de k et de R , θ_k et θ peuvent avoir un segment commun, mais la longueur de ce segment est bornée, et on a toujours

$$\theta(R) + \Sigma \theta_k(R) < 8K_2 + 2\pi R .$$

Soit s_k l'arc qui correspond à θ_k dans la représentation

$$t = \chi_k(z)$$

et s l'arc qui correspond à θ par $t = \chi(z)$. Les arcs s_k et s ne forment pas une courbe connexe, mais on peut réunir les arcs s_k et s de manière à former une courbe d'un seul tenant, les arcs ajoutés correspondant à des segments des droites $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$ et $\Re z = 0$, la longueur de ces segments étant toujours inférieure à celle d'un intervalle compris entre deux points pour lesquels on a $w(z) = I$.

Soit γ_k l'arc ajouté qui correspond à un segment de $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, $\gamma_k(R)$ sa longueur. Soient d'autre part μ_1 et μ_2 les arcs qui correspondent à des segments de $\Re z = 0$, et peut-être aussi à des segments de $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, dans le cas où C_R coupe L_k en un point qui correspond à un point de $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$ par la transformation

$$Z = f^{-1}[\psi_k(f(z))];$$

ces segments de $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$ sont alors certainement contenus dans une bande $|\Re z| < K'_2$. Soient $\mu_1(R)$ et $\mu_2(R)$ les longueurs de μ_1 et de μ_2 . On a

$$s(R) + \sum s_k(R) + \sum \gamma_k(R) + \mu_1(R) + \mu_2(R) \geq 2\pi$$

les sommes étant étendues à tous les indices k pour lesquels, R étant donné, s_k et γ_k ont un sens. On écrira $\sum' \gamma_k(R)$ la somme des $\gamma_k(R)$ étendue à tous ces indices k , moins les deux extrêmes, k' et k'' ($k' > 0$, $k'' < 0$).

On a, d'après l'inégalité de Schwarz

$$s_k^2(R) = \left(\int_{\theta_k} |\chi'_k| |dz| \right)^2 \leq \theta_k(R) \int_{\theta_k} |\chi'_k|^2 R d\varphi \quad z = R e^{i\varphi}$$

d'où

$$\int_{R_0}^R \frac{s_k^2(R)}{\theta_k(R)} dR \leq \int_{R_0}^R \int_{\theta_k} |\chi'_k|^2 R dR d\varphi$$

et la même inégalité pour $s(R)$. En additionnant, on obtient, si on suppose C fini

$$\int_{R_1}^R \left(\sum \frac{s_k^2(R)}{\theta_k(R)} + \frac{s^2(R)}{\theta(R)} \right) dR < K_3.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \sum \frac{s_k^2(R)}{\theta_k(R)} + \frac{s^2(R)}{\theta(R)} &\geq \frac{(\sum s_k(R) + s(R))^2}{\sum \theta_k(R) + \theta(R)} \\ &\geq \frac{(\sum s_k(R) + s(R))^2}{2\pi R + 8K_2} \end{aligned}$$

donc

$$\int_{R_1}^R \frac{(\sum s_k(R) + s(R))^2}{R} dR < K_4 \quad \text{pour } R_1 > R_0. \quad (1)$$

Evaluons $\gamma_k(R)$ et $\mu_k(R)$. Pour cela, nous nous appuyons sur les théorèmes de Koebe et de Bieberbach, comme l'a fait M. R. Nevanlinna dans la démonstration du théorème cité au § 13.

Soit q_k la somme des aires de T_{k-1} et T_k ; soit d'autre part q_k^* l'aire du domaine de B qui correspond à la bande

$$(k + \frac{1}{2})\pi - K'_1 < \Im z < (k + 1 + \frac{1}{2})\pi + K'_1, \quad \Re z < K'_1$$

par la représentation $t = \chi(z)$. On trouve, comme plus haut

$$\gamma_k(R) < K_5 \frac{\sqrt[4]{q_k}}{\varrho(R) - 1}.$$

$\varrho(R)$ étant le nombre de points M situés sur la droite $\Im z = (k + \frac{1}{2})\pi$, à l'intérieur de C_R ; pour tous les k , à l'exception de k' et k'' , on a

$$\varrho(R) > K_6 e^{\sqrt{R}}$$

donc

$$\gamma_k(R) < K_5 \frac{\sqrt[4]{q_k}}{K_6 e^{\sqrt{R}} - 1} < K_7 \sqrt[4]{q_k} \cdot e^{-\sqrt{R}} \quad \text{pour } R > R_1;$$

pour k' et k'' on a simplement

$$\gamma_k(R) < K_8 \sqrt[4]{q_k}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \mu_1(R) &< K_9 \sqrt[4]{q_{k'}^*} \\ \mu_2(R) &< K_9 \sqrt[4]{q_{k''-1}^*}. \end{aligned}$$

Or

$$(\sum' \gamma_k(R))^2 < n(R) \cdot \sum' \gamma^2(R)$$

$n(R)$ étant le nombre de domaines H_k traversés par C_R .

On a

$$n(R) < K_{10} \cdot R$$

donc

$$\begin{aligned} (\Sigma' \gamma_k(R))^2 &< K_7 \Sigma' \frac{q_k}{e^{2\sqrt{R}}} K_{10} R \\ &= K_{11} \cdot R e^{-2\sqrt{R}} \Sigma' q_k < K_{12} R \cdot e^{-2\sqrt{R}} \end{aligned}$$

et

$$\int_{R_1}^R \frac{(\Sigma' \gamma(R))^2}{R} dR < \int_{R_1}^R K_{12} e^{-2\sqrt{R}} dR < K_{13} \quad (2)$$

quel que soit $R_1 > R_0$.

Evaluons maintenant

$$J(R) = \int_{R_1}^R \frac{\gamma_{k'}^2(R)}{R} dR .$$

On a

$$\begin{aligned} J(R) &< \int_{R_1}^R \frac{K_8^2 q_k'}{R} dR \\ &< \int_{R_1}^R K_8^2 q_k' dR < \pi K_8^2 \sum_{-\infty}^{\infty} q_k = K_{14} . \end{aligned}$$

De même

$$\int_{R_1}^R \frac{\mu_i^2(R)}{R} dR < K_{15} \quad i = 1, 2$$

d'où

$$\int_{R_1}^R \frac{\gamma_{k'}^2 + \gamma_{k''}^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2}{R} dR < 2K_{14} + 2K_{15}$$

et

$$\int_{R_1}^R \frac{[\gamma_{k'} + \gamma_{k''} + \mu_1 + \mu_2]^2}{R} dR < K_{16} . \quad (3)$$

Les inégalités (1), (2), (3), ajoutées membre à membre, donnent

$$\int_{R_1}^R \frac{(\Sigma s_k + s)^2 + (\Sigma' \gamma_k)^2 + (\gamma_{k'} + \gamma_{k''} + \mu_1 + \mu_2)^2}{R} dR < K_{17}$$

d'où, par la relation

$$\begin{aligned} \Sigma s_k + s + \Sigma' \gamma_k + \gamma_{k'} + \gamma_{k''} + \mu_1 + \mu_2 &\geq 2\pi \\ \int_{R_1}^R \frac{dR}{R} &< K_{18} . \end{aligned}$$

Il y a contradiction, donc le théorème est démontré.

§ 16. Un nouveau critère de type

Arbre dérivé d'un arbre donné: Soit R un arbre topologique; joignons tous ses sommets multiples à un sommet quelconque par des polygones de l'arbre. Soit R' l'arbre ainsi obtenu; on l'appellera le dérivé de R . On définit ensuite le second dérivé, etc. Si l'arbre R est fini (c'est-à-dire s'il limite un nombre fini de domaines du plan), son dérivé n'a qu'un nombre fini de sommets. Si l'arbre R est celui de la surface universelle de recouvrement de la sphère dont on a ôté p ($p \geq 3$) points, $R' = R$.

Remarquons que, même pour des surfaces du type parabolique, on peut avoir $R' = R$ ²⁰⁾.

Théorème 20: Soit F une surface de Riemann dont toutes les singularités sont logarithmiques et ont pour traces trois points $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et dont le réseau dérivé est identique à celui de l'inverse de $w = e^z$. Numérotons, à partir d'une origine quelconque, et dans chaque sens, les points de ramification du réseau de F (c'est un arbre); soit n le nombre de sommets de ce réseau situés sur le polygone qui relie deux points de ramification d'indices v et $-v$. Si on a

$$n < K_0 v \quad (1)$$

F est du type parabolique.

Démonstration: On supposera que les singularités de F sont les mêmes que celles de la surface F^* de l'inverse de $f(z) = e^z$, c'est-à-dire que ces singularités sont *un* (une singularité), *zéro* et *infini*.

Traçons dans le plan z les droites

$$\Re z = 0; \quad \Im z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Soient L les courbes correspondantes de la surface F^* par la transformation $w = f(z)$; les courbes L découpent F^* . Appelons F_k^* la partie de F^* qui correspond à la bande H_k^*

$$k\pi \leq \Im z \leq (k+1)\pi \quad \Re z > 0$$

On peut découper F au moyen des mêmes courbes que celles qui ont décomposé F^* . On choisit l'origine du réseau telle que la partie de F qui contient cette origine corresponde à la bande $0 < \Im z < \pi$. On fera correspondre à F_0^* la partie F_0 de F qui correspond au premier point de

²⁰⁾ voir *E. Ullrich*, Comm. Math. Helv., 7, 1934, p. 63.

ramification du réseau de F , à partir de l'origine choisie, dans le sens positif; F_1 , correspondant à F_1^* , sera la partie de F qui correspond au point de ramification suivant, F_{-1} la partie correspondant au premier point de ramification rencontré en parcourant le dérivé du réseau de F dans le sens négatif. F_k est identique à F_k^* .

Les parties F_k ne sont pas seules à former F . Il reste:

1° une partie $\mathfrak{F}$ identique à celle que donne la fonction $f(z)$ dans le demi-plan $\Re z < 0$;

2° des domaines simples $\mathfrak{F}_i$, correspondant aux sommets non ramifiés du réseau de F , situés sur son dérivé.

Soit $w = g(\zeta)$ la fonction qui représente le cercle $|\zeta| < c$ sur F ; on supposera $c < \infty$. On coupe le cercle $|\zeta| < c$ le long d'un des arcs de la frontière du domaine qui correspond à $\mathfrak{F}$, puis on pose $t = \log \zeta$, en choisissant une détermination du logarithme; le cercle est représenté ainsi sur une bande $\mathfrak{B}$. Soit $h(t)$ la fonction qui représente $\mathfrak{B}$ sur F ; et H_k , $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_i$ les domaines qui correspondent à F_k , $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_i$, par la représentation

$$t = h^{-1}(w) .$$

Par suite de l'identité de F_k et de F_k^* , on peut représenter conformément H_k^* sur H_k par la fonction

$$t = h^{-1}[f(z)] = p_k(z) .$$

Soit C_r le demi-cercle $|z| = r$, $\Re z > 0$. Par l'intermédiaire des fonctions $p_k(z)$, C_r est représenté sur le plan t suivant des arcs s_k , situés respectivement dans les domaines F_k . Ces arcs ne forment par une courbe d'un seul tenant, coupant $\mathfrak{B}$. Evaluons la longueur $s_k(r)$ de s_k . Soit $\theta_k(r)$ la longueur de l'arc θ_k de C_r situé dans H_k^* . On a, d'après l'inégalité de Schwarz et suivant un calcul déjà fait

$$s_k^2(r) < \theta_k(r) \frac{dA_k(r)}{dr}$$

$A_k(r)$ étant l'aire du domaine balayé par s_k . Or on a

$$\sum \frac{s_k^2(r)}{\theta_k(r)} \geq \frac{(\sum s_k(r))^2}{\sum \theta_k(r)} = \frac{(\sum s_k(r))^2}{\pi r}$$

la somme étant étendue à tous les k , en posant $s_k(r) = 0$ si C_r ne coupe pas le domaine H_k^* . On posera $\sum A_k(r) = \mathfrak{A}(r)$, et $\sum s_k(r) = S(r)$, d'où

$$\frac{S^2(r)}{\pi r} < \frac{d\mathfrak{S}}{dr}$$

et

$$\int_{r_0}^r \frac{S^2(r)}{\pi r} dr < \mathfrak{S}(r) - \mathfrak{S}(r_0) < K_1 \quad (2)$$

puisque $c < \infty$.

Considérons les arcs s_k et s_{k+1} ; une extrémité A de s_k et une extrémité B de s_{k+1} correspondent à un même point du plan z , donc en ces points on a

$$h(A) = h(B).$$

Le domaine qui sépare H_k de H_{k+1} correspond à μ_k domaines $\mathfrak{H}_i$: $\mathfrak{H}_{i+1}, \mathfrak{H}_{i+2}, \dots, \mathfrak{H}_{i+\mu_k}$. On représente le domaine $\mathfrak{H}_{i+1} + \dots + \mathfrak{H}_{i+\mu_k}$ sur un domaine de la bande

$$0 < \mathfrak{S}y < 2\mu_k\pi$$

par la fonction

$$y = \log h(t) = u(t)$$

On peut relier A à B par un arc γ_k qui, par l'intermédiaire de $u(t)$, donne un segment du plan y , parallèle à $\Re y = 0$, et de longueur $2\mu_k\pi$. Soit $\gamma_k(r)$ la longueur de γ_k , et soit $y = y_1 + iy_2$. L'inégalité de Schwarz donne encore

$$\gamma_k^2(r) = \left(\int_0^{2\mu_k\pi} \left| \frac{dt}{dy} \right| dy_2 \right)^2 \leq \int_0^{2\mu_k\pi} dy_2 \int_0^{2\mu_k\pi} \left| \frac{dt}{dy} \right|^2 dy_2$$

donc

$$\frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} \leq \int_0^{2\mu_k\pi} \left| \frac{dt}{dy} \right|^2 dy_2 = \left| \frac{dB_k(r)}{dy_1(r)} \right|$$

si $B_k(r)$ est l'aire du domaine balayé par γ_k . On a $y = e^z$. Soit ϱ l'abscisse du point où C_r coupe la droite $\mathfrak{S}z = k\pi$. On a $y_1 = \pm e^\varrho$, suivant que k est pair ou non. On a donc

$$\left| \frac{dy_1}{d\varrho} \right| = e^\varrho$$

et

$$\frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} \leq \frac{dB_k(r)}{d\varrho} e^{-\varrho};$$

or, pour toutes les valeurs de k , sauf les deux extrêmes, on a

$$\varrho \geq \sqrt{2\pi r - \pi^2} \geq \sqrt{r} \quad \text{pour } r > r_0$$

d'où

$$\int_{r_0}^r \frac{\gamma_k^2(r) e^{\sqrt{r}}}{r 2\mu_k\pi} dr \leq B_k(r) - B_k(r_0).$$

Faisons la somme pour toutes les valeurs de k , sauf les deux extrêmes.
On l'écrira Σ' . On a

$$\int_{r_0}^r \Sigma' \frac{\gamma_k^2(r)}{\mu_k} \cdot \frac{e^{\sqrt{r}}}{2\pi r} dr < \Sigma' B_k(r) < K_1$$

or

$$\Sigma' \frac{\gamma_k^2}{\mu_k} \geq \frac{(\Sigma' \gamma_k)^2}{\Sigma' \mu_k} = \frac{(\Gamma(r))^2}{\Sigma' \mu_k}$$

mais, d'après l'inégalité (1), on a

$$\Sigma' \mu_k + \frac{2r}{\pi} < K_0 \frac{2r}{\pi}$$

ou encore

$$\Sigma' \mu_k < K_2 \frac{2r}{\pi}$$

donc

$$\Sigma' \frac{\gamma_k^2}{\mu_k} > \frac{\pi \Gamma^2(r)}{2 K_2 r}$$

et

$$\int_{r_0}^r \frac{\pi \Gamma^2(r) e^{\sqrt{r}}}{4 K_2 \pi r} dr < K_1$$

qui entraîne l'inégalité

$$\int_{r_0}^r \frac{\Gamma^2(r)}{\pi r} dr < K_3 . \quad (3)$$

Considérons maintenant les γ_k correspondant aux valeurs extrêmes de k . L'inégalité

$$\frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} < \left| \frac{dB_k(r)}{dy_1(r)} \right|$$

est encore valable. On a

$$y_1^2(r) = r^2 - k^2\pi^2$$

d'où

$$y_1 \frac{dy_1}{dr} = r$$

$$\frac{dy_1}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - k^2\pi^2}} .$$

Donc

$$\left| \frac{dB_k(r)}{dy_1(r)} \right| = \frac{dB_k(r)}{dr} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - k^2\pi^2}}{r}$$

et

$$\int_{r_0}^{r_0+\pi} \frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} dr \leq \int_{r_0}^{r_0+\pi} \frac{dB_k(r)}{dr} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - k^2\pi^2}}{r} dr < K_4 [B_k(r_0 + \pi) - B_k(r_0)] .$$

Intégrons maintenant de r_0 à r ($r > r_0$). On obtient l'inégalité

$$\int_{r_0}^r \sum'' \frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} dr < K_4 \Sigma B_k(r)$$

en remarquant que la somme située dans le premier membre est étendue aux deux valeurs extrêmes de k , pour chaque valeur de r ; par contre, la somme du deuxième membre est étendue à tous les indices k . On a donc

$$\int_{r_0}^r \sum'' \frac{\gamma_k^2(r)}{2\mu_k\pi} dr < K_5 . \quad (4)$$

Pour compléter la courbe, il faut relier les deux points C et D qui correspondent aux points ir et $-ir$ de C_r , par un arc situé dans $\mathfrak{H}$. On représentera $\mathfrak{H}$ sur le demi-plan $\Re y < 0$ au moyen d'une fonction $y = q(t)$, que l'on peut choisir telle que :

- 1° $q[h^{-1}(f(0))] = 0$;
- 2° $h[q^{-1}(2k\pi)] = h[q^{-1}(0)]$.

Aux points C et D correspondent deux points E et F de la droite $\Re y = 0$. Considérons un intervalle $r = k\pi$, $r = (k+1)\pi$; lorsque r varie de $k\pi$ à $(k+1)\pi$, E parcourt le segment $i\rho, i(\rho + \pi)$ et F le segment $-i\rho', -i(\rho' + \pi)$. Traçons dans le demi-plan $\Re y < 0$ un demi-cercle $\mathfrak{C}$ de diamètre EF . Soit ρ^* le rayon de $\mathfrak{C}$; à $\mathfrak{C}$ correspond une courbe σ du plan t , de longueur $\sigma(r)$. On a encore

$$\sigma^2(r) < \pi\rho^* \int_{\mathfrak{C}} \left| \frac{dt}{dy} \right|^2 |dy|$$

et, quel que soit r ,

$$\frac{d\rho^*}{dr} = 1$$

donc

$$\int_{\mathfrak{C}} \left| \frac{dt}{dy} \right|^2 |dy| = \frac{dG(r)}{dr}$$

$G(r)$ étant l'aire du domaine balayé par σ . Il en résulte que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sigma^2(r)}{\pi\rho^*} dr < [G((k+1)\pi) - G(k\pi)] .$$

En vertu de l'inégalité (1), on a

$$\varrho^* < K_6 r$$

donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sigma^2(r)}{\pi \varrho^*} dr > \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sigma^2(r)}{K_6 \pi r} dr$$

et

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sigma^2(r)}{\pi r} dr < K_7 \{ G[(k+1)\pi] - G(k\pi) \}$$

d'où

$$\int_{r_0}^r \frac{\sigma^2(r)}{\pi r} dr < K_8 . \quad (5)$$

On a

$$\sum_0^{\nu-1} (\mu_k + \mu_{-k-1}) + 2\nu + 1 = n$$

donc, en vertu de (1),

$$\sum_0^{\nu-1} (\mu_k + \mu_{-k-1}) < (K_0 - 2)\nu + 1 .$$

Soit ν pair. Pour $\nu/2$ valeurs au moins de k , on a

$$\mu_k \leq 2K_0 \text{ et } \mu_{-k-1} \leq 2K_0 .$$

Soit R_p l'ensemble des valeurs de r comprises dans les p premiers intervalles $k\pi \leq r \leq (k+1)\pi$, avec $\mu_k \leq 2K_0$ et $\mu_{-k-1} \leq 2K_0$. Sur R_p , r vérifie l'inégalité $r \leq (2p+1)\pi$

donc
$$\int_{R_{2p}} \frac{dr}{r} - \int_{R_p} \frac{dr}{r} \geq \frac{p\pi}{(4p+1)\pi} \geq \frac{1}{5} .$$

Soit $R = \lim_{p \rightarrow \infty} R_p$. On a

$$\int_R \frac{dr}{r} = \infty . \quad (6)$$

D'autre part, les inégalités (2), (3), (4) et (5) donnent

$$\begin{aligned} & \int_R \frac{S^2(r)}{\pi r} dr + \int_R \frac{F^2(r)}{\pi r} dr + \int_R \frac{\Sigma'' \gamma_k^2(r)}{\pi r} dr + \int_R \frac{\sigma^2(r)}{\pi r} dr \\ & < K_1 + K_3 + K'_5 + K_8 = K_9 . \end{aligned}$$

Or

$$S(r) + I(r) + \Sigma'' \gamma_k(r) + \sigma(r) \geq 2\pi$$

$$S^2(r) + I^2(r) + \Sigma'' \gamma_k^2(r) + \sigma^2(r) \geq \frac{\pi^2}{2}$$

donc

$$\int_R \frac{\pi^2 dr}{2\pi r} < K_9$$

et

$$\int_R \frac{dr}{r} < \frac{2K_9}{\pi}$$

ce qui est contradictoire avec (6). Donc $c = \infty$, et le théorème est démontré.

§ 17. La fonction $H(r_1, r_2)$

Soient F une surface de Riemann simplement connexe, T une section divisant F en deux parties F_1 et F_2 , simplement connexes. Représentons F_1 et F_2 sur les demi-plans $\Im \zeta \geq 0$ et $\Im \zeta \leq 0$. A T correspond la droite $\Im \zeta = 0$ ou une partie de celle-ci. Dans le dernier cas, F est du type hyperbolique; dans le premier, elle peut être d'un type ou de l'autre. On voit en effet qu'elle peut être du type hyperbolique en prenant pour F l'intérieur d'un cercle et pour T une spirale indéfinie, intérieure à ce cercle.

Nous ne nous occuperons que du cas où toute la droite $\Im \zeta = 0$ (moins le point à l'infini) correspond à T .

A un point de T correspondent deux points de $\Im \zeta = 0$ (celui qui provient de la représentation de F_1 sur $\Im \zeta \geq 0$ et celui qui provient de la représentation de F_2 sur $\Im \zeta \leq 0$). On établit ainsi une correspondance biunivoque entre deux ponctuelles de support $\Im \zeta = 0$. Soient r_1 et r_2 deux valeurs correspondantes de $\Re \zeta$. Elles vérifient une relation

$$H(r_1, r_2) = 0$$

avec

$$\left. \begin{array}{ll} r_2 \rightarrow +\infty & \text{si } r_1 \rightarrow +\infty \\ r_2 \rightarrow -\infty & \text{si } r_1 \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \quad (H)$$

Si T est une courbe analytique, $H(r_1, r_2) = 0$ est une relation analytique, ce que nous supposerons désormais.

Théorème 21 : Soit $H(r_1, r_2) = 0$ une relation analytique satisfaisant aux conditions (H). On peut définir, au moyen des deux demi-plans $\Im \zeta \geq 0$ et $\Im \zeta \leq 0$ liés suivant la relation $H = 0$, une surface de Riemann simplement connexe.

Supposons pour commencer que pour aucune valeur de r , on n'a

$$r'_2(r_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \infty ;$$

nous allons montrer que les deux demi-plans $\Im \zeta \geq 0$ et $\Im \zeta \leq 0$ soudés de manière que pour deux points correspondants on ait $H(\zeta_1, \zeta_2) = 0$, forment une surface de Riemann.

On appellera point de F tout point des deux demi-plans, en considérant comme identiques deux points qui coïncident dans la soudure.

Soit ζ un point tel que $\Im \zeta \neq 0$. On prend pour voisinage de ζ un cercle de centre ζ et dont le rayon est inférieur à $|\Im \zeta|$.

Soit ζ tel que $\Im \zeta = 0$ (ζ est donc constitué par deux points ζ_1 et ζ_2 , de $\Im \zeta \geq 0$ et $\Im \zeta \leq 0$). Résolvons $H(\zeta_1, \zeta_2) = 0$ autour du point $\zeta_1 : \zeta_2(\zeta_1)$; cette fonction est régulière et univalente dans un cercle de rayon ϱ_0 , de centre ζ_1 . On prend pour voisinage de ζ le domaine constitué par :

1° le demi-disque $|\zeta - \zeta_1| < \varrho$, $\Im \zeta \geq 0$ avec $\varrho < \varrho_0$;

2° l'image du demi-disque $|\zeta - \zeta_1| < \varrho$, $\Im \zeta \leq 0$ par la transformation $\zeta_2 = \zeta_2(\zeta_1)$.

Le voisinage ainsi obtenu est bien représentable topologiquement sur un cercle, le point ζ allant à l'intérieur du cercle.

Ce système de voisinages vérifie les axiomes du § 1 :

Axiome 1 : Soient V_1 et V_2 deux voisinages de ζ . Si $\Im \zeta \neq 0$, on prend pour voisinage V un cercle dont le rayon est le plus petit des deux rayons de V_1 et V_2 . Si $\Im \zeta = 0$, on prend pour ϱ le minimum des valeurs correspondantes de V_1 et V_2 .

Axiome 2 : Supposons que ζ^* soit intérieur à un voisinage $V(\zeta_0)$. Si $\Im \zeta_0 \neq 0$, on a $\Im \zeta^* \neq 0$ et il suffit de prendre pour rayon du voisinage de ζ^* une longueur assez petite. Si $\Im \zeta_0 = 0$, deux cas peuvent se présenter :

1° $\Im \zeta^* \neq 0$; alors, suivant que $\Im \zeta^* > 0$ ou $\Im \zeta^* < 0$, on prend $V(\zeta^*)$ à l'intérieur du demi-disque $|\zeta - \zeta_0| < \varrho$, $\Im \zeta > 0$ ou à l'intérieur de l'image de $|\zeta - \zeta_0| < \varrho$, $\Im \zeta < 0$;

2° $\Im \zeta^* = 0$; on prend un rayon ϱ' assez petit pour que le disque $|\zeta - \zeta^*| < \varrho'$ soit intérieur au disque $|\zeta - \zeta_0| < \varrho$.

Axiome 3: Soient ζ^* et ζ^{**} deux points différents Il est clair qu'on peut choisir des voisinages $V(\zeta^*)$ et $V(\zeta^{**})$ avec $V(\zeta^*) \cap V(\zeta^{**}) = \emptyset$.

Donc $H = 0$ définit une surface topologique simplement connexe. Or, on peut définir pour chaque voisinage une représentation sur un cercle qui fait de F une surface de Riemann.

Supposons d'abord ζ avec $\Im \zeta \neq 0$; on prend, pour effectuer la représentation, la fonction $w = \zeta$. Passons maintenant à ζ avec $\Im \zeta = 0$. Pour les points du voisinage pour lesquels $\Im \zeta < 0$, on effectue d'abord la transformation inverse de $\zeta_2 = \zeta_2(\zeta_1)$, puis on fait $w = \zeta_1$ ce qui donne une représentation sur un cercle.

On a donc bien une surface de Riemann.

Envisageons le cas où $r_2'(r_1)$ a des zéros. Soit r_1^0 un zéro d'ordre n de $r_2'(r_1)$; n est pair en vertu de la monotonie de $r_2(r_1)$. On fait, pour commencer, la transformation suivante:

$$Z_1 = (\zeta_1 - r_1^0)^{\frac{n+1}{n+2}}$$

$$Z_2 = (\zeta_2 - r_2^0)^{\frac{2}{n+2}}$$

en choisissant une détermination quelconque. La relation $H(\zeta_1, \zeta_2) = 0$ devient $\mathfrak{H}(Z_1, Z_2) = 0$; elle est régulière autour de $Z_1 = 0$. On procède alors comme on l'a fait plus haut. On considère le rayon ϱ_0 d'un cercle de centre $Z_1 = 0$ dans lequel $Z_2(Z_1)$ est régulière et univalente. On définit le voisinage de $Z_1 = 0$:

1° la partie du disque $|Z_1| < \varrho < \varrho_0$ intérieure à la partie du plan qui correspond à $\Im \zeta_1 \geq 0$;

2° l'image dans le plan Z_2 du reste de ce disque, au moyen de la transformation $Z_2(Z_1)$.

Le voisinage de ζ est l'image de ce voisinage par les fonctions $\zeta_1(Z_1)$ respectivement $\zeta_2(Z_2)$.

Pour faire la représentation conforme de ce voisinage, on passe par les fonctions inverses au cercle $|Z_1| < \varrho$, d'où il résulte que dans ce cas encore $H = 0$ permet de définir une surface de Riemann.

Si on a $r_2'(r_1) = \infty$, on se contente d'intervertir les variables r_1 et r_2 , d'où $r_1'(r_2) = 0$, et le raisonnement est le même.

On montre sans peine que cette surface est simplement connexe. Si on prend pour $H = 0$ non pas *une*, mais *plusieurs* relations analytiques, dont la succession satisfait aux conditions (H) , on définit encore une

surface de Riemann, mais les valeurs (r_1, r_2) qui correspondent au passage d'une relation H à l'autre ne donnent pas, en général, des points de la surface; il en résulte que celle-là n'est plus toujours simplement connexe.

On appellera surface correspondant à la fonction H la surface qui est définie par la démonstration du théorème 21.

La définition de la fonction H et le théorème 21 nous montrent un nouvel aspect du problème de la détermination du type: H étant donnée, quel est le type de la surface de Riemann F correspondante? Nous donnons quelques solutions partielles de ce problème.

Théorème 22: Si pour un ensemble E de valeurs de r_1 on a

$$\int_E \frac{dr_1}{r_1} \rightarrow \infty \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} > K_0 \frac{dr_1}{r_1} \quad (2)$$

avec $\rho = \frac{r_2^* + r_2^{**}}{2}$, où r_2^* est la racine de $H(r_1, r_2) = 0$ et où $-r_2^{**}$ est la racine de $H(-r_1, r_2) = 0$;

$$K_1 < \left| \frac{dr_2^*}{dr_2^{**}} \right| < K_2 \quad K_1 > 0 \quad (3)$$

alors F est du type parabolique.

Décrivons un demi-cercle Γ_r de rayon r dans le demi-plan $\Im \zeta \geq 0$, ayant son centre à l'origine. Aux extrémités de ce demi-cercle correspondent deux points A_r et B_r de $\Im \zeta = 0$, d'affixes r_2^* et $-r_2^{**}$. Décrivons un demi-cercle Γ_ρ , dans le demi-plan $\Im \zeta \leq 0$, de diamètre $A_r B_r$. Soit C_r l'image de $\Gamma_r + \Gamma_\rho$ dans le plan $s = \log z$, si on suppose qu'on a représenté F sur le cercle $|z| < R$.

Soient $\varphi_1(\zeta)$ et $\varphi_2(\zeta)$ les fonctions qui effectuent la représentation de $\Im \zeta \geq 0$ et $\Im \zeta \leq 0$ sur les domaines correspondants du plan s , $\sigma_1(r)$ et $\sigma_2(r)$ les longueurs des arcs correspondant à Γ_r et Γ_ρ . On a

$$\sigma_1(r) + \sigma_2(r) \geq 2\pi$$

et

$$\sigma_1^2(r) \leq \pi r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} |\varphi_1'|^2 r d\theta \quad \zeta = r e^{i\theta}$$

et, si on suppose R fini

$$\int_E \frac{\sigma_1^2(r) dr}{r} < K_3 \quad (4)$$

puis

$$\sigma_2^2(r) \leq \pi \varrho \int_{\Gamma_\varrho} |\varphi_2'|^2 |d\zeta|$$

ou

$$\sigma_2^2(r) \leq \pi \varrho K_4 \frac{dA(\varrho)}{d\varrho} \text{ pour } r \text{ dans } E, \quad (5)$$

en vertu de (3), $A(\varrho)$ étant l'aire du domaine limité par l'image de Γ_ϱ .
Donc

$$\int_{r \in E} \frac{\sigma_2^2(r) d\varrho(r)}{\varrho(r)} < K_5$$

et

$$\int_E \frac{\sigma_2^2(r) dr}{r} < K_6 \quad (6)$$

d'après (2). Il résulte de (4) et de (6)

$$\int_E \frac{dr}{r} < K_7$$

en contradiction avec (1). Donc $R = \infty$, et le théorème est démontré.

Supposons que $H = 0$ est une relation algébrique. Si on prend pour E les valeurs de r supérieures à r_0 , les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. On a donc le

Théorème 23 : Si $H = 0$ est algébrique, F est du type parabolique.

On peut encore énoncer le théorème suivant :

Théorème 24 : Supposons la relation $H = 0$ symétrique (c'est-à-dire que $H(-r_1, -r_2) = H(r_1, r_2)$) avec de plus, pour r_1 assez grand

$$\frac{dr_2}{r_2} > K_0 \frac{dr_1}{r_1}. \quad (1)$$

Alors F est du type parabolique.

C'est un cas particulier du théorème 22. En effet, l'hypothèse de la symétrie équivaut à poser

$$r_2^* = r_2^{**} = \varrho$$

donc, pour toute valeur de r_1 supérieure à r_0 , on a

$$\int_E \frac{dr_1}{r_1} \rightarrow \infty$$

et

$$\frac{d\varrho}{\varrho} > K_0 \frac{dr_1}{r_1}$$

ce qui démontre le théorème.

La condition (1) du dernier théorème ne peut pas être complètement supprimée: il existe des fonctions H , vérifiant les conditions (H), symétriques au sens du théorème précédent, et qui sont hyperboliques.

Voici quelques exemples simples de fonctions H auxquelles s'appliquent les théorèmes précédents. Soit

$$H(r_1, r_2) \equiv r_1 - r_2^3 = 0 ;$$

l'image de T dans le plan est formée de deux demi-droites faisant un angle droit (au sommet de l'angle correspond $r_1 = r_2 = 0$, qui est une singularité de la relation $H = 0$). Si on a

$$H(r_1, r_2) \equiv r_2 - (e^{r_1} - e^{-r_1}) = 0$$

le type est encore parabolique, en vertu du théorème 24; à T correspond alors une parabole.

§ 18. Exemple de cas hyperbolique

Dans le cas où une fonction H donne une surface hyperbolique, les domaines du cercle $|z| < 1$ auxquels correspondent les deux demi-plans $\Im \zeta \geq 0$ et $\Im \zeta \leq 0$ dans la représentation de la surface sur un cercle peuvent être limités par des courbes en spirale (domaines spirales). L'exemple que nous allons donner est de cette nature.

Considérons la bande B

$$0 \leq \Im z \leq \pi \quad \Re z \geq 0 ;$$

nous établissons une correspondance biunivoque entre les points des deux demi-droites $\Im z = 0$ et $\Im z = \pi$, $\Re z > 0$. Soient P et Q deux points correspondants, on posera $\Re P = u$ et $\Re Q = v$.

Supposons pour commencer que $v = ku$. Nous allons construire dans B une fonction analytique univalente $f(z) = f(x + iy)$, telle que $|f(z)| = \text{constante}$ sur chaque segment PQ , et telle que

$$\arg f(Q) - \arg f(P) = \pi.$$

Posons $f(z) = re^{i\varphi}$, et $r(P) = \Phi(u)$; $\Phi(u)$ est une fonction croissante de u ; $r(x, y)$ est une constante sur la droite

$$-\pi x + y(k-1)u + \pi u = 0.$$

On a

$$\frac{\partial r(x, y)}{\partial x} = \Phi'_u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial r(x, y)}{\partial y} = \Phi'_u \frac{\partial u}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\partial u}{\partial x}$$

et sur un segment PQ

$$d\varphi = \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}} dy$$

d'où

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\Phi'}{\Phi} \int_0^\pi \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}} dy \\ &= \frac{\Phi'}{\Phi} \int_0^\pi \frac{\pi^2 + u^2(k-1)^2}{\pi[y(k-1) + \pi]} dy \\ &= \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\pi^2 + u^2(k-1)^2}{\pi(k-1)} \log k \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\pi^2(k-1)}{[\pi^2 + u^2(k-1)^2] \log k}$$

ce qui permet de calculer Φ . On voit que l'on a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log \Phi = 0$$

donc que $\log r(x, y)$ est une fonction harmonique; $f(z) = re^{i\varphi}$ est donc une fonction analytique. Elle est univalente; $f(z)$ représente B sur un domaine spirale intérieur à un cercle de rayon fini.

Considérons maintenant une relation plus générale

$$v = v(u);$$

on pose $u = \log r_1$, $v = \log r_2$ et on fait l'hypothèse que la fonction

$$H(r_1, r_2) \equiv \log r_2 - v(\log r_1) = 0$$

vérifie les conditions (H) , que

$$H(-r_2, -r_1) = 0 \quad \text{si} \quad H(r_1, r_2) = 0$$

et que de plus

$$v'(u) > K_1 > 2 \quad \text{et} \quad v''(u) \geq 0 \quad \text{pour} \quad u > u_0. \quad (1)$$

Il s'agit de représenter la bande B sur un domaine spirale D , au moyen d'une fonction $t = h(z)$, de manière que l'on ait

$$\begin{aligned} |h(u)| &= |h(v + i\pi)| \quad u > u_0 \\ \arg h(v + i\pi) - \arg h(u) &= \pi; \end{aligned}$$

cette représentation est possible. En effet, on représente la bande $0 \leq \Im z \leq \pi$ sur le demi-plan $\Im \zeta \geq 0$ en posant $\zeta = \log z$ et on considère la relation

$$H(r_1, r_2) \equiv \log r_2 - v(\log r_1) = 0;$$

on représente la surface correspondante sur le cercle $|t| < c (\leq \infty)$, de sorte que $t = 0$ si $\zeta = 0$. Le point $\zeta = 0$ est un centre de symétrie de la surface, en ce sens qu'il existe une transformation biunivoque et conforme $\zeta^* = S(\zeta)$, de la surface sur elle même, qui conserve $\zeta = 0$ et telle que $S[S(\zeta)] = \zeta$. On pose en effet, si $\Im \zeta \neq 0$, $\zeta^* = -\zeta$, et si $\Im \zeta = 0$, $\zeta_1^* = -\zeta_2$ et $\zeta_2^* = -\zeta_1$; le point $\zeta^*(\zeta_1^*, \zeta_2^*)$ est bien sur la surface.

Dans le cercle $|t| < c$, la transformation S donne une transformation $t^* = T(t)$, biunivoque et conforme, qui conserve le point $t = 0$; donc

$$t^* = t \cdot e^{i\theta}$$

et de plus

$$t = t \cdot e^{2i\theta}$$

donc $\theta = \pi$, et $t^* = -t$. Il en résulte que les domaines D et D^* qui correspondent à $\Im \zeta \geq 0$ et à $\Im \zeta \leq 0$ se déduisent l'un de l'autre par une rotation de π autour de $t = 0$. Soit $z = g(t)$ la fonction qui représente D sur B . Considérons le cercle

$$|t| = r < c$$

et les arcs de ce cercle intérieurs à D . Il leur correspond des arcs intérieurs à B : l'un, MN , relie les deux droites $y = 0$ et $y = \pi$, les autres, $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots$ relient chacun deux points situés sur la même droite, alternativement $y = 0$ et $y = \pi$.

Soit $f(z)$ la fonction qui a été construite au début de ce paragraphe, pour la valeur $k = \frac{K_1}{2}$, et soit

$$\zeta = F(t) = \log f[g(t)] ;$$

$F(t)$ représente la partie de D extérieure au cercle $|t| = r_0$ sur un domaine Γ , dont l'aire est finie. Aux arcs du cercle $|t| = r$ correspondent des arcs intérieurs à Γ . Soit $S(r)$ la longueur totale de ces arcs.

Evaluons la variation de φ , argument de $f(z)$ sur MN et sur P_iQ_i .

$$\text{On a} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Or

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\pi x(k-1)}{[\pi + y(k-1)]^2} = \frac{2\pi x(K_1-2)}{[2\pi + y(K_1-2)]^2} > K_2 x \quad , \quad K_2 > 0$$

donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} > \frac{2\pi^2 K_2(K_1-2)x}{[4\pi^2 + x^2(K_1-2)^2] \log \frac{K_1}{2}} > \frac{K_3}{x} \quad K_3 > 0$$

si $x > x_0$.

D'autre part

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi}{\pi + y(k-1)} \geq \frac{2}{K_1}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} > 0 .$$

Sur MN , la variation $\Delta \varphi$ de φ vérifie donc l'inégalité

$$\Delta \varphi > K_3 \log \frac{v_1}{u_1}$$

où on a posé $u_1 = \Re M$ et $v_1 = \Re N$.

Soit un arc $P_1 Q_1$ dont les extrémités sont sur $y = 0$. Pour cet arc,

$$\Delta \varphi > K_3 \log \frac{Q_1}{P_1}.$$

Soit enfin un arc $P_2 Q_2$ dont les extrémités sont sur $y = \pi$; on a encore

$$\Delta \varphi > K_3 \log \frac{\Re Q_2}{\Re P_2}.$$

Mais $\Re P_2 = v(Q_1)$ et $\Re Q_2 = v(P_3)$; et

$$\frac{\Re Q_2}{\Re P_2} > \frac{P_3}{Q_1}$$

puisque $v'(u) > 1$, et $v''(u) \geq 0$.

On en tire que

$$\begin{aligned} S(r) &\geq \Sigma \Delta \varphi > K_3 \left[\log \frac{v_1}{u_1} + \log \frac{Q_1}{P_1} + \log \frac{P_3}{Q_1} + \dots \right] \\ &= K_3 \log \frac{v_1}{u_1} \cdot \frac{Q_n}{P_1}. \end{aligned}$$

Mais

$$v_1 = v(P_1) > K_1 P_1$$

et

$$Q_n = v(u_1) > K_1 u_1$$

donc

$$S(r) > K_3 \log \cdot K_1^2 = K_4 > 0$$

puisque $K_1 > 1$.

Soit

$$\bar{F}'(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{si } t \text{ est dans } D \\ 0 & \text{si } t \text{ est hors de } D, \end{cases}$$

alors

$$\int_0^{2\pi} |\bar{F}'(t)| r d\theta > K_4 \quad t = re^{i\theta}$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} r d\theta \int_0^{2\pi} |\bar{F}'(t)|^2 r d\theta > K_4^2$$

$$\int_0^{2\pi} |\bar{F}'(t)|^2 r d\theta > \frac{K_4^2}{2\pi r}$$

$$\int_{r_0}^r \int_0^{2\pi} |\bar{F}(t)|^2 r dr d\theta > \frac{K_4^2}{2\pi} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r}.$$

L'intégrale du premier membre est bornée, puisqu'elle représente l'aire d'un domaine intérieur à Γ ; donc

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} < K_5;$$

il en résulte que r est borné, donc $H(r_1, r_2)$ correspond à une surface du type hyperbolique.

Prenons pour $H = 0$ la relation

$$H \equiv e^{-e^{-r_1}} + e^{-e^{-r_2}} - 1 = 0$$

pour laquelle on a $H(-r_2, -r_1) = H(r_1, r_2)$. On pose $u = \log r_1$, $v = \log r_2$, et de $H = 0$ on tire

$$e^{-e^{-v}} = 1 - e^{-e^{-u}}$$

on voit que pour $u > u_0$, on a $v > 0$, $v' > K_1 > 2$ et $v'' \geq 0$. Donc la relation $H = 0$ est du type hyperbolique.

Prenons dans le demi-plan $\Im \zeta \geq 0$ la fonction

$$w_1(\zeta) = e^{-e^{-\zeta}}$$

et dans le demi-plan $\Im \zeta \leq 0$,

$$w_2(\zeta) = 1 - e^{-e^{\zeta}}.$$

Les surfaces F_1 et F_2 qu'elles définissent peuvent se souder le long du segment $(0, 1)$ qui correspond à l'axe $\Im \zeta = 0$. Soit F la surface que l'on obtient en soudant F_1 et F_2 ; F est hyperbolique, car si ξ_1 et ξ_2 sont les affixes de deux points de $\Im \zeta = 0$ qui donnent le même point de F , ils vérifient la relation

$$e^{-e^{-\xi_1}} = 1 - e^{-e^{\xi_2}}$$

donc la relation $H = 0$ que nous venons d'étudier.

On voit par là que l'ensemble des singularités d'une surface du type hyperbolique peut être dénombrable, de même que l'ensemble des singularités d'une surface du type parabolique peut ne pas l'être²¹⁾. Dans ce dernier cas, on arrive au résultat, en raréfiant suffisamment les singularités; dans notre exemple, c'est la dissymétrie qui donne à la surface son type hyperbolique.

²¹⁾ M. Valiron a déjà donné, par une tout autre méthode, des exemples de surfaces du type hyperbolique, dont l'ensemble des singularités est dénombrable; voir Comptes Rendus, 193, 1934, p. 2065-2067, et J. de Math. pures et appl. 15, 1936, p. 423-435. Pour les surfaces du type parabolique, dont l'ensemble des singularités a la puissance du continu, voir le mémoire cité à la note 20).

§ 19. Conclusions: quelques remarques sur la fonction $H(r_1, r_2)$

Il y a un cas particulier où l'étude de la relation $H(r_1, r_2) = 0$ présente un certain intérêt.

Considérons une fonction méromorphe $w = f(z)$ dans le cercle $|z| < R (\leq \infty)$; soit $w = \omega$ une singularité logarithmique de la fonction inverse, Δ une portion circulaire dont le centre est la trace de ω , et qui contient la singularité ω . On coupe la surface F de $z(w)$ le long de la frontière de Δ , et on représente Δ et $F - \Delta$ sur les demi-plans $\Im \zeta > 0$ et $\Im \zeta < 0$; on suppose que pour les deux demi-plans la droite $\Im \zeta = 0$ (moins le point à l'infini) correspond à la frontière de Δ . On définit ainsi une fonction H .

Supposons que nous connaissions le type d'une surface F , ainsi qu'une relation $H = 0$ obtenue à partir de F suivant le procédé donné ci-dessus. Posons

$$H^*(r_1, r_2) \equiv H(r_1 + k \sin r_1, r_2)$$

avec $0 < k < 1$. Quel est le type de la surface F^* qui fournit H^* ? Si on peut montrer que dans tous les cas le type de F^* est le même que celui de F , on aura montré que la surface obtenue à partir de F en déplaçant seulement une singularité logarithmique à l'intérieur d'une portion qui ne contient que cette singularité, est du même type que F . Il convient de remarquer que si l'un des théorèmes 22 ou 24 s'applique à H , il en résulte que H^* est aussi parabolique.

La démonstration de l'identité des types de H et de H^* établirait de façon rigoureuse le principe de Bloch dans sa forme la plus simple, relativement à une seule singularité transcendante.

TABLE DES MATIERES

	pag.
INTRODUCTION	5
CHAPITRE PREMIER. — <i>Définitions. Rappel de résultats.</i>	6
§ 1. Définition de la surface de Riemann.	6
§ 2. Quelques définitions sur les surfaces de Riemann.	8
§ 3. Réseau topologique d'une surface de Riemann.	9
CHAPITRE II. — <i>Les singularités des surfaces de Riemann simplement connexes.</i>	12
§ 4. Les résultats de M. Iversen.	12
§ 5. Singularités plus générales.	13
CHAPITRE III. — <i>Les réseaux topologiques des surfaces de Riemann les plus générales.</i>	17
§ 6. Première généralisation des réseaux.	18
§ 7. Comparaison des différents réseaux topologiques d'une même surface de Riemann.	18
§ 8. Comparaison des différents réseaux topologiques d'une même surface de Riemann (suite).	24
§ 9. Réseau topologique d'une surface de Riemann quelconque.	25
§ 10. Existence d'une surface de réseau donné.	26
CHAPITRE IV. — <i>Le type d'une surface de Riemann et son réseau.</i>	28
§ 11. Les transformations de Bloch.	28
§ 12. Surfaces de Riemann dont le réseau est le même que celui de fonctions inverses de fonctions périodiques.	30
§ 13. Généralisation d'un théorème de M. Nevanlinna.	31
§ 14. Généralisation du théorème précédent.	37
§ 15. Un critère de type.	38
§ 16. Un nouveau critère de type.	44
§ 17. La fonction $H(r_1, r_2)$.	50
§ 18. Exemple de cas hyperbolique.	55
§ 19. Conclusions: quelques remarques sur la fonction $H(r_1, r_2)$.	61