

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

CAÏUS JACOB

**Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par
certaines conditions aux limites. Applications à l'hydrodynamique**

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1935

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1935__174__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1935__174__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SÉRIE A, No. 1558

No. D'ORDRE :

2424

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. CAÏUS JACOB

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉTERMINATION DES FONCTIONS HARMONIQUES
CONJUGUÉES PAR CERTAINES CONDITIONS AUX LIMITES.
APPLICATIONS À L'HYDRODYNAMIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **24 JUIN** 1935, devant la Commission d'examen.

MM. HENRI VILLAT, *Président*

M. FRÉCHET

J. PÉRÈS

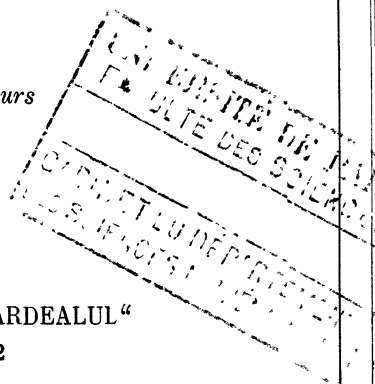
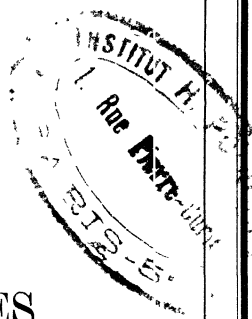
Examineurs

CLUJ

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL“

STRADA MEMORANDULUI 22

1935



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.
Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires</i>	{	H. LE CHATELIER	LÉON BRILLOUIN	AUGER
		H. LEBESGUE	GOURSAT	BLAISE
		A. FERNBACH	WALLERANT	DANGEARD
		A. LEDUC	GUILLET	JANET
		Émile PICARD	PÉCHARD	LESPIEAU
		Rémy PERRIER	FREUNDLER	MARCHIS
				MOUTON

PROFESSEURS

G. BERTRAND . . . T	Chimie biologique	A. DEBIERNE . . . T	Radioactivité
M. CAULLERY . . . T	Zoologie (Évolution des êtres organisés)	A. DUFOUR . . . T	Physique (P. C. B.)
G. URBAIN . . . T	Chimie générale	L. DUNOYER . . .	Optique appliquée
Émile BOREL . . . T	Calcul des probabilités et Physique mathématique	A. GUILLIERMOND T	Botanique (P. C. B.)
Jean PERRIN . . . T	Chimie physique	M. JAVILLIER . . .	Chimie biologique
H. ABRAHAM . . . T	Physique	L. JOLEAUD . . .	Paléontologie
E. CARTAN . . . T	Géométrie supérieure	ROBERT-LÉVY . . .	Zoo ogie
M. MOLLIARD . . . T	Physiologie végétale	F. PICARD . . .	Zoologie (Évolution des êtres organisés)
L. LAPICQUE . . . T	Physiologie générale	Henri VILLAT . . T	Mécanique des fluides et applications
E. VESSIOT . . . T	Mécanique analytique et Mécanique céleste	Ch. JACOB . . . T	Géologie
A. COTTON . . . T	Recherches physiques	P. PASCAL . . . T	Chimie minérale
J. DRACH . . . T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	M FRÉCHET . . . T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique
Charles FABRY . . T	Enseignement de Physique	E. ÉSCLANGON . . T	Astronomie
Charles PÉREZ . . T	Zoologie	Mme RAMART-LUCAS T	Chimie organique
LÉON BERTRAND . T	Géologie structurale et géologie appliquée	H. BEGHIN . . . T	Mécanique physique et expérimentale
P. PORTIER . . . T	Physiologie comparée	Foch	Mécanique expérimentale des fluides
E. RABAUD . . . T	Biologie expérimentale	PAUTHENIR . . .	Physique (P. C. B.)
M. GUICHARD . . .	Chimie minérale	De BROGLIE . . . T	Théories physiques
Paul MONTEL . . . T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations	CHRÉTIEN . . .	Optique appliquée
P. WINTREBERT . T	Anatomie et histologie comparées	P. JOB	Chimie générale
L. BLARINGHEM . T	Botanique	LABROUSTE . . .	Physique du Globe
O DUBOSCQ . . . T	Biologie maritime	PRENANT	Zoologie
G. JULIA T	Application de l'analyse à la Géométrie	VILLEY	Mécanique physique et expérimentale
C. MAUGUIN . . . T	Minéralogie	BOHN	Zoologie (P. C. B.)
A. MICHEL-LÉVY .	Pétrographie	COMBES	Botanique
H. BÉNARD . . . T	Mécanique expérimentale des fluides	GARNIER	Calcul différentiel
A. DENJOY . . . T	Calcul différentiel et calcul intégral	PÉRES	Mécanique des fluides
L. LUTAUD . . . T	Géographie physique et géologie dynamique	HACKSPILL	Chimie (P. C. B.)
Eugène BLOCH . . T	Physique théorique et physique céleste	LAUGIER	Physiologie générale
G. BRUHAT	Physique	TOUSSAINT	Technique Aéronautique
E. DARMOIS	Physique	M CURIE	Physique (P. C. B.)
		G. RIBAUD T	Hautes températures
		CHAZY T	Mécanique rationnelle
		GAULT	Chimie (P. C. B.)
		CROZE	Physique
		DUPONT T	Théories Chimiques
		LANQUINE	Géologie
		VALIRON	Mathématiques

Secrétaire A. PACAUD
Secrétaire honoraire D. TOMBECK.

Ames Parents

A

MONSIEUR HENRI VILLAT

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PROFESSEUR À LA SORBONNE

DIRECTEUR DE L'INSTITUT DE MÉCANIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Hommage de profonde admiration.

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA DÉTERMINATION DES FONCTIONS HARMONIQUES CONJUGUÉES PAR CERTAINES CONDITIONS AUX LIMITES.

Applications à l'Hydrodynamique.

INTRODUCTION

Il est bien connu que les grands progrès réalisés en Hydrodynamique à deux dimensions sont dûs en majeure partie au secours essentiel qu'apporte la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe.

Les problèmes aux limites qu'on y rencontre et dont nous nous proposons d'étudier quelques-uns d'une façon systématique, sont des problèmes mixtes faisant intervenir les parties réelle et imaginaire et les dérivées normales $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$ d'une fonction analytique $f(z) = u + iv$; en général ces problèmes sont non linéaires. Ils sont posés par la théorie des problèmes mixtes inverses (problème de LEVI-CIVITA-VILLAT dans la théorie des sillages, étude du mouvement des liquides pesants dans un plan vertical, théorie des ondes etc.).

Pour l'étude de tels problèmes il est utile de considérer d'abord les problèmes linéarisés correspondants. C'est-ce que nous avons fait dans la première partie de ce travail, en généralisant la méthode de FREDHOLM et en cherchant à représenter les fonctions u et v par des potentiels de simples ou doubles couches et par les potentiels associés correspondants.

Nous étudions ainsi le problème généralisé de DIRICHLET qui consiste à déterminer une fonction $f(z) = u + iv$, régulière en chaque point d'un domaine multiplement connexe, connaissant les valeurs que prennent u ou v sur des frontières distinctes. Le problème généralisé de NEUMANN, associé au précédent, revient à la détermination de $f(z)$ connaissant $\frac{du}{dn}$ ou $\frac{dv}{dn}$ sur les mêmes frontières (1).

(1) Nous avons résumé les principaux résultats concernant ces problèmes dans une Note des *Comptes rendus*, t. 198, 1934, p. 2225.

La méthode employée n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une autre permettant de ramener la résolution des problèmes aux limites de POINCARÉ et de M. HILBERT à celle de deux équations intégrales associées de FREDHOLM.

Nous introduisons certaines fonctions de GREEN permettant de résoudre les problèmes considérés et nous en étudions les propriétés. En particulier, on retrouve par la méthode précédente les importantes formules de M. H. VILLAT résolvant effectivement ces problèmes dans le cas de l'anneau circulaire.

Dans un autre chapitre, en supposant pour simplifier que le domaine soit doublement connexe, nous considérons des conditions aux limites du type

$$\frac{du}{dn} = A(s)u - C(s),$$

sur l'une des frontières, et

$$\frac{dv}{dn} = B(s)v - D(s), \quad \text{ou} \quad v = B(s),$$

sur l'autre courbe frontière, ou encore d'une façon plus générale

$$\frac{du}{dn} = f(u, v, s), \quad \frac{dv}{dn} = g(u, v, s)$$

sur les frontières considérées. Les méthodes des chapitres antérieurs permettent aisément de ramener la résolution de ces problèmes à celle d'équations fonctionnelles d'un type connu, grâce aux travaux récents de MM. J. LERAY et J. SCHAUDER.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous appliquons quelques-unes des méthodes précédentes à l'étude du mouvement plan, permanent, irrotationnel, discontinu et symétrique, d'un jet liquide jaillissant d'un canal rectiligne et heurtant un obstacle convexe. Ce problème a déjà fait l'objet de recherches de M. V. VALCOVICI; la détermination rigoureuse de la solution se ramène à la résolution d'un problème aux limites non linéaire d'un type considéré dans la première partie. Cette solution dépend de trois paramètres qu'on doit déterminer suivant les données du problème. En particulier, si l'obstacle est circulaire on peut obtenir des renseignements très précis sur la variation de la solution lorsque les paramètres varient. Il en résulte quelques propriétés simples des éléments géométriques du mouvement.

Signalons encore que les méthodes employées sont susceptibles d'applications à d'autres problèmes d'Hydrodynamique; elles permet-

tent aussi de retrouver par des voies plus simples des résultats connus, tels que ceux concernant la multiplicité des solutions des problèmes de MM. VILLAT et THIRY. Nous nous proposons de faire ces extensions dans un prochain travail.

Qu'il nous soit permis, en terminant, d'exprimer nos sentiments de profonde reconnaissance à notre Maître, M. HENRI VILLAT, pour les conseils et encouragements qu'il n'a cessé de nous donner. La lecture de ses Mémoires nous a été un guide précieux pour l'achèvement de ce travail.

Je tiens également à remercier M. PIERRE SERGESCU, professeur à l'Université de Cluj, de l'intérêt pris à ce Mémoire et du bienveillant accueil qu'il lui a réservé dans „*Mathematica*“.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

Remarques sur la mise en équations intégrales des problèmes aux limites de Poincaré et de Hilbert.

1^o. — Considérons, dans le plan $z = x + iy$, un domaine (Ω) simplement ou multiplement connexe, limité par des courbes ayant une courbure continue ; soient $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ des fonctions réelles de l'arc s de la frontière. On appelle problème de HILBERT le problème qui consiste à déterminer une fonction analytique $f(z) = u + iv$, régulière en chaque point intérieur à (Ω) et telle que ses parties réelle et imaginaire vérifient sur les contours la relation (2)

$$(1) \quad a(s)u + b(s)v = c(s).$$

Nous appelons problème de POINCARÉ le problème de déterminer $f(z) = u + iv$, régulière en chaque point intérieur à (Ω) , par la condition aux limites (3)

$$(2) \quad a(s) \frac{du}{dn} - b(s) \frac{dv}{dn} = c(s),$$

$\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$ désignant les dérivées normales de u et v , prises suivant la normale intérieure au domaine.

On doit à M. HILBERT une méthode qui permet de ramener, sous certaines conditions, la résolution du problème (1) à celle de deux problèmes de DIRICHLET. Lorsqu'on cherche à ramener les problèmes (1) et (2) à la résolution d'équations intégrales, en exprimant la solution par des potentiels de simples ou de doubles couches, on est con-

(2) D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Leipzig, 1912, Teubner), p. 81.

(3) H. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, t. III, p. 251, 1910, (Gauthier-Villars).

duit à des équations intégrales singulières auxquelles les théorèmes de FREDHOLM ne sont plus applicables⁽⁴⁾.

Nous nous proposons d'indiquer une méthode qui permet d'attaquer, sous une certaine condition, aux problèmes (1) et (2) deux équations intégrales du type de FREDHOLM. Rappelons auparavant quelques propriétés des potentiels, de simples ou doubles couches, dont nous nous servirons constamment dans la suite.

2°. — Le potentiel logarithmique de simple couche

$$(3) \quad V_M = \int_{(C)} \mu(s_P) \log \frac{1}{r} ds_P, \quad r = \overline{MP}$$

correspondant à une densité $\mu(s)$ bornée et intégrable, étalée sur la courbe fermée (C), à tangente continue, est une fonction harmonique des coordonnées x, y du point M, régulière à l'intérieur de (C) et continue sur le contour; à l'extérieur, il représente une fonction harmonique régulière en chaque point à distance finie.

Au voisinage du point à l'infini on a

$$V_M = k \log \frac{1}{R} + \text{partie régulière, (nulle à l'infini),}$$

avec

$$k = \int_{(C)} \mu(s) ds, \quad R = \overline{OM}$$

Si la densité $\mu(s)$ est continue, les formules, dues à M. PLEMELJ, concernant la discontinuité des dérivées normales de V_M au point M_0 , situé sur (C), sont

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dV_M^e}{dn} - \frac{dV_M^i}{dn} &= 2\pi\mu(s_{M_0}) \\ \frac{dV_M^e}{dn} + \frac{dV_M^i}{dn} &= 2 \int_{(C)} \mu(s_P) \frac{\cos \psi}{r} ds_P \end{aligned}$$

ψ étant l'angle, compté dans le sens direct, que fait $\overrightarrow{M_0P}$ avec la nor-

(4) Cf. H. POINCARÉ, loc. cit. (3), F. NOETHER, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Mathematische Annalen*, 82, 1920, p. 42—63, G. BERTRAND, La théorie des marées et les équations intégrales, *Annales de l'Ecole Normale*, t. XL, 1923, p. 151—258.

male intérieure en M_0 , à la courbe (C).

La fonction

$$(5) \quad \bar{V}_M = - \int_{(C)} \mu(s_P) (\vec{Ox}, \vec{MP}) ds_P$$

est harmonique, régulière, par rapport aux coordonnées x, y du point M , à l'intérieur de (C); elle représente aussi une fonction harmonique à l'extérieur de (C), qui est régulière en chaque point à distance finie, sauf au point à l'infini où elle se comporte comme $-k\theta$, en posant $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$.

V_M et $\bar{V}_M$ sont des fonctions harmoniques conjuguées tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de (C).

Lorsque l'intégrale singulière (valeur principale au sens de CAUCHY)

$$(6) \quad - \int_{(C)} \mu(s_P) \frac{\sin \psi}{r} ds_P$$

existe, la dérivée tangentielle de V_M et la dérivée normale de $\bar{V}_M$ existent et sont continues en traversant (C); elles sont égales et données par l'expression (6).

3°. — Le potentiel de double couche, correspondant à la densité continue $\mu(s_P)$,

$$(7) \quad W_M = \int_{(C)} \mu(s_P) \frac{\cos \phi}{r} ds_P,$$

où ϕ désigne l'angle, compté dans le sens direct, que fait $\vec{PM}$ avec la normale intérieure à (C) au point P, représente une fonction harmonique, régulière, à l'intérieur de (C); à l'extérieur c'est encore une fonction harmonique régulière, nulle à l'infini.

Les valeurs que prend W_M par continuité intérieure ou extérieure, lorsqu'on traverse (C) au point M, sont données par

$$(8) \quad \begin{aligned} W_{M_0}^i &= W_{M_0} + \pi \mu(s_{M_0}) \\ W_{M_0}^e &= W_{M_0} - \pi \mu(s_{M_0}) \end{aligned}$$

L'expression

$$(9) \quad \bar{W}_M = - \int_{(C)} \mu(s_P) \frac{\sin \phi}{r} ds_P$$

représente aussi deux fonctions harmoniques régulières suivant que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de (C). Elle est régulière au point à

l'infini et s'y annule. Les fonctions W_M et $\overline{W}_M$ sont conjuguées. On a :

$$(10) \quad W_M + i\overline{W}_M = \frac{1}{i} \int_{(C)} \mu(s_P) \frac{dz_P}{z_P - z_M},$$

en intégrant dans le sens direct.

Si l'intégrale singulière

$$(11) \quad \overline{W}_{M_0} = - \int_{(C)} \mu(s_P) \frac{\sin \phi}{r} ds_P$$

existe pour M_0 situé sur (C) , on peut montrer, en tenant compte des propriétés classiques de la formule-intégrale de CAUCHY, que $\overline{W}_M$ est continu lorsqu'on traverse (C) au point M_0 . On a (5)

$$(12) \quad \overline{W}_{M_0}^i = \overline{W}_{M_0} = \overline{W}_{M_0}^e$$

Lorsque $\mu(s) = 1$, on a $W + i\overline{W} = \begin{cases} 2\pi \\ \pi \\ 0 \end{cases}$ suivant que M est à l'intérieur de (C) , sur (C) , ou à l'extérieur.

4. — Ces préliminaires étant posés, cherchons la solution du problème (1) sous la forme

$$(13) \quad f(z) = u + iv = \frac{1}{i} \int_{(C)} [a(\sigma) + il(\sigma)] \mu(\sigma) \frac{dz_P}{z_P - z}$$

en prenant comme inconnue $\mu(\sigma)$ et en intégrant dans le sens direct; la formule (13) donne

$$(14) \quad \begin{aligned} u &= \int_{(C)} a(\sigma) \mu(\sigma) \frac{\cos \phi}{r} d\sigma + \int_{(C)} b(\sigma) \mu(\sigma) \frac{\sin \phi}{r} d\sigma \\ v &= - \int_{(C)} a(\sigma) \mu(\sigma) \frac{\sin \phi}{r} d\sigma + \int_{(C)} b(\sigma) \mu(\sigma) \frac{\cos \phi}{r} d\sigma. \end{aligned}$$

Supposons que u et v tendent vers des limites lorsque le point intérieur M tend vers le point M_0 de la frontière. Ces limites étant données par les formules (8) et (12), on constate aisément que le problème (1)

(5) Cf. J. PRIWALOFF, *Journal de l'Ecole Polytechnique* 2^e série, 24^e cahier, 1924 p. 110.

conduit à envisager l'équation intégrale

$$(15) \quad \begin{aligned} \pi[a^2(s) + b^2(s)]\mu(s) + \lambda \int_{(C)} \mu(\sigma)[a(s)a(\sigma) + b(s)b(\sigma)] \frac{\cos \phi}{r} d\sigma \\ + \lambda \int_{(C)} \mu(\sigma)[a(s)b(\sigma) - a(\sigma)b(s)] \frac{\sin \phi}{r} d\sigma = c(s) \end{aligned}$$

où l'on doit faire $\lambda = +1$; on suppose $a^2(s) + b^2(s) \neq 0$. Cette équation n'est pas singulière toutes les fois que le noyau

$$K(s, \sigma) = [a(s)b(\sigma) - a(\sigma)b(s)] \frac{\sin \phi}{r}$$

est tel que les théorèmes de FREDHOLM puissent lui être appliqués. Il en est ainsi en particulier lorsque $a(s)$, $b(s)$ vérifient une inégalité de LIPSCHITZ, ou encore une condition de HOLDER d'exposant $\alpha > 0$. En effet, on peut écrire

$$K(s, \sigma) = \{[a(s) - a(\sigma)]b(\sigma) + [b(\sigma) - b(s)]a(\sigma)\} \frac{\sin \phi}{r}$$

et d'autre part, (C) ayant une courbure continue, on a

$$\frac{\sin \phi}{r} = \frac{1}{\sigma - s} + \text{fonction continue.}$$

L'équation intégrale associée de l'équation (15) est

$$(16) \quad \begin{aligned} \pi\chi(s) + \lambda \int_{(C)} \chi(\sigma) \frac{a(s)a(\sigma) + b(s)b(\sigma)}{a^2(\sigma) + b^2(\sigma)} \frac{\cos \phi}{r} d\sigma \\ - \lambda \int_{(C)} \chi(\sigma) \frac{a(s)b(\sigma) - a(\sigma)b(s)}{a^2(\sigma) + b^2(\sigma)} \frac{\sin \phi}{r} d\sigma = c_1(s). \end{aligned}$$

Posons

$$v(s) = \frac{\chi(s)}{a^2(s) + b^2(s)}, \quad c_1(s) = -c(s).$$

La fonction $v(s)$ vérifie l'équation intégrale

$$(17) \quad \begin{aligned} \pi[a^2(s) + b^2(s)]v(s) + \lambda \int_{(C)} v(\sigma)[a(s)a(\sigma) + b(s)b(\sigma)] \frac{\cos \phi}{r} d\sigma \\ - \lambda \int_{(C)} v(\sigma)[a(s)b(\sigma) - a(\sigma)b(s)] \frac{\sin \phi}{r} d\sigma = -c(s) \end{aligned}$$

Cette équation, pour $\lambda = -1$, est liée de très près à la résolution du problème aux limites de POINCARÉ. En effet, cherchons la solution de ce problème sous la forme

$$(18) \quad f(z) = u + iv = \int_{(C)} [a(\sigma) - ib(\sigma)] v(\sigma) e^{-i\alpha_P} \log \frac{1}{z_P - z} dz_P$$

où α_P désigne l'angle que fait, avec Ox , la tangente positive de (C).

La formule (18) étant équivalente à

$$(19) \quad \begin{aligned} u &= \int_{(C)} a(\sigma) v(\sigma) \log \frac{1}{r} d\sigma - \int_{(C)} b(\sigma) v(\sigma) \Theta d\sigma \\ v &= - \int_{(C)} a(\sigma) v(\sigma) \Theta d\sigma - \int_{(C)} b(\sigma) v(\sigma) \log \frac{1}{r} d\sigma \end{aligned}$$

en posant $\Theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MP})$, on constate facilement, en vertu des formules (4) et (6), que le problème (2) se traduit par l'équation (17) pour $\lambda = -1$ (6).

On peut d'ailleurs toujours supposer qu'on a $a^2(s) + b^2(s) = 1$ de sorte que les équations (16) et (17) coïncident.

Supposons maintenant que le domaine (Ω) soit multiplement connexe et que sur certaines portions distinctes de la frontière on ait $a(s) = 1$, $b(s) = 0$; sur les autres portions de la frontière, sans aucun point commun avec les premières, on suppose qu'on ait $a(s) = 0$,

(6) La méthode employée peut être généralisée et permet de ramener à des équations intégrales non singulières la résolution du problème aux limites

$$a(s) \frac{du}{dn} + b(s) \frac{du}{ds} + c(s)u = d(s)$$

pour l'équation du type elliptique $L(u) = \Delta u + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = 0$. (Problème de POINCARÉ dans la théorie des marées; voir Leçons sur la Mécanique céleste, p. 251, t III).

Il suffit pour cela d'associer à la solution fondamentale de M. PICARD une autre non uniforme, $v = P(x, y; x_0, y_0) \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0} + Q(x, y; x_0, y_0)$ dont l'existence se démontre facilement. Par la même méthode on peut traiter le problème de HILBERT

$$a(s)u + b(s)v = c(s)$$

Lorsque u et v sont deux fonctions conjuguées de BELTRAMI.

$b(s)=1$. On constate alors facilement que les équations (15) et (17) sont toujours du type de FREDHOLM. Les problèmes (1) et (2) correspondants seront appelés *problèmes généralisés de DIRICHLET et de NEUMANN*.

Nous nous bornerons dans la suite à l'étude de ces deux problèmes (7).

CHAPITRE II.

Étude des problèmes généralisés de Dirichlet et de Neumann.

5°. — Soit (Ω) un domaine d'un seul tenant, multiplement connexe, dont la frontière est formée d'une courbe extérieure (C_0) et des courbes fermées intérieures (C_j) , $(j=1, 2, \dots, p)$ (8), (D_k) ($k=1, 2, \dots, q$), sans aucun point commun. On suppose que leur courbure varie d'une façon continue.

I. Le problème généralisé de DIRICHLET s'énonce comme suit : déterminer une fonction analytique $F(z) = U + iV$, régulière en chaque point de (Ω) , uniforme ou pouvant avoir des périodes cycliques imaginaires autour des (C_j) , $(j=1, 2, \dots, p)$, réelles autour des (D_k) (9), connaissant les suites de valeurs continues $\phi_0(s)$, $\phi_j(s)$ vers lesquelles tend U lorsque le point intérieur (x, y) tend vers un point de (C_0) ou des (C_j) , et les valeurs continues $\psi_k(s)$ vers lesquelles tend V lorsque le point (x, y) tend vers un point des (D_k) .

II. Le problème généralisé de NEUMANN, associé au précédent est le suivant : déterminer $f(z)=u+iv$, régulière en chaque point de

(7) Lorsqu'une même courbe frontière est divisée en portions sur lesquelles on a respectivement $a(s)=1$, $b(s)=0$ ou $a(s)=0$, $b(s)=1$, les équations (15) et (17) sont singulières. Le problème (1) correspondant à fait l'objet de recherches de MM. V. VOLTERRA (*Annali di Matematica*, t. 11, 1883), H. VILLAT (*Acta Mathematica*, t. 40, 1916), V. VALCOVICI (*Bulletin scientifique de l'Académie Roumaine*, 4^e série, t. 4, 1915-16) A. SIGNORINI (*Annali di Matematica*, 3^e série, t. 25, 1916), B. DEMTCHENKO (*Comptes Rendus*, t. 192, 1931, p. 141). On doit à M. A. SIGNORINI la solution explicite de ce problème dans le cas du cercle et à M. B. DEMTCHENKO dans celui de l'anneau circulaire ; ces solutions sont obtenues en appliquant la méthode de M. HILBERT.

Pour la multiplicité des solutions, dans l'anneau, voir aussi C. JACOB (*Comptes Rendus*, t. 196, 1933, p. 91).

(8) Il nous arrivera quelquefois de donner à j aussi la valeur zéro lorsqu'il s'agira de la courbe (C_0) .

(9) La somme de périodes cycliques relatives aux courbes (D_k) , décrites dans le même sens, devra être nulle.

(Ω) connaissant les valeurs $g_0(s)$, $g_i(s)$ que prend $\frac{du}{dn}$ sur (C_0) , (C_j) et les valeurs $h_k(s)$ prises par $\frac{dv}{dn}$ sur (D_k) . Les dérivées normales sont prises suivant la normale intérieure au domaine.

D'après la méthode exposée précédemment, nous cherchons la solution du problème I sous la forme

$$(20) \quad \Phi(z) = \frac{1}{i} \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \mu_j(\sigma) \frac{dz_P}{z_P - z} + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \nu_k(\sigma) \frac{dz_P}{z_P - z},$$

$\mu_j(s)$, $\nu_k(s)$ étant des fonctions réelles de l'arc s de (C_j) ou de (D_k) ; l'intégration est faite dans le sens direct par rapport à (Ω).

Posons

$$(21) \quad \begin{aligned} W_j &= \int_{(C_j)} \mu_j(\sigma) \frac{\cos \phi_{jM}}{r} d\sigma, & \overline{W}_j &= - \int_{(C_j)} \mu_j(\sigma) \frac{\sin \phi_{jM}}{r} d\sigma, (j=0, 1, \dots, p) \\ T_k &= \int_{(D_k)} \nu_k(\sigma) \frac{\cos \phi_{kM}}{r} d\sigma, & \overline{T}_k &= - \int_{(D_k)} \nu_k(\sigma) \frac{\sin \phi_{kM}}{r} d\sigma, (k=1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

en désignant par ϕ_{jM} , ϕ_{kM} , l'angle que fait $\overrightarrow{PM}$ avec la normale à (C_j) ou (D_k) au point courant P , la normale étant dirigée vers l'intérieur de (Ω).

En séparant les parties réelle et imaginaire dans la formules (20) on trouve

$$(22) \quad \begin{aligned} U &= \sum_{j=0}^p W_j - \sum_{k=1}^q \overline{T}_k \\ V &= \sum_{j=0}^p \overline{W}_j + \sum_{k=1}^q T_k \end{aligned}$$

Le problème I conduit, en vertu de (20), à considérer le système

$$(A) \quad \begin{cases} \pi \mu_l(s) + \lambda \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \mu_j(\sigma) \frac{\cos \phi_{jl}}{r} d\sigma + \lambda \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \nu_k(\sigma) \frac{\sin \phi_{kl}}{r} d\sigma = \phi_l(s) \\ \pi \nu_\rho(s) - \lambda \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \mu_j(\sigma) \frac{\sin \phi_{j\rho}}{r} d\sigma + \lambda \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \nu_k(\sigma) \frac{\cos \phi_{k\rho}}{r} d\sigma = \phi_\rho(s) \end{cases}$$

($l = 0, 1, \dots, p$; $\rho = 1, 2, \dots, q$)

où l'on doit faire $\lambda = +1$. C'est un système de $p + q + 1$ équations intégrales du type de FREDHOLM. Pour λ quelconque, le système (A) correspond au problème aux limites suivant

$$(A') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\lambda}{2} U' - \frac{1-\lambda}{2} U^e = \phi_l(s) \text{ sur } (C_l), \quad (l=0, 1, 2, \dots, p), \\ \frac{1+\lambda}{2} V' - \frac{1-\lambda}{2} V^e = \psi_\rho(s) \text{ sur } (D_\rho), \quad (\rho=1, 2, \dots, q), \end{array} \right.$$

en désignant par U^i , U^e , V^i , V^e les déterminations de U et V à l'intérieur et à l'extérieur de (Ω) .

Nous allons maintenant mettre en équations le problème généralisé de NEUMANN. Cherchons-en la solution sous la forme

$$(23) \quad \Psi(z) = \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(\sigma) \cdot e^{-i\alpha_j} \log \frac{1}{z_P - z} dz_P - i \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k(\sigma) e^{-i\beta_k} \log \frac{1}{z_P - z} dz_P$$

en désignant par α_j , β_k les angles que font avec Ox les tangentes, positives par rapport à (Ω) , des courbes (C_j) , (D_k) et en intégrant dans le sens direct.

En séparant les parties réelle et imaginaire, on a :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sum_{j=0}^p U_j + \sum_{k=1}^q \bar{V}_k \\ v = \sum_{j=0}^p \bar{U}_j - \sum_{k=1}^q V_k \end{array} \right.$$

avec

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_j = \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(\sigma) \log \frac{1}{r} d\sigma, \quad \bar{U}_j = - \int_{(C_j)} \bar{\mu}(\sigma) \Theta_j d\sigma, \\ V_k = \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k(\sigma) \log \frac{1}{r} d\sigma, \quad \bar{V}_k = - \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k(\sigma) \Theta_{kM} d\sigma, \end{array} \right.$$

et $\Theta_{jM} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MP_j}), \quad \Theta_{kM} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MP_k})$

Cela posé, le problème II conduit à envisager le système

$$(B) \quad \begin{cases} \pi \bar{\mu}_l(s) + \lambda \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(\sigma) \frac{\cos \phi_{lj}}{r} d\sigma - \lambda \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{v}_k(\sigma) \frac{\sin \phi_{lk}}{r} d\sigma = -g_l(s) \\ \pi \bar{v}_\rho(s) + \lambda \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(\sigma) \frac{\sin \phi_{\rho j}}{r} d\sigma + \lambda \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{v}_k(\sigma) \frac{\cos \phi_{\rho k}}{r} d\sigma = h_\rho(s) \end{cases}$$

$$(l=0, 1, 2, \dots, p), (\rho=1, 2, \dots, q),$$

où l'on doit faire $\lambda = -1$. On a désigné par ϕ_{lj} l'angle de sens direct que fait $\overrightarrow{PM_j}$ avec la normale à la courbe (C_l) au point courant P, M_j étant un point situé sur la courbe de même indice. La normale est dirigée vers l'intérieur de (Ω) .

On constate facilement en vertu de (4) que, pour λ quelconque, le système (B) correspond au problème aux limites ci-dessous : déterminer les potentiels de simples couches U_j , V_k et leurs associés de façon à avoir

$$(B') \quad \begin{cases} \frac{1+\lambda}{2} \frac{du^e}{dn} - \frac{1-\lambda}{2} \frac{du^i}{dn} = -g_l(s) \quad \text{sur } (C_l), & (l=0, 1, \dots, p), \\ \frac{1+\lambda}{2} \frac{dv^e}{dn} - \frac{1-\lambda}{2} \frac{dv^i}{dn} = -h_\rho(s) \quad \text{sur } (D_\rho), & (\rho=1, 2, \dots, q). \end{cases}$$

Les systèmes (A) et (B) sont associés, au sens de la théorie des équations intégrales linéaires.

6°. — Avant de passer à la discussion de ces deux systèmes, nous allons donner deux formules dont nous nous servirons constamment dans la suite.

Considérons une fonction $f(z)=u+iv$, régulière dans (Ω) . D'après la formule de GREEN, on a :

$$\iint_{(\Omega)} \left| \frac{df}{dz} \right|^2 dx dy + \int_{\Sigma_{C_j}} u \frac{du}{dn_i} ds + \int_{\Sigma_{D_k}} u \frac{du}{dn_i} ds = 0.$$

Or sur la frontière on doit avoir les relations

$$\frac{du}{ds} = \frac{dv}{dn_i} \quad , \quad \frac{du}{dn_i} = -\frac{dv}{ds} \quad ,$$

en supposant, bien entendu, que u et v possèdent des dérivées premières sur la frontière. Ces relations entraînent par une intégration

par parties

$$(I) \quad \iint_{(\Omega)} \left| \frac{df}{dz} \right|^2 dx dy + \int_{\Sigma_{C_j}} u \frac{du}{dn_i} ds + \int_{\Sigma_{D_k}} v \frac{dv}{dn_i} ds = 0$$

La formule (I) une fois obtenue, on peut la légitimer a posteriori, en supposant seulement que u et $\frac{du}{dn_i}$ existent sur (C_j) , ainsi que v et $\frac{dv}{dn_i}$ sur (D_k) , et y soient continus.

Considérons maintenant deux fonctions $f_1(z) = u_1 + iv_1$, $f_2(z) = u_2 + iv_2$, régulières dans (Ω) . En partant de la formule classique

$$\int_{\Sigma_{C_j} + \Sigma_{D_k}} \left(u_1 \frac{du_2}{dn} - u_2 \frac{du_1}{dn} \right) ds = 0,$$

on obtient par un procédé analogue

$$(II) \quad \int_{\Sigma_{C_j}} \left(u_1 \frac{du_2}{dn} - u_2 \frac{du_1}{dn} \right) ds - \int_{\Sigma_{D_k}} \left(v_1 \frac{dv_2}{dn} - v_2 \frac{dv_1}{dn} \right) ds = 0;$$

cette formule est valable si u_1 , u_2 , $\frac{du_1}{dn}$, $\frac{du_2}{dn}$ existent sur (C_j) , et y sont continus ainsi que v_1 , v_2 , $\frac{dv_1}{dn}$, $\frac{dv_2}{dn}$ sur (D_k) .

Signalons aussi les deux lemmes suivants, conséquences immédiates de la formule (I).

LEMME I

Si $f(z) = u + iv$ est une fonction régulière dans (Ω) , telle qu'on ait $\frac{du}{dn} = 0$ sur (C_j) , ($j = 0, 1, \dots, p$), $\frac{dv}{dn} = 0$ sur (D_k) , ($k = 1, 2, \dots, q$), elle se réduit nécessairement à une constante.

LEMME II.

Si $f(z) = u + iv$ est une fonction régulière dans (Ω) , telle qu'on ait $u = c_j$ sur (C_j) , ($j = 0, 1, \dots, p$), et $v = d_k$ sur (D_k) , ($k = 1, 2, \dots, q$), les c_j et d_k étant des constantes et si de plus $\frac{du}{dn}$ existe et est continu sur les (C_j) ainsi que $\frac{dv}{dn}$ sur les (D_k) , $f(z)$ se réduit nécessairement à une constante.

Il suffit de remarquer qu'on a

$$\int_{(C_j)} \frac{du}{dn} ds = 0, \quad \int_{(D_k)} \frac{dv}{dn} ds = 0$$

par suite de l'uniformité de $f(z)$, et d'appliquer la formule (I).

7°. — Passons maintenant à l'étude des systèmes (A) et (B) pour $\lambda = \pm 1$. Le système (A), rendu homogène, admet pour $\lambda = +1$, les $p+q$ solutions effectives

$$\begin{aligned} \{ \mu_0(s) = 0, \quad \mu_l(s) = 1, \quad \mu_j(s) = 0, \quad \nu_k(s) = 0 \}, \quad (l = 1, 2, \dots, p) \\ j \neq l \quad (k = 1, 2, \dots, q) \\ \{ \mu_0(s) = 0, \quad \mu_j(s) = 0, \quad \nu_p(s) = 1, \quad \nu_k(s) = 0 \}, \quad (p = 1, 2, \dots, q). \\ (j = 1, 2, \dots, p) \quad k \neq p \end{aligned}$$

Ces solutions sont linéairement indépendantes. Pour $\lambda = -1$, il admet la solution effective

$$\mu_0(s) = 1, \quad \mu_j(s) = 1, \quad \nu_k(s) = 0 \\ (j = 1, 2, \dots, p) \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Les solutions du système (B) homogène, pour $\lambda = +1$, vérifient la condition

$$(26) \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(s) ds = 0.$$

Les solutions, pour $\lambda = -1$, du système (B) homogène vérifient les $p+q$ conditions

$$(27) \quad \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(s) ds = 0, \quad \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k(s) ds = 0. \\ (j = 1, 2, \dots, p), \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

Les formules (26) et (27) sont des conséquences de la propriété bien connue d'orthogonalité entre les solutions fondamentales des systèmes de FREDHOLM associés, correspondant à des valeurs caractéristiques différentes.

Discussion des systèmes (A) et (B) pour $\lambda = +1$.

Nous nous proposons maintenant de montrer que les systèmes homogènes (A) et (B) n'admettent, pour $\lambda = +1$, plus de $p+q$ solutions linéairement distinctes. Pour cela, nous allons raisonner sur les systèmes (A') et (B'), homogènes, qui leur sont équivalents.

LEMME III. *Les seules répartitions de masses continues ⁽¹⁰⁾ telles que les potentiels U_j , V_k et leurs associés vérifient le système (B') homogène, pour $\lambda = +1$, et soient réguliers à l'infini, sont $\bar{\mu}_j(s) = 0$, $\bar{\nu}_k(s) = 0$.*

On sait que si une fonction harmonique V est régulière à l'extérieur (E) d'une courbe fermée simple (C), y compris le point à l'infini, on a la formule

$$(28) \quad \int_{(C)} V^e \frac{dV^e}{dn_i} ds = - \iint_{(E)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

pourvu que $\frac{dV^e}{dn_i}$ existe sur (C) et soit continu. Soit de même W une fonction régulière à l'intérieur (I) de (C). On a :

$$(29) \quad \int_{(C)} W^i \frac{dW^i}{dn_i} ds + \iint_{(I)} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

Dans ces formules les normales sont dirigées vers l'intérieur de (C). En appliquant ces deux formules aux fonctions u et v qui figurent dans (B'), on en tire.

$u^e = \text{const.}$, à l'extérieur de (C_0) et à l'intérieur des (C_j) .

$v^e = \text{const.}$, à l'intérieur des (D_k) .

Cela prouve, en tenant compte de (24), que les déterminations des potentiels U_0 , U_j , V_k définies respectivement à l'extérieur de (C_0) ou à l'intérieur de (C_j) ou (D_k) , sont prolongeables dans (Ω) et y sont uniformes. On pourrait montrer qu'elles n'y diffèrent des déterminations physiques que par des constantes. Il est plus simple de remarquer que, en vertu de la continuité des U_j et $\bar{V}_k$ sur (C_i) et de celle des $\bar{U}_j$ et V_k sur (D_p) , on a aussi

$$\begin{aligned} u^i &= \text{const.} && \text{sur } (C_0), (C_i), \\ v^i &= \text{const.} && \text{sur } (D_p). \end{aligned}$$

D'autre part $\frac{du^i}{dn}$ existe sur (C_0) , (C_j) , ainsi que $\frac{dv^i}{dn}$ sur (D_p) , et ces dérivées normales sont continues ; de plus, $f(z) = u^i + iv^i$ est uniforme

⁽¹⁰⁾ En supposant seulement que $\bar{\mu}_j(s)$, $\bar{\nu}_k(s)$ soient intégrables, il résulte du système (B) qu'elles sont nécessairement continues.

dans (Ω) , en vertu de la régularité de U_j et V_k à l'infini. Il en résulte, en tenant compte du lemme II, établi plus haut, $f(z) = \text{const.}$ dans (Ω) . Cela entraîne $\bar{\mu}_j(s) = 0$, $\bar{\nu}_k(s) = 0$, en vertu des formules (4) et (24).

(C. Q. F. D.)

Supposons maintenant que le système homogène (B) admette, pour $\lambda = +1$, $p+q+1$ solutions effectives linéairement distinctes,

$$\{\bar{\mu}_j^{(r)}(s), \bar{\nu}_k^{(r)}(s)\}, \quad r=1, 2, \dots, p+q+1.$$

On doit avoir

$$(30) \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) ds = 0, \quad (r=1, 2, \dots, p+q+1);$$

choisissons les constantes α_r de façon que les $p+q+1$ solutions effectives

$$(31) \quad \mu_j(s) = \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r \bar{\mu}_j^{(r)}(s), \quad \nu_k(s) = \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r \bar{\nu}_k^{(r)}(s),$$

($j=0, 1, \dots, p; k=1, 2, \dots, q$),

vérifient les relations

$$(32) \quad \int_{(C_j)} \mu_j(s) ds = 0, \quad \int_{(D_k)} \nu_k(s) ds = 0,$$

de sorte que les potentiels de simples couches U_j, V_k correspondant aux densités $\mu_j(s), \nu_k(s)$ soient réguliers à l'infini ainsi que leurs associés.

Ce choix est toujours possible. En effet, les relations (32) constituent un système de $p+q+1$ équations, linéaires en α_r , homogènes, et à autant d'inconnues.

Son déterminant

$$(33) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) ds \\ \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) ds \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} r=1, 2, \dots, p+q+1, \\ j=0, 1, \dots, p; k=1, 2, \dots, q, \end{matrix}$$

est manifestement nul, en vertu de (30). De plus, en vertu du lemme

précédent, on ne peut avoir à la fois

$$\int_{(C_j)} \overline{\mu_j^{(r)}}(s) ds = 0, \quad \int_{(D_k)} \overline{v_k^{(r)}}(s) ds = 0, \quad (j=0, 1, \dots, p), \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

pour aucune valeur de r .

On a donc, en appliquant toujours le même lemme,

$$\mu_j(s) = \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r \overline{\mu_j^{(r)}}(s) \equiv 0, \quad (j=0, 1, \dots, p),$$

$$v_k(s) = \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r \overline{v_k^{(r)}}(s) \equiv 0, \quad (k=1, 2, \dots, q),$$

les α_r n'étant pas tous nuls. Ceci est contraire à l'hypothèse.

Ainsi donc, les systèmes associés (A) et (B), homogènes, admettent, pour $\lambda = +1$, $p+q$ solutions effectives linéairement distinctes.

Soient $\{\overline{\mu_j^{(r)}}(s), \overline{v_k^{(r)}}(s)\}$, $(j=0, 1, \dots, p)$; $(k=1, 2, \dots, q)$, $r=1, 2, \dots, p+q$, les $p+q$ solutions effectives du système homogène (B), pour $\lambda = +1$. En appliquant le troisième théorème de FREDHOLM au système (A) non homogène, on trouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il admette des solutions sont

$$(34) \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \overline{\mu_j^{(r)}}(s) \phi_j(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \overline{v_k^{(r)}}(s) \psi_k(s) ds = 0$$

$r = 1, 2, \dots, p+q.$

De même, pour que le système non homogène (B) admette des solutions pour $\lambda = +1$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(35) \quad \int_{(C_j)} g_j(s) ds = 0, \quad \int_{(D_k)} h_k(s) ds = 0$$

$(j=1, 2, \dots, p), \quad (k=1, 2, \dots, q).$

80. — Examinons de plus près les conditions (34) trouvées plus haut. Il résulte de ce qui précède qu'elles sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une solution du problème généralisé de DIRICHLET, représentable sous la forme (20). Cependant il n'en résulte pas que ces conditions soient nécessaires pour l'existence d'une solution uniforme.

Nous allons montrer que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont au nombre de $p+q-1$. A cet effet, cher-

chons à résoudre, par la méthode précédente, le problème généralisé de DIRICHLET pour les données $\phi_0(s)$, $\phi_j(s) - c_j$, $\psi_k(s) - d_k$, les c_j ($j=1, 2, \dots, p$) et d_k ($k=1, 2, \dots, q$), étant des constantes que nous tâcherons de déterminer de telle façon que la solution du problème puisse être représentée sous la forme (20). En appliquant les conditions (34) aux nouvelles données, on est conduit à un système de $p+q$ équations linéaires non homogènes, par rapport aux $p+q$ inconnues c_j , d_k ,

$$(36) \quad \sum_{j=1}^p c_j \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) ds + \sum_{k=1}^q d_k \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) ds = \\ = \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) \phi_j(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) \psi_k(s) ds \\ (r = 1, 2, \dots, p+q).$$

Le déterminant du système

$$(37) \quad D = \begin{vmatrix} \int_{C_j} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) ds \\ \int_{D_k} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) ds \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} r=1, 2, \dots, p+q \\ j=1, 2, \dots, p; k=1, 2, \dots, q \end{matrix}$$

n'est pas nul. En effet, s'il l'était on pourrait trouver des constantes α_r , non toutes nulles, telles qu'on ait

$$(38) \quad \begin{aligned} \sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) ds &= 0 \\ \sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) ds &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{pour} \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, q. \end{matrix}$$

On en déduirait, en tenant compte de (30),

$$(39) \quad \sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \int_{(C_0)} \bar{\mu}_0^{(r)}(s) ds = - \sum_{j=1}^p \int_{(C_j)} \left(\sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \bar{\mu}_j^{(r)}(s) \right) ds = 0,$$

et en appliquant le lemme III aux potentiels de simples couches auxquels correspondent les masses

$$\mu_j(s) = \sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \bar{\mu}_j^{(r)}(s), \quad \nu_k(s) = \sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \bar{\nu}_k^{(r)}(s) \\ (j=0, 1, \dots, p) \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

on en concluerait $\mu_j(s) \equiv 0$, $\nu_k(s) \equiv 0$, ce qui est absurde puisque le système (B), homogène, admet bien, pour $\lambda = +1$, $p+q$ solutions linéairement distinctes.

Les c_j et d_k étant déterminés par (36), désignons par $F_1(z)$ la solution du problème généralisé de DIRICHLET pour les données $\phi_0(s)$, $\phi_j(s) - c_j$, $\psi_k(s) - d_k$ (11).

Proposons-nous maintenant de résoudre le problème suivant (**Problème C**): déterminer une fonction analytique $F_2(z)$ régulière en chaque point de (Ω) , telle qu'on ait: $R[F_2(z)] = 0$ sur (C_0) , $R[F_2(z)] = c_j$ sur (C_j) , $Im[F_2(z)] = d_k$ sur (D_k) . Pour cela, nous allons d'abord démontrer le théorème ci-dessous:

On peut trouver $p+q-1$ fonctions analytiques $f_1(z), \dots, f_{p+q-1}(z)$, régulières en chaque point de (Ω) , linéairement distinctes, possédant des constantes cycliques et telles que leurs parties réelles prennent des valeurs constantes sur (C_0) , (C_j) , leurs parties imaginaires étant constantes sur (D_k) , ($k = 1, 2, \dots, q$).

Cherchons à représenter ces fonctions sous la forme (23) par des potentiels de simples couches et leurs associés. Désignons par $f(z) = u + iv$, la fonction cherchée.

En employant les notations (25), on a

$$(24') \quad \begin{cases} u = \sum_{j=0}^p U_j + \sum_{k=1}^q \bar{V}_k \\ v = \sum_{j=0}^p \bar{U}_j - \sum_{k=1}^q V_k \end{cases}$$

En vertu de la continuité des potentiels de simples couches, il revient au même de remplacer les conditions $u = \text{const}$ sur (C_j) , $v = \text{const.}$ sur (D_k) , par $\frac{du^e}{dn} = 0$ sur (C_j) , ($j = 1, 2, \dots, p$), $\frac{dv^e}{dn} = 0$ sur (D_k) , ($k = 1, 2, \dots, q$), en représentant par u^e et v^e les $p+q$ fonctions harmoniques régulières définies par (24') à l'extérieur de (Ω) et à l'intérieur des courbes (C_j) ou (D_k) .

Supposons de plus que la fonction harmonique u^e définie par (24') à l'extérieur de (C_0) soit régulière à l'infini de façon qu'on puisse remplacer la condition $u = \text{const.}$ sur (C_c) par $\frac{du^e}{dn} = 0$. Cela nous

(11) En tenant compte de la forme générale des solutions du système (A) non-homogène, ($\lambda = +1$), on verrait immédiatement que $F_1(z)$ est déterminée d'une façon unique par (20).

conduit, en tenant compte des formules (4), au système (B) homogène, pour la valeur $\lambda = +1$ du paramètre, avec la condition supplémentaire

$$(40) \quad \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{v}_k(s) ds = 0$$

qu'impose la régularité de u^e à l'infini.

Nous allons montrer que ce système d'équations intégrales linéaires admet $p+q-1$ solutions. Pour cela, nous nous appuyerons sur le lemme suivant :

Les $p+q$ solutions effectives du système (B), homogène, pour $\lambda = +1$, sont telles que l'une au moins des quantités

$$\sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{v}_k^{(r)}(s) ds, \quad (r = 1, 2, \dots, p+q),$$

n'est pas nulle.

Supposons que le contraire ait lieu. On aurait

$$(41) \quad \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{v}_k^{(r)}(s) ds = 0 \quad \text{pour } r = 1, 2, \dots, p+q.$$

Comme on a aussi, (formule (30),

$$(30') \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) ds = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, p+q),$$

on en déduirait l'existence d'une solution effective du système de $p+q+1$ équations linéaires homogènes, à $p+q$ inconnues α_r ,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) ds &= 0, & (j = 0, 1, \dots, p), \\ \sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \int_{(D_k)} \bar{v}_k^{(r)}(s) ds &= 0, & (k = 1, 2, \dots, q). \end{aligned}$$

En effet, les déterminants d'ordre $p+q$ formés avec les éléments

de la matrice à $p+q+1$ lignes et $p+q$ colonnes

$$\left\| \begin{array}{l} \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) ds \\ \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) ds \end{array} \right\|, \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, p+q \\ j = 0, 1, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q \end{array}$$

sont nuls en vertu de (41) ou de (30'). Le lemme III entraînerait

$$\sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \bar{\mu}_j^{(r)}(s) \equiv 0, \quad \sum_{r=1}^{p+q} \alpha_r \bar{\nu}_k^{(r)}(s) \equiv 0, \quad (j = 0, 1, \dots, p), (k = 1, 2, \dots, q),$$

ce qui est absurde.

Il en résulte que si le problème envisagé actuellement admet des solutions, il en admet $p+q-1$ au plus. Montrons qu'il en a effectivement $p+q-1$,

Posons $\sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) ds = \lambda_r$, les λ_r n'étant pas tous nuls. Supposons pour fixer les idées $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_t = 0$, $\lambda_{t+1} \neq 0, \dots, \lambda_{p+q} \neq 0$, et posons

$$(42) \quad \mu_j^{(r)}(s) = \bar{\mu}_j^{(r)}(s), \quad \nu_k^{(r)}(s) = \bar{\nu}_k^{(r)}(s) \text{ pour } 1 \leq r \leq t \text{ et pour } r = p+q,$$

$$(43) \quad \mu_j^{(r)}(s) = \alpha_1^{(r)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) + \alpha_2^{(r)} \bar{\mu}_j^{(r+1)}(s), \quad \nu_k^{(r)}(s) = \alpha_1^{(r)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) + \alpha_2^{(r)} \bar{\nu}_k^{(r+1)}(s),$$

pour $t < r \leq p+q-1$.

Déterminons les constantes $\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}$ de façon à avoir, pour $t < r \leq p+q-1$

$$(44) \quad \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \nu_k^{(r)}(s) ds = \alpha_1^{(r)} \lambda_r + \alpha_2^{(r)} \lambda_{r+1} = 0$$

ce qui est toujours possible. On obtient par ce procédé un système de $p+q-1$ solutions $\mu_j^{(r)}(s), \nu_k^{(r)}(s), (r=1, 2, \dots, p+q-1)$, du système (B) homogène ($\lambda=+1$) et de l'équation (40).

Il est clair, d'après la méthode même qu'on a employée, que ces solutions sont linéairement distinctes. A ces répartitions de masses il

correspond, par l'intermédiaire de (24'), $p+q-1$ fonctions analytiques $f_r(z)$, régulières en chaque point de (Ω) , mais non uniformes, telles qu'on ait $R[f_r(z)] = c_j^{(r)}$ sur (C_j) , $Im[f_r(z)] = d_k^{(r)}$ sur (D_k) , les $c_j^{(r)}$ et $d_k^{(r)}$ étant des constantes.

Rendons doublement connexe le domaine (Ω) en traçant convenablement p coupures joignant les courbes $(C_1), (C_2) \dots (C_p)$ à (C_0) et $q-1$ coupures reliant entre elles les courbes (D_k) . D'après les formules (24'), (40), les fonctions $f_r(z)$ sont uniformes dans (Ω) muni des coupures.

Je dis que pour aucune valeur de r , ($r=1, 2, \dots, p+q-1$), on ne peut avoir $c_j^{(r)}=0$, $d_k^{(r)}(j=0, 1, \dots, p; k=1, 2, \dots, q)$. En effet, la fonction $f_r(z)$ étant uniforme dans (Ω) , muni des coupures, et telle que la dérivée normale de sa partie réelle existe et soit continue sur les (C_j) , ainsi que la dérivée normale de sa partie imaginaire sur les (D_k) , on peut lui appliquer la formule fondamentale (I). La contribution des lacets étant nulle, on déduirait immédiatement $f_r(z) \equiv 0$, ce qui entraînerait $\mu_j^{(r)}(s) \equiv 0$, $\nu_k^{(r)}(s) \equiv 0$, ($j=0, 1, \dots, p; k=1, 2, \dots, q$), en contradiction avec le fait que le système (B) homogène admet $p+q$ solutions effectives distinctes, pour $\lambda=+1$.

On ne peut, pour la même raison, avoir $c_j^{(r)}=c$, $d_k^{(r)}=d$, ($j=0, 1, \dots, p; k=1, 2, \dots, q$), c et d étant deux constantes réelles différentes de zéro. Complétons le système des $f_r(z)$ par les fonctions $f_{p+q}(z)=c$, $f_{p+q+1}(z)=id$.

Les fonctions $f_r(z)$, $r=1, 2, \dots, p+q+1$, sont linéairement distinctes.

En effet, supposons qu'il existe des constantes réelles β_r , non toutes nulles, telles qu'on ait

$$\sum_{r=1}^{p+q+1} \beta_r f_r(z) \equiv 0.$$

On en déduirait, en tenant compte de l'expression (24') des fonctions $f_r(z)$, ($r=1, 2, \dots, p+q-1$),

$$\sum_{r=1}^{p+q-1} \beta_r \mu_j^{(r)}(s) \equiv 0, \quad \sum_{r=1}^{p+q-1} \beta_r \nu_k^{(r)}(s) \equiv 0,$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE. Le déterminant

$$(45) \quad \begin{vmatrix} c_0^{(1)} & \dots & c_0^{(p+q-1)} & c & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_p^{(1)} & \dots & c_p^{(p+q-1)} & c & 0 \\ d_1^{(1)} & \dots & d_1^{(p+q-1)} & 0 & d \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_q^{(1)} & \dots & d_q^{(p+q-1)} & 0 & d \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Ces résultats étant acquis, nous pouvons énoncer le théorème suivant: *On peut trouver une fonction $f(z)$, régulière en chaque point de (Ω) , dont la partie réelle prenne des valeurs constantes données c_j sur les contours (C_j) , ($j=0, 1, \dots, p$), et dont la partie imaginaire prenne des valeurs constantes, d_k , également données sur les (D_k) , ($k=1, 2, \dots, q$). Les constantes cycliques de cette fonction ne sont nulles que si elle se réduit à une constante.*

Nous obtenons cette fonction sous la forme

$$(46) \quad f(z) = \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r f_r(z)$$

les α_r étant des constantes réelles, déterminées d'une façon univoque par le système d'équations linéaires,

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r c_j^{(r)} = c_j \quad , \quad (j=0, 1, \dots, p), \\ \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r d_k^{(r)} = d_k \quad , \quad (k=1, 2, \dots, q), \end{array} \right.$$

d'après les résultats précédents.

Par construction même, cette fonction $f(z)$ admet une dérivée normale réelle sur les (C_j) , et une dérivée normale imaginaire sur les (D_k) . Elle est uniforme dans le domaine (Ω) muni des coupures. En vertu de la formule (I), c'est la seule fonction jouissant de toutes ces propriétés.

Supposons maintenant que les constantes cycliques de $f(z)$ soient nulles. Le lemme (II) entraîne aussitôt $f(z) = \text{const} = c + id$, ($c_j = c$, $d_k = d$).

Ainsi, le problème (C), posé précédemment, se trouve être résolu.

Il suffit de faire $c_0=0$ dans les formules (47) pour obtenir la fonction $F_2(z)$ cherchée. Pour que la fonction $F_2(z)$ soit uniforme dans (Ω) , il faut et il suffit qu'elle se réduise à une constante imaginaire pure id .

Théorème.

Le problème généralisé de DIRICHLET, correspondant à des données continues, admet toujours une solution donnée par

$$(48) \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z).$$

$F_1(z)$ étant une fonction régulière dans (Ω) , et représentable par des potentiels de doubles couches et leurs associés, d'après la formule (28); $F_2(z)$ est une fonction régulière en chaque point de (Ω) , à constantes c cliques imaginaires autour des $(C_1), \dots, (C_p)$, à constantes cycliques réelles autour des $(D_1), \dots, (D_q)$, et telle que $R[F_2(z)]$, nulle sur (C_0) , prenne des valeurs constantes sur $(C_1), \dots, (C_p)$, $\text{Im} [F_2(z)]$, prenant des valeurs constantes sur $(D_1), \dots, (D_q)$.

La solution ainsi obtenue est la seule solution du problème. Pour qu'elle soit uniforme, il faut et il suffit que les données vérifient les $p+q-1$ conditions obtenues par l'élimination de l'inconnue d du système d'équations

$$(49) \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) \phi_j(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) \phi_k(s) ds = d \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k^{(r)}(s) ds$$

$$(r = 1, 2, \dots, p+q)$$

où $\bar{\mu}_j^{(r)}(s)$, $\bar{\nu}_k^{(r)}(s)$, $(r = 1, 2, \dots, p+q)$, sont $p+q$ solutions linéairement indépendantes du système (B) homogène, pour $\lambda = +1$.

Il est clair, en effet, que, d'après la méthode même que nous avons employée, $F(z)$ donné par (48), est une solution du problème. Pour que cette solution soit uniforme il faut et il suffit qu'on ait $F_2(z) = id$, c'est-à-dire $c_j = 0$, $d_k = d$.

Dans ces conditions, les équations (46) nous donnent précisément le système (49) qu'on peut encore transformer en éliminant d . Pour cela passons aux solutions fondamentales définies par les formules (42), (43). On aura le nouveau système de conditions :

$$(49') \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \mu_j^{(r)}(s) \phi_j(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \nu_k^{(r)}(s) \phi_k(s) ds = 0$$

pour $r = 1, 2, \dots, p+q-1$.

La constante d est donnée par

$$(50) \quad d = \frac{1}{\lambda_{p+q}} \left[\sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \mu_j^{(p+q)}(s) \phi_j(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \nu_k^{(p+q)}(s) \psi_k(s) ds \right]$$

Passons maintenant à la démonstration de l'unicité de la solution. Supposons qu'il existe deux solutions du problème et considérons leur différence $G(z) = U + iV$. C'est une fonction régulière en chaque point intérieur à (Ω) , ayant peut-être des périodes cycliques imaginaires pures, iP_j , autour des (C_j) , ($j = 1, 2, \dots, p$), réelles, S_k , ($k = 1, 2, \dots, q$), autour des (D_k) , la somme de ces dernières étant nulle. On a $U = 0$ sur (C_0) , (C_j) , $V = 0$ sur (D_k) . De plus, V existe sur (C_0) , (C_j) et y est continu, ainsi que U sur (D_k) . Cela résulte aisément des théorèmes classiques sur la représentation conforme des aires simplement connexes ⁽¹²⁾ limitées par des arcs à tangente continue. On sait ⁽¹³⁾, en effet, que si une fonction $Z(z) = X + iY$ est holomorphe dans une aire que l'arc AB , à tangente variant d'une façon continue, limite partiellement, si de plus $X(x, y)$ prend sur AB une valeur constante, $Y(x, y)$ prend une suite continue de valeurs le long de tout fragment $A'B'$ de AB . Dans le cas actuel, les courbures des courbes (C_0) , (C_j) , (D_k) variant d'une façon continue, on sait de plus que $\frac{dU}{dn}$ existe et est continu sur (C_0) , (C_j) , ainsi que $\frac{dV}{dn}$ sur (D_k) ⁽¹⁴⁾.

Cela étant, la formule fondamentale (I) est applicable à la fonction $G(z)$, uniforme dans le domaine (Ω) rendu doublement connexe par des coupures reliant les courbes (C_j) à (C_0) et les courbes (D_k) entre elles. La contribution des chemins décrits en sens inverse étant

⁽¹²⁾ Dans tout ce qui précède, nous avons supposé pour simplifier que les courbes (C_0) , (C_j) , (D_k) avaient une courbure variant d'une façon continue. Cette hypothèse n'est pas restrictive. En effet, en supposant seulement que ce soient des courbes fermées simples de JORDAN, on pourrait même se ramener par une suite de représentations conformes de domaines simplement connexes à un domaine (Ω_1) limité par des courbes analytiques. (Cf. G. JULIA, Leçons sur la représentation conforme des aires multiplément connexes, p. 35, Gauthier-Villars, 1934).

⁽¹³⁾ P. PAINLEVÉ *Comptes Rendus*, t. 112, 1891, p. 653.

⁽¹⁴⁾ Voir aussi : L. LICHTEINSTEIN, *Mathematische Annalen*, 1909. t. 67, p. 561, O. D. KELLOGG, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 13, 1912, p. 111.

manifestement nulle dans cette formule, on en déduit

$$\iint_{(\Omega)} \left| \frac{dG}{dz} \right|^2 dx dy = 0,$$

d'où $G(z) \equiv 0$.

9°. — Nous allons étudier maintenant quelques propriétés des fonctions $f_r(z)$, ($r = 1, 2, \dots, p+q-1$). Soient $iP_j^{(r)}$, ($j = 1, 2, \dots, p$), les périodes cycliques de $f_r(z)$ autour des (C_j) , et S_k les périodes cycliques relatives aux (D_k) ⁽¹⁵⁾; $P_j^{(r)}$ et $S_k^{(r)}$ sont des nombres réels.

On a la proposition suivante: *les déterminants d'ordre $p+q-1$, formés avec les éléments de la matrice*

$$\left\| \begin{array}{cccc} P_1^{(1)} & \dots & P_{p+q-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_k^{(1)} & \dots & S_{p+q-1}^{(1)} \end{array} \right\|, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, p, \\ k = 1, 2, \dots, q, \end{array}$$

et contenant ses p premières lignes sont différents de zéro.

Remarquons qu'en vertu de (40) on a les relations

$$(51) \quad \sum_{k=1}^q S_k^{(r)} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, p+q-1).$$

Supposons, pour fixer les idées, que le déterminant

$$\left| \begin{array}{cccc} P_1^{(1)} & \dots & P_{p+q-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ P_p^{(1)} & \dots & P_{p+q-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{q-1}^{(1)} & \dots & S_{p+q-1}^{(1)} \end{array} \right|$$

soit nul; on en déduirait l'existence des constantes réelles α_r , non toutes nulles, telles qu'on ait

$$\sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r P_j^{(r)} = 0, \quad \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r S_k^{(r)} = 0$$

$$(j=1, 2, \dots, p), \quad (k=1, 2, \dots, q-1).$$

⁽¹⁵⁾Les périodes sont prises pour des chemins entourant respectivement les (C_j) et (D_k) , et parcourus dans le sens qui laisse à gauche l'intérieur de ces courbes.

On en tirerait, en tenant compte de (51)

$$\sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r S_q^{(r)} = - \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r S_k^{(r)} = 0.$$

Alors, la fonction

$$f(z) = \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r f_r(z)$$

serait uniforme dans (Ω) ; ceci entraînerait $f(z) = \text{const}$ et $\alpha_r = 0$.

Théorème. On peut construire une fonction $F(z = U + iV)$, régulière en chaque point de (Ω) , telle que $U = c_j$ sur (C_j) , ($j = 0, 1, \dots, p$), $V = d_k$ sur (D_k) , ($k = 1, 2, \dots, q$), les c_j et d_k étant des constantes réelles, et qui possède des périodes données iP_j autour des (C_j)

($j = 1, 2, \dots, p$), S_k autour des (D_k) , pourvu qu'on ait $\sum_{k=1}^q S_k = 0$,

(P_j et S_k sont des quantités réelles); une constante c_j et une d_p peuvent être données à l'avance

Posons

$$(52) \quad F(z) = \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r f_r(z) = U + iV.$$

Les périodes de $F(z)$ sont données par

$$(53) \quad P_j = \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r P_j^{(r)}, \quad S_k = \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r S_k^{(r)}$$

$$(j = 1, 2, \dots, p), \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

La fonction définie par (52) est bien telle qu'on ait $U = \text{const}$ sur les (C_j) , $V = \text{const}$ sur les (D_k) . On doit avoir

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r c_l^{(r)} + \alpha_{p+q} c = c_l \\ \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r d_p^{(r)} + \alpha_{p+q+1} d = d_p \end{array} \right.$$

Les formules (53) et (54) donnent $p+q+2$ équations à $p+q+1$ inconnues α_r .

On a de plus

$$(51') \quad \sum_{k=1}^q S_k^{(r)} = 0,$$

ce qui entraîne la condition de compatibilité

$$(55) \quad \sum_{k=1}^q S_k = 0$$

qui est vérifiée par hypothèse. En tenant compte de (55), les formules (53) se réduisent à $p+q-1$ équations à autant d'inconnues, dont le déterminant n'est pas nul, en vertu de la proposition démontrée antérieurement. On en déduit des valeurs bien déterminées pour les α_r , ($r=1, 2, \dots, p+q-1$) et en tenant compte de (54) on calcule α_{p+q} et α_{p+q+1} . Le théorème précédent peut encore être généralisé de la façon suivante:

On peut construire une fonction $F(z) = U + iV$, régulière en chaque point intérieur à (Ω) , telle que U prenne des valeurs constantes données c_j sur $(C_0), (C_1), \dots, (C_\lambda)$, ($\lambda < p$), V prenant des valeurs constantes données d_k sur $(D_1), (D_2), \dots, (D_\mu)$, ($\mu < q$); en outre, $F(z)$ doit avoir des périodes données iP_j , autour des contours $(C_{\lambda+1}), \dots, (C_p)$, et S_k autour des contours $(D_{\mu+1}), \dots, (D_q)$, U étant constant sur $(C_{\lambda+1}), \dots, (C_p)$, V étant aussi constant sur $(D_{\mu+1}), \dots, (D_q)$.

Posons, comme précédemment

$$F(z) = \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r f_r(z),$$

les α_r étant des constantes réelles. Les conditions de l'énoncé se traduisent par le système suivant d'équations linéaires en α_r

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r c_j^{(r)} = c_j & (j=0, 1, \dots, \lambda) \\ \sum_{r=1}^{p+q+1} \alpha_r d_k^{(r)} = d_k & (k=1, 2, \dots, \mu) \\ \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r P_j^{(r)} = P_j & (j=\lambda+1, \dots, p) \\ \sum_{r=1}^{p+q-1} \alpha_r S_k^{(r)} = S_k & (k=\mu+1, \dots, q) \end{array} \right.$$

Tout revient à montrer que le déterminant, d'ordre $p+q+1$, de ce système n'est pas nul. En effet, s'il l'était, on en déduirait l'existence d'une fonction $f(z)$, régulière dans (Ω) , à partie réelle nulle sur $(C_0), (C_1), \dots, (C_\lambda)$, constante sur $(C_{\lambda+1}), \dots, (C_p)$, à partie imaginaire nulle sur $(D_1), \dots, (D_\mu)$, constante sur $(D_{\mu+1}), \dots, (D_q)$; de plus $f(z)$ serait uniforme autour des contours $(C_{\lambda+1}), \dots, (C_p), (D_{\mu+1}), \dots, (D_q)$.

Relions $(C_1), \dots, (C_\lambda)$ à (C_p) par des coupures choisies convenablement, et relions aussi entre elles les courbes $(D_1), \dots, (D_\mu)$ par $\mu-1$ coupures. En appliquant à la fonction $f(z)$ la formule (I), dans le domaine (Ω) , muni des coupures, on concluerait $f(z) = \text{const} = 0$. Or les fonctions $f_r(z)$ sont linéairement indépendantes, de sorte que la conclusion précédente est en contradiction avec l'hypothèse.

On peut encore énoncer un autre théorème dont nous nous servons plus loin.

Il est possible de construire une fonction $F(z) = U + iV$, régulière en tout point intérieur à (Ω) et remplissant les conditions suivantes :
 a) U prend des valeurs constantes données c_j sur les contours $(C_1), \dots, (C_\lambda)$, ($\lambda < p$), il est aussi constant sur les courbes $(C_0), (C_{\lambda+1}), \dots, (C_p)$; b) V prend des valeurs constantes données d_k sur les contours $(D_1), \dots, (D_\mu)$, ($\mu < q$) et est aussi constant sur les contours $(D_{\mu+1}), \dots, (D_q)$; c) $f(z)$ doit avoir des périodes données iP_j , autour des contours $(C_{\lambda+1}), \dots, (C_p)$, de plus, la somme iP des périodes correspondant aux contours $(C_1), \dots, (C_\lambda)$. $iP = i \sum_{j=1}^{\lambda} P_j$, est donnée à l'avance; d) $f(z)$ doit avoir des périodes données S_k autour des courbes $(D_{\mu+1}), \dots, (D_q)$.

La démonstration se ferait comme plus haut.

10°. — Lorsque la frontière de (Ω) n'est formée que de courbes (C_j) sur lesquelles on se donne les valeurs de $R[F(z)]$, on est dans le cas du problème ordinaire de DIRICHLET ⁽¹⁶⁾. On peut alors établir, par des méthodes analogues, les résultats ci-dessous.

I. On peut trouver p fonctions analytiques $f_r(z)$, $r=1, 2, \dots, p$, régulières en tout point de (Ω) , linéairement distinctes, possédant des constantes cycliques, telles que leurs parties réelles prennent des valeurs constantes sur $(C_0), (C_j)$.

II. On peut déterminer une fonction $f(z)$, régulière en chaque point de (Ω) , dont la partie réelle prenne des valeurs constantes don-

⁽¹⁶⁾ Voir à ce sujet J. PLEMELJ, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1904, p. 372.

mées c_j sur les contours (C_j) , ($j=0, 1, \dots, p$). Les p constantes cycliques de cette fonction ne sont nulles que si elle se réduit à une constante.

III. Le problème de DIRICHLET admet une solution et une seule correspondant aux données continues $\phi_j(s)$. Pour que sa fonction conjuguée soit uniforme il faut et il suffit que les données vérifient les p conditions

$$(56) \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j^{(r)}(s) \phi_j'(s) ds = 0, \quad (r=1, 2, \dots, p)$$

où les $\bar{\mu}_j^{(r)}(s)$ sont les p solutions effectives distinctes du système homogène

$$(B_l) \quad \pi \bar{\mu}_l(s) + \lambda \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(\sigma) \frac{\cos \phi_{lj}}{r} d\sigma = 0, \quad (l=0, 1, \dots, p)$$

pour $\lambda = +1$.

IV. Soient $iP_j^{(r)}$ les constantes cycliques des fonctions $f_r(z)$ relatives à (C_j) , ($j=1, 2, \dots, p$). Le déterminant $\|P_j^{(r)}\|$ ($j=1, 2, \dots, p$), ($r=1, 2, \dots, p$), est différent de zéro.

V. (17). On peut construire une fonction $F(z)=U+iV$ régulière en chaque point de (Ω) , telle que $U=c_j$ sur (C_j) , ($j=0, 1, \dots, p$), les c_j étant des constantes réelles, et qui possède des périodes données iP_j autour des (C_j) , ($j=1, 2, \dots, p$); une des constantes c_j peut être donnée à l'avance.

VI. On peut construire une fonction $F(z)=U+iV$ régulière en tout point de (Ω) , telle qu'on ait $U=c_j$ sur $(C_0), (C_1), \dots, (C_\lambda)$, ($\lambda < p$), les c_j étant des constantes données; en outre, $F(z)$ doit avoir des périodes données iP_j autour des contours $(C_{\lambda+1}), \dots, (C_p)$.

110. Discussion des systèmes (A) et (B) pour $\lambda = -1$.

Le système (A) se rattache pour $\lambda = -1$ à un problème de DIRICHLET extérieur, tandis que (B) est lié au problème intérieur généralisant celui de Neumann. Nous allons raisonner sur le système (B) homogène. Toutes ses solutions effectives, pour $\lambda = -1$, vérifient les $p+q$ conditions

(17) Voir à ce sujet aussi : Ch. de la VALLÉE-POUSSIN, *Annales de l'Ecole Normale*, 3^e série, t. XLVII, 1930, p. 281.

$$(27') \quad \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(s) ds = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p); \quad \int_{(D_k)} \bar{\nu}_k(s) ds = 0, \quad (k=1, 2, \dots, q);$$

les potentiels de simples couches correspondants, U_j , V_k , sont réguliers à l'infini.

Appliquons la formule (I) à la fonction $f(z) = u + iv$ définie par (24), ce qui est possible puisque $\frac{du}{dn}$ existe sur les (C_j) et y est continu ainsi que $\frac{dv}{dn}$ sur les (D_k) . En vertu du système (B'), on en tire

$$(57) \quad u^i = \sum_{j=0}^p U_j^i + \sum_{k=1}^q \bar{V}_k^i = \text{const}, \quad v^i = \sum_{j=0}^p \bar{U}_j^i - \sum_{k=1}^q V_k^i = \text{const},$$

à l'intérieur de (Ω) .

Par conséquent U_0^i , détermination du potentiel U_0 à l'intérieur de (C_0) , est prolongeable à travers (C_p) , et en vertu de (27') est régulier à l'infini. De même, les fonctions U_j^i , V_k^i définies à l'intérieur de (Ω) et à l'extérieur des courbes (C_j) ou (D_k) sont respectivement prolongeables à l'intérieur de ces courbes. Les fonctions $U_0^i + i\bar{U}_0^i$, $U_j^i + i\bar{U}_j^i$, $V_k^i + i\bar{V}_k^i$ étant régulières dans tout le plan, y compris le point à l'infini, se réduisent à des constantes d'après la théorème de LIOUVILLE. On a donc

$$(58) \quad U_0^i = \text{const}; \quad U_j^i = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p); \quad V_k^i = 0 \quad (k=1, 2, \dots, q),$$

ce qui entraîne

$$\bar{\mu}_j(s) = 0, \text{ pour } j=1, 2, \dots, p, \quad \bar{\nu}_k(s) = 0 \text{ pour } k=1, 2, \dots, q.$$

Quant à $\bar{\mu}_0(s)$, c'est une simple couche sans action à l'intérieur de (C_0) . On ne peut pas avoir

$$\int_{(C_0)} \bar{\mu}_0(s) ds = 0$$

car autrement la fonction harmonique U_0^0 , constante sur (C_0) , régulière et nulle à l'infini, serait nulle à l'extérieur de (C_0) . Ceci entraînerait $\bar{\mu}_0(s) = 0$. Or nous avons vu que le système (B) homogène possède, pour $\lambda = -1$, au moins un système de solutions effectives.

Le résultat précédent permet de montrer que le système homogène (B), possède, pour $\lambda = -1$, un seul système de solutions.

En effet, soient

$$\{\bar{\mu}_0^{(1)}(s), \bar{\mu}_j^{(1)}(s)=0, \bar{\nu}_k^{(1)}(s)=0\}, \quad \{\bar{\mu}_0^{(2)}(s), \bar{\mu}_j^{(2)}=0, \bar{\nu}_k^{(2)}=0\},$$

deux systèmes de solutions effectives distinctes. On a nécessairement

$$\int_{(C_0)} \bar{\mu}_0^{(1)}(s) ds \neq 0, \quad \int_{(C_0)} \bar{\mu}_0^{(2)}(s) ds \neq 0;$$

on peut donc choisir les constantes α et β de façon que

$$\bar{\mu}_0(s) = \alpha \bar{\mu}_0^{(1)}(s) + \beta \bar{\mu}_0^{(2)}(s), \quad \bar{\mu}_j(s)=0, \quad \bar{\nu}_k(s)=0$$

soit un autre système de solutions, vérifiant la condition

$$\int_{(C_0)} \bar{\mu}_0(s) ds = 0.$$

Cela entraîne $\alpha \bar{\mu}_0^{(1)}(s) + \beta \bar{\mu}_0^{(2)}(s) = 0$, ce qui est absurde.

Il en résulte que le système (A) homogène possède, pour $\lambda = -1$, la seule solution

$$\mu_0(s)=1, \quad \mu_j(s)=1, \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad \nu_k(s)=0, \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

de sorte qu'on peut énoncer le résultat suivant, conséquence du troisième théorème de FREDHOLM.

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (B) non homogène admette une solution est qu'on ait

$$(59) \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} g_j(s) ds = 0.$$

La fonction $f(z) = u + iv$ obtenue à partir des formules (24) est déterminée à une constante près. En effet, la solution générale du système (B), ($\lambda = -1$), s'obtient en ajoutant à une solution particulière du système non-homogène la solution générale du système homogène. Or, on a vu que cette dernière est de la forme

$$\mu_0(s) = \rho(s), \quad \bar{\mu}_j(s) = 0, \quad \bar{\nu}_k(s) = 0.$$

$\rho(s)$ étant une simple couche sans action à l'intérieur de (C_0) .

On a, à l'intérieur de (C_0) ,

$$\int_{(C_j)} \rho(s) \log \frac{1}{r} ds = \text{const}, \quad \int_{(C_0)} \rho(s) \Theta ds = \text{const},$$

u et v sont donc bien définis par (24) à une constante près.

La fonction $f(z)$ ainsi formée est une solution du problème généralisé de NEUMANN. Elle n'est pas, en général, uniforme. Pour qu'elle le soit, il faut et il suffit qu'on ait

$$\int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(s) ds = 0, \quad \int_{(D_k)} \bar{v}_k(s) ds = 0$$

$$(j=1, 2, \dots, p) \quad (k=1, 2, \dots, q).$$

Or le système (B) donne aisément, $(\lambda = -1)$,

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \sum_{j=1}^p \int_{(C_j)} \bar{\mu}_j(s) ds = \int_{(C_0)} g_0(s) ds \\ 2\pi \int_{(C_l)} \bar{\mu}_l(s) ds = - \int_{(C_l)} g_l(s) ds \quad (l=1, 2, \dots, p) \\ 2\pi \int_{(D_\rho)} \bar{v}_\rho(s) ds = \int_{(D_\rho)} h_\rho(s) ds \quad (\rho=1, 2, \dots, q). \end{array} \right.$$

Ces relations, compatibles en vertu de (59), entraînent les conditions suivantes nécessaires et suffisantes pour que $f(z)$ soit uniforme.

$$(61) \quad \int_{(C_j)} g_j(s) ds = 0, \quad \int_{(D_k)} h_k(s) ds = 0;$$

$$(j=1, 2, \dots, p) \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

alors en vertu (60) on a aussi

$$(62) \quad \int_{(C_0)} g_0(s) ds = 0.$$

La condition (59) est inhérente au problème. On obtient aisément son interprétation en appliquant à la fonction $f(z)$ la formule

$$\int_T \frac{du}{dn} ds = 0,$$

où T désigne l'ensemble des courbes (C_0) , (C_1) , (D'_k) , les (D'_k) entourant les (D_k) , et de certaines coupures, [le domaine (Ω) étant rendu simplement connexe par des coupures appropriées], et en tenant compte de ce que la fonction $f(z)$ cherchée peut avoir, au plus, des constantes cycliques réelles autour des (D_k) , imaginaires autour des (C_j) , $j=(1, 2, \dots, p)$, la somme des premières étant nulle ⁽¹⁸⁾.

On peut donc énoncer le résultat suivant : *le problème généralisé de NEUMANN admet une solution moyennant les conditions*

$$(63) \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} g_j(s) ds = 0, \quad \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} h_k(s) ds = 0$$

La solution, représentable sous la forme (23), est unique à une constante près. Elle n'est uniforme que si les conditions (61) sont remplies.

L'unicité de la solution s'établit en appliquant la formule (I) à la différence $\Phi(z)$ de deux solutions, uniformes dans (Ω) muni des coupures. On en déduit aussitôt $\Phi(z) = \text{const.}$

120. — Dans ce qui précède nous avons étudié les systèmes homogènes (A) et (B) pour $\lambda = +1$, et $\lambda = -1$. Signalons encore la propriété suivante.

Les systèmes associés (A) et (B) n'admettent pas de constantes fondamentales dans l'intervalle $-1 < \lambda < +1$.

Raisonnons sur le système (B') équivalent à (B). En multipliant

(18) En appliquant une formule analogue à la fonction v on obtient la

nouvelle condition nécessaire $\sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} h_k(s) ds = 0.$

les relations

$$(64) \quad \begin{aligned} (1+\lambda) \frac{du^e}{dn} - (1-\lambda) \frac{du^i}{dn} &= 0 \quad \text{sur } (C_l), \quad (l=0, 1, 2, \dots, p), \\ (1+\lambda) \frac{dv^e}{dn} - (1-\lambda) \frac{dv^i}{dn} &= 0 \quad \text{sur } (D_k), \quad (k=1, 2, \dots, q), \end{aligned}$$

respectivement par u et v , en intégrant sur les courbes correspondantes et en ajoutant, on obtient

$$(65) \quad (1+\lambda) \left[\int_{(C)} u \frac{du^e}{dn} ds + \int_{(D)} v \frac{dv^e}{dn} ds \right] - \\ - (1-\lambda) \left[\int_{(C)} u \frac{du^i}{dn} ds + \int_{(D)} v \frac{dv^i}{dn} ds \right] = 0;$$

on a désigné par (C) l'ensemble des courbes (C_l) et par (D) celui des courbes (D_k) . D'après les formules (I), (28), (29), le premier crochet de (65) est essentiellement positif, l'autre essentiellement négatif. On ne peut donc pas avoir $1+\lambda > 0$, $1-\lambda > 0$ à moins que u et v ne se réduisent à des constantes; mais alors on aurait $\mu_l(s) \equiv 0$, $\nu_k(s) \equiv 0$ et λ ne serait pas constante fondamentale.

13°. — *Fonction de GREEN généralisée.*

Une conséquence immédiate du théorème énoncé à la page 25 est l'existence d'une fonction $\Gamma(z|z_0) = G(x, y; x_0, y_0) + iH(x, y; x_0, y_0)$ déterminée par les conditions

a) $\Gamma(z|z_0) + \log(z - z_0)$ est une fonction régulière en chaque point z de (Ω) ,

b) on a $G(x, y; x_0, y_0) = 0$ si le point z se trouve sur (C_j) , $\{j = 0, 1, \dots, p\}$,

c) on a $H(x, y; x_0, y_0) = 0$ si le point z est sur (D_k) , $(k=1, 2, \dots, q)$, z_0 étant un point intérieur à (Ω) .

C'est cette fonction que nous appellerons *fonction généralisée de GREEN* relative au domaine (Ω) . Il est facile de mettre en évidence une propriété de symétrie de $\Gamma(z|z_0)$. Remarquons d'abord qu'en vertu des hypothèses faites sur les frontières de (Ω) et de certains théorèmes classiques de PAINLEVÉ⁽¹⁹⁾ sur la représentation conforme des aires simplement connexes, $\frac{dG}{dn}$ et $\frac{dH}{dn}$ existent sur les frontières et sont

(19) P. PAINLEVÉ, loc. cit. (15).

continues. Considérons les fonctions de GREEN $\Gamma_0 = \Gamma(z|z_0)$, $\Gamma_1 = \Gamma(z|z_1)$, relatives à deux points intérieurs z_0 et z_1 . Entourons z_0 et z_1 de deux petits cercles (z_0) , (z_1) et rendons doublement connexe le domaine (Ω) en reliant (z_0) , (z_1) , (C_1) , ..., (C_p) à (C_0) , et les contours (D_k) entre eux, par des coupures appropriées.

Il est clair que les fonctions Γ_0 et Γ_1 sont uniformes dans le nouveau domaine ainsi obtenu. On peut donc leur appliquer la formule fondamentale (II).

On a, dans le cas actuel

$$(66) \quad \int_{(z_0) + (z_1)} \left(G_0 \frac{dG_1}{dn} - G_1 \frac{dG_0}{dn} \right) ds + \\ + \int_{\Sigma C_j} \left(G_0 \frac{dG_1}{dn} - G_1 \frac{dG_0}{dn} \right) ds - \int_{\Sigma D_k} \left(H_0 \frac{dH_1}{dn} - H_1 \frac{dH_0}{dn} \right) ds = 0,$$

la contribution des lacets étant nulle. En tenant compte des conditions aux limites que vérifient les fonctions de GREEN, il reste donc

$$(67) \quad \int_{(z_0)} \left(G_0 \frac{dG_1}{dn} - G_1 \frac{dG_0}{dn} \right) ds + \int_{(z_1)} \left(G_0 \frac{dG_1}{dn} - G_1 \frac{dG_0}{dn} \right) ds = 0$$

ce qui entraîne, en faisant tendre les rayons des deux cercles (z_0) et (z_1) vers zéro, la relation de symétrie cherchée :

$$(68) \quad G(x, y; x_0, y_0) = G(x_0, y_0; x, y).$$

Pour abréger l'écriture, nous désignerons dans la suite les parties réelle et imaginaire de $\Gamma(z|z_0)$ par $G(z|z_0)$ et $H(z|z_0)$. D'après la relation de symétrie trouvée, $G(z|z_0)$ est aussi une fonction harmonique du point z_0 .

Soit $H_1(z|z_0)$ la fonction harmonique conjuguée de $G(z|z_0)$ par rapport à z_0 . On peut choisir la constante arbitraire, fonction de z , qu'on peut ajouter à son expression, de façon qu'on ait la nouvelle relation de symétrie

$$(69) \quad H(z|z_0) = H_1(z_0|z),$$

puisque $H(z|z_0)$ et $H_1(z_0|z)$ ne peuvent différer que par une fonction de z_0 .

Posons

$$(70) \quad G(z|z_0) + iH_1(z|z_0) = \gamma(z|z_0).$$

Les formules (68) et (69) peuvent être condensées en une seule

$$(71) \quad \Gamma(z|z_0) = \gamma(z_0|z).$$

14°. — Revenons maintenant au problème généralisé de DIRICHLET et supposons que les $p+q-1$ conditions d'uniformité (49') soient satisfaites. Cherchons à représenter la solution, $F(z) = U + iV$, du problème à l'aide de la fonction de GREEN introduite précédemment. Pour cela, entourons le point z_0 d'un petit cercle, dont on fera ensuite tendre le rayon vers zéro, et appliquons aux fonctions U, V, G, H la formule (II), dans le domaine (Ω) muni des coupures.

On obtient ainsi

$$(72) \quad \int_{(z_0)} \left(G \frac{dU}{dn} - U \frac{dG}{dn} \right) ds + \\ + \int_{\Sigma C_j} \left(G \frac{dU}{dn} - U \frac{dG}{dn} \right) ds - \int_{\Sigma D_k} \left(H \frac{dV}{dn} - V \frac{dH}{dn} \right) ds = 0,$$

en remarquant qu'en vertu de l'uniformité de $F(z)$, la contribution des lacets est nulle. On en tire aussitôt la formule fondamentale qui fait connaître une fonction harmonique régulière dans (Ω) , connaissant ses valeurs sur une partie des frontières et les valeurs de sa conjuguée sur l'autre partie de la frontière ⁽²⁰⁾,

$$(73) \quad U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma C_j} U \frac{dG(z|z_0)}{dn_z} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} V \frac{dH(z|z_0)}{dn_z} ds.$$

La valeur de la fonction conjuguée sera donnée, à une constante près, par

$$(74) \quad V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma C_j} U \frac{dH_1(z|z_0)}{dn_z} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} V \frac{dH_1(z|z_0)}{ds_z} ds,$$

(20) Cette formule a été établie en supposant que $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$ existent sur les frontières (C_j) ou (D_k) . Il est facile de montrer que cette hypothèse est superflue.

d'où on tire facilement

$$(75) \quad F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma G_j} U \frac{d\gamma(z|z_0)}{dn_z} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} V \frac{d\gamma(z|z_0)}{ds_z} ds$$

ou encore, en vertu de (71),

$$(76) \quad F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma G_j} U \frac{d\Gamma(z_0|z)}{dn_z} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} V \frac{d\Gamma(z_0|z)}{ds_z} ds$$

Cas particuliers, formules de M. Henri Villat.

14°. — La formule (76) qui donne l'expression d'une fonction $F(z)$, régulière dans (Ω) lorsqu'on connaît sa partie réelle sur les contours (C_j) et sa partie imaginaire sur les contours (D_k) , généralise les formules bien connues de M. HENRI VILLAT ⁽²¹⁾ résolvant effectivement ces problèmes pour l'anneau circulaire. Nous nous proposons de retrouver ces formules en suivant la voie indiquée plus haut. Pour cela nous allons donner l'expression explicite de la fonction généralisée de GREEN pour l'anneau circulaire.

L'anneau est supposé limité par deux cercles de rayons R_0 et R_1 , ($R_0 > R_1$), ayant l'origine comme centre. Nous désignerons le cercle extérieur par (C_0) , en nous conformant aux notations employées antérieurement. Le cercle intérieur peut être une courbe (C_1) sur laquelle on se donne les valeurs de U , ou bien une courbe (D_1) sur laquelle on se donne V .

Nous allons examiner successivement les deux cas.

Dans le premier cas on a affaire au problème ordinaire de DIRICHLET. D'après les résultats de la page 34, pour que la fonction $F(z) = U + iV$, correspondant aux données $U = \phi_0(s)$ sur (C_0) , $U = \phi_1(s)$ sur (C_1) , soit uniforme, il faut et il suffit qu'on ait

$$(77) \quad \int_{(C_0)} \bar{\mu}_0(s) \phi_0(s) ds + \int_{(C_1)} \bar{\mu}_1(s) \phi_1(s) ds = 0,$$

où $\{\bar{\mu}_0(s), \bar{\mu}_1(s)\}$ est une solution effective du système

$$(78) \quad \begin{cases} \pi \bar{\mu}_0(s) + \int_{(C_0)} \bar{\mu}_0(\sigma) \frac{\cos \phi_{0,0}}{r} d\sigma + \int_{(C_1)} \bar{\mu}_1(\sigma) \frac{\cos \phi_{01}}{r} d\sigma = 0, & \text{sur } (C_0), \\ \pi \bar{\mu}_1(s) + \int_{(C_0)} \bar{\mu}_0(\sigma) \frac{\cos \phi_{10}}{r} d\sigma + \int_{(C_1)} \bar{\mu}_1(\sigma) \frac{\cos \phi_{11}}{r} d\sigma = 0, & \text{sur } (C_1). \end{cases}$$

(21) H. VILLAT, *Acta Mathematica*, 40, 1916, p. 101—178.

En tenant compte de la symétrie de la figure, on constate aisément qu'on a :

$$\bar{\mu}_0(s) = c_0, \quad \mu_1(s) = c_1,$$

c_0 et c_1 étant des constantes reliées par la relation $R_0 c_0 + R_1 c_1 = 0$. En effet, on a les formules :

$$\int_{(C_0)} \frac{\cos \psi_{00}}{r} d\sigma = \pi, \quad \int_{(C_1)} \frac{\cos \psi_{11}}{r} d\sigma = -\pi,$$

$$\int_{(C_0)} \frac{\cos \psi_{10}}{r} d\sigma = -\frac{d}{dn_1^i} \left(\int_{(C_0)} \log \frac{1}{r} d\sigma \right) = 0, \quad \text{car} \quad \int_{(C_0)} \log \frac{1}{r} d\sigma = 2\pi R_0 \log \frac{1}{R_0}$$

à l'intérieur de (C_0) ,

$$\int_{(C_1)} \frac{\cos \psi_{01}}{r} d\sigma = \frac{d}{dn_0^i} \left(\int_{(C_1)} \log \frac{1}{r} d\sigma \right) = 2\pi \frac{R_1}{R_0}, \quad \text{car} \quad \int_{(C_1)} \log \frac{1}{r} d\sigma = 2\pi R_1 \log \frac{1}{\rho}$$

à l'extérieur de (C_1) , en posant $\rho = |z|$ et en désignant par n_0^i , n_1^i les normales à (C_0) et (C_1) , dirigées vers l'intérieur de ces courbes.

Par conséquent, la condition d'uniformité devient

$$(79) \quad \frac{1}{R_0} \int_{(C_0)} \varphi_0(s) ds = \frac{1}{R_1} \int_{(C_1)} \varphi_1(s) ds.$$

C'est la condition donnée par M. H. VILLAT (22).

Construction de la fonction de GREEN ordinaire.

Posons $\frac{R_1}{R_0} = e^{-\frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}}$, ω_1 étant une quantité réelle, positive et ω_3 étant imaginaire pure, telle que $\frac{\omega_3}{i} > 0$; nous ferons la transformation

$$(80) \quad u = \frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} = \alpha + i\beta$$

pour passer du plan (z) au plan (u) , l'intérieur de l'anneau correspondant à l'intérieur du rectangle dont les sommets sont $u=0$, $u=2\omega_1$, $u=\omega_3$, $u=\omega_3+2\omega_1$. Les segments $(0, 2\omega_1)$ et $(2\omega_1+\omega_3, \omega_3)$ parcourus dans le sens direct correspondent respectivement aux circonférences (C_0) , (C_1) parcourues dans le même sens; les côtés verticaux du rectangle ne sont pas considérés comme distincts.

(22) H. VILLAT, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 33, 1912, p. 146.

La fonction de GREEN $\Gamma(u|u_0) = G + iH$ doit vérifier les conditions

$$(81) \quad \begin{aligned} G &= 0 \quad \text{sur} \quad (0, 2\omega_1) \\ G &= 0 \quad \text{sur} \quad (2\bar{\omega}_1 + \omega_3, \omega_3) \end{aligned}$$

et se comporter au point $u = u_0$ comme $\log \frac{1}{u - u_0}$. Considérons la fonction $\frac{d\Gamma(u|u_0)}{du} = \Phi(u)$. On constate facilement qu'elle est prolongeable dans tout le plan, doublement périodique, avec les périodes $2\omega_1, 2\omega_3$. Elle possède dans le parallélogramme des périodes les pôles simples $u = u_0, u = \bar{u}_0 + 2\omega_3$, avec les résidus -1 et $+1$. On a posé $u_0 = \alpha_0 + i\beta_0$; $\bar{u}_0 = \alpha_0 - i\beta_0$, ($\beta_0 > 0$).

La formule de décomposition d'Hermite fournit immédiatement

$$(82) \quad \Phi(u) = -\zeta(u - u_0) + \zeta(u - \bar{u}_0 - 2\omega_3) + C,$$

les transcendentes elliptiques qui interviennent étant construites avec les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$. On en tire, en tenant compte de la formule

$$\zeta(u - 2\bar{\omega}_3) = \zeta u - 2\eta_3,$$

$$(83) \quad \Gamma(u|u_0) = \log \frac{\sigma(u - \bar{u}_0)}{\sigma(u - u_0)} + Cu - 2\eta_3 u + C',$$

C, C' étant des constantes qu'on détermine aisément par les conditions (81).

On trouve $C = 2\eta_3 - \frac{2\eta_3 i \beta_0}{\omega_3}$, $C' = ik$, k étant un nombre réel, de sorte que l'expression de la fonction de GREEN cherchée est

$$(84) \quad \Gamma(u|u_0) = \log \left[e^{-\frac{2\eta_3 i \beta_0 u}{\omega_3}} \frac{\sigma(u - \bar{u}_0)}{\sigma(u - u_0)} \right] + ik^{(23)}.$$

Dans le cas actuel, la formule (76) doit être remplacée par

$$(76') \quad F(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(c_0)} \phi_0(s) \frac{d\Gamma(z_0|z)}{dn_z} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{(c_1)} \phi_1(s) \frac{d\Gamma(z_0|z)}{dn_z} ds + iC'',$$

où C'' est une constante réelle arbitraire. En passant au plan (u) et en tenant compte de l'expression explicite de la fonction de GREEN,

(23) La fonction de GREEN pour l'anneau circulaire a été donnée par M. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 241. (4^e édition).

on obtient facilement

$$(85) \quad \begin{aligned} F(z_0) = F_1(u_0) = & -\frac{i}{\pi} \int_0^{2\omega_1} \bar{\phi}_0(\alpha) \left[\zeta(\alpha - u_0) + \frac{\eta_3 u_0}{\omega_3} \right] d\alpha \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\omega_1} \bar{\phi}_1(\alpha) \left[\zeta(\alpha - u_0 - \omega_3) + \zeta(\alpha - u_0 + \omega_3) + \frac{2\eta_3 u_0}{\omega_3} \right] d\alpha + iC'', \end{aligned}$$

avec $\bar{\phi}_0(\alpha) = \phi_0(s)$, $\bar{\phi}_1(\alpha) = \phi_1(s)$

En tenant compte des formules

$$\zeta(\alpha - u_0 - \omega_3) = \zeta_3(\alpha - u_0) - \eta_3, \quad \zeta(\alpha - u_0 + \omega_3) = \zeta_3(\alpha - u_0) + \eta_3$$

et de la condition d'uniformité (79), on arrive à la formule définitive

$$(86) \quad \begin{aligned} F(z) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2 R_0} \int_{(C_0)} \phi_0(s) \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_0} s \right) ds - \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2 R_1} \int_{(C_1)} \phi_1(s) \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_1} s \right) ds + iC''. \end{aligned}$$

Cette formule a été donnée par M. HENRI VILLAT ⁽²⁴⁾, qui l'a déduite par un passage à la limite. D'autres démonstrations et extensions en ont été données par U. DINI ⁽²⁵⁾, MM. H. VILLAT ⁽²⁶⁾ et B. DEMTCHENKO ⁽²⁷⁾.

Nous allons maintenant examiner le cas où le cercle limitant intérieurement l'anneau est une courbe (D_1) , sur laquelle on connaît les valeurs $\phi_1(s)$ de V ; nous supposons toujours que sur le cercle extérieur (C_0) on se donne la suite de valeurs $\phi_0(s)$ qu'y prend U .

D'après le théorème général d'existence, le problème admet une solution et une seule. Elle est uniforme.

Construction de la fonction de GREEN généralisée.

La fonction de GREEN généralisée $\Gamma(z|z_0)$ doit satisfaire aux conditions

$$(87) \quad \begin{aligned} G &= 0 && \text{sur } (C_0), \\ H &= 0 && \text{sur } (D_1), \end{aligned}$$

et se comporter au point $z = z_0$ comme $\log \frac{1}{z - z_0}$.

⁽²⁴⁾ *Rendiconti di Palermo* t. 33, 1912, p. 134—174.

⁽²⁵⁾ *Rendiconti di Palermo* t. 36, 1913, p. 1—29.

⁽²⁶⁾ *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3^e série, t. XXXVIII, 1921, p. 183—227.

⁽²⁷⁾ *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9^e série, t. 10, 1931, p. 201—211.

Considérons comme précédemment le rectangle, du plan u , qui correspond à l'anneau considéré, et posons $\Phi(u) = \frac{d\Gamma(u|u_0)}{du}$ en désignant par $\Gamma(u|u_0)$ la transformée de $\Gamma(z|z_0)$ par la formule (80).

La fonction $\Phi(u)$ est prolongeable, par le principe de symétrie de SCHWARZ, dans tout le plan. Elle est doublement périodique, avec les périodes $2\omega_1$, $4\omega_3$, ayant dans le parallélogramme des périodes les pôles simples $u \equiv u_0$, $u \equiv \bar{u}_0$, $u \equiv \bar{u}_0 + 2\omega_3$, $u \equiv u_0 - 2\omega_3$, (mod $2\omega_1$, $4\omega_3$), avec les résidus -1 , $+1$, -1 , $+1$.

Cela posé, la formule d'HERMITE nous donne

$$\begin{aligned}\Phi(u) = & -\zeta(u-u_0|2\omega_1, 4\omega_3) + \zeta(u-\bar{u}_0|2\omega_1, 4\omega_3) \\ & - \zeta(u-\bar{u}_0-2\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3) + \zeta(u-u_0-2\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3) + C.\end{aligned}$$

Bien que des formules classiques nous permettent de passer à des fonctions elliptiques construites avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ nous garderons les périodes $2\omega_1$, $4\omega_3$, pour simplifier les calculs, en indiquant toujours dans les formules les périodes adoptées. Posons

$$\eta'_3 = \eta_3(2\omega_1, 4\omega_3).$$

En tenant compte des formules

$$\begin{aligned}\zeta(u-\bar{u}_0-2\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3) &= \zeta_3(u-\bar{u}_0|2\omega_1, 4\omega_3) - \eta'_3 \\ \zeta(u-u_0+2\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3) &= \zeta_3(u-u_0|2\omega_1, 4\omega_3) + \eta'_3\end{aligned}$$

on obtient

$$\Gamma(u|u_0) = \log \frac{\sigma(u-\bar{u}_0|2\omega_1, 4\omega_3)\sigma_3(u-u_0|2\omega_1, 4\omega_3)}{\sigma(u-u_0|2\omega_1, 4\omega_3)\sigma_3(u-\bar{u}_0|2\omega_1, 4\omega_3)} + (C-2\eta'_3)u + C',$$

C et C' étant des constantes à déterminer de façon que les conditions (87) soient vérifiées. On voit facilement que la première de ces conditions exige que C et C' soient imaginaires pures; pour vérifier la seconde condition, plaçons le point u sur le segment $(\omega_3, 2\omega_1 + \omega_3)$, ce qui revient à poser $u = \alpha + \omega_3$, ($0 \leq \alpha \leq 2\omega_1$). En vertu des formules

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha-\bar{u}_0+\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3) &= e^{\eta'_3(\alpha-\bar{u}_0-\omega_3)} \sigma(2\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3) \cdot \sigma_3(\alpha-\bar{u}_0-\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3), \\ \sigma_3(\alpha-\bar{u}_0+\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3) &= -e^{\eta'_3(\alpha-\bar{u}_0-\omega_3)} \frac{e^{2\eta'_3\omega_3}}{\sigma(2\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3)} \cdot \sigma(\alpha-\bar{u}_0-\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3),\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+\omega_3|u_0) = \log \left[- \frac{\sigma_3(\alpha-\bar{u}_0-\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3)\sigma_3(\alpha-u_0+\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3)}{\sigma(\alpha-u_0+\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3)\sigma_3(\alpha-\bar{u}_0-\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3)} \sigma^2(2\omega_3|2\omega_1, 4\omega_3) e^{-2\eta'_3\omega_3} \right] \\ + (C-2\eta'_3)(\alpha+\omega_3) + C' .\end{aligned}$$

La condition $H = 0$ sur (D_1) entraîne $C = 2\eta'_3$, puisque la quantité qui figure dans le crochet est toujours positive; d'autre part, on doit avoir $C = 2ki\pi$, k étant un nombre entier qui dépend de la détermination choisie pour le logarithme. En choisissant convenablement cette détermination, on peut prendre $k = 0$ de sorte que la fonction généralisée de GREEN est

$$(88) \quad \Gamma(u | u_0) = \log \frac{\sigma(u - \overline{u_0}) \sigma_3(u - u_0)}{\sigma(u - u_0) \sigma_3(u - \overline{u_0})},$$

les transcendantes σu , $\sigma_3 u$ étant construites à partir des périodes $2\omega_1, 4\omega_3$.

Cela posé, la solution du problème généralisé de DIRICHLET s'obtient en appliquant la formule (76). En passant au plan u , on trouve facilement

$$\begin{aligned} F(z_0) = F_1(u_0) = & -\frac{i}{\pi} \int_0^{2\omega_1} \frac{1}{\phi_0(\alpha)} [\zeta(\alpha - u_0) - \zeta_3(\alpha - u_0)] d\alpha \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\omega_1} \frac{1}{\psi_1(\alpha)} [\zeta(\alpha + \omega_3 - u_0) - \zeta(\alpha - \omega_3 - u_0) + \zeta_3(\alpha - \omega_3 - u_0) - \zeta_3(\alpha + \omega_3 - u_0)] d\alpha, \end{aligned}$$

ou encore, par des transformations immédiates

$$\begin{aligned} (89) \quad F_1(u_0) = & \frac{i}{\pi} \int_0^{2\omega_1} \frac{1}{\phi_0(\alpha)} [\zeta(u_0 - \alpha) - \zeta_3(u_0 - \alpha)] d\alpha \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\omega_1} \frac{1}{\psi_1(\alpha)} [\zeta(u_0 - \alpha + \omega_3) - \zeta_3(u - \alpha + \omega_3)] d\alpha. \end{aligned}$$

On a posé $\overline{\phi_0(\alpha)} = \phi_0(s)$, $\overline{\psi_1(\alpha)} = \psi_1(s)$.

En repassant au plan z , on trouve en définitive

$$\begin{aligned} (90) \quad F(z) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2 R_0} \int_{(C_0)} \phi_0(s) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_0} s \right) - \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_0} s \right) \right] ds \\ & - \frac{\omega_1}{\pi^2 R_1} \int_{(D_1)} \psi_1(s) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_1} s + \frac{\omega'_3}{2} \right) - \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_1} s + \frac{\omega'_3}{2} \right) \right] ds, \end{aligned}$$

en posant $\omega_3 = \frac{\omega'_3}{2}$, de sorte que les fonctions elliptiques sont construites avec les périodes $2\omega_1, 2\omega'_3$. La formule (90) a été donnée par M. H. VILLAT, en suivant un procédé différent, dans le Mémoire déjà cité (*Acta Mathematica*, 40, 1916, p. 130).

15°. — *Introduction d'une fonction généralisant celle de NEUMANN.*

D'après le théorème de la page 35, on peut déterminer, à une constante près, une fonction $\Gamma(z|z_0) = G(x, y; x_0, y_0) + iH(x, y; x_0, y_0)$ vérifiant les conditions suivantes:

- a) $\Gamma(z|z_0) + \log(z - z_0)$ est régulière en chaque point z de (Ω) ,
- b) $\frac{dG}{dn} = \text{const.}$ sur $(C_0), (C_1), \dots, (C_p)$,
- c) $\frac{dH}{dn} = 0$ sur $(D_1), \dots, (D_q)$,

z étant un point intérieur à (Ω) .

Soit l_0 la longueur de la courbe (C_0) . On peut choisir $\frac{dG}{dn} = \frac{2\pi}{l_0}$ sur (C_0) , $\frac{dG}{dn} = 0$ sur $(C_1), \dots, (C_p)$. En effet, en posant

$$\Gamma(z|z_0) = \log \frac{1}{z - z_0} + g(z|z_0),$$

on doit avoir, d'après (59),

$$\int_{\Sigma C_j} \frac{dg}{dn} ds = \int_{\Sigma C_j} \frac{dG}{dn} ds - \int_{\Sigma C_j} \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds = 0,$$

et cette condition est bien vérifiée par le choix fait.

La fonction généralisée de NEUMANN étant déterminée à une fonction de z_0 près, choisissons-la de façon à avoir

$$(91) \quad \int_{(C_0)} G(x, y; x_0, y_0) ds_z = 0;$$

la fonction $\Gamma(z|z_0)$, qui vérifie (91), dépend encore d'une fonction de z_0 , imaginaire pure, qu'on déterminera dans la suite.

Il est facile de montrer que $\Gamma(z|z_0)$ possède une propriété de symétrie analogue à celle trouvée pour la fonction généralisée de GREEN. Remarquons d'abord que les constantes cycliques de $\Gamma(z|z_0)$ correspondant aux contours $(C_1), \dots, (C_p), (D_1), \dots, (D_q)$, sont nulles. En considérant les points z_0 et z_1 intérieurs à (Ω) et les fonctions $\Gamma_0 = \Gamma(z|z_0)$, $\Gamma_1 = \Gamma(z|z_1)$, l'application de la formule (II) au domaine (Ω) dont on retranche les deux cercles $(z_0), (z_1)$, reliés par des coupures à (C_0) , conduit à

$$\int_{(z_0)} \left(G_0 \frac{dG_1}{dn} - G_1 \frac{dG_0}{dn} \right) ds + \int_{(z_1)} \left(G_0 \frac{dG_1}{dn} - G_1 \frac{dG_0}{dn} \right) ds + \frac{2\pi}{l_0} \int_{(C_0)} (G_0 - G_1) ds = 0,$$

en tenant compte des conditions b), c). En vertu de (91), la relation précédente, où on fait tendre vers zéro les rayons des cercles (z_0) , (z_1) , entraîne

$$(92) \quad G(z|z_0) = G(z_0|z).$$

Considérons maintenant la fonction $H(z|z_0)$, conjuguée de $G(z|z_0)$ par rapport à z . $G(z|z_0)$ étant une fonction harmonique par rapport à (x_0, y_0) , d'après (92), il en sera de même de $H(z|z_0)$ en choisissant convenablement la fonction de z_0 qu'on peut lui ajouter. Cela étant, considérons la fonction $H_1(z|z_0)$ conjuguée de $G(z|z_0)$ par rapport au point (x_0, y_0) . En choisissant convenablement la constante ⁽²⁸⁾ qu'on peut ajouter à $H_1(z|z_0)$ on aura la nouvelle relation de symétrie

$$(93) \quad H(z|z_0) = H_1(z_0|z),$$

de sorte que $H_1(z|z_0)$ est aussi harmonique par rapport au point z . Posons

$$\gamma(z|z_0) = G(z|z_0) + iH_1(z|z_0).$$

Les relations (92) et (93) donnent :

$$(94) \quad \Gamma(z|z_0) = \gamma(z_0|z).$$

Introduisons encore la fonction harmonique $G_1(z|z_0)$, conjuguée de $H(z|z_0)$ par rapport à z_0 , et posons

$$(95) \quad \Gamma_1(z|z_0) = G_1(z|z_0) + iH(z|z_0).$$

Cela étant, supposons que le problème généralisé de NEUMANN admette une solution uniforme $f(z) = u + iv$; en procédant comme au no 14^o, l'application de la formule (II) conduit à la relation

$$\int_{(z_0)} \left(G \frac{du}{dn} - u \frac{dG}{dn} \right) ds + \int_{\Sigma C_j} \left(G \frac{du}{dn} - u \frac{dG}{dn} \right) ds - \int_{\Sigma D_k} \left(H \frac{dv}{dn} - v \frac{dH}{dn} \right) ds = 0$$

d'où l'on tire

$$(96) \quad u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma C_j} \frac{du}{dn} G(z|z_0) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} \frac{dv}{dn} H(z|z_0) ds + c_0;$$

en posant

$$c_0 = \frac{1}{l_0} \int_{(C_0)} u(s) ds.$$

⁽²⁸⁾ c'est une fonction du point z .

La fonction harmonique conjuguée sera donnée par

$$(97) \quad v(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma C_j} \frac{du}{dn} H_1(z | z_0) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} \frac{dv}{dn} G_1(z | z_0) ds + \text{const.}$$

Les formules (96) et (97) nous donnent la formule définitive

$$(98) \quad f(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma C_j} \frac{du}{dn} \Gamma(z_0 | z) ds - \frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} \frac{dv}{dn} \Gamma_1(z | z_0) ds + \text{const.},$$

qui résout le problème généralisé de NEUMANN lorsque les conditions d'uniformité sont vérifiées.

REMARQUES. On aurait pu obtenir les formules donnant $u(x_0, y_0)$, $v(x_0, y_0)$ par une voie différente. Considérons la fonction $\rho(z | z_0) = \phi + i\psi$ définie par les propriétés suivantes : a) $\rho(z | z_0) + i \log(z - z_0)$ est régulière en chaque point z de (Ω) ; b) $\frac{d\phi}{dn} = 0$ sur $(C_0), (C_1), \dots, (C_p)$, $\frac{d\psi}{dn} = 0$ sur $(D_1), (D_2), \dots, (D_q)$. D'après le théorème de la page 35, une telle fonction existe et est déterminée à une constante près. En appliquant la formule (II) aux fonctions $f(z) = u + iv$ et $\rho(z | z_0) = \phi + i\psi$ on aboutit aisément à :

$$(97') \quad v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma C_j} \frac{du}{dn} \phi(z | z_0) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} \frac{dv}{dn} \psi(z | z_0) ds + \text{const.},$$

d'où on peut déduire une autre expression pour $u(x_0, y_0)$. On peut toujours ajouter à $\psi(z | z_0)$ une constante additive de façon à avoir la relation de symétrie

$$\psi(z | z_0) = \psi(z_0 | z).$$

Cela posé, nous pouvons représenter la solution $f(z)$ du problème de NEUMANN sous la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, où $f_1(z)$ vérifie les mêmes conditions aux limites sur les (C_j) que $f(z)$ et une dérivée normale imaginaire nulle sur les (D_k) , tandis que $f_2(z)$ a une dérivée normale réelle nulle sur les (C_j) , sa dérivée normale imaginaire prenant les mêmes valeurs que celle de $f(z)$ sur les (D_k) .

En représentant $f_1(z)$ par la formule (98) et $f_2(z)$ par celle qu'on déduit de (97'), on a

$$(98') \quad f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma C_j} \frac{du}{dn} \Gamma(z_0 | z) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma D_k} \frac{dv}{dn} \rho(z_0 | z) ds + \text{const.}$$

Lorsque le domaine (Ω) est limité seulement par des contours (C_j), on est dans le cas du problème ordinaire de NEUMANN et la fonction $\Gamma(z | z_0)$ se réduit à la fonction de NEUMANN. La formule (98) doit être remplacée par

$$(98') \quad f(z_0) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma C_j} \frac{du}{dn} \Gamma(z_0 | z) ds + \text{const.}$$

16°. — Cas particuliers.

Nous nous proposons de donner l'expression explicite des fonctions de NEUMANN, introduites au paragraphe précédent, pour l'anneau circulaire de rayons R_0, R_1 , ($R_0 > R_1$), et les formules résolvant les problèmes ordinaire et généralisé de NEUMANN.

Fonction ordinaire de NEUMANN.

Employons toujours la transformation (80) faisant passer du plan z de l'anneau au plan $u = \alpha + i\beta$ limité par un rectangle de sommets $u=0, 2\omega_1, 2\omega_1 + \omega_3, \omega_3$, et considérons la fonction

$$(99) \quad \Psi(u) = \frac{d\Gamma(u | u_0)}{du} = \frac{\partial H}{\partial \beta} - i \frac{\partial G}{\partial \beta};$$

on voit facilement que $\Psi(u)$ doit être régulière en chaque point du rectangle sauf en $u=u_0$ où elle possède un pôle simple, avec le résidu -1 ; de plus sa partie imaginaire doit être égale à $-\frac{\pi}{\omega_1}$ sur le segment $(0, 2\omega_1)$ et à zéro sur le segment $(\omega_3, 2\omega_1 + \omega_3)$.

Par conséquent, la fonction

$$\Psi_1(u) = \Psi(u) + \frac{i\pi}{\omega_1 \omega_3} u - \frac{i\pi}{\omega_1};$$

a une partie imaginaire nulle sur les deux frontières, et a le point $u=u_0$ comme pôle simple de résidu -1 . On peut satisfaire à ces conditions en prenant

$$\Psi_1(u) = -\zeta(u - u_0) - \zeta(u - \bar{u}_0) + Cu + C', \quad (u_0 = \alpha_0 + i\beta_0, \bar{u}_0 = \alpha_0 - i\beta_0)$$

la transcendante ζu étant construite avec les périodes $2\omega_1, 2\omega_3$; la constante réelle C est déterminée par la condition que $\Psi_1(u)$ ait une partie imaginaire nulle sur le bord supérieur du rectangle. On trouve ainsi $C = -\frac{2\eta_3}{\omega_3}$; C' , indépendante de u , est assujettie à la condition d'être réelle. En tenant compte de la relation classique

$$(100) \quad \eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2}$$

on trouve

$$(101) \quad \Psi(u) = -\zeta(u-u_0) - \zeta(u-\bar{u}_0) + \frac{2\eta_1}{\omega_1} u - \frac{i\pi}{\omega_1} + C',$$

et par conséquent

$$(102) \quad \Gamma(u | u_0) = \log \left[\frac{1}{\sigma(u-u_0)\sigma(u-\bar{u}_0)} \right] + \frac{\eta_1 u^2}{\omega_1} + \left(C' - \frac{i\pi}{2} \right) u + C'';$$

C'' est une constante, (pouvant dépendre de u_0), arbitraire. Nous allons maintenant déterminer $C'(u_0)$ de façon que la partie réelle de $\Gamma(u | u_0)$ soit uniforme. La formule bien connue

$$(103) \quad \sigma(u+2\omega_1) = -e^{+2\eta_1(u+\omega_1)} \sigma u$$

nous permet de trouver immédiatement

$$(104) \quad C'(u_0) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} (u_0 + \bar{u}_0) = -\frac{2\eta_1}{\omega_1} \alpha_0$$

quantité qui est bien réelle et ne dépend pas de u .

La fonction de NEUMANN étant ainsi déterminée, la formule (98'') nous fournit aisément la solution du problème correspondant

$$(105) \quad f_1(u_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\omega_1} \bar{g}_0(\alpha) \log \sigma(u_0 - \alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\omega_1} \bar{g}_1(\alpha) \log \sigma_3(u_0 - \alpha) d\alpha \\ + \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1 \pi} \int_0^{2\omega_1} \alpha [\bar{g}_0(\alpha) + \bar{g}_1(\alpha)] d\alpha + \text{const},$$

$\bar{g}_0(\alpha)$ et $\bar{g}_1(\alpha)$ étant les dérivées normales de la partie réelle de $f_1(u_0)$ sur les deux bords horizontaux du rectangle. En repassant au plan z , on obtient une autre formule, donnée par M. H. VILLAT,

$$(106) \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{(C_0)} g_0(s) \log \sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_0} s \right) ds \\ + \frac{1}{\pi} \int_{(C_1)} g_1(s) \log \sigma_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_1} s \right) ds \\ + \frac{\omega_1 \eta_1}{i\pi^3} \log \frac{z}{R_0} \cdot \left[\int_{(C_0)} \frac{sg_0(s)}{R_0} ds + \int_{(C_1)} \frac{sg_1(s)}{R_1} ds \right] + \text{const.}$$

Passons maintenant à la résolution effective du problème généralisé de NEUMANN. Pour nous conformer aux notations employées,

nous désignerons maintenant le cercle intérieur, de rayon (R_1) , par (D_1) et la suite des valeurs de la dérivée normale imaginaire par $h_1(s)$.

Fonction généralisée de NEUMANN.

En désignant cette fonction par $\Gamma(u | u_0)$, introduisons comme précédemment la fonction

$$\Psi(u) = \frac{d\Gamma(u | u_0)}{du} = \frac{\partial H}{\partial \beta} - i \frac{\partial G}{\partial \beta}$$

D'après le n° 15° on voit aisément que $\Psi(u)$ doit être régulière en chaque point du rectangle qui correspond à l'anneau (z) , sauf au point $u=u_0$, où cette fonction présente un pôle simple, de résidu -1 : sa partie imaginaire doit être égale à $-\frac{\pi}{\omega_1}$ sur le bord inférieur du rectangle, sa partie réelle doit être nulle sur le bord supérieur. D'après le principe de symétrie et la condition d'uniformité, $\Psi(u+2\omega_1) = \Psi(u)$, il est clair que la fonction $\Psi(u)$ est prolongeable dans tout le plan, doublement périodique, avec les périodes $2\omega_1, 4\omega_3$. Elle admet des pôles simples, congrus à $u=u_0, u=\bar{u}_0+2\omega_3, u=\bar{u}_0, u=u_0-2\omega_3$, de résidus égaux respectivement à $-1, +1, -1, +1$.

On a, par conséquent

$$\begin{aligned} \Psi(u) = & -\frac{i\pi}{\omega_1} - \zeta(u-u_0 | 2\omega_1, 4\omega_3) + \zeta(u-\bar{u}_0-2\omega_3 | 2\omega_1, 4\omega_3) \\ & - \zeta(u-\bar{u}_0 | 2\omega_1, 4\omega_3) + \zeta(u-u_0+2\omega_3 | 2\omega_1, 4\omega_3) + C, \end{aligned}$$

ou encore

$$\Psi(u) = -\zeta(u-u_0) + \zeta_3(u-\bar{u}_0) - \zeta(u-\bar{u}_0) + \zeta_3(u-u_0) + C - \frac{i\pi}{\omega_1}$$

C étant une constante réelle. Les fonctions elliptiques qui interviennent dans cette formule et dans celles qui suivent sont toujours construites avec les périodes $2\omega_1, 2\omega'_3$ ($\omega'_3 = 2\omega_3$). Posons encore $\eta'_3 = \eta_3(2\omega_1, 2\omega'_3)$, et cherchons les valeurs que prend $\Psi(u)$ sur le bord supérieur du rectangle. En posant $u=\alpha+\omega_3$, on a

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha+\omega_3) = & -\zeta_3(\alpha-u_0-\omega_3) - \zeta_3(\alpha-\bar{u}_0-\omega_3) + \zeta_3(\alpha-\bar{u}_0+\omega_3) + \zeta_3(\alpha-u_0+\omega_3) - \\ & - \frac{i\pi}{\omega_1} + C; \end{aligned}$$

cette quantité ne peut être imaginaire pure que si l'on a $C=0$. Ainsi,

l'expression de la fonction de NEUMANN cherchée est

$$(107) \quad T(u | u_0) = \log \frac{\sigma_3(u - u_0) \sigma_3(u - \bar{u}_0)}{\sigma(u - u_0) \sigma(u - \bar{u}_0)} - \frac{i\pi}{\omega_1} u + C';$$

C' est une constante (pouvant dépendre de u_0).

Quant à la fonction $\rho(u | u_0)$ définie à la page 47, son expression résulte aussitôt des considérations de (14°). On a :

$$(108) \quad \rho(u | u_0) = i \log \frac{\sigma(u - \bar{u}_0) \sigma_3(u - u_0)}{\sigma(u - u_0) \sigma_3(u - \bar{u}_0)} + \text{const.}$$

Cela posé, la solution du problème généralisé de NEUMANN s'obtient simplement à partir de la formule (98').

On a (la signification de $\bar{g}_0(\alpha)$, $\bar{h}_1(\alpha)$ étant évidente),

$$(109) \quad f_1(u_0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\omega_1} \bar{g}_0(\alpha) \log \frac{\sigma_3(u_0 - \alpha)}{\sigma(u_0 - \alpha)} d\alpha \\ - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\omega_1} \bar{h}_1(\alpha) \log \frac{\sigma(u_0 - \alpha + \frac{\omega'_3}{2}) \sigma_3(u_0 - \alpha - \frac{\omega'_3}{2})}{\sigma(u_0 - \alpha - \frac{\omega'_3}{2}) \sigma_3(u_0 - \alpha + \frac{\omega'_3}{2})} d\alpha + \text{const.},$$

ou encore, en tenant compte des formules classiques

$$(110) \quad \sigma(u_0 - \alpha + \frac{\omega'_3}{2}) = e^{\eta'_3(u_0 - \alpha - \frac{\omega'_3}{2})} \cdot \sigma \omega'_3 \cdot \sigma_3(u_0 - \alpha - \frac{\omega'_3}{2}) \\ \sigma_3(u_0 - \alpha + \frac{\omega'_3}{2}) = -e^{\eta'_3(u_0 - \alpha - \frac{\omega'_3}{2})} \cdot \frac{e^{\eta'_3 \omega'_3}}{\sigma \omega'_3} \sigma(u_0 - \alpha - \frac{\omega'_3}{2})$$

et en repassant au plan (z),

$$(111) \quad f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{(C_0)} g_0(s) \log \xi_{30} \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_0} s \right) ds \\ - \frac{i}{\pi} \int_{(D_1)} h_1(s) \log \xi_{30} \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega_1}{\pi R_1} s - \frac{\omega'_3}{2} \right) ds + \text{const.}$$

Extensions. Les formules (86), (90), (106) ont été étudiées par M. H. VILLAT (loc. cit. (21)), en généralisant les résultats de P. FATOU (29) et L. LICHTENSTEIN (30), lorsque les données sont sommables. Dans ce

(29) P. FATOU, *Acta Mathematica*, t. 30, 1906.

(30) L. LICHTENSTEIN, *Journal de Crelle* 1912.

cas, les conditions aux limites correspondantes sont vérifiées presque partout; de plus, si les données sont de carrés sommables, on peut montrer que les fonctions conjuguées existent presque partout sur les frontières et sont de carrés sommables. Dans le cas de la formule (106) on prouve de même que les dérivées normales de la partie imaginaire de $f(z)$ existent presque partout sur (C_0) et (C_1) et sont de carrés sommables.

Il est presque immédiat de montrer, en tenant compte du théorème classique de FISCHER-RIESZ, qu'on a des résultats analogues pour la formule (111). Lorsque $g_0(s)$ et $h_1(s)$ sont sommables en valeur absolue, les conditions aux limites

$$\frac{du}{dn} = g_0(s) \quad \text{sur } (C_0),$$

$$\frac{dv}{dn} = h_1(s) \quad \text{sur } (D_1),$$

sont vérifiées presque partout. Si en outre les données sont de carrés sommables, u et v existent presque partout sur les deux frontières et sont de carrés sommables.

Il en est de même pour $\frac{dv}{dn}$ sur (C_0) et de $\frac{du}{dn}$ sur (D_1) .

Il est facile de légitimer les résultats obtenus plus haut (5°, 6°, 7°) lorsque les données sont supposées seulement bornées et intégrables au sens de M. LEBESGUE. On sait, en effet, que les formules (4), (8) sont valables presque partout ⁽³¹⁾. Par conséquent, à toute solution des systèmes (A) et (B), il correspond par l'intermédiaire des formules (20), (23), des fonctions analytiques $F(z)$, $f(z)$ vérifiant presque partout les conditions aux limites (A'), (B').

CHAPITRE III.

Problèmes mixtes de Dirichlet-Neumann.

17°. — Considérons dans le plan $z=x+iy$, un domaine (Ω) , d'un seul tenant, multiplement connexe, limité par une courbe extérieure (C_0) , située entièrement à distance finie, et par les courbes intérieures (C_j) , ($j=1, 2, \dots, p$); (D_k) , ($k=1, 2, \dots, q$); (G_λ) , ($\lambda=1, 2, \dots, m$); (H_μ) , ($\mu=1, 2, \dots, n$), sans aucun point commun, ayant une courbure qui varie d'une façon continue.

(31) J. PRIWALOFF, loc. cit. (5).

Le problème que nous nous proposons maintenant de résoudre, et qui généralise ceux traités dans le chapitre antérieur, est le suivant :

PROBLÈME I. — Déterminer une fonction analytique $F(z) = U + iV$ régulière en chaque point intérieur à (Ω) , uniforme ou pouvant avoir des périodes cycliques, et vérifiant les conditions : 1°. sa partie réelle prend des valeurs continues données $\varphi_j(s)$ sur (C_0) , (C_j) ; 2°. sa partie imaginaire prend la succession de valeurs continues $\psi_k(s)$ sur les contours (D_k) ; 3°. $\frac{dU}{dn}$ prend les valeurs continues $g_\lambda(s)$ sur les (G_λ) ; 4°. $\frac{dV}{dn}$ prend les valeurs continues $h_\mu(s)$ sur les (H_μ) .

Bien que ce problème puisse être ramené au problème généralisé de DIRICHLET, nous allons essayer de le résoudre en cherchant la solution sous forme de potentiels de simples et doubles couches et leurs associés, de telle façon qu'on soit conduit à envisager un système d'équations intégrales auquel on puisse appliquer les théorèmes de FREDHOLM.

Posons à cet effet :

$$F(z) = \frac{1}{i} \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \mu_j(s_P) \frac{dz_P}{z_P - z} + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \nu_k(s_P) \frac{dz_P}{z_P - z} \\ + \sum_{\lambda=1}^m \int_{(G_\lambda)} \xi_\lambda(s_P) e^{-i\gamma_\lambda} \log \frac{1}{z_P - z} dz_P - i \sum_{\mu=1}^n \int_{(H_\mu)} \eta_\mu(s_P) e^{-i\delta_\mu} \log \frac{1}{z_P - z} dz_P + iC, \quad (112)$$

les $\mu_j(s)$, $\nu_k(s)$, $\xi_\lambda(s)$, $\eta_\mu(s)$ étant des fonctions réelles de l'arc s ; on a désigné par γ_λ , δ_μ les angles que font avec Ox les tangentes positives, par rapport à (Ω) , des courbes (G_λ) , (H_μ) , par C une constante réelle inconnue. Les intégrations sont faites dans le sens direct par rapport à (Ω) .

La formule (1) équivaut aux deux suivantes

$$U = \sum_{j=0}^p W_j - \sum_{k=1}^q T_k + \sum_{\lambda=1}^m U_\lambda + \sum_{\mu=1}^n \bar{V}_\mu \quad (112')$$

$$iV = \sum_{j=0}^p \bar{W}_j + \sum_{k=1}^q T_k + \sum_{\lambda=1}^m \bar{U}_\lambda - \sum_{\mu=1}^n V_\mu$$

avec

$$W_j = \int_{(C_j)} \mu_j(s_P) \frac{\cos \varphi}{r} ds_P, \quad T_k = \int_{(D_k)} \nu_k(s_P) \frac{\cos \varphi}{r} ds_P \\ U_\lambda = \int_{(G_\lambda)} \xi_\lambda(s_P) \log \frac{1}{r} ds_P, \quad V_\mu = \int_{(H_\mu)} \eta_\mu(s_P) \log \frac{1}{r} ds_P. \quad (113) \quad (r = \overline{MP})$$

$\overline{W}_j, \overline{T}_k, \overline{U}_\lambda, \overline{V}_\mu$ sont les fonctions conjuguées de ces potentiels de doubles et simples couches. On a désigné par φ l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{PM}$ avec la normale intérieure en P à l'une des courbes frontières.

Associons au problème (I) le problème mixte suivant.

PROBLÈME II. — Déterminer une fonction analytique $\Phi(z) = u + iv$ régulière en chaque point intérieur de (Ω) , uniforme ou présentant des constantes cycliques, par les conditions: 1° $\frac{du}{dn}$ prend les suites de valeurs $c_0(s), c_1(s)$ sur les contours $(C_0), (C_1)$; 2° $\frac{dv}{dn}$ prend les valeurs $d_k(s)$ sur les courbes (D_k) ; 3° u prend les valeurs $\varphi_\lambda(s)$ sur les (G_λ) ; 4° v prend les valeurs $\psi_\mu(s)$ sur les (H_μ) . Toutes les données sont supposées continues de l'arc s .

Cherchons la solution de ce problème sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \overline{\mu}_j(s_P) e^{-i\alpha_j} \log \frac{1}{z_P - z} dz_P - i \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \overline{\nu}_k(s_P) e^{-i\beta_k} \log \frac{1}{z_P - z} dz_P \\ (114) \quad & + \frac{1}{i} \sum_{\lambda=1}^m \int_{(G_\lambda)} \overline{\xi}_\lambda(s_P) \frac{dz_P}{z_P - z} - \sum_{\mu=1}^n \int_{(H_\mu)} \overline{\eta}_\mu(s_P) \frac{dz_P}{z_P - z}, \end{aligned}$$

ou encore, en séparant en parties réelle et imaginaire,

$$\begin{aligned} u = & \sum_{j=0}^p w_j + \sum_{k=1}^q \bar{t}_k - \sum_{\lambda=1}^m u_\lambda - \sum_{\mu=1}^n \bar{v}_\mu \\ (114') \quad v = & \sum_{j=0}^p \bar{w}_j - \sum_{k=1}^q t_k - \sum_{\lambda=1}^m \bar{u}_\lambda + \sum_{\mu=1}^n v_\mu \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} w_j = & \int_{(C_j)} \overline{\mu}_j(s_P) \log \frac{1}{r} ds_P, \quad t_k = \int_{(D_k)} \overline{\nu}_k(s_P) \log \frac{1}{r} ds_P. \\ (115) \quad u_\lambda = & \int_{(G_\lambda)} \overline{\xi}_\lambda(s_P) \frac{\cos \varphi}{r} ds_P, \quad v_\mu = \int_{(H_\mu)} \overline{\eta}_\mu(s_P) \frac{\cos \varphi}{r} ds_P; \end{aligned}$$

$\bar{w}_j, \bar{t}_k, \bar{u}_\lambda, \bar{v}_\mu$ sont les fonctions conjuguées des potentiels de simples et doubles couches (115).

Cela posé, en tenant compte des formules de discontinuité des potentiels de doubles couches, et de celles concernant les dérivées

normales des potentiels de simples couches, les problèmes (I) et (II) se traduisent, par l'intermédiaire des formules (112') et (114'), en deux systèmes (A), (B) de $p+q+m+n+1$ équations intégrales linéaires à autant d'inconnues, dont les noyaux sont tels que les théorèmes de FREDHOLM sont applicables. En introduisant un paramètre λ , nous condons ces équations en les suivantes

$$\begin{aligned}
 \text{(A')} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1+\lambda}{2} U^i - \frac{1-\lambda}{2} U^e = \varphi_i(s) & (C_0), (C_i) \\ \frac{1+\lambda}{2} V^i - \frac{1-\lambda}{2} V^e = \psi_k(s) & (D_k) \\ \frac{1+\lambda}{2} \frac{dU^i}{dn} - \frac{1-\lambda}{2} \frac{dU^e}{dn} = g_\lambda(s) & (G_\lambda) \\ \frac{1+\lambda}{2} \frac{dV^i}{dn} - \frac{1-\lambda}{2} \frac{dV^e}{dn} = h_\mu(s) & (H_\mu) \end{array} \right. \quad \text{sur} \\
 \text{(B')} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1+\lambda}{2} \frac{du^e}{dn} - \frac{1-\lambda}{2} \frac{du^i}{dn} = -c_i(s) & (C_0), (C_i) \\ \frac{1+\lambda}{2} \frac{dv^e}{dn} - \frac{1-\lambda}{2} \frac{dv^i}{dn} = -d_k(s) & (D_k) \\ \frac{1+\lambda}{2} u^e - \frac{1-\lambda}{2} u^i = -\varphi_\lambda(s) & (G_\lambda) \\ \frac{1+\lambda}{2} v^e - \frac{1-\lambda}{2} v^i = -\psi_\mu(s) & (H_\mu) \end{array} \right. \quad \text{sur}
 \end{aligned}$$

en désignant par $U^i, V^i, u^i, v^i; U^e, V^e, u^e, v^e$, les déterminations intérieures et extérieures, à (Ω) , des fonctions U, V, u, v , définies par les formules (112'), (114'). On voit ainsi que le problème (I) correspond au système (A) pour $\lambda = 1$, tandis que (II) correspond au système (B) pour $\lambda = -1$.

L'étude de ces systèmes permet d'énoncer les résultats suivants :

10. Les systèmes d'équations intégrales (A) et (B) sont associés (au sens de la théorie des équations intégrales linéaires).

20. Les systèmes homogènes admettent, pour $\lambda = \pm 1$, $p+q$ solutions effectives distinctes.

Ce résultat s'obtient en s'appuyant sur le lemme qui suit :

Les seules distributions de masses continues auxquelles correspondent des potentiels de simples couches w_j, t_k réguliers à l'infini, et des

potentiels de doubles couches u_λ , v_μ vérifiant le système (B'), pour $\lambda = +1$, sont : $\ddot{\mu}_j(s) \equiv 0$, $\ddot{v}_k(s) \equiv 0$, $\ddot{\xi}_\lambda(s) \equiv 0$, $\ddot{\eta}_\mu(s) \equiv 0$.

En effet, en vertu de la formule (I) et de l'unicité du problème de DIRICHLET pour des données continues sur la frontière d'un domaine simplement connexe, on a, compte tenu de (B'),

$$\begin{aligned} u^e &= \text{const} && \text{à l'extérieur de } (C_0) \text{ et à l'intérieur des } (C_l), \\ v^e &= \text{const} && \text{à l'intérieur des } (D_k), \\ u^e &= 0 && \text{à l'intérieur des } (G_\lambda), \\ v^e &= 0 && \text{à l'intérieur des } (H_\mu). \end{aligned}$$

On en déduit, comme au n° 6°, que les déterminations des potentiels w_0 , w_j , u_λ , v_μ , à l'extérieur de (Ω) , sont prolongeables à son intérieur et y sont uniformes. De plus, les fonctions $(w_j^e - w_j^i) - i(t_k^e - t_k^i)$, régulières dans (Ω) ont une partie réelle prenant des valeurs constantes sur (C_0) , (C_l) , ($l = 1, 2, \dots, p$), à dérivée normale nulle sur les (G_λ) ; leur partie imaginaire prend des valeurs constantes sur les (D_k) , et a une dérivée normale nulle sur les (H_μ) . On en conclut, en appliquant la formule (I), $\ddot{\mu}_0(s) \equiv 0$, $\ddot{\mu}_j(s) \equiv 0$, $\ddot{v}_k(s) \equiv 0$.

D'une façon analogue on constate que les fonctions $(u_\lambda^e - u_\lambda^i) - i(v_\mu^e - v_\mu^i)$, régulières dans (Ω) , sont à parties réelles constantes sur les (C_l) , à dérivées normales réelles nulles sur les (G_λ) , à parties imaginaires constantes sur les (D_k) , et à dérivées normales imaginaires nulles sur les (H_μ) . On en déduit aisément $\ddot{\xi}_\lambda(s) \equiv 0$, $\ddot{\eta}_\mu(s) \equiv 0$.

3. Soient $\{\mu_0^{(r)}(s), \mu_j^{(r)}(s), v_k^{(r)}(s), \xi_\lambda^{(r)}(s), \eta_\mu^{(r)}(s)\}$ ($r = 1, \dots, p+q$) $p+q$ solutions effectives de (B) pour $\lambda = +1$. Le problème (I) admet toujours une solution. Pour qu'elle soit uniforme, il faut et il suffit que les données vérifient les $p+q+m+n-1$ conditions obtenues en éliminant C du système

$$(116) \left\{ \begin{aligned} (116') \quad & \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \varphi_j(s) \mu_j^{(r)}(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} \psi_k(s) v_k^{(r)}(s) ds = \\ & = \sum_{\lambda=1}^m \int_{(G_\lambda)} g_\lambda(s) \xi_\lambda^{(r)}(s) ds - \sum_{\mu=1}^n \int_{(H_\mu)} h_\mu(s) \eta_\mu^{(r)}(s) ds - C \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} v_k^{(r)}(s) ds \\ & \quad (r=1, 2, \dots, p+q) \\ (116'') \quad & \int_{(G_\lambda)} g_\lambda(s) ds = 0, \quad \int_{(H_\mu)} h_\mu(s) ds = 0 \\ & \quad (\lambda=1, 2, \dots, m) \quad (\mu=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right.$$

Lorsque les conditions (116') sont vérifiées, la solution est représentable sous la forme (112).

Dans le cas contraire, elle est donnée par $F(z) + f(z)$, $f(z)$ étant une fonction régulière en chaque point de (Ω) , à partie réelle constante sur les contours (C_0) , (C_j) , à dérivée normale réelle nulle sur les (G_λ) , à partie imaginaire nulle sur les (D_k) et à dérivée normale imaginaire nulle sur les (H_μ) . De plus, les périodes cycliques de $f(z)$ relatives aux contours (G_λ) , (H_μ) sont nulles.

Ce résultat s'obtient par des considérations analogues à celles de 8°; l'existence de $f(z)$ peut se déduire du théorème de la page 29, (9°).

4. Les systèmes homogènes (A) et (B) admettent, pour $\lambda = -1$, $m+n+1$ solutions effectives distinctes.

Cela résulte aisément du lemme suivant :

Les seules distributions de masses continues auxquelles correspondent des potentiels de simples couches w_j , t_k , réguliers à l'infini, à l'exception de w_0 , et des potentiels de doubles couches u_λ , v_μ vérifiant, le système (B') pour $\lambda = -1$, sont $\{\bar{\mu}_0(s) = \rho(s), \bar{\mu}_1(s) \equiv 0, \bar{v}_k(s) \equiv 0, \bar{\xi}_\lambda(s) = c_\lambda, \bar{\eta}_\mu(s) = d_\mu\}$, où $\rho(s)$ représente une densité de simple couche étalée sur (C_0) telle que le potentiel w_0 correspondant soit nul à l'intérieur de (C_0) ; les c_λ et d_μ sont des constantes réelles arbitraires.

En effet, le système (B') donne, ($\lambda = -1$),

$$\begin{array}{ll} v^i = \text{const} & \text{sur } (C_0), (C_j) \\ u^i = \text{const} & \text{sur } (D_k) \\ u^i = 0 & \text{sur } (G_\lambda) \\ v^i = 0 & \text{sur } (H_\mu). \end{array}$$

En tenant compte de l'unicité du problème généralisé de DIRICHLET (8°), on voit que $u^i + iv^i$ doit être identiquement nulle, puisque uniforme. Par conséquent, les déterminations intérieures à (Ω) des potentiels de simples couches et doubles couches sont prolongeables dans tout le plan et partout régulières. On en déduit aussitôt le résultat énoncé plus haut.

Signalons encore le lemme suivant :

Les seules distributions de masses continues $\mu_j(s)$, $v_k(s)$, $\xi_\lambda(s)$, $\eta_\mu(s)$, telles que les potentiels correspondants vérifient le système (A'), pour $\lambda = -1$, les potentiels de simples couches étant réguliers à l'infini, sont $\mu_j(s) = c$ ($j=0, 1, \dots, p$), $v_k(s) = 0$, $\xi_\lambda(s) = 0$, $\eta_\mu(s) = 0$, c désignant une constante réelle arbitraire.

5. Soient $\mu_j(s) = c$, $v_k(s) = 0$, $\xi_\lambda(s) = 0$, $\eta_\mu(s) = 0$ et $\{\mu_j^{(r)}(s), v_k^{(r)}(s), \xi_\lambda^{(r)}(s), \eta_\mu^{(r)}(s)\}$, ($r=1, 2, \dots, m+n$), les solutions effectives distinctes de (A) pour $\lambda = -1$.

Le problème II admet une solution représentée par (114) si l'on a

$$(117') \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} c_j(s) ds = 0$$

$$(117'') \quad \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} c_j(s) \mu_j^{(r)}(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} d_k(s) \nu_k^{(r)}(s) ds - \\ - \sum_{\lambda=1}^m \int_{(G_\lambda)} \varphi_\lambda(s) \xi_\lambda^{(r)}(s) ds + \sum_{\mu=1}^n \int_{(H_\mu)} \psi_\mu(s) \eta_\mu^{(r)}(s) ds = 0.$$

Pour que cette solution soit uniforme, on doit avoir en outre

$$(118) \quad \int_{(C_j)} c_j(s) ds = 0, \quad (j=1, 2, \dots, p); \quad \int_{(D_k)} d_k(s) ds = 0, \quad (k=1, \dots, q) -$$

LEMME. Le déterminant d'ordre $m+n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \int_{(G_1)} \xi_1^{(1)}(s) ds & \dots & \int_{(G_1)} \xi_1^{(m+n)}(s) ds \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{(G_m)} \xi_m^{(1)}(s) ds & \dots & \int_{(G_m)} \xi_m^{(m+n)}(s) ds \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{(H_n)} \eta_n^{(1)}(s) ds & \dots & \int_{(H_n)} \eta_n^{(m+n)}(s) ds \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

En effet, dans le cas contraire, il y aurait des constantes réelles α_r , non toutes nulles, telles qu'on ait

$$\sum_{r=1}^{m+n} \alpha_r \int_{(G_\lambda)} \xi_\lambda^{(r)}(s) ds = 0, \quad \sum_{r=1}^{m+n} \alpha_r \int_{(H_\mu)} \eta_\mu^{(r)}(s) ds = 0 \\ (\lambda=1, 2, \dots, m), \quad (\mu=1, 2, \dots, n).$$

D'après le lemme précédent, on en déduirait

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m+n} \alpha_r \mu_j^{(r)}(s) &= C, & \sum_{r=1}^{m+n} \alpha_r \nu_k^{(r)}(s) &= 0, \\ (j=0, 1, \dots, p), & & (k=1, \dots, q), \\ \sum_{r=1}^{m+n} \alpha_r \xi_\lambda^{(r)}(s) &= 0, & \sum_{r=1}^{m+n} \alpha_r \eta_\mu^{(r)}(s) &= 0, \\ (\lambda=1, 2, \dots, m), & & (\mu=1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

et le système (A) homogène n'aurait que $m+n$ solutions effectives; pour $\lambda=-1$.

6. — Soit $g(z)$ la fonction vérifiant les conditions suivantes: elle est régulière en chaque point de (Ω) , à dérivée normale réelle nulle sur (C_0) , (C_j) ; à dérivée normale imaginaire nulle sur les (D_k) ; sa partie réelle prend des valeurs constantes g_λ données sur les contours (G_λ) , sa partie imaginaire prend des valeurs constantes également données h_μ sur les contours (H_μ) ; de plus, les périodes cycliques de $g(z)$ relatives aux contours (C_j) , $(j=1, 2, \dots, p)$ et (D_k) , $(k=1, 2, \dots, q)$ sont nulles; la somme des périodes cycliques de $g(z)$ dues aux contours (H_μ) est aussi nulle.

L'existence d'une telle fonction est un cas particulier d'un théorème énoncé à la page 30.

Prenons pour g_λ et h_μ les solutions du système

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} c_j(s) \mu_j^{(r)}(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} d_k(s) \nu_k^{(r)}(s) ds \\ (r=1, 2, \dots, m+n), \\ = \sum_{\lambda=1}^m \int_{(G_\lambda)} [\varphi_\lambda(s) - g_\lambda] \xi_\lambda^{(r)}(s) ds - \sum_{\mu=1}^n \int_{(H_\mu)} [\psi_\mu(s) - h_\mu] \eta_\mu^{(r)}(s) ds. \end{aligned}$$

Le déterminant Δ de ce système est différent de zéro, en vertu du lemme précédent.

Le problème II admet une solution moyennant la condition (117'). Elle est donnée par $\Phi(z) + g(z)$, la fonction $\Phi(z)$ correspondant aux données $c_j(s)$, $d_k(s)$, $\varphi_\lambda(s) - g_\lambda$, $\psi_\mu(s) - h_\mu$ et $g(z)$ étant la fonction définie plus haut. Pour que cette solution soit uniforme, il faut et il suffit que les données vérifient outre les conditions (118), les $m+n-2$.

conditions obtenues en éliminant les constantes g et h du système

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} c_j(s) \mu_j^{(r)}(s) ds + \sum_{k=1}^q \int_{(D_k)} d_k(s) \nu_k^{(r)}(s) ds \\ &= \sum_{\lambda=1}^m \int_{(G_\lambda)} [\varphi_\lambda(s) - g] \xi_\lambda^{(r)}(s) ds - \sum_{\mu=1}^n \int_{(H_\mu)} [\psi_\mu(s) - h] \eta_\mu^{(r)}(s) ds. \\ & \quad (r=1, 2, \dots, m+n). \end{aligned}$$

CHAPITRE IV.

18^o. — Nous allons nous restreindre dans la suite, en vue des applications que nous ferons à certaines questions d'Hydrodynamique, à considérer des domaine (Ω) doublement connexes, limités par une courbe extérieure (C) et une courbe intérieure, que nous désignerons par (D) pour nous conformer aux notations employées dans le deuxième chapitre.

Nous envisageons dans ce chapitre des problèmes qui généralisent ceux traités dans les chapitres II et III. Le premier est le suivant :

Déterminer une fonction $f(z)=u+iv$, régulière dans (Ω) et vérifiant les conditions aux limites

$$(119) \quad \begin{cases} \frac{du}{dn} = \lambda A(s)u - C(s), & \text{sur } (C), \\ \frac{dv}{dn} = \lambda B(s)v - D(s), & \text{sur } (D), \end{cases}$$

$A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$ étant des fonctions bornées et intégrables de l'arc s , définies respectivement sur les courbes (C) et (D) ; λ est un paramètre.

D'après ce que nous avons vu à propos du problème généralisé de NEUMANN, on peut poser

$$(120) \quad \begin{aligned} u(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \frac{du}{dn} G(z_0 | s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} \frac{dv}{dn} \phi(z_0 | s) ds + \alpha \\ v(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \frac{du}{dn} H(z_0 | s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} \frac{dv}{dn} \psi(z_0 | s) ds + \beta, \end{aligned}$$

où

$$G(z_0 | s) + iH(z_0 | s) = \Gamma(z_0 | s); \quad \phi(z_0 | s) + i\psi(z_0 | s) = \rho(z_0 | s),$$

représentent les valeurs des deux fonctions généralisées de NEUMANN

lorsque le point z se trouve sur (C) ou sur (D); α et β sont deux constantes réelles.

En faisant tendre le point $z_0 = x_0 + iy_0$ soit vers un point de (C), soit vers un point de (D), les formules (120) nous donnent les valeurs correspondantes de $u(\sigma)$ et $v(\sigma)$. On obtient ainsi, en tenant compte du comportement bien connu des fonctions de NEUMANN sur les contours, le système d'équations intégrales :

$$\begin{aligned} u(s) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} [\lambda A(\sigma) u(\sigma) - C(\sigma)] G(s, \sigma) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} [\lambda B(\sigma) v(\sigma) - D(\sigma)] \phi(s, \sigma) d\sigma + \alpha, \\ v(s) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} [\lambda A(\sigma) u(\sigma) - C(\sigma)] H(s, \sigma) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} [\lambda B(\sigma) v(\sigma) - D(\sigma)] \psi(s, \sigma) d\sigma + \beta, \end{aligned} \quad (121)$$

auquel il convient d'adjoindre les conditions d'uniformité

$$\begin{aligned} \int_{(C)} [\lambda A(s) u(s) - C(s)] ds &= 0 \\ \int_{(D)} [\lambda B(s) v(s) - D(s)] ds &= 0. \end{aligned} \quad (122)$$

Supposons $\int_{(C)} A(s) ds \neq 0$, $\int_{(D)} B(s) ds \neq 0$. En introduisant les expressions de $u(s)$, $v(s)$, tirées de (121), dans les équations (122), on obtient les valeurs suivantes pour α et β :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\int_{(C)} C(s) ds}{\lambda \int_{(C)} A(s) ds} + \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} [\lambda A(\sigma) u(\sigma) - C(\sigma)] \frac{\int_{(C)} A(s) G(s, \sigma) ds}{\int_{(C)} A(s) ds} d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} [\lambda B(\sigma) v(\sigma) - D(\sigma)] \frac{\int_{(C)} A(s) \phi(s, \sigma) ds}{\int_{(C)} A(s) ds} d\sigma, \end{aligned} \quad (123)$$

$$\beta = \frac{\int_{(D)} D(s) ds}{\lambda \int_{(D)} B(s) ds} + \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} [\lambda A(\sigma) u(\sigma) - C'(\sigma)] \frac{\int_{(D)} B(s) H(s, \sigma) ds}{\int_{(D)} B(s) ds} d\sigma$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} [\lambda B(\sigma) v(\sigma) - D(\sigma)] \frac{\int_{(D)} B(s) \psi'(s, \sigma) ds}{\int_{(D)} B(s) ds} d\sigma.$$

Les valeurs α et β introduites dans (121) nous donnent en définitive le système de deux équations intégrales dont la résolution nous fera connaître les valeurs de $R[f(z)]$ sur (C) et de $Im[f(z)]$ sur (D). La fonction $f(z)$, solution du problème aux limites (119), sera fournie par une formule analogue à (76), du chapitre II.

Le point $\lambda = 0$ étant une pôle simple pour la solution, il suffit de faire la transformation

$$(124) \quad u(s) = U(s) + \frac{\int_{(C)} C(s) ds}{\lambda \int_{(C)} A(s) ds}, \quad v(s) = V(s) + \frac{\int_{(D)} D(s) ds}{\lambda \int_{(D)} B(s) ds},$$

pour qu'on soit conduit à un autre système d'équations intégrales du type de FREDHOLM.

Cela étant, démontrons les propriétés suivantes :

1. Lorsque les fonctions $A(s)$, $B(s)$ conservent des signes constants opposés, les valeurs de λ pour lesquelles le problème (119) homogène, admet des solutions effectives, [constantes fondamentales du système (121)], sont toutes réelles.

En effet, supposons que $\lambda_0 = \xi + i\eta$ soit une constante fondamentale, à laquelle correspondent la solution $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$ et, par la formule (76), les deux fonctions $f_1(z) = u_1 + iv_1$, $f_2(z) = u_2 + iv_2$ holomorphes dans (Ω) . On aurait

$$(125) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dn} = A(s) (\xi u_1 - \eta u_2) \\ \frac{du_2}{dn} = A(s) (\eta u_1 + \xi u_2) \end{cases} \quad \text{sur (C),}$$

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dn} = B(s) (\xi v_1 - \eta v_2) \\ \frac{dv_2}{dn} = B(s) (\eta v_1 + \xi v_2) \end{cases} \quad \text{sur (D),}$$

d'où

$$(126) \quad \begin{aligned} \int_{(C)} (u_1 \frac{du_2}{dn} - u_2 \frac{du_1}{dn}) ds &= \eta \int_{(C)} A(s) (u_1^2 + u_2^2) ds, \\ \int_{(D)} (v_1 \frac{dv_2}{dn} - v_2 \frac{dv_1}{dn}) ds &= \eta \int_{(D)} B(s) (v_1^2 + v_2^2) ds, \end{aligned}$$

En retranchant ces deux relations et en tenant compte de la formule (II), il reste

$$(127) \quad \eta \int_{(C)} A(s) (u_1^2 + u_2^2) ds = \eta \int_{(D)} B(s) (v_1^2 + v_2^2) ds$$

Les deux membres de cette relation étant de signes contraires, en vertu de l'hypothèse faite, on doit avoir $\eta = 0$, sinon λ_0 ne serait pas constante fondamentale.

II. Sans faire aucune hypothèse sur les signes de $A(s)$, $B(s)$, on peut montrer que les constantes fondamentales du système (121) ne peuvent pas être imaginaires pures.

En effet, les équations (125), où l'on fait $\xi = 0$, donneraient

$$\int_{(C)} (u_1 \frac{du_1}{dn} + u_2 \frac{du_2}{dn}) ds = 0, \quad \int_{(D)} (v_1 \frac{dv_1}{dn} + v_2 \frac{dv_2}{dn}) ds = 0,$$

ce qui entraînerait, en vertu de la formule (I),

$$\iint_{(\Omega)} \left\{ \left| \frac{df_1}{dz} \right|^2 + \left| \frac{df_2}{dz} \right|^2 \right\} dx dy = 0$$

et λ_0 ne serait pas constante fondamentale.

III. Lorsque $A(s)$ et $B(s)$ conservent des signes constants, les mêmes pour les deux fonctions, les constantes fondamentales réelles du système (121) sont toutes du signe opposé.

En effet, le système (119), rendu homogène, donne

$$(128) \quad \begin{aligned} \int_{(C)} u \frac{du}{dn} ds &= \lambda \int_{(C)} A(s) u^2 ds, \\ \int_{(D)} v \frac{dv}{dn} ds &= \lambda \int_{(D)} B(s) v^2 ds, \end{aligned}$$

en ajoutant ces relations et en tenant compte de la formule (I) on trouve

$$(129) \quad \iint_{(\Omega)} \left| \frac{df}{dz} \right|^2 dx dy + \lambda \left[\int_{(C)} A(s) u^2 ds + \int_{(D)} B(s) v^2 ds \right] = 0,$$

Par conséquent, si $A(s) \geq 0$, $B(s) \geq 0$ (aucune de ces fonctions n'étant identiquement nulle), on doit avoir $\lambda < 0$; si $A(s) \leq 0$, $B(s) \leq 0$, on doit avoir $\lambda > 0$.

En particulier, lorsque $A(s) \geq 0$, $B(s) \geq 0$, le problème (119) admet toujours une solution pour $\lambda = +1$.

Il est facile de représenter cette solution au moyen d'une fonction de GREEN, dépendant du domaine (Ω) et des fonctions $A(s)$, $B(s)$. Cette fonction est définie par les conditions suivantes :

a) $\gamma(z | z_0) = g(z | z_0) + ih(z | z_0)$ est régulière dans tous les points z de (Ω) , sauf au point $z = z_0$, où cette fonction se comporte comme $\log \frac{1}{z - z_0}$;

b) elle vérifie les conditions aux limites

$$(130) \quad \frac{dg}{dn} = A(s) g \text{ sur } (C); \quad \frac{dh}{dn} = B(s) h \text{ sur } (D).$$

D'après tout ce qui précède, il est clair qu'une telle fonction existe et est unique. Cela étant, appliquons la formule fondamentale (II) aux deux fonctions $f(z) = u + iv$ et $\gamma(z | z_0) = g + ih$, après avoir exclu le point $z = z_0$ du domaine d'intégration en retranchant un petit cercle (z_0) de centre z_0 .

On obtient immédiatement

$$\int_{(z_0)} \left(g \frac{du}{dn} - u \frac{dg}{dn} \right) ds = \int_{(C)} C(s) g(s | z_0) ds - \int_{(D)} D(s) h(s | z_0) ds$$

et en faisant tendre le rayon du cercle (z_0) vers zéro,

$$(131) \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} G(s) g(s | z_0) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} D(s) h(s | z_0) ds.$$

Dans cette formule $\gamma(s | z_0)$ désigne les valeurs prises par $\gamma(z | z_0)$ lorsque z se trouve sur (C) ou sur (D).

REMARQUES. Les propriétés trouvées plus haut s'expliquent aisément en observant que, en vertu des formules (92), (98), (98') et d'un lemme fondamental du Calcul des Variations, on peut toujours choisir les noyaux $G(z | z_0)$, $H(z | z_0)$, $\phi(z | z_0)$, $\psi(z | z_0)$, de façon à avoir les relations

$$\begin{aligned} G(z | z_0) &= G(z_0 | z), & H(z | z_0) &= -\phi(z_0 | z). \\ \psi(z | z_0) &= \phi(z_0 | z), \end{aligned}$$

En condensant ces quatre noyaux en un seul, d'après la méthode de FREDHOLM, on obtient un noyau de HILBERT-LEALSCO, en ce sens qu'il est symétrique dans une portion du domaine où il est défini et symétrique gauche dans la portion restante.

19°. — Etude d'un cas particulier ⁽³²⁾.

Nous nous proposons de donner la solution explicite du problème (119), dans un cas particulier, celui où le domaine (Ω) est un anneau circulaire, limité par deux circonférences de rayons R_0 et R_1 , ($R_0 > R_1$), dont le centre est choisi comme origine des axes Ox , Oy , en supposant que les fonctions $A(s)$ et $B(s)$ se réduisent à des constantes que nous désignerons par λ_0 et λ_1 .

Les conditions aux limites sont donc

$$(132) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dn} &= \lambda_0 u - \varphi(\varepsilon) \quad \text{pour } z = R_0 e^{i\varepsilon} \quad (\text{circonférence extérieure}), \\ \frac{dv}{dn} &= \lambda_1 v - \psi(\varepsilon) \quad \text{pour } z = R_1 e^{i\varepsilon}, \quad (\text{circonférence intérieure}), \\ 0 &\leq \varepsilon \leq 2\pi, \end{aligned}$$

$\varphi(\varepsilon)$ et $\psi(\varepsilon)$ étant deux fonctions de l'angle polaire ε , continues, ou d'une façon plus générale, sommables en valeur absolue au sens de M. LEBESGUE ⁽³³⁾.

⁽³²⁾ Nous avons donné la solution de ce problème, sous une forme un peu plus générale, dans une *Note des Comptes Rendus*, t. 196, 1933, p. 1363.

⁽³³⁾ Dans ce cas, les relations (132) seront vérifiées presque partout sur les frontières.

D'après les résultats du paragraphe précédent, nous savons que le problème admet en général une solution, à moins que les paramètres λ_0 , λ_1 ne vérifient certaines relations caractéristiques. (Ces relations ne sont certainement pas vérifiées pour $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$). Nous les déterminerons par la méthode qui suit.

Supposons d'abord que les fonctions $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ soient développables en séries trigonométriques uniformément convergentes et que le développement de $f(z)$ en série de Laurent

$$(133) \quad f(z) = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n - i\beta_n) z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (\gamma_n + i\delta_n) z^{-n},$$

soit valable dans l'anneau, y compris les frontières; α_n , β_n , γ_n , δ_n , sont des nombres réels. Supposons de plus que la série qui représente $f'(z)$ soit aussi convergente sur la frontière. Les conditions (132) se traduisent alors aisément par les équations

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n R_0^{n-1} (\alpha_n \cos n\varepsilon + \beta_n \sin n\varepsilon) - \sum_{n=1}^{\infty} n R_0^{-n-1} (\gamma_n \cos n\varepsilon + \delta_n \sin n\varepsilon) \\ + \lambda_0 \left[\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_0^n (\alpha_n \cos n\varepsilon + \beta_n \sin n\varepsilon) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} R_0^{-n} (\gamma_n \cos n\varepsilon + \delta_n \sin n\varepsilon) \right] = \varphi(\varepsilon) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n R_1^{n-1} (\alpha_n \sin n\varepsilon - \beta_n \cos n\varepsilon) - \sum_{n=1}^{\infty} n R_1^{-n-1} (-\gamma_n \sin n\varepsilon + \delta_n \cos n\varepsilon) \\ - \lambda_1 \left[\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_1^n (\alpha_n \sin n\varepsilon - \beta_n \cos n\varepsilon) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} R_1^{-n} (-\gamma_n \sin n\varepsilon + \delta_n \cos n\varepsilon) \right] = -\psi(\varepsilon) \end{aligned}$$

Il en résulte les égalités

$$(134) \quad \begin{cases} \alpha_n R_0^n (\lambda_0 + n R_0^{-1}) + \gamma_n R_0^{-n} (\lambda_0 - n R_0^{-1}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) \cos n\varepsilon d\varepsilon \\ \alpha_n R_1^n (\lambda_1 - n R_1^{-1}) - \gamma_n R_1^{-n} (\lambda_1 + n R_1^{-1}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) \sin n\varepsilon d\varepsilon \end{cases}$$

et

$$(135) \quad \begin{cases} \beta_n R_0^n (\lambda_0 + n R_0^{-1}) + \delta_n R_0^{-n} (\lambda_0 - n R_0^{-1}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) \sin n\varepsilon \, d\varepsilon \\ \beta_n R_1^n (-\lambda_1 + n R_1^{-1}) + \delta_n R_1^{-n} (\lambda_1 + n R_1^{-1}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) \cos n\varepsilon \, d\varepsilon \end{cases}$$

pour $n=1, 2, \dots, +\infty$.

Supposons $\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$. Alors on a

$$(136) \quad \alpha_0 = \frac{1}{2\pi\lambda_0} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) \, d\varepsilon; \quad \beta_0 = \frac{1}{2\pi\lambda_1} \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) \, d\varepsilon.$$

Supposons de plus que les paramètres λ_0, λ_1 ne vérifient pas les relations caractéristiques

$$(137) \quad D(n) = R_0^n R_1^{-n} (\lambda_0 + n R_0^{-1}) (\lambda_1 + n R_1^{-1}) + R_0^{-n} R_1^n (\lambda_0 - n R_0^{-1}) (\lambda_1 - n R_1^{-1}) \neq 0, \\ (n=1, 2, \dots, +\infty)$$

alors on trouve les valeurs suivantes de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$,

$$(138) \quad \alpha_n - i\beta_n = \frac{1}{\pi D(n)} \left[R_1^{-n} (\lambda_1 + n R_1^{-1}) \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) e^{-in\varepsilon} \, d\varepsilon + i R_0^{-n} (\lambda_0 - n R_0^{-1}) \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) e^{-in\varepsilon} \, d\varepsilon \right]$$

$$\gamma_n + i\delta_n = \frac{1}{\pi D(n)} \left[R_1^n (\lambda_1 - n R_1^{-1}) \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) e^{in\varepsilon} \, d\varepsilon + i R_0^n (\lambda_0 + n R_0^{-1}) \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) e^{in\varepsilon} \, d\varepsilon \right];$$

l'expression de $f(z)$ en résulte aussitôt, compte tenu de (133). On a

$$(139) \quad f(z) = \alpha_0 + i\beta_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) N_0(z e^{-i\varepsilon}) \, d\varepsilon + \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) N_1(z e^{-i\varepsilon}) \, d\varepsilon,$$

en posant

$$(140) \quad N_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_1 + n R_1^{-1}}{D(n)} \left(\frac{z}{R_1} \right)^n; \quad N_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_0 - n R_0^{-1}}{D(n)} \left(\frac{z}{R_0} \right)^n,$$

et en tenant compte du fait que $D(n) = D(-n)$. Dans les expressions (140) on a exclu de la sommation les termes correspondant à $n=0$.

Nous allons maintenant chercher à nous débarrasser des hypothèses faites chemin faisant et à montrer que la fonction représentée par (139) donne encore la solution du problème dans les conditions de l'énoncé. Pour cela étudions de plus près les noyaux $N_0(z)$ et $N_1(z)$, ainsi que leurs dérivées par rapport à z .

On peut écrire

$$(141) \quad N_0(z) = A_0(z) + \lambda_0 K_0(z) + M_0(z),$$

$$(142) \quad N_1(z) = A_1(z) + \lambda_1 K_1(z) + M_1(z),$$

en posant

$$(143) \quad A_0(z) = N_0(z \mid \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0) = R_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n Q_n} \left(\frac{z}{R_1} \right)^n,$$

$$(144) \quad K_0(z) = -R_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 + n R_1^{-1}) R_0^n R_1^{-n}}{n Q_n D(n)} \left(\frac{z}{R_1} \right)^n,$$

$$(145) \quad M_0(z) = R_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{n \Delta R_0^{-n} R_1^n - \lambda_1 (\lambda_0 - n R_0^{-1}) R_0^{-n} R_1^n}{n Q_n D(n)} \left(\frac{z}{R_1} \right)^n,$$

$$(146) \quad A_1(z) = N_1(z \mid \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0) = -R_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n Q_n} \left(\frac{z}{R_0} \right)^n,$$

$$(147) \quad K_1(z) = R_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda_0 - n R_0^{-1}) R_0^{-n} R_1^n}{n Q_n D(n)} \left(\frac{z}{R_0} \right)^n,$$

$$(148) \quad M_1(z) = R_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{n \Delta R_0^n R_1^{-n} + \lambda_0 (\lambda_1 + n R_1^{-1}) R_0^n R_1^{-n}}{n Q_n D(n)} \left(\frac{z}{R_0} \right)^n,$$

$$(149) \quad \Delta = \lambda_0 R_1^{-1} + \lambda_1 R_0^{-1}, \quad Q_n = R_0^n R_1^{-n} + R_0^{-n} R_1^n.$$

Il est manifeste que les séries définissant $K_0(z)$, $K_1(z)$ sont convergentes dans la couronne (R_0, R_1) , limites comprises. Quant aux fonctions $M_0(z)$, $M_1(z)$, elles sont holomorphes à l'intérieur de la couronne $\left(\frac{R_0^2}{R_1}, \frac{R_1^2}{R_0} \right)$. Les fonctions $A_0(z)$, $A_1(z)$ présentent les mêmes discontinuités sur les contours que les noyaux $N_0(z)$, $N_1(z)$. Il est facile de les exprimer par des fonctions elliptiques en suivant une méthode due à M. H. VILLAT ⁽³⁴⁾.

Posons, comme dans les chapitres antérieurs.

$$q = \frac{R_1}{R_0} = e^{-\frac{\pi \omega_3}{i \omega_1}}, \quad \omega_1 > 0, \quad \frac{\omega_3}{i} > 0.$$

(34) H. VILLAT, *Leçons sur l'Hydrodynamique*, (Paris, 1929), p. 15.

On peut écrire

$$A_0(z) = R_0 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+q^{2n})} \left(\frac{z}{R_0}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1+q^{2n})} \left(\frac{R_0}{z}\right)^n \right]$$

ou encore

$$A_0(z) = R_0 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{q^{2np}}{n} \left(\frac{z}{R_0}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{q^{2np}}{n} \left(\frac{R_0 q^2}{z}\right)^n \right];$$

en intervertissant l'ordre de sommation, on obtient en définitive

$$(150) \quad A_0(z) = -R_0 \log \frac{\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^{4m-4} \frac{z}{R_0}\right) \cdot \left(1 - q^{4m} \frac{R_0}{z}\right)}{\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^{4m-2} \frac{z}{R_0}\right) \cdot \left(1 - q^{4m-2} \frac{R_0}{z}\right)}.$$

D'une façon analogue, on a

$$(151) \quad A_1(z) = R_1 \log \frac{\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^{4m-4} \frac{qz}{R_0}\right) \cdot \left(1 - q^{4m-2} \frac{qR_0}{z}\right)}{\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^{4m-2} \frac{qz}{R_0}\right) \cdot \left(1 - q^{4m-4} \frac{qR_0}{z}\right)}.$$

Tenons maintenant compte de la formule bien connue (cf. TANNERY et MOLK, *Eléments de la théorie des fonctions elliptiques*, XXIX, 4)

$$(152) \quad \alpha_3 u = e^{2\eta'_1 \omega'_1 v^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q_1^{2n-1} t^2) \cdot (1 - q_1^{2n-1} t^{-2})}{(1 - q_1^{2n-1})^2},$$

où les périodes à partir desquelles on construit $\alpha_3 u$ sont $2\omega'_1$, $2\omega'_3$,

$\left(\omega'_1 > 0, \frac{\omega'_3}{i} > 0\right)$; on a posé $v = \frac{u}{2\omega'_4}$, $q_1 = e^{-\frac{\pi\omega'_3}{2\omega'_1}}$, $t = e^{i\pi v}$.

Imposons aux périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_3$, la condition $q^2 = q_1$, ce qu'on peut toujours réaliser en prenant par exemple $\omega'_1 = \omega_1$, $\omega'_3 = 2\omega_3$, et posons successivement dans (152), $t^2 = \frac{z}{q_1 R_0}$, $t^2 = \frac{z}{R_0}$. On constate immédiatement que les expressions ainsi obtenus ne diffèrent du numérateur et du dénominateur de la fraction qui figure dans la formule (150) qu'à des facteurs près.

On trouve ainsi

$$A_0(z) = -R_0 \left[\log \frac{\sigma_3 \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \omega'_3 \right)}{\sigma_3 \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} \right)} - \frac{\eta'_1 \omega'_3}{2\omega'_1} + \frac{\eta'_1 \omega'_3}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} \right].$$

En posant de même $t^2 = q_1^{-\frac{1}{2}} \frac{z}{R_0}$, puis $t^2 = q_1^{-\frac{1}{2}} \frac{R_0}{z}$, dans la même formule (152) et en comparant avec (151), on obtient

$$A_1(z) = R_1 \left[\log \frac{\sigma_3 \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} - \frac{\omega'_3}{2} \right)}{\sigma_3 \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} + \frac{\omega'_3}{2} \right)} + \frac{\eta'_1 \omega'_3}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} \right].$$

Ces formules peuvent encore être transformées en tenant compte de certaines relations classiques (Tannery et Molk, XII, 3).

On a, en définitive

$$(153) \quad A_0(z) = -R_0 \log \frac{\sigma \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} \right)}{\sigma_3 \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} \right)} - R_0 \left[\frac{1}{2} \log \frac{z}{R_0} - \log \sigma \omega'_3 + \frac{\omega'_3}{2\omega'_1} (\eta'_3 \omega'_1 - \frac{i\pi}{2}) \right],$$

et

$$(154) \quad A_1(z) = R_1 \log \frac{\sigma \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} + \frac{\omega'_3}{2} \right)}{\sigma_3 \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{z}{R_0} + \frac{\omega'_3}{2} \right)} + R_1 \left[\frac{1}{2} \log \frac{z}{R_0} - \log \sigma \omega'_3 + \eta'_3 \omega'_3 \right].$$

Les formules (141), (142), (153), (154) mettent complètement en évidence le comportement des noyaux $N_0(z)$, $N_1(z)$, sur les contours. La fonction $f(z)$, définie par (139), s'y comporte donc comme la fonction donnée par la formule (111) du deuxième chapitre.

Étudions maintenant le comportement de $f'(z)$ au voisinage des frontières; il suffit pour cela d'étudier $K'_0(z)$, $K'_1(z)$, les fonctions $M_0(z)$, $M_1(z)$ étant holomorphes dans une couronne plus grande que celle des rayons (R_0, R_1) .

On a, pour z intérieur à la couronne,

$$(155) \quad z K'_0(z) = -R_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 + n R_1^{-1}) R_0^n R_1^{-n}}{Q_n D(n)} \left(\frac{z}{R_1} \right)^n,$$

$$(156) \quad z K'_1(z) = R_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda_0 - n R_0^{-1}) R_0^{-n} R_1^n}{Q_n D(n)} \left(\frac{z}{R_0} \right)^n.$$

Séparons dans ces deux expressions une partie principale et une autre qui reste continue sur les frontières. On peut poser

$$(157) \quad z K'_0(z) = -R_0 A_0(z) + B_0(z)$$

$$(158) \quad z K'_1(z) = R_1 A_1(z) + B_1(z)$$

avec

$$(159) \quad B_0(z) = R_0^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_0(\lambda_1 + nR_1^{-1}) R_0^n R_1^{-n} + (\lambda_0 - nR_0^{-1})(\lambda_1 - nR_1^{-1}) R_0^n R_1^n}{n Q_n D(n)} \left(\frac{z}{R_1}\right)^n,$$

$$(160) \quad B_1(z) = R_1^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_1(\lambda_0 - nR_0^{-1}) R_0^n R_1^n + (\lambda_0 + nR_0^{-1})(\lambda_1 + nR_1^{-1}) R_0^n R_1^{-n}}{n Q_n D(n)} \left(\frac{z}{R_0}\right)^n$$

Les fonctions $B_0(z)$, $B_1(z)$, sont respectivement holomorphes dans les couronnes de rayons $\left(R_0, \frac{R_1^2}{R_0}\right)$, $\left(\frac{R_0^2}{R_1}, R_1\right)$ et sont continues sur les frontières.

On voit donc, en tenant compte des valeurs de $z A'_0(z)$, $z A'_1(z)$, qu'on sait calculer à partir des formules (153) et (154), que $z f'(z)$ se comporte au voisinage des frontières comme la fonction donnée par la formule (90) du deuxième chapitre, et dont l'étude a été faite par M. HENRI VILLAT. Il en résulte, en supposant seulement que $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ soient intégrables en valeur absolue au sens de M. LEBESGUE, que $R \left[\frac{z}{R_0} f'(z) \right]$ tend vers une limite, presque partout, lorsqu'on s'approche de la frontière extérieure par un chemin qui ne lui est pas tangent, et de même $\text{Im} \left[\frac{z}{R_1} f'(z) \right]$ tend presque partout vers une limite lorsqu'on s'approche de la frontière intérieure par un chemin non tangent. Les formules (157), (158) permettraient aisément d'en donner les valeurs explicites.

De plus, les conditions (119) sont vérifiées presque partout sur (C) et (D). En effet, un calcul facile nous donne, en tenant compte des formules (141), (142), (157), (158), et en supposant z intérieur à la couronne (R_0, R_1) ,

$$(161) \quad \frac{z}{R_0} \frac{dN_0(ze^{-i\varepsilon})}{dz} + \lambda_0 N_0(ze^{-i\varepsilon}) = i \frac{d}{d\varepsilon} \left[\log \xi_{30} \left(\frac{\omega_1'}{i\pi} \log \frac{ze^{-i\varepsilon}}{R_0} \right) \right] - \frac{1}{2} \\ + 2\Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{Q_n D(n)} \left(\frac{ze^{-i\varepsilon}}{R_0} \right)^n,$$

par conséquent

$$(162) \lim_{z \rightarrow R_0 e^{i\theta}} R \left(\frac{z}{R_0} f'(z) + \lambda_0 f(z) \right) = \lim_{z \rightarrow R_0 e^{i\theta}} R \left[\frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{ze^{i\varepsilon}}{R_0} \right) \right] = (\gamma\theta)$$

en tenant compte des propriétés de l'intégrale (90) de M. H. VILLAT.

On établirait d'une façon analogue la relation

$$(163) \lim_{z \rightarrow R_1 e^{i\theta}} \operatorname{Im} \left[\frac{z}{R_1} f'(z) - \lambda_1 f(z) \right] = \lim_{z \rightarrow R_1 e^{i\theta}} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log \frac{ze^{i\varepsilon}}{R_0} + \frac{\omega'_3}{2} \right) \right] = -\psi(\theta)$$

D'après les propriétés des intégrales (90) et (111), on peut aussi affirmer, lorsque $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ sont de carrés sommables, que les dérivées normales de la partie réelle et de la partie imaginaire de $f(z)$ existent presque partout sur les deux frontières et sont de carrés sommables. Il est facile d'en donner les expressions explicites en tenant compte des formules précédentes.

Supposons de plus $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ bornés. On peut alors énoncer la proposition suivante : *Si la fonction $f(z)$, régulière dans l'anneau, y reste plus petite en module qu'un nombre fixe, si les conditions (119) sont vérifiées presque partout, si de plus $D(n) \neq 0$, [$n=0, 1, \dots, +\infty$], la fonction $f(z)$ est donnée par la formule (139).*

D'une façon plus générale, on supposant $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ sommables en valeur absolue, on peut établir l'unicité du problème considéré dans les conditions suivantes :

Si une fonction $f(z)$, régulière dans l'anneau, est telle que :

a) $R \left[\frac{z}{R_0} f'(z) + \lambda_0 f(z) \right]$ tend vers $\varphi(\varepsilon)$, presque partout, lorsque le point z tend vers un point $R_0 e^{i\varepsilon}$ de la circonférence extérieure suivant le rayon,

b) $\operatorname{Im} \left[\frac{z}{R_1} f'(z) - \lambda_1 f(z) \right]$ tend presque partout vers $\psi(\varepsilon)$ lorsque le point intérieur z tend vers le point $R_1 e^{i\varepsilon}$ de la circonférence intérieure, suivant la rayon,

c) on a

$$\lim_{\rho \rightarrow R_0} \int_0^{2\pi} \left| R \left(\frac{z}{R_0} f'(z) + \lambda_0 f(z) \right) \right| d\varepsilon = \int_0^{2\pi} |\varphi(\varepsilon)| d\varepsilon$$

($z = \rho e^{i\varepsilon}$, $\rho \rightarrow R_0$)

$$\lim_{\rho \rightarrow R_1} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{z}{R_1} f'(z) - \lambda_1 f(z) \right) \right| d\varepsilon = \int_0^{2\pi} |\psi(\varepsilon)| d\varepsilon,$$

($z = \rho e^{i\varepsilon}$, $\rho \rightarrow R_1$)

et si de plus $D(n) \neq 0$, ($n=0, 1, \dots, +\infty$), la fonction $f(z)$ est donnée par la formule (139).

Ces deux propositions se démontrent aisément en tenant compte des théorèmes classiques de M. H. Lebesgue relatifs à l'intervention des opérations limite et $\int$ ⁽³⁵⁾.

Cas où $D(n) = 0$ pour $n=m$ (m entier positif).

Dans ce cas les conclusions précédentes tombent en défaut. Le système d'équations intégrales correspondant au problème (132) admet la valeur $+1$ comme constante fondamentale. En effet, les systèmes d'équations linéaires (134), (135) nous montrent que le problème (131) homogène admet les solutions effectives

$$(164) \quad f_m(z) = (C_1 + iC_2) R_1^{-m} (\lambda_1 + mR_1^{-1}) z^m + (C_1 - iC_2) R_1^m (\lambda_1 - mR_1^{-1}) z^{-m}$$

qu'on peut encore écrire, en vertu de $D(m)=0$,

$$(164') \quad g_m(z) = (C_1 + iC_2) R_0^{-m} (\lambda_0 - mR_0^{-1}) z^m - (C_1 - iC_2) R_0^m (\lambda_0 + mR_0^{-1}) z^{-m}$$

où C_1 et C_2 sont deux nombres réels arbitraires.

Pour que le problème (119) non homogène admette une solution il faut et il suffit qu'on ait la condition

$$(165) \quad R_1^{-m} (\lambda_1 + mR_1^{-1}) \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) e^{-im\varepsilon} d\varepsilon + iR_0^{-m} (\lambda_0 - mR_0^{-1}) \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) e^{-im\varepsilon} d\varepsilon = 0,$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$(165') \quad R_1^m (\lambda_1 - mR_1^{-1}) \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) e^{im\varepsilon} d\varepsilon + iR_0^m (\lambda_0 + mR_0^{-1}) \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) e^{im\varepsilon} d\varepsilon = 0.$$

Cette condition est équivalente à deux autres, ne contenant que des termes réels. Lorsque ces conditions est vérifiées, le problème admet une infinité de solutions de la forme

$$(166) \quad f(z) = f_0(z) + f_m(z)$$

⁽³⁵⁾ Des théorèmes d'unicité analogues ont été donnés par P. FATOU, pour le problème ordinaire de DIRICHLET dans le cercle (*Acta Mathematica* t. 30, 1906, p. 349) et par M. PLANCHEREL, (*Bulletin des Sciences Mathématiques*), 1910, p. 111—114),

en désignant par $f_0(z)$ ce que devient la fonction définie par la formule (139) lorsqu'on supprime dans la sommation les termes correspondant à $n = \pm m$ ⁽³⁶⁾.

Remarquons, pour terminer, que lorsque $\Delta = 0$, Δ étant la quantité définie par (149), les formules précédentes se simplifient beaucoup. Dans ce cas le problème (132) se réduit, comme on le constate aisément, à l'intégration de l'équation

$$(167) \quad \frac{z}{R_0} \frac{df}{dz} + \lambda_0 f(z) = g(z), \quad (R_1 < |z| < R_0),$$

où $g(z)$ est une fonction régulière dans l'anneau, dont la partie réelle prend les valeurs $\varphi(\varepsilon)$ sur la circonférence extérieure et dont la partie imaginaire prend les valeurs $\frac{R_1}{R_0} \psi(\varepsilon)$ sur la circonférence intérieure. Cette fonction est donnée par la formule (90).

200. — Le deuxième problème que nous considérons dans ce chapitre est le suivant : déterminer une fonction $f(z) = u + iv$, régulière dans (Ω) et vérifiant les conditions aux limites

$$(168) \quad \begin{array}{ll} \frac{du}{dn} = \lambda A(s)u - C(s) & \text{sur} \quad (C), \\ v = B(s) & \text{sur} \quad (D), \end{array}$$

$A(s)$, $C(s)$, $B(s)$, étant des fonctions bornées et intégrables de l'arc s , définies respectivement sur les courbes (C) et (D) ; on suppose $\int_{(C)} A(s) ds \neq 0$; λ est un paramètre.

D'après les résultats du chapitre III, convenablement modifiés pour qu'on puisse les appliquer au cas particulier du domaine doublement connexe, on sait qu'il existe une fonction de GREEN, définie à une constante réelle près, $\Gamma(z|z_0) = G(x, y; x_0, y_0) + iH(x, y; x_0, y_0)$, qui se comporte au point $z = z_0$ comme $\log \frac{1}{z - z_0}$ et qui en outre vérifie les conditions

(36) Lorsque $\lambda_0 = 0$, on doit avoir $\int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 0$; de même si $\lambda_1 = 0$

on doit avoir $\int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0$. La solution du problème est déterminée respectivement à une constante réelle ou imaginaire près.

$$(169) \quad \begin{cases} \frac{dG}{dn} = \frac{2\pi}{l} \text{ sur } (C), \text{ } l \text{ désignant la longueur de cette courbe,} \\ H=0 \text{ sur } D. \end{cases}$$

En choisissant convenablement la constante réelle, (fonction de z_0), qu'on peut ajouter à $G(x, y; x_0, y_0)$, on peut se ramener à une autre fonction de GREEN qui satisfasse à une relation de symétrie. En général, on peut poser

$$(170) \quad G(z | z_0) = G^{(*)}(z | z_0) + h(x_0, y_0),$$

avec

$$(171) \quad G^{(*)}(z | z_0) = G^{(*)}(z_0 | z)$$

$$(172) \quad \int_{(C)} G^{(*)}(s | z_0) ds = 0$$

Cela posé, il est facile de constater que la partie réelle de la fonction $f(z) = u + iv$, régulière en (Ω) , solution du problème aux limites

$$(173) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dn} &= c_0(s) && \text{sur } (C), && \left[\text{avec } \int_{(C)} c_0(s) ds = 0 \right] \\ v &= b(s) && \text{sur } (D), \end{aligned}$$

est donnée par la formule

$$(174) \quad u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} c_0(s) G(s | z_0) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} b(s) \frac{dH}{dn}(s | z_0) ds + \alpha$$

où α est une constante réelle.

Il s'ensuit que la résolution du problème (168) se ramène à celle de l'équation intégrale

$$(175) \quad u(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} [\lambda A(\sigma) u(\sigma) - C(\sigma)] G(\sigma, s) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{dH}{dn}(\sigma, s) d\sigma + \alpha;$$

on doit déterminer la constante α de façon à avoir

$$(176) \quad \int_{(C)} [\lambda A(s) u(s) - C(s)] ds = 0.$$

On trouve, en introduisant dans (176) la valeur de $u(s)$ donnée par (175),

$$\begin{aligned}
 (177) \quad \alpha = & \frac{\int_{(c)} C(s) ds}{\lambda \int_{(c)} A(s) ds} + \frac{1}{2\pi} \int_{(c)} [\lambda A(\sigma) u(\sigma) \cdot C(\sigma)] \frac{\int_{(c)} A(s) G(\sigma, s) ds}{\int_{(c)} A(s) ds} d\sigma + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{\int_{(c)} A(s) \frac{dH}{dn}(\sigma, s) ds}{\int_{(c)} A(s) ds} d\sigma.
 \end{aligned}$$

En tenant compte de la valeur de α , et en faisant le changement d'inconnue

$$(178) \quad u(s) = U(s) + \frac{\int_{(c)} C(s) ds}{\lambda \int_{(c)} A(s) ds},$$

on arrive à une équation intégrale en $U(s)$, du type de FREDHOLM. En faisant le même calcul en sens inverse, on s'assure qu'à toute solution de cette équation correspond celle d'un problème (168), où l'on supposerait $\int_{(c)} C(s) ds = 0$.

Nous écrirons cette équation sous la forme

$$(179) \quad U(s) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{(c)} A(\sigma) U(\sigma) K(\sigma, s) d\sigma + f(s)$$

en posant

$$\begin{aligned}
 (180) \quad f(s) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{dH}{dn}(\sigma, s) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(c)} C(\sigma) \frac{\int_{(c)} A(s) G(\sigma, s) ds}{\int_{(c)} A(s) ds} d\sigma \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{\int_{(c)} A(s) \frac{dH}{dn}(\sigma, s) ds}{\int_{(c)} A(s) ds} d\sigma
 \end{aligned}$$

et

$$(181) \quad K(\sigma, s) = G(\sigma, s) - \frac{\int_{(c)} A(s) G(\sigma, s) ds}{\int_{(c)} A(s) ds}.$$

On peut toujours choisir la valeur de $h(s)$, fonction arbitraire qu'on peut ajouter à $G(\sigma, s)$, de façon que le noyau $K(\sigma, s)$ soit symétrique. Il suffit de prendre

$$(182) \quad h(s) = - \frac{\int_{(c)} A(\sigma) G^{(*)}(\sigma, s) d\sigma}{\int_{(c)} A(\sigma) d\sigma}.$$

Le noyau $K(\sigma, s)$ est alors de la forme

$$(183) \quad K(\sigma, s) = G^{(*)}(\sigma, s) + h(s) + h(\sigma) - \frac{\int_{(c)} A(s) h(s) ds}{\int_{(c)} A(s) ds}.$$

Ce noyau est „positif“. En effet, ses constantes fondamentales, toutes réelles en vertu de la symétrie du noyau, sont positives. On peut l'établir en faisant correspondre à chaque solution fondamentale de l'équation homogène

$$(179') \quad u(s) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{(c)} u(\sigma) K(\sigma, s) d\sigma,$$

une solution du problème aux limites

$$(184) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dn} &= -\lambda u & \text{sur } (C), \\ v &= 0 & \text{sur } (D). \end{aligned}$$

Par suite des hypothèses faites sur les contours, $\frac{dv}{dn}$ existe sur (D) et y est continu. La formule (I) nous donne aussitôt

$$\int_{(c)} u \frac{du}{dn} ds = -\lambda \int_{(c)} u^2 ds < 0,$$

ce qui prouve que les constantes fondamentales sont toutes positives.

Il s'ensuit que le noyau $-A(\sigma) K(\sigma, s)$ de l'équation (179) est un

noyau auquel on peut étendre les propriétés les plus importantes des noyaux symétriques. Ainsi, a) toutes ses valeurs singulières sont réelles, b) ce sont des pôles simples de la résolvante. On pourrait aussi montrer, en se servant toujours de la formule (I), que, lorsque $A(s)$ conserve un signe constant, les constantes fondamentales sont toutes du signe opposé.

Enfin, toutes les fois que λ n'est pas constante fondamentale, il existe une fonction de GREEN, $\gamma(z | z_0) = g(z | z_0) + ih(z | z_0)$, telle que l'on ait

$$(185) \quad \begin{aligned} \frac{dg}{dn} &= \lambda A(s)g \quad \text{sur } (C), \\ h &= 0 \quad \text{sur } (D), \end{aligned}$$

la fonction $\gamma(z | z_0)$ étant régulière en chaque point de (Ω) , sauf en $z=z_0$ où elle se comporte comme $\log \frac{1}{z-z_0}$. La partie réelle de cette fonction jouit de la propriété de symétrie

$$(186) \quad g(z | z_0) = g(z_0 | z).$$

21°. Cas particulier.

Supposons que le domaine (Ω) soit un anneau circulaire. Il est facile de donner la solution explicite du problème (168) lorsque $A(s)$ se réduit une constante, $A(s)=1$. On a alors les conditions

$$(187) \quad \begin{cases} \frac{du}{dn} = \lambda u - \phi(\varepsilon) & z = R_0 e^{i\varepsilon}, \\ v = \psi(\varepsilon) & \text{pour } z = R_1 e^{i\varepsilon}, \end{cases} \quad (0 \leq \varepsilon \leq 2\pi),$$

avec un léger changement de notations.

Par un procédé déjà employé, on trouve l'expression suivante de la solution

$$(188) \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon) K_0(z e^{-i\varepsilon}) d\varepsilon + \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) K_1(z e^{i\varepsilon}) d\varepsilon,$$

avec

$$(189) \quad K_0(z) = \frac{1}{2\lambda} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{d(n)} \left(\frac{z}{R_1} \right)^n,$$

$$(190) \quad {}^*K_1(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda - n R_0^{-1}}{d(n)} \left(\frac{z}{R_0} \right)^n,$$

$$(191) \quad d(n) = R_0^n R_1^{-n} (\lambda + n R_0^{-1}) + R_0^{-n} R_1^n (\lambda - n R_0^{-1}), \quad [d(n) = d(-n)].$$

L'étude des noyaux $K_0(z)$, $K_1(z)$ au voisinage des frontières permettrait de légitimer a posteriori les formules ainsi obtenues. Remarquons que, d'après (191) les constantes fondamentales du problème⁽³⁷⁾ sont

$$(192) \quad \lambda_n = -\frac{n}{R_0} \frac{R_0^n R_1^{-n} - R_0^{-n} R_1^n}{R_0^n R_1^{-n} + R_0^{-n} R_1^n} < 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Il leur correspond les fonctions fondamentales

$$(193) \quad u_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\varepsilon, \quad u_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\varepsilon.$$

En effet, il est facile de constater que le problème (187) homogène, admet pour $\lambda = \lambda_n$ les solutions effectives

$$(194) \quad f_n(z) = (C_1 + iC_2) R_1^{-n} z^n + (C_1 - iC_2) R_1^n z^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

C_1 et C_2 étant deux nombres réels arbitraires. Pour que le problème non homogène admette des solutions pour $\lambda = \lambda_n$ il faut et il suffit que les fonctions $\phi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ vérifient la condition

$$(195) \quad R_1^{-n} \int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon) e^{-in\varepsilon} d\varepsilon + i R_0^{-n} \left(\lambda_n - \frac{n}{R_0} \right) \int_0^{2\pi} \psi(\varepsilon) e^{-in\varepsilon} d\varepsilon = 0$$

qui équivaut à deux conditions réelles.

22°. — Etude de certains problèmes non linéaires.

Nous supposons dans la suite que les frontières de (Ω) sont formées par des arcs analytiques; s'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours se ramener à un tel domaine par une représentation conforme. Nous continuerons à désigner la frontière extérieure de ce domaine par (C), la frontière intérieure par (D). Cela étant, considérons le problème ci-dessous :

Etant donnée une fonction réelle $g(u; \lambda)$, analytique par rapport à u et λ , pour $-\infty < u < \infty$, λ appartenant à un intervalle fermé $\bar{\delta}$ de l'axe réel, et telle que $g(u; \lambda)$ soit bornée pour $|u|$ borné, chercher s'il existe une fonction analytique $f(z) = u + iv$, régulière dans (Ω) , continue sur (C), à partie imaginaire continue sur (D), qui vérifie

(37) en excluant la valeur $\lambda = 0$.

les conditions aux limites

$$(196) \quad \begin{cases} \frac{du}{dn} = A(s) g(u(s); \lambda) - C(s) & \text{sur (C),} \\ v = B(s) & \text{sur (D),} \end{cases}$$

où $A(s)$, $C(s)$, $B(s)$ sont des fonctions continues définies respectivement sur (C) et (D).

Les méthodes employées plus haut nous permettent de ramener l'étude de ce problème à celle d'une équation intégrale non linéaire du type de M. SCHMIDT. En effet, d'après la formule (174), les valeurs de u sur (C) doivent satisfaire à l'équation intégrale

$$(197) \quad u(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \{A(\sigma)g(u(\sigma); \lambda) - C(\sigma)\} G(\sigma, s) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{dH}{dn}(\sigma, s) d\sigma + \alpha,$$

où α est une constante qu'on doit déterminer de façon à avoir

$$(198) \quad \int_{(C)} \{A(s)g(u(s); \lambda) - C(s)\} ds = 0.$$

$G(z | z_0) + iH(z | z_0)$ désigne une des fonctions de NEUMANN définies précédemment (200).

Réciproquement, à toute solution $u(s, \lambda)$, $\alpha = \alpha(\lambda)$, des équations (197), (198), il correspond une solution du problème (196).

On peut ramener la résolution des équations (197), (198) à celle d'une seule équation. Posons

$$G(\sigma, s) = G^{(*)}(\sigma, s) + h(s),$$

$G^{(*)}(\sigma, s)$ étant la fonction symétrique de NEUMANN; $h(s)$ doit être assujettie à la seule condition

$$(199) \quad \int_{(C)} h(s) ds = 0.$$

Cela posé, les équations (197) et (198) entraînent, comme il est aisé de le constater,

$$(200) \quad \alpha = \frac{1}{l} \int_{(C)} u(s) ds$$

Réciproquement, l'équation (197) où on introduit la valeur précédente

de α , entraîne (200), en vertu de (199). Ainsi, la résolution du problème se ramène à celle d'une seule équation du type de SCHMIDT.

Prenons au contraire $h(s) \equiv 0$. Montrons que toute solution de l'équation (197) correspondante, où on donne à α la valeur (200), conduit en général à une solution du problème aux limites

$$(201) \quad \frac{du}{dn} = A(s)g(u(s); \lambda) - C(s) + \text{const} \quad \text{sur } (C),$$

$$v = B(s) \quad \text{sur } (D),$$

la constante qui figure dans la première équation n'étant pas nulle. Soit en effet $u(s)$ une solution des systèmes (197), (200); posons,

$$(202) \quad U(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \{A(\sigma)g(u(\sigma); \lambda) - C(\sigma)\} G^{(*)}(\sigma, z_0) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{dH}{dn}(\sigma, z_0) d\sigma$$

$$+ \frac{1}{l} \int_{(C)} u(s) ds;$$

$U(x_0, y_0)$ est une fonction harmonique régulière de (x_0, y_0) à l'intérieur de (Ω) puisque $G^{(*)}(\sigma, z_0)$, $\frac{dH}{dn}(\sigma, z_0)$ le sont. D'après les équations (197), (200), les valeurs $U(s)$ de $U(x_0, y_0)$ sur (C) coïncident avec $u(s)$.

D'autre part, on a aussi, d'après (174'),

$$(203) \quad U(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \frac{dU}{dn} G^{(*)}(\sigma, z_0) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} V(\sigma) \frac{dH}{dn}(\sigma, z_0) d\sigma + \frac{1}{l} \int_{(C)} U(s) ds,$$

en désignant par $V(\sigma)$ les valeurs que prend la fonction conjuguée $V(x_0, y_0)$ sur (D) . Dans cette formule on pourrait d'ailleurs remplacer $G^{(*)}(\sigma, z_0)$ par $G^{(*)}(\sigma, z_0) + h(z_0)$, à cause de la condition d'uniformité

$$(204) \quad \int_{(C)} \frac{dU}{dn} ds = 0.$$

Les équations (202), (203) nous donnent

$$(205) \quad \int_{(C)} \left\{ \frac{dU}{dn} - [A(\sigma)g(U(\sigma), \lambda) - C(\sigma)] \right\} G^{(*)}(\sigma, z_0) ds + \int_{(D)} [V(\sigma) - B(\sigma)] \frac{dH}{dn}(\sigma, z_0) ds = 0.$$

Cette relation entraîne $V(\sigma) = B(\sigma)$, $\frac{dU}{dn} = A(\sigma)g(U(\sigma), \lambda) - C(\sigma) + \text{const.}$

En effet, en posant $\psi(\sigma) = \frac{dU}{dn} - [A(\sigma)g(U(\sigma), \lambda) - C(\sigma)]$, on peut toujours déterminer la constante α_1 de façon à avoir

$$\int_{(c)} [\psi(\sigma) - \alpha_1] d\sigma = 0.$$

La relation (205) peut encore s'écrire sous la forme

$$(205') \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{(c)} [\psi(\sigma) - \alpha_1] G^{(*)}(\sigma, z_0) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} [V(\sigma) - B(\sigma)] \frac{dH}{dn}(\sigma, z_0) d\sigma = 0;$$

elle montre que la fonction $f_0(z) = u_0 + iv_0$, holomorphe dans (Ω) , qui vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dn} = \frac{dU}{dn} - [A(\sigma)g(U(\sigma), \lambda) - C(\sigma)] - \alpha_1 & \text{sur } (C), \\ v_0 = V(\sigma) - B(\sigma) & \text{sur } (D), \end{cases}$$

se réduit à une constante réelle.

Les conditions aux limites (201) sont donc bien vérifiées; la constante qui figure dans le deuxième membre de la première équation a une valeur déterminée.

Ainsi, lorsqu'on prend comme noyau de l'équation (197) la fonction symétrique $G^{(*)}(\sigma, s)$, il n'y a pas, en général, équivalence entre les équations (198) et (200).

Nous allons maintenant faire quelques hypothèses supplémentaires de façon à pouvoir appliquer à l'équation intégrale du problème

$$(206) \quad u(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(c)} [A(\sigma)g(u(\sigma), \lambda) - C(\sigma)] G(\sigma, s) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{dH}{dn}(\sigma, s) d\sigma + \frac{1}{l} \int_{(c)} u(s) ds$$

où

$$G(\sigma, s) = G^{(*)}(\sigma, s) + h(s), \quad \int_{(c)} h(s) ds \neq 0,$$

quelques importants théorèmes d'existence dus à M. JEAN LERAY. ⁽³⁸⁾ Ces théorèmes concernent les équations intégrales non linéaires dépendant d'un paramètre λ pour lesquelles les hypothèses suivantes sont vérifiées :

⁽³⁸⁾ JEAN LERAY, Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique, *Journal de Mathématiques*, 1933, 9^e série, t. XII, p. 1—82 (notamment p. 1—20).

λ appartient à $\bar{\delta}$, δ étant un intervalle borné,

- (H) $\left\{ \begin{array}{l} (H_1) \text{ l'équation est du type de SCHMIDT au voisinage de cha-} \\ \text{cune de ses solutions,} \\ (H_2) \text{ ses solutions sont bornées dans leur ensemble,} \\ (H_3) \text{ elles possèdent une égale continuité,} \\ (H_4) \text{ toute fonction limite d'une infinité d'entre elles est solu-} \\ \text{tion de l'équation.} \end{array} \right.$

Les conclusions de M. LERAY sont :

- (C) $\left\{ \begin{array}{l} \delta \text{ est divisé en intervalles partiels à l'intérieur desquels le} \\ \text{nombre des solutions usuelles de l'équation est fini et con-} \\ \text{stant ; la parité du nombre des solutions usuelles est la} \\ \text{même dans tous les intervalles partiels dont l'ensemble con-} \\ \text{stitue } \delta. \end{array} \right.$

- (C') $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si le nombre des solutions usuelles est impair, l'équation in-} \\ \text{tégrale admet au moins une solution quelle que soit la posi-} \\ \text{tion de } \lambda \text{ sur } \bar{\delta} \text{ ou sur sa frontière.} \end{array} \right.$

Il est clair que dans le cas actuel l'équation (206) vérifie les conditions (H₁), (H₄) ; quant à (H₃), on le déduira sans peine une fois (H₂) établi.

I. Supposons que la fonction analytique $g(u)$, définie pour $-\infty < u < +\infty$, bornée pour $|u|$ borné, soit telle que $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty$.

$\lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = -\infty$; supposons de plus $g'(u) \geq 0$. Cela étant, considérons le problème aux limites (196) en posant $g(u, \lambda) = \lambda g(u) + (1 - \lambda)u$; on choisit comme $\bar{\delta}$ l'intervalle fermé (0, 1) et on impose à la fonction $A(s)$ la condition $A(s) \geq a > 0$.

Il est clair qu'on a aussi, pour λ situé dans $\bar{\delta}$, $g'(u, \lambda) \geq 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u, \lambda) = +\infty$, $\lim_{u \rightarrow -\infty} g(u, \lambda) = -\infty$.

Si le problème (196) admet une solution, elle est unique. En effet, soient $f_1(z) = u_1 + iv_1$, $f_2(z) = u_2 + iv_2$ deux solutions du problème. Posons $F(z) = U + iV = f_1(z) - f_2(z)$. La fonction $F(z)$ est régulière dans (Ω) , continue sur (C), à partie imaginaire continue sur (D), où $V = 0$.

Par conséquent $\frac{dV}{dn}$ existe sur (D) et y est continu. La fonction $F(z)$ vérifie les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dn} = A(s)[g(u_1, \lambda) - g(u_2, \lambda)] = A(s)g'(\bar{u}, \lambda)U \quad \text{sur (C),} \\ \quad \quad \quad (\bar{u} = u_2 + \theta(u_1 - u_2), \\ \quad \quad \quad (0 < \theta < 1)) \\ V = 0 \quad \text{sur (D).} \end{array} \right.$$

On en déduit, en appliquant la formule (I),

$$\int_{(C)} U \frac{dU}{dn} ds = \int_{(C)} A(s) U^2 g'(\bar{u}, \lambda) ds = - \iint_{(\Omega)} \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 dx dy,$$

ce qui entraîne $U = \text{const} = 0$, $V = 0$.

Montrons maintenant que le problème admet effectivement une solution. Ce problème étant équivalent à la résolution de l'équation (206), il suffit, pour appliquer la méthode de M. LERAY, de montrer que (H_2) est vérifié.

Soit $f_0(z) = u_0 + iv_0$ la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} u_0 = 0 & \text{sur } (C), \\ v_0 = B(s) & \text{sur } (D), \end{cases}$$

qu'on sait résoudre (20^o). Posons ensuite $F(z) = U + iV = u + iv - (u_0 + iv_0)$. La fonction $F(z)$ a une partie imaginaire nulle sur la courbe analytique (D); elle est régulière au voisinage de (D) et continue sur cette courbe, donc prolongeable à travers. Il en résulte aisément que U ne peut avoir de maximum ni de minimum isolé sur (D). Son maximum et minimum doivent être atteints sur (C) et sont égaux à ceux de u sur (C).

Soit $s = s_1$ le point où U atteint son maximum. On doit avoir en ce point

$$\left(\frac{dU}{dn} \right)_{s_1} = A(s_1) g[u(s_1), \lambda] - C(s_1) - \left(\frac{du_0}{dn} \right)_{s=s_1} < 0.$$

d'où

$$g[u(s_1), \lambda] < \frac{C(s_1) + \left(\frac{du_0}{dn} \right)_{s_1}^{(39)}}{A(s_1)}.$$

Désignons par $\alpha_1(\lambda)$ la racine de l'équation

$$g(\alpha_1, \lambda) = \max \left\{ \frac{C(s) + \frac{du_0}{dn}}{A(s)} \right\} \text{ sur } (C),$$

et soit $\bar{\alpha}_1$ son maximum sur $\bar{\delta}$. D'après les hypothèses faites sur $g(u)$, toute solution du problème aux limites, (pour $0 \leq \lambda \leq 1$), est telle qu'on ait

$$u(s) \leq \bar{\alpha}_1 \quad (\bar{\alpha}_1 \text{ este évidemment un nombre fini}).$$

Soit, de même, $s = s_2$ le point où U atteint son minimum. On doit avoir en ce point

$$\left(\frac{dU}{dn} \right)_{s_2} = A(s_2) g[u(s_2), \lambda] - C(s_2) - \left(\frac{du_0}{dn} \right)_{s=s_2} > 0.$$

(39) $\frac{du_0}{dn}$ existe et est continu sur (C), u_0 étant prolongeable à travers.

Soit α_2 le minimum de $\alpha_2(\lambda)$, en définissant $\alpha_2(\lambda)$ comme racine de l'équation

$$g(\alpha_2, \lambda) = \min \left\{ \frac{C(s) + \frac{du_0}{dn}}{A(s)} \right\} \quad \text{sur } (C).$$

On a une nouvelle limitation de $u(s)$, à savoir

$$\alpha_2 \leq u(s)$$

α_2 est manifestement fini.

Les conclusions (C) sont donc valables. D'autre part, pour $\lambda=0$, le problème en question se réduit au suivant

$$\begin{cases} \frac{du}{dn} = A(s)u - C(s) & \text{sur } (C), \\ v = B(s) & \text{sur } (D), \end{cases}$$

et nous avons vu précédemment (20°) qu'il admet toujours une solution et une seule. Le problème considéré admet donc une solution et une seule quel que soit λ dans l'intervalle $\bar{\delta}(0 \leq \lambda \leq 1)$; il en est ainsi en particulier pour $\lambda=1$.

Donc, le problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{du}{dn} = A(s)g(u(s)) - C(s) & \text{sur } (C), \\ v = B(s) & \text{sur } (D), \end{cases}$$

admet sous les hypothèses faites une solution régulière et une seule.

Exemples : $g(u) = u^{2m+1}$, m étant un entier positif ou nul; d'une façon plus générale on peut prendre pour $g(u)$ un polynôme à coefficients tous positifs et ne contenant que des puissances impaires de u .

II. Supposons maintenant $g(u)$ défini pour $u \geq 0$, analytique, borné pour u borné et vérifiant en outre les conditions suivantes: $g'(u) \geq 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty$, $\lim_{u \rightarrow 0} g(u) \leq 0$.

Considérons le problème aux limites

$$(196') \quad \begin{cases} \frac{du}{dn} = A(s)g(u) - C(s) & \text{sur } (C), \\ v = 0 & \text{sur } (D), \end{cases}$$

la fonction $f(z) = u + iv$ étant régulière dans (Ω) . On suppose $A(s) \geq a > 0$, $C(s) > 0$.

La fonction $g(u, \lambda) = \lambda g(u) + (1-\lambda)u$ satisfait aux mêmes conditions que $g(u)$, pour $0 \leq u < +\infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Considérons les conditions aux limites plus générales*

$$\begin{cases} \frac{du}{dn} = A(s)g(u, \lambda) - C(s) & \text{sur } (C), \\ v = 0 & \text{sur } (D). \end{cases}$$

La fonction $u(x, y)$ doit prendre son maximum et son minimum sur la courbe (C). En procédant comme auparavant, on trouve les limitations

$$0 < \underline{\alpha}_2 \leq u \leq \bar{\alpha}_1$$

en posant $\bar{\alpha}_1 = \max \alpha_1(\lambda)$, $\underline{\alpha}_2 = \min \alpha_2(\lambda)$, les fonctions $\alpha_1(\lambda)$ et $\alpha_2(\lambda)$ étant définies par les conditions

$$g(\alpha_1, \lambda) = \max \left\{ \frac{C(s)}{A(s)} \right\} > 0.$$

$$g(\alpha_2, \lambda) = \min \left\{ \frac{C(s)}{A(s)} \right\} > 0.$$

On en déduit comme précédemment que le problème admet au moins une solution. Il n'en a qu'une de vertu de $g'(u, \lambda) \geq 0$. En faisant $\lambda = 1$, on voit qu'il en est de même du problème (196').

Exemples : $g(u) = u^{2m}$, m étant un entier positif, ou encore $g(u) =$ polynôme en u^2 , à coefficients positifs et à terme constant négatif ou nul.

Nous avons supposé dans ce qui précède que $g(u, \lambda)$ était analytique par rapport à u et à λ , de sorte que l'équation (206), soit du type de SCHMIDT. D'une façon plus générale on pourrait supposer $g(u, \lambda)$ continue par rapport à (u, λ) . L'équation (206) serait d'un type considéré par MM. J. LERAY et J. SCHAUDER dans un Mémoire récent⁽⁴⁰⁾. En supposant que la fonction continue $g(u, \lambda) = \lambda g(u) + (1 - \lambda)u$ ait le même comportement pour $u = \pm\infty$, $u = 0$, que celui indiqué précédemment (I, ou II) et de plus qu'on ait $g(U + u) - g(u) = p(U) = \operatorname{sgn} U$, on établirait aisément l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{du}{dn} = A(s)g(u, \lambda) - C(s), & \text{sur } (C), \\ v = B(s) \text{ ou } v = 0 & \text{sur } (D). \end{cases}$$

23° Introduisons la fonctions de GREEN $\rho(z|z_0) = \phi(z|z_0) + i\psi(z|z_0)$, définie par les propriétés ci-dessous

$$a) \quad \rho(z|z_0) + i \log \frac{1}{z - z_0} \text{ est régulière dans } (\Omega),$$

⁽⁴⁰⁾ JEAN LERAY et JULES SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles, *Annales de l'Ecole Normale* 3^e série, t. LI, 1934 p. 45—78, (notamment p. 64).

$$b) \quad \frac{d\phi}{dn} = 0 \quad \text{sur (C)}, \quad \psi = 0 \quad \text{sur (D)}.$$

L'existence de cette fonction est une conséquence des résultats établis dans le chapitre III. $\rho(z|z_0)$ est définie à une fonction réelle de (x_0, y_0) près.

Cela étant, la fonction $v(x_0, y_0)$ conjuguée de la fonction harmonique $u(x_0, y_0)$ donnée par la formule (174) comme solution du problème (173), s'exprime par

$$(207) \quad v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} c_0(s) \phi(s|z_0) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} b(s) \frac{d\psi}{dn}(s|z_0) ds.$$

Signalons aussi la relation de symétrie

$$\psi(z|z_0) = \psi(z_0|z).$$

Nous allons maintenant considérer un problème aux limites qui généralise ceux traités dans le présent paragraphe, et que pose la théorie des mouvements liquides glissants dans un canal où se trouve placé un obstacle solide donné.

On peut l'énoncer ainsi : trouver une fonction analytique $f(z) = u + iv$, régulière dans (Ω) et qui vérifie les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{du}{dn} = g(u, v, s|\lambda), & \text{sur (C),} \\ v = B(s) & \text{(D),} \end{array} \right.$$

$g(u, v, s|\lambda)$ étant une fonction analytique par rapport à u, v et λ pour $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, le paramètre λ étant situé sur un intervalle fermé $\bar{\delta}$ de l'axe réel.

D'après les formules (174) et (207), on est conduit à rattacher la résolution de ce problème à celle du système de deux équations intégrales :

$$208 \quad \left\{ \begin{array}{l} u(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} g[u(\sigma), v(\sigma), \sigma|\lambda] G(\sigma, s) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{dH}{dn}(\sigma, s) d\sigma + \frac{1}{i} \int_{(C)} u(s) ds \\ v(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} g[u(\sigma), v(\sigma), \sigma|\lambda] \phi(\sigma, s) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{d\psi}{dn}(\sigma, s) d\sigma \end{array} \right.$$

en désignant par $u(s) + iv(s)$ les valeurs de $f(z) = u + iv$ sur (C).

Réciproquement, à toute solution de ce système correspond une solution du problème aux limites considéré, en supposant $G(\sigma, s) = G^{(*)}(\sigma, s) + h(s)$, $\int_{(c)} h(s) ds \neq 0$.

En effet, la première équation nous donne

$$(209) \quad \int_{(c)} g[u(\sigma)v(\sigma), \sigma | \lambda] d\sigma = 0.$$

Alors, les fonctions

$$(210) \quad \begin{aligned} U(x_0, y_0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{(c)} g[u, v, \sigma | \lambda] G(\sigma | z_0) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{dH}{dn}(\sigma | z_0) d\sigma + \\ & + \frac{1}{l} \int_{(c)} u(s) ds \end{aligned}$$

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(c)} g[u, v, \sigma | \lambda] \phi(\sigma | z_0) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} B(\sigma) \frac{d\psi}{dn}(\sigma | z_0) d\sigma,$$

sont harmonique par rapport à (x_0, y_0) et sont conjuguées. En désignant par $U(s)$, $V(s)$, leurs valeurs sur (C) , le système (207) nous donne $U(s) = u(s)$, $V(s) = v(s)$. D'autre part, en raison des formules (174), (207), on a aussi

$$0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{(c)} \left[\frac{dU}{dn} - g(U, V, \sigma | \lambda) \right] G(\sigma | z_0) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} [V(\sigma) - B(\sigma)] \frac{dH}{dn}(\sigma | z_0) d\sigma$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{(c)} \left[\frac{dU}{dn} - g(U, V, \sigma | \lambda) \right] \phi(\sigma | z_0) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} [V(\sigma) - B(\sigma)] \frac{d\psi}{dn}(\sigma | z_0) d\sigma.$$

Les formules précédentes montrent que la fonction $f_0(z)$, régulière dans (Ω) , qui vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dn} = \frac{dU}{dn} - g(U, V, s | \lambda) & \text{sur } (C), \\ v_0 = V(s) - B(s) & \text{sur } (D), \end{cases}$$

se réduit à une constante réelle.

Lorsque $\int_{(c)} h(s) ds = 0$, on ne peut conclure (209); on devra

donc remplacer dans les formules (210), $G(\sigma | z_0)$ par $G^{(*)}(\sigma | z_0)$. Pour la même raison, la fonction de (x_0, y_1) qu'on peut ajouter à $\phi(s | z_0)$ doit être choisie de telle façon que cette fonction soit harmonique. On pourrait alors montrer qu'à toute solution du système (208), avec ce choix spécial des noyaux, correspond une solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dn} = g(u, v, s | \lambda) + \text{const} \\ v = B(s) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(C),} \\ \text{sur} \quad \text{(D),} \end{array}$$

la constante qui figure dans la première équation ayant une valeur bien déterminée.

Les équations (208) sont encore du type considéré par M. Leray; donc toutes les fois qu'on aura établi (H_2) , les conclusions (C) seront valables.

D'une façon plus générale on pourrait supposer que $g(u, v, s | \lambda)$ soit seulement continu par rapport à s, u, v , et uniformément continu par rapport à λ pour $|u|, |v|$ bornés. Les équations (208) relèvent alors de la méthode de Leray—Schauder et toutes les fois qu'on saura donner une limitation a priori de $|u|, |v|$ indépendante de λ , elles admettront au moins une solution pour λ situé sur δ , pourvu que la somme des indices des solutions pour $\lambda = \lambda_0$ soit non nulle, ($\lambda_0 \in \delta$).

D'une façon analogue, on pourrait généraliser les résultats du paragraphe 18°, en cherchant à déterminer une fonction holomorphe, $f(z) = u + iv$, par les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dn} = g(u, v, s | \lambda) \\ \frac{dv}{dn} = h(u, v, s | \lambda) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{sur} \quad \text{(C),} \\ \text{sur} \quad \text{(D),} \end{array}$$

Ce problème, qu'on rencontre dans la théorie des mouvements des liquides pesants, se ramène à la résolution d'un système de quatre équations intégrales du type déjà considéré.

Nous étudierons dans le chapitre suivant l'existence des solutions de quelques problèmes de cette nature. Contentons-nous ici d'indiquer deux théorèmes d'unicité locale que nous utiliserons plus tard.

S'il existe une solution, régulière dans (Ω) , du problème aux limites

$$\frac{du}{dn} = A(s) g(u, v, s) - C(s) \quad \text{sur (C) ,}$$

$$v = B(s) \quad \text{sur (D) ,}$$

telle que $g'_u[u(s), v(s), s] \geq g_0 > 0$, $\frac{d}{ds} \left| \frac{g'_v(u, v, s)}{g'_u(u, v, s)} \right| \leq 0$ et si on suppose de plus $A(s) \geq 0$, il n'existe pas de solution infiniment voisine.

En effet, supposons que le contraire ait lieu; désignons par $\delta f = \delta u + i \delta v$ l'accroissement que subit $f(z) = u + i v$ lorsqu'on passe à la solution infiniment voisine.

On aurait

$$\begin{cases} \frac{d\delta u}{dn} = A(s) g'_u [\delta u + \frac{g'_v}{g'_u} \delta v] & \text{sur (C) ,} \\ \delta v = 0 & \text{sur (D);} \end{cases}$$

la première de ces équations nous donne, en vertu des hypothèses faites

$$\int_{(c)} \delta u \frac{d\delta u}{dn} ds + \int_{(c)} \frac{g'_v}{g'_u} \delta v \frac{d\delta u}{dn} ds \geq 0 .$$

D'autre part, d'après la formule fondamentale (I), on a

$$\int_{(c)} \delta u \frac{d\delta u}{dn} ds \leq 0 .$$

Il en résulte

$$\int_{(c)} \frac{g'_v}{g'_u} \delta v \frac{d\delta u}{dn} ds = \frac{1}{2} \int_{(c)} (\delta v)^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{g'_v}{g'_u} \right) ds \geq 0 .$$

Cela est en contradiction avec l'hypothèse. On en déduit, $\delta f = 0$ si $A(s) \equiv 0$.

II. *S'il existe une solution, holomorphe dans (Ω) , du problème aux limites*

$$\frac{du}{dn} = A(s) g(u, v, s) - C(s) \quad \text{sur (C) ,}$$

$$\frac{dv}{dn} = B(s) h(u, v, s) - D(s) \quad \text{sur (D) ,}$$

qui soit telle que $g'_u[u(s), v(s), s] \geq g_0 > 0$, $\frac{d}{ds} \left| \frac{g'_v(u, v, s)}{g'_u(u, v, s)} \right| \leq 0$ sur (C),

$h'_v(u, v, s) \geq h_0 > 0$, $\frac{d}{ds} \left| \frac{h'_u(u, v, s)}{h'_v(u, v, s)} \right| \geq 0$ sur (D), si on suppose de plus $A(s) \geq 0$, $B(s) \geq 0$, il n'existe pas de solution infiniment voisine.

En effet, en procédant comme plus haut on arrive à l'inégalité

$$\int_{(c)} (\delta v)^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{g'_v}{g'_u} \right) ds - \int_{(D)} (\delta u)^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{h'_u}{h'_v} \right) ds \geq 0$$

puisque

$$\int_{(c)} \delta u \frac{d\delta u}{dn} ds + \int_{(D)} \delta v \frac{d\delta v}{dn} ds \leq 0.$$

Il en résulte aussitôt $\delta f = \delta u + i \delta v \equiv 0$.

DEUXIÈME PARTIE

Sur un problème aux limites de la théorie des sillages.

24°. — On peut distinguer deux problèmes différents dans la théorie des mouvements discontinus, à deux dimensions, des liquides parfaits. Le premier, que nous appellerons, *problème de Levi-Civita*⁽⁴¹⁾—*Villat*⁽⁴²⁾ peut être énoncé de la façon suivante:

I. *Déterminer les éléments géométriques et cinématiques du mouvement connaissant une ou plusieurs fonctions $\Theta(s)$, intimement liées à la forme des obstacles solides immergés.*

Le problème a été énoncé sous cette forme par M. H. Villat. M. Levi-Civita avait considéré auparavant un problème analogue, en supposant donnée la représentation conforme du domaine liquide (z), limité par des parois solides et des lignes de jet inconnues, sur un domaine connu (Z).

Ce problème a été résolu dans un grand nombre de cas⁽⁴³⁾. Il se ramène à un problème de Dirichlet dans un domaine simplement connexe, ou à des problèmes généralisés de Dirichlet—Neumann dans des domaines multiplement connexes. Les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions données $\Theta(s)$ pour que la solution soit acceptable du point de vue physique ont été précisées dans certains cas par MM. M. Brillouin et H. Villat.

Le deuxième problème posé par la théorie des mouvements glissants est le suivant:

(41) T. LEVI-CIVITA, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 23, 1907.

(42) H. VILLAT, Sur la résistance des fluides (Thèse), *Annales de l'Ecole Normale* 1911, p. 203.

(43) Pour la bibliographie, voir : H. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* (Scientia, 1920, Gauthier-Villars). U. CISOTTI, *Lezioni di Idromeccanica piana*, 1921, (Tamburini, Milano), B. DEMTCHENKO, *Problèmes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits* (GAUTHIER-VILLARS, 1934). On trouvera dans le livre de M. DEMTCHENKO une bibliographie complète. Dans le même ouvrage, M. DEMTCHENKO a étudié le problème I, pour un domaine doublement connexe, dans des cas très étendus.

II. Déterminer le mouvement correspondant à des parois données à l'avance, ces parois étant définies par leur équation intrinsèque.

Ce problème, qui n'avait été résolu que dans des cas très particuliers, revient à déterminer les fonctions $\Theta(s)$ que le problème I suppose connues; il conduit à des problèmes aux limites, non linéaires, analogues à ceux considérés dans le chapitre IV.

M. Quarleri⁽⁴⁴⁾ a considéré le cas d'un obstacle circulaire dans un liquide s'étendant à l'infini, et a ramené le problème à la résolution d'une équation intégrale non linéaire, moyennant une relation fonctionnelle de Dini. La question a été reprise d'une façon rigoureuse par M. A. Weinstein⁽⁴⁵⁾ et étudiée pour des arcs de cercle de longueur assez petite; ensuite M. J. Leray⁽⁴⁶⁾ en a donné la solution définitive. Signalons aussi la résolution, par M. Weinstein⁽⁴⁷⁾ du problème des jets liquides correspondant à une paroi polygonale, ainsi que diverses extensions⁽⁴⁸⁾. Enfin, tout récemment, M. Leray a généralisé ces résultats pour des parois courbes en liquide indéfini⁽⁴⁹⁾.

Nous envisageons, dans la suite, le mouvement plan, permanent, symétrique et discontinu, d'un liquide jaillissant d'un canal rectiligne et heurtant un obstacle. On suppose que le canal s'étend à l'infini en amont. Le problème I correspondant à ce mouvement a été traité par M. Victor Vălcovici⁽⁵⁰⁾, en employant les formules de M. H. Villat qui résolvent les problèmes généralisés de Dirichlet pour l'anneau circulaire.

Nous nous proposons d'indiquer quelques propriétés de la solution générale du problème II correspondant au mouvement en question. Pour cela nous allons employer une méthode qui s'inspire de celle utilisée par M. H. Villat⁽⁵¹⁾, dans le cas limite du canal s'étendant à l'infini en amont et en aval.

(44) A. QUARLERI, *Rendiconti dei Lincei*, 1931, p. 332.

(45) A. WEINSTEIN, *Rendiconti dei Lincei*, 1933, p. 83, t. XVII: *Comptes rendus*, t. 196, 1933, p. 324.

(46) Les recherches de M. J. LERAY ont été exposées par M. H. VILLAT dans son Cours à la Sorbonne (2-ème semestre 1932-1933).

(47) A. WEINSTEIN, *Mathematische Zeitschrift*, t. 31, 1929, p. 424-433.

(48) K. FRIEDRICHS, *Mathematische Annalen*, t. 109, 1933, p. 60-82.

J. LERAY et A. WEINSTEIN, *Comptes rendus*, t. 198, 1934, p. 430,

(49) J. LERAY, *Comptes rendus*, t. 199, 1934, p. 1282.

(50) V. VĂLCOVICI, *Inaugural Dissertation*, Göttingen, 1913.

(51) H. VILLAT, *Annales de l'Ecole Normale*, 1912, 3-e série, t. XXIX, p. 181.

Choisissons deux axes $0x$, $0y$ de sens direct, $0x$ étant l'axe de symétrie de la figure, l'origine 0 coïncidant avec le point de bifurcation du courant.

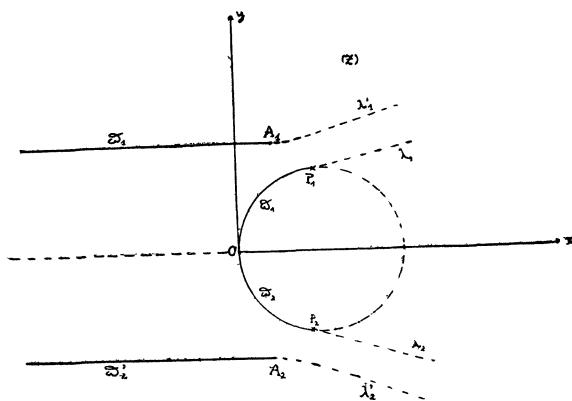


Fig. 1.

Nous appelons ω'_1 , ω'_2 les parois rectilignes du canal, ω_1 , ω_2 les parois de l'obstacle, en contact avec le liquide en mouvement, séparées par le point 0 de bifurcation. Désignons par λ_1 , λ_2 les lignes de jet qui se détachent de l'obstacle aux points P_1 , P_2 et par λ'_1 , λ'_2 celles qui se détachent des parois du canal, aux points A_1 et A_2 . Les lignes de jet sont inconnues. Nous supposons qu'elles s'étendent à l'infini en aval et ont une direction asymptotique. A l'arrière de l'obstacle et à l'extérieur de λ' , λ'_2 le liquide se trouve au repos; il s'ensuit que le long des lignes de jet la vitesse est constante. En changeant au besoin les unités, nous la supposons égale à un, ainsi que la densité du liquide parfait considéré. Nous supposons de plus que l'obstacle ait une tangente continue.

Considérons le potentiel $\phi(x, y)$ et la fonction de courant $\psi(x, y)$. On sait⁽⁵²⁾ que le potentiel complexe $f(z) = \phi + i\psi$ est une fonction analytique du point $z = x + iy$, et que les composantes u, v , de la vitesse d'une particule liquide sont reliées à $f(z)$ par la relation

$$(1) \quad w(z) = u - iv = \frac{df}{dz}$$

On suppose $\frac{df}{dz} \neq 0$ à l'intérieur du domaine occupé par le liquide

(52) Voir par exemple, H. VILLAT, Leçons sur l'Hydrodynamique, p. 58 (Gauthier-Villars, 1929).

en mouvement. Posons, pour nous conformer aux notations classiques,

$$(2) \quad w = e^{i\omega}, \quad \omega = \theta + i\tau;$$

on voit aisément que θ représente l'inclinaison du vecteur vitesse sur l'axe $0x$, tandis que sa grandeur est donnée par $V = e^\tau$.

Le domaine du plan $f = \phi + i\psi$ correspondant au domaine liquide (z), à frontières partiellement inconnues, est donné par les conditions

$$(3) \quad \begin{cases} \psi = 0 & \lambda_1, \lambda_2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \\ \psi = \psi_1 & \text{sur } \bar{\omega}'_1, \lambda'_1 \\ \psi = -\psi_1 & \bar{\omega}'_2, \lambda'_2 \end{cases}$$

qui résultent de la définition de la fonction de courant. La quantité $2\psi_1 > 0$ représente le débit à travers une section du canal. Les points à l'infini, en amont et en aval, ainsi que les points $f=0$, $z=0$, se correspondent dans la transformation $z(f)$.

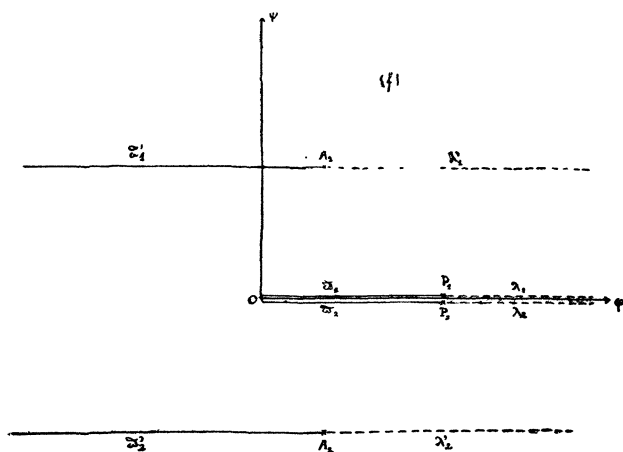


Fig. 2.

Il est facile de constater que la transformation

$$(4) \quad f = -\frac{\psi_1}{\pi} \log \left[\frac{\operatorname{sn}^2 \left(\frac{2K}{i\pi} \log \frac{z}{i} \right)}{b^2} - 1 \right] + i\psi_1,$$

où la détermination choisie pour le logarithme est égale à $i\pi$ pour $Z=i$, fait passer du domaine (f) à une demi-couronne circulaire (Z), de rayons 1 et q_1 , en posant $q_1 = \sqrt{q} = e^{-\frac{\pi K'}{2K}}$

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}, \quad k^2 + k'^2 = 1.$$

La fonction *sn u* de JACOBI est construite avec les périodes $4K$, $2iK'$. La correspondance des frontières est mise en relief sur la figure 3.

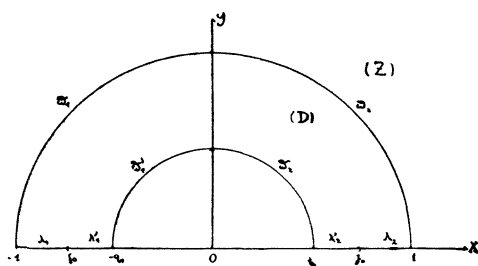


Fig. 3.

Nous avons remplacé les trois paramètres ψ_1 , $\phi(A_1)$, $\phi(P_1)$ dont dépend le problème par les suivants: ψ_1 , b , k , en désignant par b un nombre assujéti à vérifier la condition $1 < b < \frac{1}{k}$, k désignant le module des fonctions elliptiques. On a

$$(5) \quad \phi(P_1) = -\frac{\psi_1}{\pi} \log \left(1 - \frac{1}{b^2} \right), \quad \phi(A_1) = -\frac{\psi_1}{\pi} \log \left(\frac{1-k^2b^2}{b^2} \right),$$

le logarithme ayant sa détermination principale. Il serait facile de montrer que la donnée des nombres ψ_1 , $\phi(P_1)$, $\phi(A_1)$ est équivalente à celle de ψ_1 , b , k pourvu qu'on ait $1 < b < \frac{1}{k}$, $0 < k < 1$.

Le point $z=j_0$ qui sépare les segments correspondant à λ'_2 et λ_2 est donné par

$$(6) \quad j_0 = e^{-\frac{\pi \alpha}{2K}}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} < K'.$$

Par les transformations précédentes, la fonction ω se transforme en une fonction $\omega(Z)$, régulière dans la demi-couronne et continue sur les contours, sauf au point $Z=i$ qui correspond au point $z=0$ du plan

(2). Sa partie réelle θ présente en ce point une discontinuité de première espèce, en passant de la valeur $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ lorsqu'on décrit la demi-circonférence extérieure dans le sens direct. Sur la demi-circonférence intérieure on doit avoir $\theta = 0$; de plus, la vitesse étant égale à 1 sur les lignes libres, on doit avoir $\tau = 0$ sur les portions de la frontière du domaine (Z) situées sur l'axe réel. En vertu de la symétrie du mouvement, on a de plus $\theta = 0$ sur la portion de l'axe imaginaire intérieure au domaine.

Considérons la fonction $\omega_0(Z)$ qui vérifie les conditions suivantes : elle est régulière dans la demi-couronne ; sa partie réelle θ_0 est égale à $-\frac{\pi}{2}$ sur $\bar{\omega}_2$, à $+\frac{\pi}{2}$ sur $\bar{\omega}_1$, à zéro sur $\bar{\omega}'_1$, $\bar{\omega}'_2$; sa partie imaginaire τ_0 est nulle sur les portions de l'axe réel correspondant aux lignes de jet.

On obtient aisément, par un prolongement par symétrie dans la demi-couronne inférieure et en appliquant la formule de M VILLAT (Chapitre II, formule 90),

$$(7) \quad \omega_0(Z) = i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega'_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega'_1}{2}\right)} + \frac{\eta'_1 \omega'_1}{\pi} \log Z + \frac{\pi}{2},$$

où $\log Z$ a sa détermination principale. On choisit comme détermination du premier terme de l'expression précédente celle qui se réduit à $-\pi$ pour $Z = +1$; on a posé $\omega'_1 = K$, $\omega'_3 = \frac{iK'}{2}$. La fonction ω est construite à partir des périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_3$.

Posons

$$(8) \quad \omega(Z) = \omega_0(Z) - \Omega(Z), \quad \Omega(Z) = \Theta + iT$$

La fonction $\Omega(z)$ est continue sur les contours, à partie réelle nulle sur la demi-circonférence de rayon q_1 , à partie imaginaire nulle sur les portions $-1 \leq X \leq -q_1$, $q_1 \leq X \leq +1$ de l'axe réel. De plus, on a $\Theta = 0$ sur $X = 0$, $q_1 \leq Y \leq 1$.

En supposant connues les valeurs $\Theta(\epsilon)$ de $\Theta(X, Y)$ sur la demi-circonférence $Z = e^{i\epsilon}$, ($0 \leq \epsilon \leq \pi$), $\Omega(Z)$ serait complètement déterminée par les conditions précédentes et la solution du problème I serait donnée par la formule

$$(9) \quad dz = \frac{\psi_1}{\pi} F(Z; k, b) e^{-i\Omega(Z)} dZ$$

qui résulte des formules précédentes, (1), (2), (4), (7), (8). On a posé

$$(10) \quad F(Z; k, b) = \frac{\pi}{\psi_1} \frac{df}{dZ} e^{i\omega_0(Z)}$$

ce qu'on peut encore écrire, en tenant compte de (4),

$$(11) \quad F(Z; k, b) = \frac{4Kk^2k'^2}{\pi Z} \cdot \frac{sn\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right) \cdot cn\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right)}{k'^2 - (1 - k^2b^2)dn^2\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right)} \cdot \frac{e^{i\omega_0(Z)}}{dn\left(\frac{2K}{i\pi} \log Z\right)}.$$

Pour $\Omega(Z) \equiv 0$ la formule (9) donne la solution du problème pour un obstacle formé d'une lame orthogonale à la direction générale du courant en amont.

Nous allons maintenant chercher la condition à laquelle doit satisfaire $\Omega(Z)$ sur la demi-circonférence extérieure dans le cas du problème II.

Soit $c(\theta)$ la courbure de l'obstacle solide en fonction de l'angle θ que fait la tangente au point 0 de bifurcation avec la tangente de sens direct à $\tilde{\omega}_1$ ou $\tilde{\omega}_2'$; cette fonction, que nous supposons continue par rapport à θ , est la donnée du problème. En vertu de la symétrie elle doit vérifier la condition $c(\theta) = c(-\theta)$.

On peut obtenir une autre expression du rayon de courbure, et de la courbure de l'obstacle, à partir de la formule (9). La longueur d'arc de $\tilde{\omega}_1$, ou $\tilde{\omega}_2$, étant donnée par

$$(12) \quad ds = \frac{\psi_1}{\pi} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} d\varepsilon \quad (Z = e^{i\varepsilon})$$

$$\text{avec} \quad p(\varepsilon; k, b) = |F(e^{i\varepsilon}; k, b)| = \frac{\pi}{\psi_1} \left| \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right| e^{-\tau_0(\varepsilon)},$$

le rayon de courbure sera égal, en grandeur et en signe, à

$$(13) \quad \frac{ds}{d\theta} = \frac{\psi_1}{\pi} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} \frac{d\varepsilon}{d\theta}.$$

Il s'ensuit que la fonction $\Omega(Z)$ doit vérifier sur $Z = e^{i\varepsilon}$, ($0 \leq \varepsilon \leq \pi$), la condition

$$(14) \quad \frac{dT}{dn_i} = \frac{\psi_1}{\pi} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} c[\theta(\varepsilon)]$$

où $p(\varepsilon; k, b)$ est une fonction continue de ε , positive pour $0 < \varepsilon < \pi$, nulle pour $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \pi$.

Il est facile de ramener la détermination de $\Omega(Z) = \theta + iT$ à la résolution d'un système d'équations intégrales non linéaires du type

déjà considéré dans le chapitre IV (Première partie), en complétant la condition aux limites (14) par celle que doit vérifier $\Omega(Z)$ sur la demi-circonférence inférieure $|Z| = 1$.

Vu les propriétés de symétrie de $\Omega(Z)$, il est plus commode de restreindre notre étude à la portion (D) de la couronne circulaire située dans le premier quadrant, et de réduire dans les équations intégrales l'intervalle d'intégration à $(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2})$. En tenant compte de l'expression de la fonction de Green pour le cas particulier de l'anneau circulaire (voir la formule (102) du chapitre II), on obtient l'équation intégrale,

$$(15) \quad T(\sigma) = -\frac{\psi_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} c[\Theta(\varepsilon)] K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon,$$

en posant

$$(16) \quad K(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \log \left[\xi_{10} \frac{\omega'_1}{\pi} (\sigma - \varepsilon) \xi_{01} \frac{\omega'_1}{\pi} (\sigma + \varepsilon) \right]^2.$$

Quant à la deuxième équation du système (208), donné au chapitre IV, on peut la remplacer par la relation,

$$(17) \quad \Theta(\sigma) = \frac{\psi_1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} c[\Theta(\varepsilon)] d\varepsilon,$$

qui lui est équivalente.

25°. *Propriétés du noyau* $K(\sigma, \varepsilon)$

Le noyau $K(\sigma, \varepsilon)$ *est symétrique*. C'est ce qui résulte avec évidence de la formule (16). *Il est aussi fermé*. En effet, s'il existait une fonction $h(\varepsilon) \equiv 0$, intégrable, telle qu'on ait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\varepsilon) K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon = 0,$$

on en déduirait l'existence d'une fonction $A(z)$, régulière dans la couronne circulaire, ayant des propriétés de symétrie analogues à $\Omega(z)$, dont la partie réelle serait nulle sur la circonférence $|Z| = q_1$, et dont la partie imaginaire serait nulle sur $|Z| = 1$; de plus, la partie imaginaire aurait une dérivée normale égale à $h(\varepsilon)$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$ ($0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$).

Il en résulte $h(\varepsilon) \equiv 0$.

Le noyau $K(\sigma, \varepsilon)$ *est „positif“*. En effet, ses constantes fondamentales sont données par

$$\lambda_p = p \frac{1 + q_1^{2p}}{1 + q_1^{2p}} > 0, \quad (p = 1, 3, 5, \dots)$$

il leur correspond les fonctions fondamentales normalisées

$$\varphi_p(\sigma) = \frac{4}{\pi} \sin p\sigma \quad (p=1, 3, 5, \dots).$$

Cela résulte des formules (192), (193) du chapitre IV, en tenant compte des conditions de symétrie du cas actuel.

Par conséquent, $K(\sigma, \varepsilon)$ est un noyau défini-positif; De plus, on a $K(\sigma, \varepsilon) \geq 0$ pour $0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

En effet, on a (c". Tannery et Molk, LIX).

$$\left[\frac{\xi_{10} \frac{\omega'_1}{\pi} (\sigma - \varepsilon)}{\xi_{10} \frac{\omega'_1}{\pi} (\sigma + \varepsilon)} \right]^2 = \frac{p \frac{\omega'_1}{\pi} (\sigma - \varepsilon) - e_1}{p \frac{\omega'_1}{\pi} (\sigma + \varepsilon) - e_1} \geq 1.$$

Ajoutons que les propriétés de $K(\sigma, \varepsilon)$ entraînent aussi l'existence d'au moins une constante fondamentale, positive, pour le noyau $K_1(\sigma, \varepsilon) = K(\sigma, \varepsilon) p(\varepsilon; k, b)$ qui est symétrisable à gauche

26°. Supposons maintenant que l'obstacle solide soit convexe vers le courant; alors, la fonction $c(\theta)$ est uniforme et positive. Elle peut être définie pour toutes les valeurs réelles de θ par les relations $c(\theta) = c(-\theta)$, $c(\theta + 2n\pi) = c(\theta)$, n étant un entier positif ou négatif.

Il est facile de montrer que le problème aux limites considéré admet au moins une solution. Pour cela cherchons tout d'abord à borner „a priori“ T et θ .

T ne saurait avoir un maximum isolé sur la demi-circonférence $|Z| = q_1$ puisque $\Omega(z)$ est prolongeable à travers par symétrie. Son maximum ne peut non plus être situé sur la demi-circonférence $|Z| = 1$, extrémités exclues. En effet, au point où T atteint son maximum on doit avoir $\frac{dT}{dn_i} \leq 0$; or, d'après (14) on a $\frac{dT}{dn_i} > 0$. Ainsi, le maximum ne peut être atteint sur $|Z| = 1$ qu'aux points $Z = \pm 1$ puisque $p(0; k, b) = p(\pi; k, b) = 0$.

D'autre part $T = 0$ sur les portions de l'axe réel $-1 \leq X \leq -q_1$, $q_1 \leq X \leq 1$; on a donc, dans tout le domaine $T \leq 0$. Il en résulte immédiatement une borne inférieure de T sur $|Z| = 1$ compte tenu de l'équation (15). On a

$$T \geq -\frac{\psi_1 C}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon \geq -\frac{\psi_1 C}{\pi} \text{Max.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon.$$

C étant une borne supérieure de $c(\theta)$. Le minimum de T étant nécessairement atteint sur $|Z| = 1$, cette limitation est encore valable dans tout le domaine situé au-dessus de l'axe réel.

L'équation (17) nous permet, de même, de borner $\theta(\varepsilon)$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

On a

$$\frac{\psi_1 C}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 p(\varepsilon; k, b) d\varepsilon \leq \theta(\varepsilon) \leq 0.$$

Cette limitation est d'ailleurs valable aussi pour $\theta(X, Y)$ dans (D).

Les conditions d'application du théorème d'existence de MM. Leray et Schauder (53), déjà employé, sont remplies. En effet, les équations (15), (17) se ramènent à une équation fonctionnelle de la forme

$$x = F(x, \psi_1), (\psi_1 \geq 0)$$

x et $F(x; \psi_1)$ appartenant à un espace linéaire, normé, complet. La fonctionnelle $F(x; \psi_1)$ est complètement continue; elle est uniformément continue par rapport à ψ_1 ; d'autre part, les solutions x de l'équation considérée sont bornées dans leur ensemble. Enfin, pour $\psi_1 = 0$, le problème admet une solution et une seule. Il en résulte que les systèmes (15), (17) admettent sûrement un continu de solutions le long duquel ψ_1 prend toutes les valeurs réelles positives. Dans tout ce qui précède les paramètres k et b sont supposés fixes et assujettis à vérifier les conditions $0 < k < 1$, $1 < b < \frac{1}{k}$.

Les résultats de ce paragraphe peuvent s'étendre au cas où l'obstacle ne serait pas symétrique par rapport à la direction du courant à l'infini en amont.

Unicité locale. Supposons maintenant que la fonction $c(\theta)$ admette une dérivée première et une dérivée seconde, continues par rapport à θ . Si on a $c'(\theta) \geq 0$, $c''(\theta)c(\theta) - c'^2(\theta) \geq 0$, l'unicité locale de la solution est assurée.

En effet, le procédé employé au chapitre IV, (23^o), nous donne

$$\left[\frac{c'(\theta)}{c(\theta)} (\delta\theta)^2 \right]_{\varepsilon=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\delta\theta)^2 \frac{c''(\theta) c(\theta) - c'^2(\theta)}{c^2(\theta)} d\theta < 0, \quad (\text{sur } Z = e^{i\varepsilon})$$

d'où on conclut $\delta\Omega = \delta\theta + i\delta T \equiv 0$.

(53) Loc. cit., (40) p. 64.

27°. — Nous nous proposons maintenant d'étudier quelques propriétés de la solution. A cet effet, nous allons indiquer auparavant quelques propriétés de la fonction $\omega_0(Z) = \theta_0 + i\tau_0$ introduite précédemment.

LEMME. Si une fonction $F(Z) = U + iV$ est régulière dans (D), à partie réelle continue sur la frontière, sauf au point $Z=i$, telle qu'on ait $U=0$ sur $Z=q_1 e^{i\epsilon}$, ($0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$), $U=0$ sur $X=0$, $q_1 \leq Y < +1$, $V=0$ sur $q_1 \leq X \leq +1$, $Y=0$, si de plus $U \leq 0$ sur $Z=e^{i\epsilon}$, $0 \leq \epsilon < \frac{\pi}{2}$ et sur $Z-i=\rho e^{i\alpha}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$, où ρ désigne un nombre positif assez petit, on a $U \leq 0$ dans (D) et $\frac{dV}{d\epsilon} \leq 0$ sur $Z=q_1 e^{i\epsilon}$, ($0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$).

En effet, la fonction U ne peut atteindre son maximum sur la portion $q_1 < X < 1$ de l'axe réel puisqu'elle est prolongeable à travers par symétrie. On a donc bien $U \leq 0$ dans (D), d'où $\frac{dU}{dn_i} = \frac{1}{q_1} \frac{dV}{d\epsilon} \leq 0$ sur $Z=q_1 e^{i\epsilon}$. Il en résulte aussi $V \leq 0$ sur la même portion de la frontière ($0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$).

Il est presque évident que ce lemme est applicable à la fonction $\omega_0(Z)$. On a donc

$$\tau_0 \leq 0, \quad \frac{d\tau_0}{d\epsilon} \leq 0 \quad \text{sur } Z=q_1 e^{i\epsilon}, \quad \left(0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Considérons maintenant la fonction $Z \frac{d\omega_0}{dZ} = u_0 + i v_0$. Elle est régulière dans (D), continue sur les frontières, sauf au point $Z=i$ où elle se comporte comme $\frac{-1}{Z-i}$. De plus, on a $v_0=0$ sur $Z=e^{i\epsilon}$ ($0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$), $v_0=0$ sur la portion de la frontière appartenant à l'axe réel, $v_0=0$ sur $Z=q_1 e^{i\epsilon}$, $0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$, $u_0=0$ sur $X=0$, $q_1 < Y < 1$; sur l'arc de cercle $Z-i=\rho e^{i\alpha}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, on a $u_0 \leq 0$, $v_0 \leq 0$ si ρ est choisi assez petit.

On déduit $v_0 \leq 0$ dans (D) donc

$$\frac{1}{q_1} \frac{du_0}{d\epsilon} = -\frac{dv_0}{dn_i} \geq 0 \quad \text{sur } Z=q_1 e^{i\epsilon}, \quad 0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{du_0}{d\epsilon} = \frac{dv_0}{dn_i} \leq 0 \quad \text{sur } Z=e^{i\epsilon}.$$

Cela entraîne $u_0 \leq 0$ dans (D), d'où $\frac{d\tau_0}{d\varepsilon} \leq 0$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right)$ et $\frac{d^2\tau_0}{d\varepsilon^2} \geq 0$ sur $Z = q_1 e^{i\varepsilon}$, $\frac{d^2\tau_0}{d\varepsilon^2} \leq 0$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$ $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right)$. De la relation $\tau_0 \leq 0$ dans (D), on tire facilement

$$\frac{d\theta_0}{dX} = \frac{d\tau_0}{dn_i} \leq 0 \quad \text{sur} \quad q_1 \leq X \leq 1, \quad Y = 0.$$

On sait que⁽⁵⁴⁾ dans le liquide en mouvement les vitesses ne doivent pas dépasser l'unité. Les résultats précédents montrent que dans le cas d'une lame normale au courant, les vitesses sont acceptables. Il en est de même des lignes de jet.

D'une façon plus générale, le lemme qui précède entraîne le résultat suivant:

Pour tous les obstacles symétriques tels que $\theta(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2} - \Theta(\varepsilon) \leq 0$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$, les vitesses sont acceptables sur les parois du canal.

Nous retrouvons ainsi un important théorème dû à M. H. VILLAT⁽⁵⁵⁾. On peut affirmer de plus que le long des parois du canal la vitesse croît sans cesse du point à l'infini en amont aux points de détachement.

Théorème.

Toute solution $\Omega(Z)$ du problème aux limites considéré est telle qu'on ait

$$\frac{dT}{d\varepsilon} \leq 0, \quad \frac{d^2T}{d\varepsilon^2} \geq 0$$

sur $Z = q_1 e^{i\varepsilon}$ $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

En effet, la fonction Θ est négative sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$ et ne peut pas atteindre son maximum sur la portion de frontière située sur l'axe réel. On a donc $\Theta \leq 0$ dans (D) et $\frac{d\Theta}{dn_i} \leq 0$ sur $Z = q_1 e^{i\varepsilon}$, $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Or, sur la circonférence intérieure on a

$$\frac{d\Theta}{dn_i} = \frac{1}{q_1} \frac{dT}{d\varepsilon}, \quad \text{donc} \quad \frac{dT}{d\varepsilon} \leq 0.$$

(54) H. VILLAT, Sur la validité des solutions de certains problèmes d'Hydrodynamique, (*Journal de Mathématiques*, 1914, 6^{ème} série, t. 10, p. 231—290).

(55) loc. cit. (54) p. 268. Dans une Note récente des *Comptes rendus*, t. 200, 1935, p. 208, M. J. KRAVTSCHENKO a étendu quelques-uns des théorèmes de M. VILLAT au cas où la symétrie n'existe plus.

Pour démontrer la seconde inégalité, considérons la fonction $Z \frac{d\Omega}{dZ} = U + iV$, qui est régulière dans (D), à partie imaginaire continue sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2})$.

En vertu des relations $U = \rho \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}$, $V = \rho \frac{\partial T}{\partial \rho}$, où ρ désigne $|Z|$, on a $U = 0$ sur la portion de l'axe imaginaire appartenant à la frontière du domaine, $V = 0$ sur $Z = q_1 e^{i\varepsilon}$ ($0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$), $V = 0$ sur la portion $q_1 \leq X \leq 1$ de l'axe réel. De plus, d'après (14), on a $V = -\frac{dT}{dn_i} \leq 0$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

Il en résulte comme plus haut, $V \leq 0$ dans (D), d'où

$$\frac{dV}{dn_i} = -\frac{dU}{q_1 d\varepsilon} \leq 0 \quad \text{sur } Z = q_1 e^{i\varepsilon} \quad (0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}),$$

ou encore

$$\frac{dU}{d\varepsilon} = \frac{d^2 T}{d\varepsilon^2} \geq 0.$$

On voit de plus que la première inégalité ne se transforme en égalité que pour $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, la deuxième donne une égalité pour $\varepsilon = 0$. Il résulte aussi des considérations précédentes que sur la portion $q_1 < X < 1$ de l'axe réel, on a

$$\frac{d\Theta}{dX} = \frac{dT}{dn_i} < 0$$

ainsi que

$$\frac{dU}{dX} = \frac{dV}{dn_i} < 0 \quad \text{donc} \quad \frac{d}{dX} \left(X \frac{d\Theta}{dX} \right) < 0$$

Condition de validité de M. VILLAT.

Les résultats précédents ne nous permettent pas d'affirmer que les vitesses soient acceptables sur les parois du solide $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$. Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est qu'on ait

$$\left(\frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \left[\frac{d\tau_0}{d\varepsilon} - \frac{dT}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \leq 0, \quad (Z = e^{i\varepsilon}).$$

Cette condition équivaut à la suivante⁽⁵⁶⁾

$$(18) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{d\varepsilon} \frac{p' \left(\frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \right)}{p \left(\frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \right) - e_1} d\varepsilon + \pi \left(\eta'_1 - 2\zeta \frac{\omega'_1}{2} \right) \leq 0.$$

Lorsque l'égalité a lieu, l'obstacle est en proue. Pour les obstacles convexes en proue la ligne de jet se détache aux points P_1 et P_2 avec une courbure égale à celle de l'obstacle.

Nous utiliserons aussi le théorème suivant de M. VILLAT⁽⁵⁷⁾. *Pour tout les obstacles symétriques convexes jusque et y compris le cas des proues, les lignes de jet sont acceptables, c'est-à-dire que le long de ces lignes l'angle que fait la tangente avec la direction générale du courant en amont varie d'une façon monotone, $\left(\frac{d\theta}{dX} < 0 \text{ sur } q_1 \leq X < 1 \right)$;* ce fait rend impossible le recouplement des lignes de jet.

A l'aide de ce théorème on peut énoncer le résultat ci-dessous : *Pour tous les obstacles symétriques convexes jusque et y compris le cas des proues, les vitesses sont certainement acceptables sur les parois du canal.*

Pour le démontrer, il nous suffira de montrer que le maximum $\theta(0)$ de $\theta(\varepsilon)$ ($Z = e^{i\varepsilon}$) est négatif, pour qu'on soit dans le cas d'application d'un théorème précédent. On a, en vertu du théorème de M. VILLAT,

$$\frac{d\theta}{dX} < 0 \quad \text{sur} \quad q_1 < X < 1,$$

donc $\theta(X) < \theta(q_1) = 0$; en particulier $\theta(0) = \theta(X=1) < 0$ puisque θ est une fonction continue au point $Z = 1$.

28°. — Cas d'un obstacle circulaire.

Supposons dans la suite, $c(\theta) \equiv 1$; l'obstacle correspondant est un cercle⁽⁵⁸⁾. Dans ce cas, il suffit de considérer la seule équation (15) qui relève de la méthode que M. LERAY a désigné sous le nom de „méthode d'ARZELA-SCHMIDT“ et que nous avons employée au chapitre IV. Faisons remarquer que dans le cas actuel l'existence d'une

⁽⁵⁶⁾ H. VILLAT, loc. cit. ⁽⁵⁴⁾, p. 280.

⁽⁵⁷⁾ H. VILLAT, loc. cit. ⁽⁵⁴⁾, p. 280.

⁽⁵⁸⁾ Nous avons exposé quelques-uns des résultats qui suivent dans une communication faite au 4^e Congrès International de Mécanique appliquée, Cambridge, juillet 1934.

solution résulte aussi d'un théorème de M. HAMMERSTEIN. On sait⁽⁵⁹⁾ que l'équation

$$\psi(x) + \int_a^b K(x, y) f(y, \psi(y)) dy = 0 \quad (a < b),$$

où $K(x, y)$ est un noyau symétrique positif, (> 0), défini-positif, de carré intégrable et où $f(x, u)$ est une fonction continue par rapport à x et à u pour $a \leq x \leq b$, $-\infty < u < +\infty$ admet au moins une solution si l'on a

$$0 \leq f(x, u) < C|u| + C' \quad \text{pour } u \leq 0,$$

C et C' étant deux nombres positifs, dont le premier est assujéti à la condition $0 < C < \lambda_1$, en désignant par λ_1 la plus petite constante fondamentale du noyau $K(x, y)$.

Dans le cas actuel, toutes ces conditions sont évidemment remplies. De plus, on peut montrer que la solution du problème est unique. En effet, supposons que le problème aux limites

$$(19) \begin{cases} \frac{dT}{dn_i} = \frac{\psi_1}{\pi} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} & Z = e^{i\varepsilon} \quad \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ \Theta = 0 & \text{pour } Z = q_1 e^{i\varepsilon} \quad \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right); X=0, q_1 \leq Y \leq 1 \\ T = 0 & q_1 \leq X \leq 1, Y = 0 \end{cases}$$

admette deux solutions $\Omega_1(Z) = \Theta_1 + iT_1$, $\Omega_2(Z) = \Theta_2 + iT_2$, holomorphes dans (D). La fonction $\Phi(z) = \Omega_1(Z) - \Omega_2(Z) = \Theta + i\mathfrak{T}$, holomorphe dans le même domaine, et continue sur le contour, y vérifiera les conditions

$$(20) \begin{cases} \frac{d\mathfrak{T}}{dn_i} = \frac{\psi_1}{\pi} p(\varepsilon; k, b) e^{\bar{\tau}} \cdot \mathfrak{T} & Z = e^{i\varepsilon} \quad \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ \Theta = 0 & \text{pour } Z = q_1 e^{i\varepsilon} \quad \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right); X=0, q_1 \leq Y \leq 1 \\ \mathfrak{T} = 0 & q_1 \leq X \leq 1, Y = 0 \end{cases}$$

en posant $\bar{\tau} = T_2 + \xi(T_1 - T_2)$, $0 < \xi < 1$. On en tire facilement

$$\iint \left| \frac{d\Phi}{dZ} \right|^2 dXdY + \frac{\psi_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) e^{\bar{\tau}} \mathfrak{T}^2(\varepsilon) d\varepsilon = 0$$

ce qui entraîne $\Phi(Z) = 0$. ($\psi_1 \geq 0$).

⁽⁵⁹⁾ Cf. A. HAMMERSTEIN, *Acta Mathematica*, t. 54, 1930, p. 122.

En appliquant la méthode de SCHMIDT à l'équation intégrale du problème

$$(15') \quad T(\sigma) = -\frac{\psi_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon,$$

on voit qu'à chaque point $\psi_1^{(0)} \geq 0$ on peut attacher un voisinage $|\psi_1 - \psi_1^{(0)}| < \varepsilon_1^{(0)}$, tel que dans ce voisinage la solution de l'équation soit donnée par la méthode des approximations successives, connaissant $T(\sigma, \psi_1^{(0)})$. Il en résulte d'après le lemme de BOREL-LEBESGUE que tous les points de l'intervalle $0 \leq \psi_1 \leq \Psi_1$, Ψ_1 , étant un nombre positif, peuvent être recouverts par un nombre fini de voisinages de SCHMIDT. Par conséquent la solution $T(\sigma)$ peut être calculée de proche en proche par la méthode des approximations successives et est analytique par rapport à ψ_1 .

Propriétés de la solution.

La solution $\Omega(Z; \psi_1, k, b)$ du problème aux limites (19) dépend de trois paramètres qu'on doit déterminer par la connaissance de certains éléments géométriques du mouvement, tels que la position des points de détachement A_1 et P_1 et la largeur du canal, ou bien encore par la condition que le détachement des lignes de jet en P_1 et P_2 soit en proue, les points A_1 et A_2 , ainsi que la largeur du canal, étant donnés.

Nous étudierons dans ce qui suit comment varie la fonction $T(\sigma)$, solution de l'équation (15'), lorsque les paramètres varient et en déduirons quelques propriétés des éléments géométriques du mouvement.

La longueur Δ des arcs OP_1 ou OP_2 du point de bifurcation à un point de détachement, est donnée par

$$(21) \quad \Delta = \frac{\psi_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} d\varepsilon = -\Theta(0).$$

Cela est une conséquence immédiate de la formule (12).

Théorème.

Δ est une fonction croissante par rapport à ψ_1 .

Considérons la fonction $\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1} = \frac{\partial \Theta}{\partial \psi_1} + i \frac{\partial T}{\partial \psi_1}$. Elle est holomorphe dans le domaine (D) et vérifie les conditions aux limites

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \right) = \frac{1}{\pi} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} \left[\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1} + 1 \right] \quad \text{sur } Z = e^{i\varepsilon} \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \psi_1} = 0 \quad \text{sur } Z = q_1 e^{i\varepsilon} \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ et sur } q_1 \leq Y \leq 1, X=0, \\ \frac{\partial T}{\partial \psi_1} = 0 \quad \text{sur } q_1 \leq X \leq 1, Y=0. \end{array} \right.$$

En appliquant la formule (I), on en tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial T}{\partial \psi_1} \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \right) d\varepsilon + \iint \left| \frac{d}{dZ} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1} \right] \right|^2 dX dY = 0, \quad (D)$$

d'où

$$(23) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial T}{\partial \psi_1} \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \right) d\varepsilon < 0.$$

D'autre part, la première des relations (22) nous donne, en multipliant les deux membres par $\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1} + 1$ et en intégrant

$$\begin{aligned} \psi_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial T}{\partial \psi_1} \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \right) d\varepsilon + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \right) d\varepsilon = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} \left(\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1} + 1 \right)^2 d\varepsilon > 0; \end{aligned}$$

il en résulte, en tenant compte de (23)

$$(24) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \right) d\varepsilon > 0, \text{ c'est-à-dire} \\ \frac{d\Delta}{d\psi_1} = - \frac{\partial \Theta(0)}{d\psi_1} > 0.$$

Théorème ⁽⁶⁰⁾.

On a, dans (D), $\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \leq 0$, $\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1} + 1 > 0$.

⁽⁶⁰⁾ Ce théorème s'applique aussi au cas limite d'un courant s'étendant à l'infini dans toutes les directions et heurtant un obstacle circulaire. Il permet de démontrer d'une façon simple l'unicité de la solution pour tout arc de cercle donné.

En effet, la fonction harmonique $\frac{\partial T}{\partial \psi_1}$ ne peut avoir un maximum ou un minimum isolé sur $Z = q_1 e^{i\varepsilon}$, $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right)$, ni sur la portion $q_1 \leq Y < 1$ de l'axe imaginaire. Soient $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\varepsilon = \varepsilon_2$ les points de la frontière $Z = e^{i\varepsilon}$, $\left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\right)$ où $\frac{\partial T}{\partial \psi_1}$ atteint son maximum ou son minimum. On ne peut pas avoir $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$.

En effet, dans le cas contraire on en concluerait

$$\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon_1) + 1 < 0, \quad \psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon_2) + 1 > 0$$

avec

$$\frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon_1) > \frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon_2).$$

Cela résulte immédiatement de la condition sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ et du fait que $p(\varepsilon_1; k, b) \neq 0$, $p(\varepsilon_2; k, b) \neq 0$. Les relations précédentes sont incompatibles. Je dis que $\frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon)$ atteint son maximum au point $Z = 1$, $(\varepsilon = 0)$; en effet, supposons que ce soit le minimum qui est réalisé en ce point. On aurait $\frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon) \geq 0$ et d'autre part on devrait avoir $\psi_1 \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \right)_{\max} + 1 > 0$. On arrive ainsi à une contradiction. On a donc

$$\frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon) \leq \frac{\partial T}{\partial \psi_1}(0) = 0.$$

D'autre part, l'expression $\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1} + 1$ atteint son minimum au point $\varepsilon = \varepsilon_2$, en même temps que $\frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon)$; il en résulte

$$\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon) + 1 \geq \psi_1 \left(\frac{\partial T}{\partial \psi_1} \right)_{\min} + 1 > 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Corollaires

On en déduit une nouvelle démonstration du théorème précédent. En effet, on a

$$(24') \quad \frac{d\Delta}{d\psi_1} = - \frac{\partial \Theta(0)}{\partial \psi_1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} \left[\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1}(\varepsilon) + 1 \right] d\varepsilon > 0.$$

De plus, il en résulte aussi $\frac{\partial \Theta}{\partial \psi_1} \leq 0$ dans (D), comme on le constate immédiatement.

On peut préciser davantage l'allure de $\Delta = -\min \Theta = -\Theta(z=1)$ pour les grandes valeurs de ψ_1 en suivant une méthode que M. Leray a employée dans le cas d'un obstacle circulaire placé dans un liquide s'étendant à l'infini dans toutes les directions. On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} T(\varepsilon) d\varepsilon \geq -\frac{\psi_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b, e^{T(\varepsilon)}) d\varepsilon \cdot \text{Max} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon,$$

ou encore, en tenant compte de la définition de Δ ,

$$(25) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(\varepsilon) d\varepsilon \geq -\Delta \cdot \text{Max} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon.$$

Il est facile de calculer le maximum de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon$.

En effet, on a

$$K(\sigma, \varepsilon) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(2p-1)\sigma \cdot \sin(2p-1)\varepsilon}{(2p-1) \frac{1-q_1^{4p-2}}{1+q_1^{4p-2}}},$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2} \frac{1+q_1^{4p-2}}{1-q_1^{4p-2}} \sin(2p-1)\sigma.$$

Le maximum de cette expression est atteint pour $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ⁽⁶¹⁾.

On a donc

$$K = \text{Max} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)^2} \cdot \frac{1+q_1^{4p-2}}{1-q_1^{4p-2}} < \frac{4}{\pi} \frac{1+q_1^2}{1-q_1^2} = K_0.$$

(61) Cela peut s'établir aussi en remarquant que la fonction $\theta + it$, régulière pour $Z = \rho e^{i\varepsilon}$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$, qui vérifie les conditions $\theta = 0$ sur

l'axe imaginaire, $t=0$ sur l'axe réel, $\frac{dt}{dn} = -1$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$, est telle que $t \geq 0$ atteint son maximum au point $Z=i$ et que, d'autre part, la fonction $U + iV = (\theta - \theta) + i(T - t)$ est telle qu'on ait $V \geq 0$, le maximum de V étant atteint au point $Z=i$.

Soit e la mesure de l'ensemble E des points de l'intervalle $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$ où $T(\varepsilon) > -\frac{4}{\pi} K_0 \Delta$. On renforce l'inégalité (25) en posant

$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - e \right) K_0 \Delta \leq K_0 \Delta$$

ce qui donne $e = \text{mes } E \geq \frac{\pi}{4}$. En revenant à l'expression de Δ , on trouve facilement

$$\Delta \geq \frac{\psi_1}{\pi} \int_E p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} d\varepsilon \geq \frac{\psi_1}{\pi} e^{-\frac{4}{\pi} K_0 \Delta} \int_0^{\frac{\pi}{4}} p(\varepsilon; k, b) d\varepsilon$$

donc

$$(26) \quad \Delta e^{\frac{4}{\pi} K_0 \Delta} \geq \frac{\psi_1}{\pi} B,$$

avec

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} p(\varepsilon; k, b) d\varepsilon > 0,$$

L'inégalité ainsi obtenue prouve que Δ croît indéfiniment avec ψ_1 , les nombres k et b restant fixes.

Théorème.

Les nombres k et b restant fixes, parmi l'infinité de configurations possibles (dépendant du paramètre $\psi_1 \geq 0$) dans le plan (z) du liquide en mouvement, il en existe une et une seule telle que le détachement des lignes de jet en P_1 et P_2 , soit en proue.

En effet, en tenant compte de (14), où l'on fait $c(\theta) \equiv 1$, la condition (18) de M. Villat relative aux proues devient

$$(18') \quad \frac{\psi_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} \frac{p' \left(\frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \right)}{p \left(\frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \right) - e_1} d\varepsilon = \pi \left(\eta'_1 - 2\zeta \frac{\omega'_1}{2} \right).$$

La quantité $\eta'_1 - 2\zeta \frac{\omega'_1}{2}$ est négative; en effet, on a

$$(27) \quad \eta'_1 - 2\zeta \frac{\omega'_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{p' \left(\frac{\omega'_1}{2} \right)}{p \left(\frac{\omega'_1}{2} \right) - e_1}.$$

Cela étant, considérons la fonction

$$G(\varepsilon) = \frac{p' \left(\frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \right)}{e_1 - p \left(\frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon \right)} \cdot \frac{e_1 - p \frac{\omega'_1}{2}}{p' \frac{\omega'_1}{2}} > 0 \quad \left(0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

et proposons-nous de montrer qu'on a $G(\varepsilon) \geq 1$ pour $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

On constate immédiatement qu'on peut écrire

$$G^2(\varepsilon) = \frac{(pu - e_2)(pu - e_3)}{pu - e_1} \cdot \frac{p \frac{\omega'_1}{2} - e_1}{\left(p \frac{\omega'_1}{2} - e_2 \right) \left(p \frac{\omega'_1}{2} - e_3 \right)} = \frac{H(u)}{H\left(\frac{\omega_1}{2}\right)},$$

avec

$$u = \frac{\omega'_1}{\pi} \varepsilon, \quad H(u) = \frac{(pu - e_2)(pu - e_3)}{pu - e_1}.$$

On a

$$H'(u) = p'u \frac{p^2u - 2e_1pu - e_1^2 - e_2e_3}{(pu - e_1)^2} \leq 0,$$

ce qui entraîne $G^2(\varepsilon) \geq 1$, donc $G(\varepsilon) \geq 1$.

La condition (18') peut encore s'écrire, en tenant compte de (27),

$$(28) \quad J = \frac{\psi_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} G(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

En comparant avec la formule (21) on obtient l'inégalité $J > \Delta$. Il en résulte, en vertu du théorème précédent, que J croît indéfiniment avec ψ_1 ; par conséquent, il existe des valeurs de ψ_1 pour lesquelles le détachement en P_1 et P_2 soit en proue. D'après l'inégalité précédente il leur correspond des longueurs Δ inférieures à $\frac{\pi}{2}$, ce qui confirme d'ailleurs un résultat plus général énoncé précédemment. De plus, il existe une seule valeur de ψ_1 correspondant à une proue. En effet, on a

$$\frac{dJ}{d\psi_1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varepsilon; k, b) e^{T(\varepsilon)} G(\varepsilon) \left(\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi_1} + 1 \right) d\varepsilon > 0$$

Théorème.

1. La vitesse V_∞ à l'infini en amont est une fonction croissante de ψ_1 .

2. La largeur $2L$ du canal est une fonction croissante de ψ_1 .

3. La direction asymptotique des lignes de jet varie d'une façon monotone avec ψ_1 .

On a, en effet, $V_\infty = e^{\tau_0(q_1, i) - T(q_1, i)}$, d'où $\frac{\partial V_\infty}{\partial \psi_1} = -V_\infty \frac{\partial T}{\partial \psi_1}(q_1, i) > 0$, en désignant par $\tau(q_1, i)$ la valeur de $\tau(X, Y)$ au point $X=0, Y=q_1$.

On a

$$L = \frac{\psi_1}{V_\infty}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_1} = \frac{V_\infty - \psi_1 \frac{\partial V_\infty}{\partial \psi_1}}{V_\infty^2};$$

d'autre part, l'inégalité $\psi_1 \frac{\partial T}{\partial \psi} + 1 > 0$ entraîne $V_\infty - \psi_1 \frac{\partial V_\infty}{\partial \psi_1} > 0$. La direction asymptotique des lignes de jet inférieures est donnée par $\theta_0(j_0) - \theta(j_0)$; or, nous avons vu que $\frac{\partial \theta}{\partial \psi_1} < 0$ dans (D).

Théorème

On a, dans tout le domaine (D), $\frac{\partial T}{\partial b} \geq 0$, donc $\frac{\partial \tau}{\partial b} \leq 0$. En effet, la fonction $\frac{\partial \Omega}{\partial b}$, régulière dans (D), vérifie les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial T}{\partial b} \right) = \frac{\psi_1}{\pi} e^{T(\epsilon)} \left[p(\epsilon; k, b) \frac{\partial T}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial b} \right] \quad \text{sur } Z = e^{i\epsilon} \left(0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial b} = 0 \quad \text{sur } Z = q_1 e^{i\epsilon}, \left(0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ et sur } X=0, q_1 \leq Y \leq 1 \\ \frac{\partial T}{\partial b} = 0 \quad \text{sur } q_1 \leq X \leq 1, Y=0, \end{array} \right.$$

D'autre part, l'expression de $p(\epsilon; k, b)$ nous montre facilement qu'on a $\frac{\partial p}{\partial b} \leq 0$ pour $0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$, ce qu'on pourrait aussi vérifier par un raisonnement direct. Il s'ensuit que le minimum négatif de $\frac{\partial T}{\partial b}$, dans (D), ne peut pas se trouver sur $Z = e^{i\epsilon} (0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2})$; il ne saurait non plus se trouver sur $Z = q_1 e^{i\epsilon} (0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2})$, ou sur la portion de l'axe imaginaire appartenant à la frontière puisque $\frac{\partial T}{\partial b}$ est prolongeable à tra-

vers par symétrie. On a donc bien

$$\left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)_{\min.} = 0$$

On peut aussi donner une limitation supérieure de $\frac{\partial T}{\partial b}$ en remarquant qu'au point $Z = e^{\epsilon_1}$, ($0 < \epsilon_1 \leq \frac{\pi}{2}$), où il atteint son maximum [dans (D)], on doit avoir

$$p(\epsilon_1; k, b) \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)_{\max.} + \frac{\partial p}{\partial b}(\epsilon_1) < 0$$

d'où

$$\left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)_{\max} < -\frac{\frac{\partial p}{\partial b}(\epsilon_1)}{p(\epsilon_1)} < \text{Max} \left[-\frac{\frac{\partial p}{\partial b}}{p(\epsilon, k, b)} \right].$$

Or, on a

$$\frac{\partial p}{\partial b} = -p(\epsilon; k, b) \cdot \frac{2k^2 b \, dn^2\left(\frac{2K}{\pi} \epsilon\right)}{k'^2 - (1 - k^2 b^2) dn^2\left(\frac{2K}{\pi} \epsilon\right)} = -p(\epsilon; k, b) A(\epsilon),$$

et la fonction $A(\epsilon)$ est décroissante dans l'intervalle $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$, comme on le constate sans peine en tenant compte des propriétés classiques de la fonction $dn u$. On a donc l'inégalité

$$\frac{\partial T}{\partial b} \leq \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)_{\max.} < A(0) = \frac{2b}{b^2 - 1}$$

Corollaires

1. La vitesse à l'infini en amont est une fonction décroissante par rapport à b .
2. La largeur $2L$ du canal est une fonction croissante de b .
3. Δ est une fonction décroissante de b .

Il nous reste maintenant à étudier la variation de la solution T par rapport au module k des fonctions elliptiques introduites, ou, ce qui revient au même, par rapport au rayon $q_1 = e^{-\frac{\pi K'}{2K}}$ de la circonférence intérieure.

Nous allons faire auparavant cette étude pour la solution élémentaire $\omega_0(Z)$. Désignons par $\delta_Z \omega_0$ la variation que subit $\omega_0(Z)$ pour Z fixe, quand le domaine (D) varie par suite de l'accroissement δq_1 du rayon de la circonférence intérieure; soit $\delta \omega_0$ la variation de ω_0 correspondant aussi à une variation δZ du point Z . Nous assujettissons δZ

aux conditions : $\delta Z = 0$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$ ($0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$) ; $\delta Y = 0$ sur $Y = 0$,
 $q_1 \leq X \leq 1$; $\delta X = 0$ sur $X = 0$, $q_1 \leq Y \leq 1$; $\delta Z = \delta q_1 e^{i\varepsilon}$ sur $Z = q_1 e^{i\varepsilon}$
 $(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2})$.

On a manifestement, dans (D),

$$\delta \omega_0 = \delta_z \omega_0 + \frac{\delta Z}{Z} (Z \frac{d\omega_0}{dZ}).$$

On en déduit, en tenant aussi compte des conditions aux limites que vérifie $\omega_0 (Z)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial_z \theta_0}{\partial q_1} = 0 \text{ sur } Z = e^{i\varepsilon}, (0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}) \text{ et sur } X = 0, q_1 \leq Y \leq 1 \\ \frac{\partial_z \tau_0}{\partial q_1} = 0 \text{ sur } q_1 \leq X \leq 1, Y = 0 \\ \frac{\partial_z \theta_0}{\partial q_1} - \frac{d\theta_0}{dn_i} = -\frac{1}{q_1} \frac{d\tau_0}{d\varepsilon} \geq 0 \text{ sur } Z = q_1 e^{i\varepsilon}, (0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}) \end{array} \right.$$

Il est d'ailleurs presque évident que $\frac{\partial_z \omega_0}{\partial \varepsilon}$ est une fonction régulière de Z dans (D), continue sur les frontières. Les conditions aux limites précédentes nous montrent qu'on a :

$$\min \left(\frac{\partial_z \theta_0}{\partial q_1} \right) = 0, \text{ donc } \frac{\partial_z \theta_0}{\partial q_1} \geq 0 \text{ dans (D)}. \text{ Il en résulte}$$

$$\frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial_z \theta_0}{\partial q_1} \right) = -\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial_z \tau_0}{\partial q_1} \right) \geq 0 \text{ sur } Z = e^{i\varepsilon}, (0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}),$$

donc $\frac{\partial_z \tau_0}{\partial q_1} \leq 0$ sur $Z = e^{i\varepsilon}$ ($0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$), l'égalité ayant lieu pour $\varepsilon = 0$,

D'ailleurs, puisque

$$\frac{1}{q_1} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial_z \theta_0}{\partial q_1} \right) = -\frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial_z \tau_0}{\partial q_1} \right) = -\frac{d^2 \tau_0}{d\varepsilon^2} \leq 0 \text{ sur } Z = q_1 e^{i\varepsilon}, (0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}),$$

cette inégalité reste valable dans tout le domaine (D).

Ce qui précède nous permet d'énoncer le lemme suivant : *La fonction $p(\varepsilon; k, b)$ est telle qu'on ait $\frac{\partial p}{\partial q_1}(\varepsilon; k, b) \geq 0$ pour $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$.*

On sait qu'on a

$$\frac{\psi_1}{\pi} p(\varepsilon; k, b) = \left| \frac{df}{dZ} \right| e^{-\tau_0} = \left| \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right| e^{-\tau_0}.$$

Le lemme en question sera démontré si on prouve que, sur $Z = e^{i\varepsilon}$, $(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2})$, l'on a

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left| \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right| = - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right) \geq 0.$$

Considérons le potentiel complexe $f = \phi + i\psi$. C'est une fonction de Z définie par les conditions aux limites suivantes

$$(3') \quad \begin{cases} \psi = 0 \text{ sur } Z = e^{i\varepsilon} \left(0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right), \text{ et sur } X=0, q_1 < Y < 1; j_0 < X < 1, Y=0 \\ \psi = -\psi_1 \text{ sur } Z = q_1 e^{i\varepsilon} \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right), \text{ et sur } q_1 < X < j_0, Y = 0. \end{cases}$$

La fonction $\frac{\partial_z f}{\partial q_1} = \frac{\partial_z \phi}{\partial q_1} + i \frac{\partial_z \psi}{\partial q_1}$ est régulière dans (D), continue sur les contours, sauf aux points $Z = q_1 i$, $Z = j_0$ que $\frac{\partial_z f}{\partial q_1}$ admet comme pôles simples de résidus $-\frac{2\psi_1 i}{\pi}$ et $\frac{\psi_1}{\pi} \frac{dj_0}{dq_1}$, comme on le voit facilement, en tenant compte de la formule (4). On peut montrer sans difficulté qu'on a $\frac{dj_0}{dq_1} > 0$ en calculant $\frac{\partial^2 j_0}{\partial k \partial b}$ à partir de la formule (6) qui définit j_0 . Dès lors, on constate aisément que $\frac{\partial_z \psi}{\partial q_1}$ est négative sur une demi-circonférence de centre j_0 ou sur un quart de circonférence de centre $q_1 i$, ces arcs appartenant à (D), pourvu que les rayons correspondants soient choisis assez petits.

La fonction $\frac{\partial_z \psi}{\partial q_1}$ est continue sur la frontière de (D) dont on a exclu les deux points $Z = j_0$, $Z = q_1 i$, et η vérifie les conditions

$$\begin{cases} \frac{\partial_z \psi}{\partial q_1} = 0 \text{ sur } Z = e^{i\varepsilon} \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right); \text{ sur } X=0, q_1 < Y < 1 \\ \quad \text{et sur } q_1 \leq X < j_0, j_0 < X < +1, Y=0. \\ \frac{\partial_z \psi}{\partial q_1} = \frac{1}{q_1} \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \leq 0 \text{ sur } Z = q_1 e^{i\varepsilon} \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right). \end{cases}$$

Il en résulte $\frac{\partial_z \psi}{\partial q_1} \leq 0$ dans (D), donc

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial_z \varphi}{\partial q_1} \right) = \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial_z \psi}{\partial q_1} \right) \leq 0 \quad \text{sur } Z = e^{i\varepsilon} \quad \left(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Théorème.

La solution $\Omega(Z)$ du problème aux limites (19) est telle qu'on ait $\frac{\partial_z \Omega}{\partial q_1} \leq 0$ dans (D).

Il est en effet facile d'obtenir les conditions aux limites que vérifie $\frac{\partial \Omega}{\partial q_1} = \frac{\partial \Theta}{\partial q_1} + i \frac{\partial T}{\partial q_1}$ à partir des relations

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_1} = \frac{\partial_z \Omega}{\partial q_1} + \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial q_1} \left(Z \frac{d\Omega}{dZ} \right), \quad Z \frac{d\Omega}{dZ} = \rho \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \rho} + i \frac{\partial T}{\partial \rho} \right), \quad \rho = |Z|.$$

On trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) = \frac{\psi_1}{\pi} e^{T(\epsilon)} \left[p(\epsilon; k, b) \frac{\partial_z T}{\partial q_1} + \frac{\partial p}{\partial q_1} \right] \text{ sur } Z = e^{i\epsilon} \left(0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ \frac{\partial \Theta}{\partial q_1} = - \frac{d\Theta}{dn_i} \text{ sur } Z = q_1 e^{i\epsilon} \left(0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \text{ sur } q_1 \leq X \leq 1, \quad Y = 0 \\ \frac{\partial_z \Theta}{\partial q_1} = 0 \text{ sur } X = 0, \quad q_1 \leq Y \leq 1. \end{array} \right.$$

$\frac{\partial_z \Omega}{\partial q_1}$ est une fonction régulière dans (D), continue sur la frontière. En tenant compte des conditions précédentes et d'un théorème démontré antérieurement (27°), on voit que $\frac{\partial_z \Theta}{\partial q_1} = - \frac{1}{q_1} \frac{dT}{d\epsilon} \geq 0$ sur $Z = q_1 e^{i\epsilon} \left(0 \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{2} \right)$

On voit de plus, en tenant compte du même théorème, que sur cette portion de frontière on a

$$\frac{1}{q_1} \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial q_1} \right) = - \frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial_z T}{\partial q_1} \right) = - \frac{d^2 T}{d\epsilon^2} \leq 0$$

l'égalité étant atteinte au point $Z = q_1$ ($\epsilon = 0$). Il en résulte que le maximum de $\frac{\partial_z T}{\partial q_1}$ ne peut pas se trouver sur l'arc $Z = q_1 e^{i\epsilon}$, $\left(0 < \epsilon \leq \frac{\pi}{2} \right)$. Il ne peut se trouver non plus sur l'arc $Z = e^{i\epsilon}$, $\left(0 < \epsilon \leq \frac{\pi}{2} \right)$. En effet le maximum de $\frac{\partial_z T}{\partial q_1}$ dans (D) étant positif ou nul, on devrait avoir au point $Z = e^{i\epsilon_1} \left(0 < \epsilon \leq \frac{\pi}{2} \right)$, où il est atteint,

$$\frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial_z T}{\partial q_1} \right) = \frac{\psi_1}{\pi} e^{T(\epsilon_1)} \left[p(\epsilon_1; k, b) \frac{\partial_z T}{\partial q_1} + \frac{\partial p}{\partial q_1} \right] > 0,$$

puisque $\frac{\partial p}{\partial q_1} > 0$; d'autre part au même point on devrait avoir $\frac{d}{dn_i} \left(\frac{\partial_z T}{\partial q_1} \right) < 0$. On a donc $\frac{\partial_z T}{\partial q_1} \leq 0$ dans (D), puisque $\frac{\partial_z T}{\partial q_1}$ ne peut atteindre son maximum sur la portion $X = 0, q_1 \leq Y \leq 1$ de la frontière.
(C. Q. F. D.)

Vu et approuvé :

Paris, le 8 Mai 1935.

Le Doyen de la Faculté des Sciences
C. MAURAIN.

Vu

et Permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie

de Paris

S. CHARLÉTY.