

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

CONSTANTIN WORONETZ

Sur les perturbations provoquées dans le mouvement d'un fluide par des variations de la température

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1935

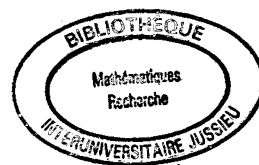
http://www.numdam.org/item?id=THESE_1935__168__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :
2378
SÉRIE A N° 1512



THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

CONSTANTIN WORONETZ

1^{re} THÈSE

SUR LES PERTURBATIONS PROVOQUÉES DANS LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE
PAR DES VARIATIONS DE LA TEMPÉRATURE

2^e THÈSE

MOUVEMENTS DES FLUIDES EN COUCHES MINCES
SUR DES SURFACES COURBES

Soutenue le *8 janvier* 193*4* devant la Commission d'Examen

Jury. { MM. VILLAT
VILLEY
PÈRES

Président.
} Examinateurs.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire M. MOLLIARD.
Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires</i> ..	H. LE CHATELIER. H. LEBESGUE. A. FERNBACH. A. LEDUC. Émile PICARD. Rémy PERRIER. Léon BRILLOUIN.	GOURSAT. WALLERANT. GUILLET. PÉCHARD. FREUNDLER. AUGER. BLAISE.	DANGEARD. JANET. LESPIEAU. MARCHIS. MOUTON.
----------------------------------	--	---	---

PROFESSEURS

G. BERTRAND T Chimie biologique. M. CAULLERY T Zoologie (Évolution des êtres organisés). G. URBAIN T Chimie générale. Émile BOREL T Calcul des probabilités et Physique mathématique. Jean PERRIN T Chimie physique. H. ABRAHAM T Physique. E. CARTAN T Géométrie supérieure. M. MOLLIARD T Physiologie végétale. L. LAPICQUE T Physiologie générale. E. VESSIOT T Mécanique analytique et mécanique céleste. A. COTTON T Recherches physiques. J. DRACH T Analyse supérieure et algèbre supérieure. Charles FABRY T Physique. Charles PÉREZ T Zoologie. Léon BERTRAND T Géologie structurale et géologie appliquée. N ^{me} T Théories chimiques. P. PORTIER T Physiologie comparée. E. RABAUD T Biologie expérimentale. M. GUICHARD Chimie minérale. Paul MONTEL T Théorie des fonctions et théorie des transformations. P. WINTREBERT T Anatomie et histologie comparées. L. BLARINGHEM T Botanique. O. DUBOSCO T Biologie maritime. G. JULIA T Application de l'analyse à la géométrie. C. MAUGUIN T Minéralogie. A. MICHEL-LÉVY Pétrographie. H. BÉNARD T Mécanique expérimentale des fluides. A. DENJOY T Calcul différentiel et calcul intégral. L. LUTAUD T Géographie physique et géologie dynamique. Eugène BLOCH T Physique théorique et physique céleste. G. BRUHAT Physique. E. DARMOIS Physique.	A. DEBIERNE Radioactivité. A. DUFOUR T Physique (P. C. B.). L. DUNOYER Optique appliquée. A. GUILLIERMOND T Botanique (P. C. B.). M. JAVILLIER Chimie biologique. L. JOLEAUD Paléontologie. ROBERT-LÉVY Zoologie. F. PICARD Zoologie (Évolution des êtres organisés). Henri VILLAT T Mécanique des fluides et applications. Ch. JACOB T Géologie. P. PASCAL T Chimie minérale. M. FRÉCHET T Calcul des Probabilités et Physique mathématique. E. ESCLANGON T Astronomie. M ^{me} RAMART-LUCAS Chimie organique. H. BÉGHIN T Mécanique physique et expérimentale. FOCH Mécanique expérim. des fluides PAUTHENIER Physique (P. C. B.). DE BROGLIE T Théories physiques. CHRÉTIEN Optique appliquée. P. JOB Chimie générale. LABROUSTE Physique du Globe. PRENANT Zoologie. VILLEY Mécanique physique et expérimentale. BOHN Zoologie (P. C. B.). COMBES Botanique. GARNIER Calcul différentiel. PÉRÈS Mécanique des fluides. HACKSPILL Chimie (P. C. B.). LAUGIER Physiologie générale. TOUSSAINT Technique Aéronautique. M. CURIE Physique (P. C. B.). G. RIBAUD T Hautes températures. CHAZY T Mécanique rationnelle. GAULT Chimie (P. C. B.). CROZE Physique. DUPONT Chimie (P. C. B.). LANQUINE Géologie.
---	---

Secrétaire A. PACAUD.
Secrétaire honoraire ... D. TOMBECK.

A mon cher et regretté
Père et Maître
Pierre WORONETZ

PERTURBATIONS
PROVOQUÉES dans le MOUVEMENT d'un FLUIDE
par des VARIATIONS de la TEMPÉRATURE

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
PRÉFACE.	1

CHAPITRE PREMIER

Sur la généralisation d'une méthode de J. Boussinesq permettant de simplifier les équations de mouvement

1. — Méthode de J. BOUSSINESQ relative au mouvement des fluides pesants.	5
2. — Applications de la méthode de J. BOUSSINESQ.	6
3. — Généralisation de la méthode de J. BOUSSINESQ dans le cas où interviennent des forces autres que celles de la pesanteur	8
4. — Petites variations de vitesse, de température et de pression, qui apparaissent au moment initial.	9
5. — Analyse des équations (9).	11
6. — Solutions générales des équations (9) déterminant des approximations du premier ordre	13

CHAPITRE II

Sur la stabilité du mouvement giratoire des fluides entre deux cylindres coaxiaux, maintenus à des températures constantes différentes

1. — Application de la méthode généralisée de J. BOUSSINESQ	15
2. — Équations définissant le mouvement perturbé.	16
3. — Forme ondulatoire du mouvement	17
4. — Solutions approximatives des équations (4'). Cas des fluides parfaits. Équation de stabilité	18
5. — Grandes valeurs de σ	20
6. — Autres solutions approximatives des équations (4')	23
7. — Cas des fluides visqueux. Solutions approximatives des équations (4)	26

CHAPITRE III

Applications de fonctions de Bessel

1. — Fonctions de BESSEL	29
2. — Solutions exactes des équations (1)	31
3. — Équation de stabilité.	34
4. — Valeurs approximatives de fonctions de BESSEL	35
5. — Analyse de l'équation de stabilité.	38

CHAPITRE IV

Mouvement giratoire du fluide entre deux sphères concentriques maintenues à des températures constantes différentes

1. — Application de la méthode générale	40
2. — Détermination de la fonction $\vec{V}_1$	41
3. — Lignes de courant du mouvement perturbé	43
4. — Détermination de la fonction $\vec{V}_2$	45
5. — Propriétés des fonctions $\vec{V}_n$	48
6. Quelques généralisations du problème considéré.	49

Bibliographie	50
-------------------------	----

PRÉFACE

Ce mémoire a pour but l'étude des perturbations déterminées, dans une masse fluide en mouvement, par des variations de température. La théorie générale, développée dans le premier Chapitre, est appliquée ensuite à quelques problèmes spéciaux concernant la naissance des tourbillons dans les mouvements giratoires d'un fluide parfait ou visqueux.

Les recherches que nous exposons ici sont loin de traiter le problème de l'influence de la température sur les mouvements des fluides dans toute sa complexité. Nous serons heureux si ces essais peuvent un peu éclaircir des phénomènes que l'on observe en variant brusquement le champ de la température, dans lequel se trouve une masse fluide en mouvement. Ces variations provoquent des perturbations du mouvement principal qui changent parfois complètement le caractère de ce dernier.

Nous nous arrêtons spécialement sur la détermination des accélérations qu'obtiennent les particules fluides au moment initial, lorsque les forces perturbatrices, dues à l'échauffement, commencent à agir sur la masse fluide. En étudiant ces accélérations, on peut souvent se rendre compte du caractère général du mouvement perturbé et de l'effet des phénomènes qui se produisent près des parois limitant le fluide.

L'analyse directe de problèmes de ce genre est très difficile. Le fait que la densité du fluide ne peut plus être considérée comme constante est la cause principale de ces difficultés. Il était donc du plus grand intérêt de pouvoir remplacer l'effet de variation de la température par une petite force perturbatrice et de ramener ainsi le problème général à un problème où la densité du fluide reste constante.

C'est là une idée ingénieuse de BOUSSINESQ (1) qui, dans le cas des fluides pesants, permet de simplifier essentiellement les équations du mouvement. Cette simplification est basée sur la démonstration que l'effet de la variation de température peut être remplacé par une petite force, antagoniste à celle de la pesanteur, et proportionnelle à l'échauffement.

Lord RAYLEIGH (2) a utilisé cette méthode analytique pour donner une base théorique aux recherches expérimentales de H. BÉNARD (3) sur les tourbillons cellulaires. Ces tourbillons apparaissent, lorsqu'un fluide en repos, compris entre deux plans horizontaux très peu espacés, est chauffé d'en bas.

En se basant sur une remarque de D. RIABOUCHINSKY (4), nous nous proposons de généraliser la théorie de BOUSSINESQ en appliquant les mêmes raisonnements dans le cas où interviennent d'autres forces, que celle de la pesanteur. Nous nous arrêterons spécialement sur l'influence des forces d'inertie.

En appliquant une hypothèse analogue à celle de BOUSSINESQ, nous ramenons le problème général à un problème plus simple, déterminé par des équations (5) du chapitre I, 3. La densité du fluide est considérée, dans notre problème, comme constante et égale à sa valeur moyenne. L'effet de variation de la densité est remplacé par une petite force perturbatrice ($-T_0 \text{ grad } U$) proportionnelle à l'échauffement T_0 et à la force d'inertie gradient U .

Nous constatons que la vitesse perturbatrice $\vec{V}_1$ peut être nulle si le gradient de la température a la même direction que la force d'inertie. Dans ce cas, l'échauffement ne provoque pas immédiatement une perturbation du mouvement initial, mais produit seulement un changement modéré de la pression. C'est le cas, par exemple, du problème de Lord RAYLEIGH, indiqué plus haut.

Dans les chapitres II et III, nous traitons le problème du mouvement giratoire d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux, maintenus à des températures constantes différentes. Dans ce cas, le gradient de la température et la force centrifuge ont la même direction. L'échauffement ne provoque donc pas nécessairement un changement du mouvement principal; l'étude de la stabilité de ce dernier peut être entreprise par les méthodes habituelles, qui consistent en introduction de petites vitesses perturbatrices et en analyse des conditions qui tendent à amortir ces vitesses.

Nous signalons une certaine analogie entre notre problème et celui de TAYLOR (7), où les vitesses angulaires de deux cylindres sont différentes, mais la température n'intervient pas. Nous obtenons des solutions approchées de notre problème et l'équation caractérisant la stabilité du mouvement (équation (5), chap. II, 4). Nous en tirons quelques conclusions relatives aux longueurs, les plus probables, des ondes et à la possibilité du changement de régime. Ce dernier se conserve toujours si le cylindre extérieur est moins chauffé que le cylindre intérieur. Dans le cas contraire, l'instabilité du mouvement est possible, mais sous la condition $\alpha\beta > 4$ (α — coefficient de la dilatation cubique thermique, βr gradient de la température). Nous trouvons la longueur des ondes, qui apparaissent au moment du changement de régime, comme fonction de la vitesse angulaire et reproduisons cette fonction graphiquement pour quelques valeurs du produit $\alpha\beta$ (courbes 2 et 3 pour des fluides parfaits et courbe 5 pour des fluides visqueux). Nous calculons aussi la longueur de la première onde qui apparaît lorsqu'on augmente progressivement la vitesse angulaire. Cette longueur est égale à $2\sqrt{2}d$ où d est la distance entre deux cylindres.

On peut soumettre les résultats obtenus à une vérification expérimentale, en prenant par exemple $\alpha = 0,001$ (essence de térébenthine), les rayons des cylindres $R_1 = 50$ cm et $R_2 = 51$ cm, la différence de la température 85°C . Remarquons, cependant, qu'il est difficile de satisfaire à l'inégalité $\alpha\beta > 4$ si le nombre α est petit. Pour l'eau, par exemple, ($\alpha = 0,00018$), si $R_2 - R_1 = 1$ cm et la différence de la température 80°C , il faudrait prendre les rayons R_2 et R_1 des cylindres supérieurs à 3 m.

Le chapitre III est consacré à la détermination des solutions exactes du problème. Elles se présentent sous la forme de séries de fonctions de Bessel

de l'ordre 0 et 1. La condition de stabilité se traduit par l'annulation d'un déterminant infini (chap. III, 3). Nous n'étudions pas à fond cette équation, mais en tirons quelques conclusions qui confirment les résultats obtenus auparavant par un calcul approximatif, beaucoup moins compliqué.

Dans le cas général, le gradient de température et la force d'inertie n'ont pas la même direction et l'échauffement fait naître un tourbillon, défini par l'équation vectorielle :

$$(I) \quad \vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V}_1 = \alpha (\text{grad } U \times \text{grad } T_0).$$

Nous développons dans le chapitre I, 4, une méthode générale, permettant de déterminer de proche en proche les accélérations successives $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \dots$ des particules fluides.

Nous appliquons cette méthode dans le dernier chapitre, contenant l'étude du mouvement giratoire du fluide entre deux sphères concentriques, maintenues à des températures constantes différentes. Nous trouvons des accélérations initiales des deux premiers ordres et faisons quelques remarques sur les propriétés des accélérations de l'ordre n , ainsi que sur le caractère général du mouvement perturbé.

Ce dernier peut être interprété de la manière suivante. Supposons le mouvement symétrique dans chaque plan passant par l'axe de rotation et développons la vitesse $\vec{V}$ en série suivant les puissances du temps t :

$$(II) \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 \frac{t - t_0}{1} + \vec{V}_2 \frac{(t - t_0)^2}{1.2} + \dots$$

$\vec{V}_0$ désigne ici la vitesse du mouvement principal non perturbé par l'échauffement. Les perturbations du mouvement sont déterminées par les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \dots$. La fonction $\vec{V}_1$ est donnée par l'équation générale (1) qui, dans notre cas, détermine un vecteur dans le plan méridien. Les lignes de courant correspondantes sont reproduites sur les *figures* 6 et 7. Nous calculons ensuite le vecteur $\vec{V}_2$ et trouvons qu'il a la même direction que la vitesse de rotation principale du fluide. Pour des particules fluides se trouvant de part et d'autre d'une certaine surface de révolution, les vecteurs $\vec{V}_2$ ont des sens opposés; la section méridionale de cette surface est reproduite sur des *figures* 8 et 9. En continuant le calcul, on trouve que les vecteurs $\vec{V}_n$ pour n pair sont tous orthogonaux au plan du méridien et pour n impair — se trouvent dans ce plan.

Il est du plus grand intérêt de signaler ici la concordance entre les résultats obtenus par nous et ceux, que l'on peut prévoir selon une méthode générale de D. RIABOUCHINSKY (17). D'après cette méthode, pour se rendre compte du caractère général du mouvement, il suffit de remplacer en pensée les circulations, dont on prévoit l'apparition (dans notre cas se sont les circulations dues au tourbillon $\text{rot } \vec{V}_1$), par de petits disques métalliques, animés de rotation et chercher la position que ces disques tendraient à prendre sous l'effet de la composition des rotations. Il est évident, que dans notre problème,

l'effet de la force de CARIOLIS doit se manifester nécessairement dans la création des mouvements analogues à ceux définis plus haut.

Sachant que les vents dans l'atmosphère terrestre sont souvent provoqués par l'inégalité de la température d'air aux diverses hauteurs, nous pensons que les résultats obtenus dans ce travail ne sont pas sans intérêt pour la météorologie. Nous signalons, par exemple, une certaine analogie entre les courbes (6) et (7) et celles trouvées par BJERKNES (18) par des procédés tout à fait différents. D'autre part, ces résultats peuvent apporter quelques contributions à l'étude des divers phénomènes que l'on observe sur le soleil. Notons, par exemple, que dans notre problème toutes les vitesses perturbatrices sont nulles sur un certain parallèle, et que l'apparition des taches solaires se fait, à quelques degrés près, sur le même parallèle.

Ce travail a pu être poursuivi grâce au concours du Service des Recherches du Ministère de l'Air, et je tiens à exprimer ma grande reconnaissance à M. l'Inspecteur Général SEGUIN, et à MM. les Membres du Conseil Supérieur des Recherches Scientifiques de l'Aéronautique.

J'adresse l'expression de ma gratitude à mes maîtres : MM. VILLAT et RIABOUCHINSKY pour les encouragements et conseils que j'ai reçus d'eux.

Sur la GÉNÉRALISATION d'une MÉTHODE de J. BOUSSINESQ
PERMETTANT de SIMPLIFIER les ÉQUATIONS
de MOUVEMENT

1. — Méthode de J. Boussinesq relative au mouvement des fluides pesants.

En étudiant l'influence de la température sur les mouvements des fluides, on arrive à des difficultés presque insurmontables. Ces difficultés ne proviennent pas seulement de ce fait qu'une équation complémentaire de forme :

$$(1) \quad \frac{DT}{Dt} = k\Delta T$$

doit être jointe aux équations du mouvement pour déterminer la température T , mais surtout du fait que la densité ρ du fluide, même dans le cas le plus simple, ne peut plus être considérée comme constante; elle varie avec la température. En désignant par $\vec{V}$ (u, v, w) la vitesse, par $\vec{F}$ la force extérieure, agissant sur l'unité de volume, et par p la pression, on obtient les équations de mouvement et de continuité sous la forme :

$$(2) \quad \dot{\vec{V}} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0,$$

où la densité ρ doit être considérée comme fonction de la température T . Dans le cas où la température T et, par conséquent, la densité ρ ne dépendent pas explicitement du temps, les équations (1) et (3) peuvent être remplacées par les équations suivantes :

$$(1') \quad (\text{grad } T \cdot \vec{V}) = k\Delta T,$$

$$(3') \quad \vec{V} \text{ grad } \rho + \rho \text{ div } \vec{V} = 0,$$

où k désigne le coefficient de la conductibilité.

L'équation caractéristique étant donnée, on a un système d'équations en nombre suffisant pour déterminer les fonctions inconnues. Malheureusement, ce

système a une forme très compliquée, qui ne permet pas d'analyser directement les problèmes.

Dans ses travaux sur le pouvoir refroidissant des fluides, J. BOUSSINESQ (1), se bornant au cas des fluides pesants, a réussi à simplifier sensiblement les équations (1), (2) et (3), en démontrant que les petites dilatations ou contractions thermiques du fluide sont négligeables en elles-mêmes, mais produisent une variation du poids ρg de l'unité de volume, dont il faut tenir compte. En effet, les déplacements dûs à ces dilatations sont très faibles, mais les petites différences de poids, par unité de volume, dans un même plan horizontal, entraînent, au contraire, des déplacements verticaux très sensibles. Il s'ensuit qu'on peut considérer la densité ρ constante et égale à la densité moyenne ρ_0 dans tous les termes des équations (2) et (3), sauf dans ceux qui dépendent de la pesanteur g .

J. BOUSSINESQ démontre ensuite que la densité ρ , étant fonction de la pression et de la température, est liée très étroitement à l'échauffement T , comme si la pression restait constante. Par exemple, pour l'air atmosphérique, une élévation de température de 10° réduit la densité de $2/57$, ce qui correspond à une élévation de 281 m, à la température constante; la pression p variant dans l'atmosphère de sa $1/8\,000$ partie pour 1 m d'élévation.

Par suite, en désignant par α le coefficient ordinaire de la dilatation cubique thermique du fluide, on peut supposer, avec une approximation suffisante, que le poids ρg de l'unité de volume sera divisé par $1 + \alpha T$, ou sera diminué sensiblement de $\rho g \alpha T$. On arrive ainsi à une simplification considérable des équations (2) et (3). En effet, la densité ρ du fluide, dans le cas d'échauffement T , peut être considérée comme constante, pourvu qu'une force antagoniste $\rho g \alpha T$, proportionnelle à l'échauffement T , soit adjointe au poids normal ρg de l'unité de volume.

En désignant par P la partie non hydrostatique de la pression, on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } P - \alpha T \vec{F}, \\ \text{div } \vec{V} &= 0, \\ \frac{DT}{Dt} &= k \Delta T,\end{aligned}$$

où la force $\vec{F}$ a la valeur g , est verticale et dirigée vers le bas, et où la densité moyenne est désignée par ρ .

2. — Applications de la méthode de J. Boussinesq.

Les équations simplifiées par la méthode de J. BOUSSINESQ ont été appliquées par Lord RAYLEIGH (2) au cas particulier d'une masse fluide en repos, d'épaisseur d très petite, comprise entre deux plans horizontaux maintenus à des températures constantes différentes. Lord RAYLEIGH a étudié la stabilité d'une telle masse fluide dans le but de donner une base théorique aux travaux expéri-

mentaux de H. BÉNARD (3) sur les tourbillons « cellulaires ». Ces tourbillons apparaissent lorsque le fluide est chauffé d'en bas et se distribuent en cellules qui ont le plus souvent la forme d'hexagones.

Dans cette étude, Lord RAYLEIGH suppose que le mouvement perturbé est ondulatoire et que les petites vitesses u , v et w et la température T perturbatrices sont proportionnelles à $e^{ilx} e^{imy} e^{nt}$. En négligeant les termes du deuxième ordre en u , v , w , T , il obtient les équations suivantes :

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{il}{\rho} P &= -nu, \\ \frac{im}{\rho} P &= -nv, \\ -\alpha g T + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} &= -nw, \\ ilu + imv + \frac{dw}{dz} &= 0, \\ nT + \beta w &= k \left[(-l^2 - m^2) T + \frac{d^2 T}{dz^2} \right]. \end{aligned}$$

Elles admettent les solutions où w et T sont proportionnels à $\sin sz$ et u , v et P à $\cos sz$. Le nombre constant s étant déterminé d'après les conditions aux limites. Les équations (4) étant homogènes, on obtient une relation entre les coefficients qui, dans le cas des fluides parfaits, a la forme :

$$n^2 (l^2 + m^2 + s^2) + nk (l^2 + m^2 + s^2)^2 + \alpha \beta g (l^2 + m^2) = 0,$$

où β désigne une constante, gradient de la température.

On peut considérer cette équation comme caractérisant la stabilité : le mouvement est stable où non selon que n est plus petit ou plus grand que 0. En cherchant dans le cas d'instabilité les valeurs de $l^2 + m^2$ correspondant aux valeurs maxima de n , Lord RAYLEIGH obtient pour les longueurs des ondes les valeurs numériques qui coïncident avec celles mesurées par H. BÉNARD.

Il est facile de généraliser le problème de Lord RAYLEIGH dans le cas où le fluide n'est plus en repos, mais en mouvement rectiligne horizontal à une vitesse constante U . Les équations du mouvement prennent dans ce cas la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} U, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} U, \\ -\alpha g T + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} U, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} U + \beta w &= k \Delta T, \end{aligned}$$

et acceptent les solutions :

$$\begin{aligned} u &= u_0 e^{nt} \sin l(x - Ut) \cos my \cos sz, \\ v &= v_0 e^{nt} \cos l(x - Ut) \sin my \cos sz, \\ w &= w_0 e^{nt} \cos l(x - Ut) \cos my \sin sz, \\ T &= T_0 e^{nt} \cos l(x - Ut) \cos my \sin sz, \\ P &= P_0 e^{nt} \cos l(x - Ut) \cos my \cos sz. \end{aligned}$$

L'équation de la stabilité a la même forme que dans le cas précédent et les démonstrations de Lord RAYLEIGH peuvent être répétées.

3. — Généralisation de la méthode de J. Boussinesq dans le cas où interviennent des forces autres que celles de la pesanteur.

J. BOUSSINESQ a établie sa méthode ayant en vue l'effet de la pesanteur. Mais les mêmes raisonnements peuvent être appliqués aussi dans le cas où interviennent d'autres forces. Par exemple, comme l'a indiqué D. RIABOUCHINSKY (4), les équations de mouvement peuvent être simplifiées d'une façon analogue dans le cas où interviennent les forces d'inertie. En effet, même si la différence de température est grande, les déplacements des particules fluides, dûs à des variations de densité ρ , sont très faibles, et c'est seulement dans les membres dépendant de la force d'inertie, qu'il faut tenir compte de ces variations.

Supposons que le gradient de la température soit, en chaque point, orthogonal à la vitesse, c'est le cas, par exemple, du mouvement giratoire des fluides entre deux surfaces de révolution maintenues à des températures constantes différentes, cas dont nous nous occuperons dans la plupart des questions traitées plus loin. On trouve alors la température T comme solution de l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T,$$

ou, si T ne dépend pas explicitement du temps, de l'équation :

$$\Delta T = 0.$$

L'équation de continuité aura la forme :

$$\text{div } \vec{V} = 0,$$

car, à l'aide de l'équation caractéristique :

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha T),$$

le premier membre de l'équation (3') s'annule :

$$\vec{V} \text{ grad } \rho = - \alpha \vec{V} \text{ grad } T = 0.$$

Quant à l'équation (2), elle prend la forme :

$$\dot{\vec{V}} - \alpha T \vec{\dot{V}} = \vec{F} - \alpha T \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Si l'on fait une hypothèse analogue à celle de J. BOUSSINESQ, c'est-à-dire si l'on suppose que le membre $\alpha T \vec{\dot{V}}$ est relativement très petit par rapport au membre $\alpha T \vec{F}$, on constate que le problème est équivalent à celui où la densité du fluide reste constante et égale à la densité moyenne ρ_0 , mais une force antagoniste $\alpha T \vec{F}$, proportionnelle à l'échauffement T , est adjointe à la force d'inertie $\vec{\dot{F}}$.

En se reportant au cas général, où la vitesse n'est pas orthogonale au gradient de la température, on obtient les équations du mouvement, simplifiées par la méthode généralisée de J. BOUSSINESQ, sous la forme :

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{V}} &= \vec{F} - \alpha T \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \\ \text{div } \vec{V} &= 0, \\ \frac{DT}{Dt} &= k \Delta T. \end{aligned}$$

L'indice 0 près de ρ est supprimé ici comme inutile et les signes $\frac{D}{Dt}$ et Δ ont le sens habituel :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4. — Petites variations de vitesse, de température et de pression, qui apparaissent au moment initial.

Etudions maintenant les petits changements de vitesse et de pression, qui apparaissent lorsque le mouvement initial du fluide est perturbé par l'influence de l'échauffement T_0 . Supposons que nous avons trouvé la vitesse $\vec{V}_0 (u_0, v_0, w_0)$ et la pression p' , solutions des équations classiques d'hydrodynamique :

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{V}}_0 &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p' \\ \text{div } \vec{V}_0 &= 0, \end{aligned}$$

dans le cas où la température n'intervient pas. Pour introduire l'effet de l'échauffement T_0 , il faut appliquer les équations complétées (5). Il est clair qu'à l'aide des solutions des équations (6), on peut déterminer T_0 de façon que la troisième équation du système (5) soit satisfaite. La deuxième équation de ce système sera satisfaite automatiquement. Mais la première, qui est équivalente à trois équations scalaires, ne sera pas satisfaite, en général, par les valeurs $\vec{V}_0$ et p' .

Il est nécessaire de supposer qu'une petite accélération $\vec{V}$ et une petite pression complémentaire p apparaîtront dans ce cas, provoquées par l'échauffement T_0 . La vitesse étant changée, il est évident que l'équation de la température ne sera plus satisfaite et une petite variation T de la température apparaîtra.

Par analogie avec les recherches faites par D. RIABOUCHINSKY (5) et B. DEMTCHENKO (6) sur la formation et la stabilité des cavitations près d'un corps mis brusquement en mouvement, je suppose que la vitesse $\vec{V}$, la température T , et la pression p du mouvement perturbé peuvent être développées en séries sous la forme :

$$(7) \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + (t - t_0) \vec{V}_1 + \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} \vec{V}_2 + \dots = \vec{V}_0 + \sum \frac{(t - t_0)^i}{i!} \vec{V}_i,$$

$$T = T_0 + (t - t_0) T_1 + \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} T_2 + \dots = T_0 + \sum \frac{(t - t_0)^i}{i!} T_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$p' + p = p' + p_0 + (t - t_0) p_1 + \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} p_2 + \dots = p' + p_0 + \sum \frac{(t - t_0)^i}{i!} p_i,$$

ou $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, T_0, T_1, T_2, \dots, p_0, p_1, p_2, \dots$ ne dépendent pas du temps t . La vitesse $\vec{V}_0$, la température T_0 et la pression p' du mouvement initial étant connues, on peut établir une méthode générale, analogue à celle de D. RIABOUCHINSKY, indiquée plus haut, permettant de déterminer de proche en proche les valeurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, T_1, T_2, \dots, p_0, p_1, \dots$. Pour un intervalle de temps $t - t_0$ suffisamment petit on peut se contenter de quelques premiers membres de la série ainsi obtenue, dont la convergence doit être démontrée dans chaque cas particulier. Les solutions approchées, ainsi obtenues, montrent le changement du mouvement au moment initial, lorsque l'influence de température devient sensible et commence à perturber le mouvement.

En effet, les équations du mouvement peuvent être mises sous la forme :

$$(8) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \text{grad } \vec{V}^2 + (\vec{V} \times \text{rot } \vec{V}) + \vec{F} - \alpha T \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } (p' + p),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\text{grad } T \cdot \vec{V}) + k \Delta T,$$

$$\text{div } \vec{V} = 0.$$

Ces équations devant avoir lieu à chaque instant et en chaque point occupé par le fluide, on peut calculer $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ et p pour l'instant initial $t = t_0$. Cela nous donne $\vec{V}_1, T_1$ et p_0 , les valeurs $\vec{V}_0, T_0$ et p' étant connues. Après la différentiation par t , on trouve de la même manière :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} \right)_{t=t_0} &= \vec{V}_2, \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_{t=t_0} = T_2, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{t=t_0} = p_1, \\ \left(\frac{\partial^3 \vec{V}}{\partial t^3} \right)_{t=t_0} &= \vec{V}_3, \quad \left(\frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \right)_{t=t_0} = T_3, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)_{t=t_0} = p_2, \text{ etc.} \end{aligned}$$

En tenant compte des équations satisfaites par les valeurs $\vec{V}_0, T_0, p'$ nous obtenons, par exemple, comme première approximation :

$$(9) \quad \vec{V}_1 = -\alpha T_0 \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_0,$$

$$\text{div } \vec{V}_1 = 0, T_1 = 0,$$

et comme seconde :

$$(10) \quad \vec{V}_2 = -\text{grad } (\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_1) + (\vec{V}_1 \times \text{rot } \vec{V}_0) + (\vec{V}_0 \times \text{rot } \vec{V}_1) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_1,$$

$$\text{div } \vec{V}_2 = 0, T_2 = -(\text{grad } T_0 \cdot \vec{V}_1).$$

Il est évident qu'on obtient les mêmes résultats en portant les expressions (7) de $\vec{V}, T$ et p dans les équations (8) et en égalant à 0 les coefficients de $t - t_0, \frac{(t - t_0)^2}{2!}, \frac{(t - t_0)^3}{3!} \dots$. On obtient ainsi des équations permettant de déterminer des approximations de l'ordre $n + 1$: $\vec{V}_{n+1}, T_{n+1}, p_n$ en fonctions des valeurs trouvées par les approximations précédentes :

$$(11) \quad \vec{V}_{n+1} = -\text{grad } (\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_n) + (\vec{V}_0 \times \text{rot } \vec{V}_n) + (\vec{V}_n \times \text{rot } \vec{V}_0) - \alpha T_n \vec{F}$$

$$- \frac{1}{\rho} \text{grad } p_n - n! \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m! (n-m)!} \left[\frac{1}{2} \text{grad } (\vec{V}_m \cdot \vec{V}_{n-m}) - (\vec{V}_m \times \text{rot } \vec{V}_{n-m}) \right],$$

$$\text{div } \vec{V}_{n+1} = 0,$$

$$T_{n+1} = -(\text{grad } T_0 \cdot \vec{V}_n) - (\text{grad } T_n \cdot \vec{V}_0)$$

$$- n! \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m! (n-m)!} (\text{grad } T_m \cdot \vec{V}_{n-m}) + k \Delta T_n.$$

On voit que toutes les fonctions $\vec{V}_n$ et T_n d'indice n supérieur à 0 sont au moins du premier ordre par rapport au nombre α . Si nous nous contentons, comme nous l'avons fait en établissant la méthode de J. BOUSSINESQ, d'approximation de cet ordre, les expressions (11) seront simplifiées et nous aurons :

$$(11') \quad \vec{V}_{n+1} = -\text{grad } (\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_n) + (\vec{V}_0 \times \text{rot } \vec{V}_n) + (\vec{V}_n \times \text{rot } \vec{V}_0) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_n$$

$$\text{div } \vec{V}_{n+1} = 0,$$

$$T_{n+1} = -(\text{grad } T_0 \cdot \vec{V}_n) - (\text{grad } T_n \cdot \vec{V}_0) + k \Delta T_n,$$

pour n supérieur à 0.

5. — Analyse des équations (9).

Pour déterminer la pression p_0 , il suffit de calculer la divergence du vecteur $\vec{V}_1$, défini par l'équation (9). A l'aide de la formule :

$$\text{div } (\alpha T_0 \vec{F}) = \alpha T_0 \text{div } \vec{F} + \alpha (\vec{F} \cdot \text{grad } T_0),$$

on obtient :

$$(12) \quad \Delta p_0 = -\alpha \rho (T_0 \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \operatorname{grad} T_0).$$

Dans le cas où la force $\vec{F}$ dérive d'une fonction de force U, on a :

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U,$$

et l'équation (12) prend la forme :

$$(12') \quad \Delta p_0 = -\alpha \rho (T_0 \Delta U + \operatorname{grad} U \operatorname{grad} T_0).$$

Si l'on prend le rotationnel du vecteur $\vec{V}_1$, on obtient à l'aide des formules :

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} p_0 = 0,$$

$$\operatorname{rot} (\alpha T_0 \vec{F}) = \alpha T_0 \operatorname{rot} \vec{F} + \alpha (\operatorname{grad} T_0 \times \vec{F}),$$

l'équation :

$$(13) \quad \operatorname{rot} \vec{V}_1 = -\alpha T_0 \operatorname{rot} \vec{F} - \alpha (\operatorname{grad} T_0 \times \vec{F}).$$

Dans le cas où existe la fonction de force U, l'équation (13) se simplifie et donne :

$$(13') \quad \operatorname{rot} \vec{V}_1 = \alpha (\operatorname{grad} U \times \operatorname{grad} T_0),$$

équation, qui avec :

$$(14) \quad \operatorname{div} \vec{V}_1 = 0,$$

sert à déterminer la fonction $\vec{V}_1$.

Arrêtons-nous sur ce dernier cas, où la force $\vec{F}$ dérive d'une fonction de force U. L'équation (13') montre immédiatement que l'accélération initiale $\vec{V}_1$ peut être égale à 0 non seulement dans les cas, peu intéressants, où soit la force $\vec{F}$, soit le gradient de la température sont nuls, mais aussi dans le cas où le gradient de température a la même direction que la force $\vec{F}$. Alors l'échauffement ne provoque pas immédiatement une perturbation du mouvement principal, mais produit seulement un changement modéré de la pression. Le mouvement restant le même, on peut étudier sa stabilité par les méthodes habituelles, en introduisant, par exemple, de petites variations de vitesse et en analysant, si les perturbations ainsi obtenues tendent à s'amortir.

C'est le cas, par exemple, du problème de Lord RAYLEIGH, indiqué plus haut, où l'échauffement se fait d'en bas. Le gradient de température est parallèle à la force de pesanteur.

Dans deux chapitres suivants, j'analyse la stabilité du mouvement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux animés de rotation et maintenus à des températures constantes différentes. Dans ce cas, le gradient de la température et la force centrifuge ont une même direction et l'on peut analyser la stabilité d'un tel mouvement par les méthodes habituelles.

Dans le cas général, le mouvement initial ne se conserve pas; un tourbillon s'amorce, orthogonal, au plan défini par deux vecteurs : $\text{grad } U$ et $\text{grad } T_0$. On voit ainsi que l'échauffement fait naître un tourbillon qui provoque la perturbation du mouvement initial. Pour poursuivre les études de ces perturbations, on peut se servir des expressions (10) déterminant les fonctions $\vec{V}_2$, T_2 et p_1 .

Dans le chapitre IV, je fais quelques applications de la théorie que je viens d'exposer en m'arrêtant spécialement sur le mouvement giratoire d'un fluide entre deux sphères concentriques en rotation, maintenues à des températures constantes différentes.

6. Solutions générales des équations (9) déterminant des approximations du premier ordre.

Les équations (12') et (13') déterminent la pression p_0 et l'accélération initiale $\vec{V}_1$ du mouvement perturbé en première approximation. La forme de ces équations permet de trouver ces quantités dans le cas général. En effet, en comparant l'équation (12') avec celle de Poisson déterminant le potentiel $\bar{U}$:

$$\Delta \bar{U} = 4\pi\rho,$$

dont la solution est connue :

$$\bar{U} = \int_v \frac{\rho' d\tau'}{r},$$

on obtient pour la pression p_0 :

$$p_0 = -\frac{\alpha\rho}{4\pi} \int_v \frac{1}{r} (T'_0 \Delta U' + \text{grad } U' \text{ grad } T'_0) d\tau',$$

où :

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

désigne la distance entre le point $M(x, y, z)$, où l'on cherche la pression p_0 , et le point $M'(x', y', z')$ où l'on prend l'élément de volume $d\tau'$. L'intégrale étant prise dans tout le volume occupé par le fluide.

Quant à la fonction $\vec{V}_1$, le problème est classique et consiste en la détermination de la vitesse quand la distribution et l'intensité des tourbillons sont connues.

Pour satisfaire à l'équation :

$$\text{div } \vec{V}_1 = 0,$$

il suffit de poser :

$$\vec{V}_1 = \text{rot } \vec{A},$$

car la divergence d'un rotateur est nulle. Nous avons alors :

$$\text{rot } \vec{V}_1 = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \alpha (\text{grad } U \times \text{grad } T_0).$$

En supposant encore que $\text{div } \vec{A} = 0$, on obtient :

$$\Delta \vec{A} = -\alpha (\text{grad } U \times \text{grad } T_0),$$

d'où, en considérant les trois projections A_x, A_y, A_z du vecteur $\vec{A}$:

$$\Delta A_x = -\alpha \left(\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial T_0}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right),$$

$$\Delta A_y = -\alpha \left(\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right),$$

$$\Delta A_z = -\alpha \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right).$$

Le problème est ainsi réduit à l'équation de Poisson et l'on a :

$$A_x = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_v \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U'}{\partial y} \frac{\partial T'_0}{\partial z} - \frac{\partial U'}{\partial z} \frac{\partial T'_0}{\partial y} \right) d\tau',$$

$$A_y = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_v \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U'}{\partial z} \frac{\partial T'_0}{\partial x} - \frac{\partial U'}{\partial x} \frac{\partial T'_0}{\partial z} \right) d\tau',$$

$$A_z = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_v \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U'}{\partial x} \frac{\partial T'_0}{\partial y} - \frac{\partial U'}{\partial y} \frac{\partial T'_0}{\partial x} \right) d\tau',$$

d'où l'on tire facilement les projections u_1, v_1 et w_1 de vitesse $\vec{V}_1$ à l'aide des formules :

$$u_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$v_1 = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$w_1 = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

SUR la STABILITE du MOUVEMENT GIRATOIRE des FLUIDES ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX,

maintenus à des températures constantes différentes

1. — Application de la méthode généralisée de J. Boussinesq.

Considérons une masse fluide animée de rotation entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) maintenus à des températures constantes différentes T' et T'' . Supposons la vitesse angulaire Ω constante; la vitesse $\vec{V}_0$ de chaque particule fluide est orthogonale à l'axe z des cylindres et au rayon r qui correspond à cette particule. La grandeur de cette vitesse est égale à Ωr :

$$V_0 = \Omega r.$$

Le gradient de la température T_0 étant orthogonal à la vitesse $\vec{V}_0$, on déduit de l'équation :

$$\Delta T_0 = 0$$

la valeur de T_0 :

$$\frac{T_0 - T'}{T'' - T'} = \frac{\log r - \log R_1}{\log R_2 - \log R_1}$$

Le gradient de la température est égal à : $\frac{dT_0}{dr} = \frac{\beta}{r}$ où β est donné par l'expression :

$$\beta = \frac{T'' - T'}{\log R_2 - \log R_1}$$

En négligeant la force de pesanteur comme très petite par rapport à la force centrifuge $\Omega^2 r$, on peut étudier le mouvement perturbé par l'influence de la température en appliquant la méthode exposée dans le chapitre I,3. Cette méthode permet de considérer la densité ρ du fluide comme constante pourvu qu'une petite force $\Omega^2 \alpha T_0 r$, opposée à la force centrifuge, soit adjointe à cette force. Dans le chapitre I, 4 et 5, nous avons vu que cette force complémentaire provoque un changement de mouvement, caractérisé par une accélération initiale $\vec{V}_1$ définie par l'équation :

$$\text{rot } \vec{V}_1 = \alpha (\text{grad } U \times \text{grad } T_0),$$

où U est la fonction de force :

$$U = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2.$$

Dans le cas considéré, le gradient de la température T_0 et la force centrifuge $\Omega^2 r$ ont la même direction et leur produit vectoriel est égal à 0. Il s'ensuit qu'on peut supposer la vitesse perturbatrice égale à 0 et, au premier moment, l'influence de la température T_0 ne se manifeste que dans un changement modéré de la pression p' . D'après la formule (8), la pression complémentaire p_0 sera définie par :

$$\text{grad } p_0 = -\alpha \rho T_0 \text{ grad } U,$$

d'où, en remarquant que T_0 et U sont fonctions de r seulement, on obtient :

$$p_0 = -\alpha \rho \int T_0 \frac{dU}{dr} dr.$$

2. — Équations définissant le mouvement perturbé.

Le mouvement principal du fluide reste giratoire, la température étant sans influence sur le sens du mouvement, cela permet d'étudier un tel mouvement par les méthodes habituelles, en introduisant, par exemple, de petites variations de vitesse et de température pour voir si les perturbations ainsi obtenues tendent à s'amortir ou non.

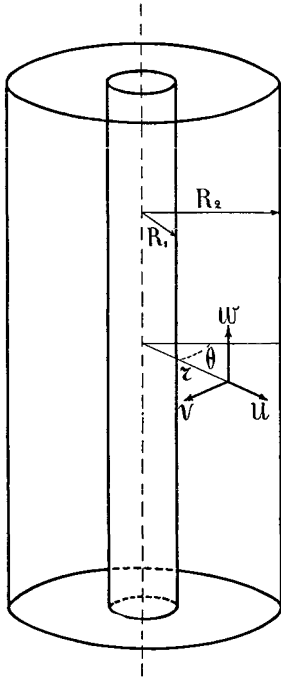


Fig. 1

Employons les coordonnées cylindriques r, θ, z et désignons par $\vec{V}(u, v, w)$ et T les éléments perturbateurs, vitesses et température, avec u dirigé dans le sens du rayon r , v orthogonal à ce rayon et à l'axe z des cylindres, et w dans le sens de cet axe (fig. 1). Supposons, pour simplifier le problème, le mouvement symétrique par rapport aux plans passant par l'axe z , c'est-à-dire u, v, w et T ne dépendant pas de l'angle polaire θ . Dans ce cas, les équations de NAVIER prennent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \Omega^2 r &= -\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \Omega v \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \\ 0 &= -\frac{\partial v}{\partial t} - 2 \Omega u + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial t} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

où les produits et les carrés des vitesses u, v et w sont négligés comme infiniment petits de deuxième ordre. En ajoutant la force $\Omega^2 r (T_0 + T)$ opposée

à la force centrifuge et due à l'influence de la température, on obtient les équations :

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \Omega^2 \alpha r T = - \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \Omega v + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right),$$

$$0 = - \frac{\partial v}{\partial t} - 2 \Omega u + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right),$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{\partial w}{\partial t} + v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

où P désigne l'expression :

$$P = p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + \rho \Omega^2 \alpha \int r T_0 dr.$$

L'équation de continuité, écrite dans les coordonnées cylindriques, aura la forme :

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Quant à l'équation définissant la température, on l'obtient en introduisant $T_0 + T$ à la place de T dans l'équation :

$$\frac{DT}{Dt} = k \Delta T$$

et en négligeant les petits termes de deuxième ordre. On arrive à l'équation :

$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \beta \frac{u}{r} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

qui, avec les équations (1) et (2), sert à déterminer les cinq fonctions u, v, w, T et P. Les quatre premières sont soumises à la condition de s'annuler aux parois, c'est-à-dire pour $r = R_1$ et $r = R_2$. Remarquons, cependant, que l'annulation aux parois de composantes v et w n'est plus obligatoire, si le fluide est parfait.

3. — Forme ondulatoire du mouvement.

Dans un Mémoire consacré à l'étude de la stabilité du mouvement fluide entre deux cylindres coaxiaux, animés de rotations différentes Ω_1 et Ω_2 ($\Omega_1 \neq \Omega_2$), TAYLOR (7), ne tenant pas compte de la température, emploie les solutions des équations de mouvement sous la forme :

$$u = u_r e^{\sigma t} \cos \lambda z, \quad v = v_r e^{\sigma t} \cos \lambda z,$$

$$w = w_r e^{\sigma t} \sin \lambda z, \quad P = P_r e^{\sigma t} \cos \lambda z,$$

où λ et σ sont des constantes et u_r, v_r, w_r et P_r fonctions de r seulement. Cherchons par analogie avec les recherches de TAYLOR, mais en tenant compte de la température, les solutions de même forme en admettant que :

$$T = T_r e^{\sigma t} \cos \lambda z,$$

T_r étant fonction de r seulement. Après l'élimination de P_r on obtient les équations :

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{d^2 v_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right) v_r - \frac{v_r}{r^2} = \frac{2 \Omega}{v} u_r, \\
 & \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 w_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right) w_r \right] \\
 & + \lambda \left[\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right) u_r - \frac{u_r}{r^2} \right] \\
 & = - \frac{2 \Omega \lambda}{v} v_r + \frac{\Omega^2 \sigma \lambda}{v} r T_r, \\
 & \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \lambda w_r = 0, \\
 & \frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{dT_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) T_r - \frac{\beta}{k} \frac{u_r}{r} = 0.
 \end{aligned}$$

Dans le cas des fluides parfaits, v est égal à 0, les équations (4) se simplifient et, après l'élimination de v_r , prennent la forme :

$$\begin{aligned}
 (4') \quad & \frac{dw_r}{dr} + \frac{\lambda}{\sigma^2} (\sigma^2 + 4 \Omega^2) u_r + \frac{\Omega^2 \alpha \lambda}{\sigma} r T_r = 0, \\
 & \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \lambda w_r = 0, \\
 & \frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) T_r - \frac{\beta}{k} \frac{u_r}{r} = 0.
 \end{aligned}$$

4. — Solutions approximatives des équations (4').

Cas des fluides parfaits. Équation de stabilité.

Dans son Mémoire, mentionné plus haut, TAYLOR a obtenu des équations d'une forme analogue à celle des équations (4) et a réussi à intégrer ces équations en développant les solutions en séries de fonctions de BESSEL. Il est aussi possible de développer les solutions des équations (4) en séries de fonctions de BESSEL par une méthode analogue à celle de TAYLOR, mais avec une certaine complication due à l'existence de membres dépendant de la température. Dans le chapitre suivant, nous effectuerons cette intégration et établirons l'équation de la stabilité sous la forme d'un déterminant égal à 0.

En analysant le Mémoire de TAYLOR, H. JEFFREYS (8) a démontré qu'une simplification des équations est admissible dans le cas où la distance $d = R_2 - R_1$ entre deux cylindres est petite par rapport aux rayons R_1 et R_2 . Il indique que dans ce cas $\frac{1}{r}$ est très petit par rapport à $\frac{d}{dr}$ et, en négligeant les membres dépendant de $\frac{1}{r}$, il obtient des résultats qui coïncident avec ceux de TAYLOR, obtenus par un calcul plus exact. Nous verrons, dans le dernier paragraphe du

chapitre suivant, dans quelles conditions une telle approximation est admissible dans notre problème. Nous étudierons aussi une autre solution approchée, moins restreinte, où $\frac{1}{r}$ est remplacé par sa valeur moyenne $\frac{2}{R_1 + R_2}$.

Arrêtons-nous d'abord sur le cas des fluides parfaits (9) et considérons les équations (4'). Prenons à la place de variable T_r la variable rT_r et négligeons les termes contenant $\frac{1}{r}$. Les équations (4') prennent alors la forme :

$$\begin{aligned}\frac{dw_r}{dr} &= -\frac{\lambda}{\sigma^2} (\sigma^2 + 4\Omega^2) u_r + \frac{\Omega^2 \alpha \lambda}{\sigma} r T_r, \\ \frac{du_r}{dr} &= -\lambda w_r, \\ \frac{d^2(rT_r)}{dr^2} &= \frac{\beta}{k} u_r + \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) r T_r\end{aligned}$$

et admettent les solutions particulières de la forme suivante :

$$rT_r = C_1 \sin \frac{r - R_1}{d} q\pi, \quad u_r = C_2 \sin \frac{r - R_1}{d} q\pi, \quad w_r = C_3 \cos \frac{r - R_1}{d} q\pi,$$

q étant un nombre entier. Les conditions aux limites $u_r = 0$ et $T_r = 0$ pour $r = R_1$ et $r = R_2$, sont satisfaites. On obtient trois équations déterminant les coefficients de la proportionnalité C_1, C_2, C_3 :

$$-\frac{\lambda}{\sigma^2} (\sigma^2 + 4\Omega^2) C_1 + \frac{\Omega^2 \alpha \lambda}{\sigma} C_2 + q \frac{\pi}{d} C_3 = 0,$$

$$q \frac{\pi}{d} C_1 + \lambda C_3 = 0,$$

$$\frac{\rho}{k} C_1 + \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) C_2 = 0.$$

Ces équations étant homogènes, le déterminant est égal à 0 et l'on obtient une relation entre les coefficients sous la forme :

$$\begin{aligned}(5) \quad \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) \sigma^3 + k \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right)^2 \sigma^2 + \Omega^2 \lambda^2 (4 - \alpha \beta) \sigma \\ + 4 k \Omega^2 \lambda^2 \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) = 0.\end{aligned}$$

L'équation (5) peut être considérée comme un critérium de la stabilité. Si σ , racine de cette équation, est positif, les vitesses perturbatrices u, v et w contenant le facteur $e^{\sigma t}$, croissent avec le temps et le mouvement est instable. Dans le cas contraire, si σ est négatif, les perturbations tendent à s'amortir.

Pour β plus petit que 0, le mouvement est stable, car σ est nécessairement négatif.

La formule :

$$\beta = \frac{T'' - T'}{\log R_2 - \log R_1}$$

montre que, dans ce cas, T'' est $< T'$ et le cylindre extérieur est moins chauffé que le cylindre intérieur.

Dans le cas où β est positif, l'instabilité du mouvement n'est possible qu'à la condition que $\alpha\beta$ soit plus grand que 4. Cette condition accomplie, il existe au moins une valeur de σ dont la partie réelle est plus grande que 0, et le mouvement est instable.

On peut satisfaire à l'inégalité $\alpha\beta > 4$ en prenant, par exemple, $\alpha = 0,001$ (essence de térébenthine), $R_1 = 50$ cm, $R_2 = 51$ cm, $T'' - T' = 85^\circ$ C. Mais il est difficile de satisfaire à cette inégalité si le nombre α est petit. Pour l'eau, par exemple ($\alpha = 0,00018$), si $R_2 - R_1 = 1$ cm et $T'' - T' = 80^\circ$ C, il faudrait prendre les rayons R_1 et R_2 des cylindres entre 3 m et 4 m pour que la condition $\alpha\beta > 4$ soit satisfaite.

5. — Grandes valeurs de σ .

L'équation (5) donne σ en fonction de λ , ou en fonction de la longueur de l'onde l , car :

$$\lambda = \frac{2\pi}{l}.$$

Il est intéressant de déterminer la valeur de l qui correspond à la plus grande instabilité du mouvement, car c'est cette longueur de l'onde qu'on peut espérer observer expérimentalement. Considérons λ et Ω comme constants ; σ décroît quand q croît, et les grandes valeurs de σ correspondront à $q = 1$. En considérant σ comme fonction de λ , on obtiendra les valeurs de λ correspondant au σ maximum en égalant à 0 la dérivée de l'équation (5) prise par rapport à λ .

Introduisons les quantités x, y, z, η sans dimensions :

$$(6) \quad x = \frac{\pi^2}{\lambda^2 d^2 + \pi^2}, \quad y = \frac{k^2 \pi^4}{\Omega^2 d^4}, \quad z = \frac{\sigma d^2}{k \pi^2}, \quad \eta = \alpha \beta - 4.$$

L'équation (5) prend alors la forme :

$$(5') \quad x y z^3 + y z^2 - \eta x (1 - x) z + 4 (1 - x) = 0.$$

En égalant à 0 la dérivée prise par rapport à x , on obtient :

$$y z^3 - \eta (1 - 2x) z - 4 = 0,$$

d'où l'élimination de z à l'aide de (5') nous donne une équation :

$$(7) \quad 4 y^2 + [(4 + \eta)^2 - 4 \eta (4 + \eta) x + \eta (12 + 5 \eta) x^2 - 2 \eta^2 x^3] y - \eta^3 x^4 (1 - x)^2 = 0,$$

qui détermine x pour chaque valeur donnée de y . La valeur correspondante de z sera :

$$z = 4 \frac{\eta x^2 + y}{\eta^2 x^4 - (4 + \eta - 2 \eta x) y}.$$

Calculons maintenant la longueur de la première onde qui apparaît lorsqu'on augmente progressivement la vitesse angulaire Ω . Après différentiation par rapport à x , l'équation (7) donne :

$$[-4 \eta (4 + \eta) + 2 \eta (12 + 5 \eta) x - 6 \eta^2 x^2] y - 2 \eta^3 x^3 (1 - x) (2 - 3 x) = 0$$

et l'on voit qu'à la valeur minima de Ω correspond la valeur $x = \frac{2}{3}$ ou la longueur de l'onde :

$$l = 2 \sqrt{2} d,$$

donc la même valeur que celle qu'avait trouvé Lord RAYLEIGH dans le problème indiqué dans le chapitre I, 2.

Remarquons que cette valeur de la longueur de l'onde ne dépend que de la distance entre les cylindres et est indépendante de variations des nombres α et β , c'est-à-dire de propriétés physiques des fluides et de la différence de température entre les cylindres.

La valeur maxima de y , correspondant à la valeur $x = \frac{2}{3}$ dépend, au contraire, des nombre α et β et est définie par l'équation :

$$2916 y^2 + 27 (432 + 72 \eta - \eta^2) y - 16 \eta^3 = 0.$$

Les tableaux ci-joints et les courbes (2) et (3), dessinées à l'aide de l'équation (7), la première pour $\eta = 1$ et la seconde pour $\eta = 0,1$ donnent la possibilité de trouver la longueur de l'onde l correspondant à chaque valeur donnée de la vitesse angulaire Ω . La courbe (4) donne la valeur minima de la vitesse angulaire Ω , correspondant à $l = 2\sqrt{2}d$, comme fonction du paramètre $\eta = \alpha\beta - 4$.

x	$1 : d$	$\eta = 1$ $10^4 y$	$\eta = 1$ $\frac{d^2 \Omega}{k}$	$\eta = 0,1$ $10^6 y$	$\eta = 0,1$ $\frac{d^2 \Omega}{k}$
0	0	0	∞	0	∞
0,1	0,67	0,035	1690	0,005	44300
0,2	1,00	0,47	458	0,062	12610
0,3	1,31	1,94	222,4	0,242	6380
0,4	1,63	4,70	144,8	0,564	4180
0,5	2,00	8,22	113,5	0,958	3210
0,6	2,45	11,08	94,4	1,272	2790
2/3	2,83	12,15	90,1	1,340	2716
0,7	3,06	11,60	92,3	1,330	2720
0,8	4,00	8,70	106,5	1,007	3140
0,9	6,00	3,99	157,2	0,402	4950
1	∞	0	∞	0	∞

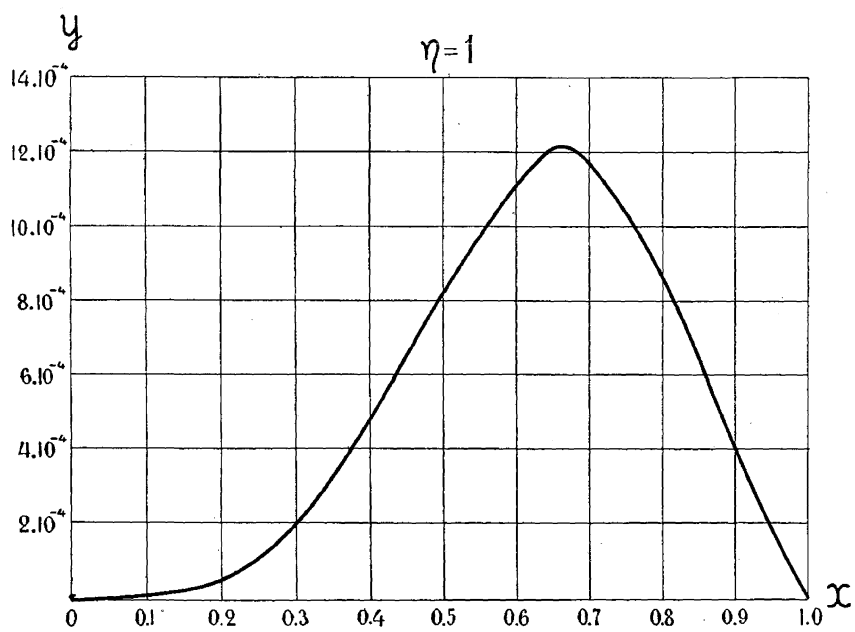


Fig. 2

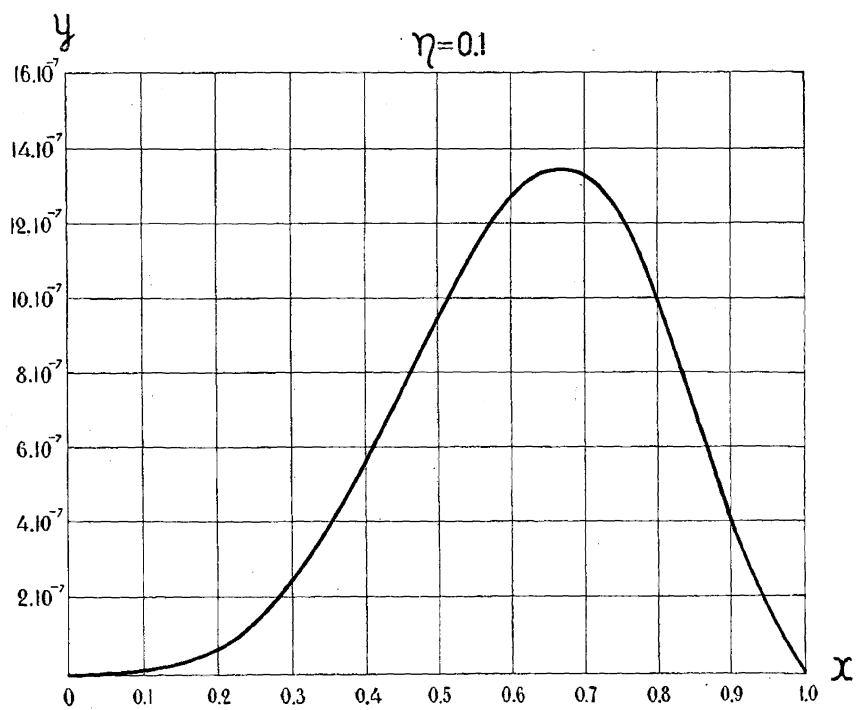


Fig. 3

η	$10^4 y$	$\frac{d^2 \Omega}{k}$	η	$10^4 y$	$\frac{d^2 \Omega}{k}$
0	0	∞	0,6	2,71	192,2
0,1	0,0134	2716	0,7	4,24	152,5
0,2	0,106	963	0,8	6,21	126,1
0,3	0,351	527	0,9	8,74	106,8
0,4	0,825	345,5	1	12,15	90,1
0,5	1,81	249,5			

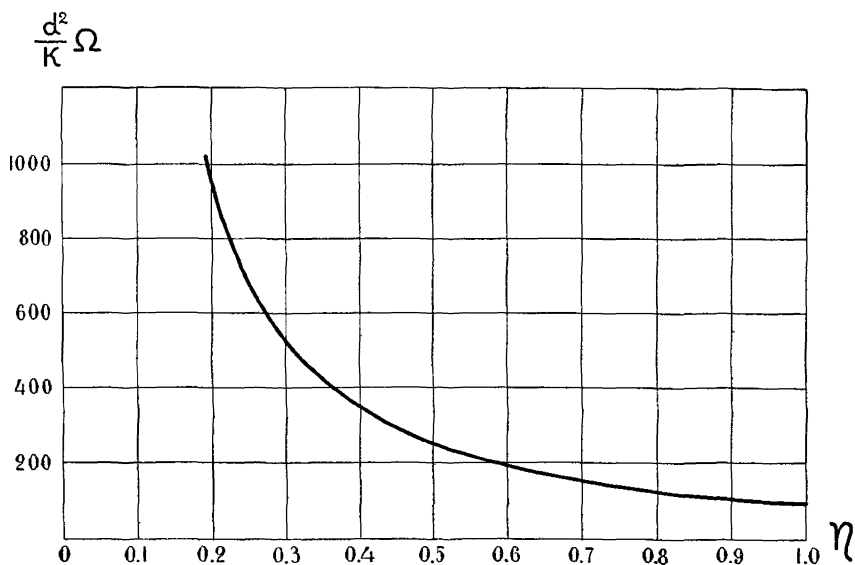


Fig. 4

6. — Autres solutions approximatives des équations (4').

En éliminant w , on obtient les équations (4') sous la forme :

$$(8) \quad \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{\lambda^2}{\sigma^2} (\sigma^2 + 4 \Omega^2) u_r + \frac{\Omega^2 \alpha \lambda^2}{\sigma} r T_r,$$

$$\frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_r}{dr} = \frac{\beta}{k} \frac{u_r}{r} + \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) T_r.$$

Si le rapport $\frac{d}{r}$ est petit, prenons pour r sa valeur moyenne :

$$r = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Les équations (8) prennent alors la forme :

$$(8') \quad \begin{aligned} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + 2n \frac{du_r}{dr} &= \left(\lambda^2 + \frac{4\Omega^2 \lambda^2}{\sigma^2} + 4n^2 \right) u_r + \frac{\Omega^2 \alpha \lambda^2}{2n\sigma} T_r, \\ \frac{d^2 T_r}{dr^2} + 2n \frac{dT_r}{dr} &= \frac{2n\beta}{k} u_r + \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) T_r, \end{aligned}$$

et admettent les solutions où T_r est proportionnel à u_r

$$T_r = m u_r$$

m étant défini par l'équation :

$$(9) \quad \Omega^2 \alpha k \lambda^2 \sigma m^2 - 2n(\sigma^3 - 4k n^2 \sigma^2 - 4k \Omega^2 \lambda^2) m - 4\beta n^2 \sigma^2 = 0.$$

En écrivant les solutions de (8') sous la forme :

$$\begin{aligned} u_r &= C_1 e^{\gamma_1 r} + C_2 e^{\gamma_2 r}, \\ T_r &= m (C_1 e^{\gamma_1 r} + C_2 e^{\gamma_2 r}), \end{aligned}$$

on obtient pour γ_1 et γ_2 les valeurs :

$$(10) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= -n + \sqrt{n^2 + \frac{2n\beta}{mk} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{k}}, \\ \gamma_2 &= -n - \sqrt{n^2 + \frac{2n\beta}{mk} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{k}}, \end{aligned}$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{aligned} C_1 e^{\gamma_1 R_1} + C_2 e^{\gamma_2 R_1} &= 0, \\ C_1 e^{\gamma_1 R_2} + C_2 e^{\gamma_2 R_2} &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \frac{2q\pi}{d} i,$$

et, d'après les expressions (10) :

$$n^2 + \frac{2n\beta}{mk} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{k} + q^2 \frac{\pi^2}{d^2} = 0.$$

En éliminant m à l'aide de l'équation (9), on obtient l'équation :

$$(11) \quad \begin{aligned} \left(5n^2 + q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) \sigma^3 + k \left(5n^2 + q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) \left(n^2 + q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) \sigma^2 \\ + \Omega^2 \lambda^2 (4 - \alpha\beta) \sigma + 4k \Omega^2 \lambda^2 \left(n^2 + q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

qui est analogue à l'équation (5) et donne aussi les conditions de la stabilité.

On voit facilement que les conditions d'instabilité, $\sigma > 0$, restent les mêmes, à savoir $\alpha\beta > 4$; d'autre part, en cherchant, comme auparavant, les valeurs de λ qui correspondent à la plus grande instabilité du mouvement (σ maximum), on obtient l'équation :

$$(12) \quad 4 a_1 y^2 - (a_2 \eta^2 - 4 a_3 \eta - 16 a_4) y - a_5 \eta^3 = 0,$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 sont fonctions de x :

$$a_1 = (1 + 5\varepsilon)^2 (1 + \varepsilon x)^4 (1 + 5\varepsilon x)^2,$$

$$a_2 = (1 - x)^2 (1 + 5\varepsilon x)^2 [(1 + 5\varepsilon) x (1 + \varepsilon x) - (1 - x) (1 + 5\varepsilon x)],$$

$$a_3 = [2 (1 - x)^2 (1 + 5\varepsilon x)^2 + (1 + 5\varepsilon)^2 x^2 (1 + \varepsilon x)^2] \cdot [(1 + 5\varepsilon x)^2 - 4\varepsilon (1 + 5\varepsilon) x^2],$$

$$a_4 = [(1 + 5\varepsilon x)^2 - 4\varepsilon (1 + 5\varepsilon) x^2]^3,$$

$$a_5 = (1 + 5\varepsilon)^2 x^4 (1 - x)^2, \quad \varepsilon = \frac{d^2 n^2}{\pi^2}, \quad q = 1,$$

x, y et η étant définis par les formules (6). L'équation (12) détermine les valeurs de λ pour chaque valeur donnée de la vitesse angulaire Ω . On obtient les valeurs de la longueur d'onde $l = \frac{2\pi}{\lambda}$ correspondantes à la valeur minima de Ω en égalant à 0 la dérivée de l'équation (12) prise par rapport à x . La racine de cette équation est :

$$x = \frac{-3 + 5\varepsilon + \sqrt{1 + 5\varepsilon} (9 + 13\varepsilon)}{2\varepsilon (11 + 5\varepsilon)}.$$

On voit que la valeur de x n'est plus constante, mais varie avec ε . Après avoir levé l'indétermination qui apparaît pour $\varepsilon = 0$, on obtient la valeur antérieure $x = \frac{2}{3}$, $\frac{l}{d} = 2\sqrt{2}$.

Le nombre ε , étant défini par la formule :

$$\varepsilon = \frac{d^2 n^2}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \right)^2,$$

varie de 0 à $\frac{1}{\pi^2} = 0,1014$. Le tableau ci-joint donne les valeurs de x et de $\frac{l}{d}$ pour les valeurs de ε dans cet intervalle.

ε	x	$\frac{l}{d}$	ε	x	$\frac{l}{d}$
0	0,667	2,824	0,06	0,639	2,660
0,01	0,660	2,785	0,07	0,634	2,630
0,02	0,655	2,755	0,08	0,630	2,610
0,03	0,651	2,730	0,09	0,625	2,580
0,04	0,647	2,703	0,10	0,622	2,560
0,05	0,643	2,680	0,1014	0,621	2,555

On voit que la valeur de $\frac{l}{d}$ trouvée par la première approximation, c'est-à-dire pour $\varepsilon=0$ est la plus grande. La différence maxima entre cette valeur et la valeur de $\frac{l}{d}$ pour $\varepsilon \neq 0$ est égale à 0,269, soit près de 9,5 %.

7. — Cas des fluides visqueux. Solutions approximatives des équations (4).

Dans le cas où la viscosité des fluides n'est plus négligeable, il faut appliquer les équations (4) contenant le coefficient de la viscosité cinématique ν . En prenant de nouveau la variable $r T_r$ à la place de T_r et en négligeant comme auparavant les membres contenant $\frac{1}{r}$ on obtient les équations :

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u_r}{dr^4} - \left(2 \lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu} \right) \frac{d^2 u_r}{dr^2} &= - \lambda^2 \left[\left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu} \right) u_r - \frac{2 \Omega}{\nu} v_r + \frac{\Omega^2 \alpha}{\nu} r T_r \right], \\ \frac{d^2 v_r}{dr^2} &= \frac{2 \Omega}{\nu} u_r + \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu} \right) v_r, \\ \frac{d^2 (r T_r)}{dr^2} &= \frac{\beta}{k} u_r + \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu} \right) r T_r, \end{aligned}$$

qui admettent les solutions proportionnelles à $\sin \frac{r - R_1}{d} q \pi$. Les équations étant homogènes, les coefficients sont liés par l'équation :

$$\begin{vmatrix} \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu} \right) & - \frac{2 \Omega \lambda^2}{\nu} & \frac{\Omega^2 \alpha \lambda^2}{\nu} \\ \frac{2 \Omega}{\nu} & q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu} & 0 \\ \frac{\beta}{k} & 0 & q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne après développement :

$$\begin{aligned} (13) \quad & \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) \sigma^3 + (k + 2 \nu) \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right)^2 \sigma^2 + \left[\Omega^2 \lambda^2 (4 - \sigma \beta) \right. \\ & \quad \left. + \nu (2 k - \nu) \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right)^3 \right] \sigma \\ & + \left[\Omega^2 \lambda^2 (4 k - \alpha \beta \nu) + k \nu^2 \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right)^3 \right] \cdot \left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation donne les conditions de la stabilité du mouvement. On voit que le mouvement est stable si β est négatif, car, dans ce cas, σ est négatif. Dans le cas de $\beta > 0$, la stabilité dépend du signe des quantités $4 - \alpha \beta$ et $4k - \alpha \beta \nu$.

Le passage du mouvement stable au mouvement instable aura lieu évidemment lorsque σ est égal à 0. Dans ce cas, l'équation (13) nous donne :

$$\Omega^2 = \frac{k \nu^2}{\alpha \beta \nu - 4k} \cdot \frac{\left(q^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^3}{\lambda^2},$$

et détermine ainsi les valeurs de λ qui correspondent à chaque valeur donnée de la vitesse angulaire Ω au moment de changement de régime (*fig. 5*). Il est

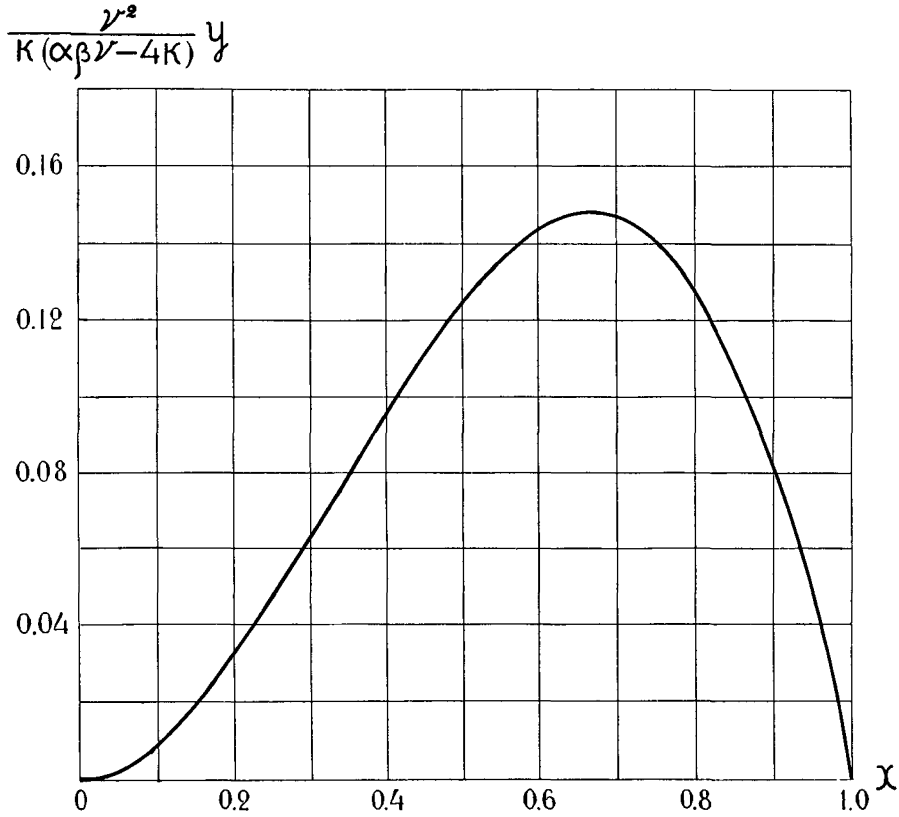


Fig. 5

évident que pour qu'un tel changement de régime soit possible, il est nécessaire que $\alpha\beta\nu - 4k$ soit positif.

En cherchant de nouveau la valeur de la longueur de l'ordre $l = \frac{2\pi}{\lambda}$ qui correspond à un tel changement de régime, lorsque Ω augmente progressivement, on trouve qu'à la valeur minima de Ω correspond :

$$l = 2\sqrt{2}d, \quad (q = 1)$$

donc la même valeur que dans le cas des fluides parfaits.

Si l'on détermine la composante w à l'aide de la troisième équation du système (4), on trouve que cette composante est proportionnelle au $\cos \frac{r-R_1}{d} q \pi$, donc ne s'annule pas aux parois pour $r=R_1$ et $r=R_2$. On peut éviter ces difficultés par un procédé analogue à celui de Lord RAYLEIGH (10). Si l'on calcule la force tangentielle aux parois dans le sens de cette composante, on obtient qu'elle est nulle, car (11) :

$$P_{zz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = e^{\sigma t} \sin \lambda z \left(\frac{dw_r}{dr} - \lambda u_r \right).$$

Il faut supposer qu'il existe un glissement sans frottement le long de la génératrice du cylindre, même dans le cas des fluides visqueux.

APPLICATIONS de FONCTIONS de BESSEL

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les équations résolvant le problème considéré peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 v_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right) v_r - \frac{v_r}{r^2} = \frac{2 \Omega}{v} u_r, \\
 (1) \quad & \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 w_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right) w_r \right] + \lambda \left[\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right) u_r - \frac{u_r}{r^2} \right] \\
 & \quad = - \frac{2 \Omega \lambda}{v} v_r + \frac{\Omega^2 \alpha \lambda}{v} r T_r, \\
 & \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \lambda w_r = 0 \\
 & \frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_r}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) T_r - \frac{B}{k} \frac{u_r}{r} = 0.
 \end{aligned}$$

La forme de ces équations permet de développer les solutions exactes du problème en séries de fonctions de BESSEL de l'ordre 0 et 1. Avant de le démontrer, faisons quelques remarques relatives à la théorie de fonctions de BESSEL (12).

1. — Fonctions de Bessel.

Désignons par :

$$f = Z_1 (\gamma_n r) = C_1 J_1 (\gamma_n r) + C_2 N_1 (\gamma_n r)$$

l'intégrale complète de l'équation de BESSEL :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \gamma_n^2 - \frac{f}{r^2} = 0$$

et déterminons le nombre γ_n de sorte que $Z_1 (\gamma_n r)$ s'annule pour $r = R_1$ et $r = R_2$. Nous obtenons une série de valeurs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ racines de l'équation :

$$(2) \quad \frac{N_1 (\gamma_n R_1)}{J_1 (\gamma_n R_1)} = \frac{N_1 (\gamma_n R_2)}{J_1 (\gamma_n R_2)},$$

qui sont toutes distinctes et vont en croissant. Formons la fonction correspondante de BESSEL de l'ordre 0 :

$$Z_0 (\gamma_n r) = C_1 J_0 (\gamma_n r) + C_2 N_0 (\gamma_n r).$$

Cette fonction ne s'annule pas pour $r=R_1$ et $r=R_2$ et nous avons une formule connue :

$$\frac{d}{dr} Z_0(\gamma_n r) = -\gamma_n Z_1(\gamma_n r).$$

Chaque fonction continue $f_1(r)$, s'annulant pour $r=R_1$ et $r=R_2$, peut être développée en série de BESSEL-FOURIER, valable entre les limites R_1 et R_2 :

$$f_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_1(\gamma_n r),$$

où les coefficients a_n sont donnés par la formule :

$$a_n = \frac{\int_{R_1}^{R_2} f_1(r) Z_1(\gamma_n r) r dr}{\int_{R_1}^{R_2} Z_1^2(\gamma_n r) r dr}.$$

D'autre part, chaque fonction continue $f_2(r)$ peut être développée en série :

$$f_2(r) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n Z_0(\gamma_n r)$$

valables entre les mêmes limites R_1 et R_2 et dont les coefficients b_n ont la forme :

$$b_n = \frac{\int_{R_1}^{R_2} f_2(r) Z_0(\gamma_n r) r dr}{\int_{R_1}^{R_2} Z_0^2(\gamma_n r) r dr}.$$

Notons quelques formules relatives à ce développement qui nous seront utiles plus loin (13).

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int_{R_1}^{R_2} J_1(\gamma_n r) J_1(\gamma_m r) r dr \\ &= \frac{R_2}{\gamma_n^2 - \gamma_m^2} \left[\gamma_m J_1(\gamma_n R_2) J'_1(\gamma_m R_2) - \gamma_n J_1(\gamma_m R_2) J'_1(\gamma_n R_2) \right] \\ & - \frac{R_1}{\gamma_n^2 - \gamma_m^2} \left[\gamma_m J_1(\gamma_n R_1) J'_1(\gamma_m R_1) - \gamma_n J_1(\gamma_m R_1) J'_1(\gamma_n R_1) \right], \\ & \int_{R_1}^{R_2} J_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_m r) r dr \\ &= \frac{R_2}{\gamma_n^2 - \gamma_m^2} \left[\gamma_m J_0(\gamma_n R_2) J'_0(\gamma_m R_2) - \gamma_n J_0(\gamma_m R_2) J'_0(\gamma_n R_2) \right] \\ & - \frac{R_1}{\gamma_n^2 - \gamma_m^2} \left[\gamma_m J_0(\gamma_n R_1) J'_0(\gamma_m R_1) - \gamma_n J_0(\gamma_m R_1) J'_0(\gamma_n R_1) \right], \\ & \int_{R_1}^{R_2} J_1^2(\gamma_n r) r dr = \frac{R_2^2}{2} \left[J_1'^2(\gamma_n R_2) + \left(1 - \frac{1}{\gamma_n^2 R_2^2}\right) J_1^2(\gamma_n R_2) \right] \\ & - \frac{R_1^2}{2} \left[J_1'^2(\gamma_n R_1) + \left(1 - \frac{1}{\gamma_n^2 R_1^2}\right) J_1^2(\gamma_n R_1) \right], \\ & \int_{R_1}^{R_2} J_0^2(\gamma_n r) r dr = \frac{R_2^2}{2} \left[J_0'^2(\gamma_n R_2) + J_0^2(\gamma_n R_2) \right] - \frac{R_1^2}{2} \left[J_0'^2(\gamma_n R_1) + J_0^2(\gamma_n R_1) \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas où γ_n et γ_m sont tous racines de l'équation (12), ces formules prennent la forme plus simple :

$$(3') \quad \int_{R_1}^{R_2} Z_1(\gamma_n r) Z_1(\gamma_m r) r dr = \int_{R_1}^{R_2} Z_0(\gamma_n r) Z_0(\gamma_m r) r dr = 0$$

$$\int_{R_1}^{R_2} Z_1^2(\gamma_n r) r dr = \int_{R_1}^{R_2} Z_0^2(\gamma_n r) r dr = \frac{1}{2} \left[R_2^2 Z_0^2(\gamma_n R_2) - R_1^2 Z_0^2(\gamma_n R_1) \right] = H_n.$$

2. — Solutions exactes des équations (4).

Prenons comme solution :

$$u_r = \sum_{m=1}^{\infty} a_m Z_1(\gamma_m r),$$

où a_m sont des constantes et γ_m sont les racines de l'équation (2). La première équation du système (4) donne alors :

$$v_r = \sum_{m=1}^{\infty} b_m Z_1(\gamma_m r) + C_3 J_1 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_4 N_1 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right),$$

avec les coefficients b_m définis par l'équation :

$$b_m = - \frac{2 \Omega}{v} \frac{a_m}{\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}}.$$

Les conditions aux limites donnent $C_3 = C_4 = 0$ et l'on obtient définitivement :

$$v_r = \sum_{m=1}^{\infty} b_m Z_1(\gamma_m r).$$

La seconde équation du système (1) sera satisfaite par :

$$w_r = \sum_{m=1}^{\infty} c_m Z_0(\gamma_m r) + C_5 J_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_6 N_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_7,$$

$$r T_r = \sum_{m=1}^{\infty} d_m Z_1(\gamma_m r),$$

et la relation entre les coefficients c_m , d_m et a_m aura la forme :

$$(4) \quad \frac{\Omega^2 \alpha \lambda}{v} d_m = \gamma_m \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right) c_m - \lambda \frac{\left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)^2 + \frac{4 \Omega^2}{v^2}}{\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} a_m.$$

En introduisant les valeurs de u_r et w_r dans la troisième équation du système (1), on obtient :

$$(5) \quad \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \gamma_m Z_0(\gamma_m r) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m Z_0(\gamma_m r) + C_5 J_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) \\ + C_6 N_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_7 = 0.$$

Développons en série de fonctions $Z_0(\gamma_m r)$ la fonction :

$$C_5 J_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_6 N_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_7.$$

Posons :

$$C_5 J_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_6 N_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_7 = \sum_{m=1}^{\infty} e_m Z_0(\gamma_m r) + C_7',$$

avec e_m déterminé par l'expression :

$$e_m = \frac{1}{H_m} \int_{R_1}^{R_2} Z_0(\gamma_m r) \left[C_5 J_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_6 N_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) \right] r dr.$$

A l'aide de formules (3), on obtient :

$$e_m \approx \frac{-i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}}}{H_m \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)} \\ \left\{ C_5 \left[R_2 Z_0(\gamma_m R_2) J_0' \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} R_2 \right) - R_1 Z_0(\gamma_m R_1) J_0' \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} R_1 \right) \right] \right. \\ \left. + C_6 \left[R_2 Z_0(\gamma_m R_2) N_0' \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} R_2 \right) - R_1 Z_0(\gamma_m R_1) N_0' \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} R_1 \right) \right] \right\}, \\ C_7' \approx \frac{2i}{(R_2^2 - R_1^2) \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}}} \left\{ C_5 \left[R_2 J_0' \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} R_2 \right) - R_1 J_0' \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} R_1 \right) \right] \right. \\ \left. + C_6 \left[R_2 N_0' \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} R_2 \right) - R_1 N_0' \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} R_1 \right) \right] \right\}.$$

En désignant par C'_5 et C'_6 deux nouvelles constantes arbitraires, on obtient le développement cherché sous la forme :

$$C_5 J_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_6 N_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} r \right) + C_7 \\ = C'_5 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Z_0(\gamma_m R_2)}{H_m \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)} Z_0(\gamma_m r) + C'_6 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Z_0(\gamma_m R_1)}{H_m \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)} Z_0(\gamma_m r) + C_7',$$

avec :

$$C'_5 = i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} R_2} \left[C_5 J'_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} R_2} \right) + C_6 N'_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} R_2} \right) \right],$$

$$C'_6 = -i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} R_1} \left[C_5 J'_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} R_1} \right) + C_6 N'_0 \left(i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sigma}{v} R_1} \right) \right].$$

Il reste à déterminer les coefficients.

L'équation (5) donne la relation entre les coefficients c_m et a_m .

$$\frac{\gamma_m a_m}{\lambda} + C_m + C'_5 \frac{Z_0(\gamma_m R_2)}{H_m \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)} + C'_6 \frac{Z_0(\gamma_m R_1)}{H_m \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)} = 0,$$

$$C'_7 = 0,$$

et l'équation (4) détermine d_m en termes dépendant de a_m C'_5 et C'_6 :

$$-\frac{\Omega^2 \alpha \lambda^2}{v} d_m = \frac{(\gamma_m^2 + \lambda^2) \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)^2 + \frac{4 \Omega^2 \lambda^2}{v^2}}{\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}} a_m + \frac{\lambda \gamma_m Z_0(\gamma_m R_2)}{H_m} C'_5$$

$$+ \frac{\lambda \gamma_m Z_0(\gamma_m R_1)}{H_m} C'_6.$$

Les valeurs obtenues pour u_r et $r T_r$ doivent satisfaire à la dernière équations du système (1). A l'aide des formules connues (14) :

$$\frac{d Z_1(\gamma_m r)}{dr} = -\frac{1}{r} Z_1(\gamma_m r) + \gamma_m Z_0(\gamma_m r),$$

$$\frac{d^2 Z_1(\gamma_m r)}{dr^2} = \frac{2}{r^2} Z_1(\gamma_m r) - \gamma_m^2 Z_1(\gamma_m r) - \frac{\gamma_m}{r} Z_0(\gamma_m r),$$

cette équation donne :

$$(6) \quad \frac{2}{r} \sum_{m=1}^{\infty} d_m \gamma_m Z_0(\gamma_m r) - \frac{4}{r^2} \sum_{m=1}^{\infty} d_m Z_1(\gamma_m r) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \gamma_m^2 L_m Z_1(\gamma_m r)$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} M_m [C'_5 Z_0(\gamma_m R_2) + C'_6 Z_0(\gamma_m R_1)] Z_1(\gamma_m r) = 0,$$

avec les coefficients :

$$(7) \quad L_m = \frac{(\gamma_m + \lambda^2) \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)^2 + \frac{\Omega^2 \lambda^2}{k v^2} \left[4 k \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{k} \right) - \alpha \beta v \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right) \right]}{\gamma_m^2 \left[(\gamma_m^2 + \lambda^2) \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)^2 + \frac{4 \Omega^2 \lambda^2}{v^2} \right]}$$

$$(8) \quad M_m = \frac{\beta \lambda}{k} \cdot \frac{\gamma_m \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)}{H_m \left[(\gamma_m^2 + \lambda^2) \left(\gamma_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v} \right)^2 + \frac{4 \Omega^2 \lambda^2}{v^2} \right]}$$

L'équation (6) devant avoir lieu pour $r=R_1$ et $r=R_2$, on obtient deux conditions :

$$(9) \quad \sum_{m=1}^{\infty} d_m \gamma_m Z_0(\gamma_m R_1) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} d_m \gamma_m Z_0(\gamma_m R_2) = 0.$$

Dans ce cas, la fonction déterminée par les deux premiers termes de l'équation (6) s'annule pour $r=R_1$ et $r=R_2$ et peut être développée en série de fonctions $Z_1(\gamma_m r)$. Posons :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{r} \sum_{m=1}^{\infty} d_m \left[\gamma_m Z_0(\gamma_m r) - \frac{2}{r} Z_1(\gamma_m r) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} d_m \gamma_m^2 [f_{m,1} Z_1(\gamma_1 r) + f_{m,2} Z_1(\gamma_2 r) + \dots], \end{aligned}$$

$f_{m,s}$ étant défini par la formule :

$$(10) \quad f_{m,s} = \frac{1}{H_s} \int_{R_1}^{R_2} \frac{2}{\gamma_m r} \left[Z_0(\gamma_m r) - \frac{2}{\gamma_m r} Z_1(\gamma_m r) \right] Z_1(\gamma_s r) r dr,$$

L'équation (6) prend alors la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} d_m \gamma_m^2 \sum_{s=1}^{\infty} f_{m,s} Z_1(\gamma_s r) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \gamma_m^2 L_m Z_1(\gamma_m r) \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} M_m [C'_5 Z_0(\gamma_m R_2) + C'_6 Z_0(\gamma_m R_1)] Z_1(\gamma_m r) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation devant être satisfaite pour chaque valeur de r , le coefficient de $Z_1(\gamma_m r)$ doit s'annuler et nous obtenons ainsi l'équation :

$$d_m \gamma_m^2 L_m - C'_5 M_m Z_0(\gamma_m R_2) - C'_6 M_m Z_0(\gamma_m R_1) + d_1 \gamma_1^2 f_{1,m} + d_2 \gamma_2^2 f_{2,m} + \dots = 0,$$

permettant de déterminer les coefficients d_m .

3. — Équation de stabilité.

Nous avons obtenu ainsi un système de m équations homogènes du premier ordre définissant les m coefficients $d_1, d_2, d_3, \dots$ et les deux constantes C'_5 et C'_6 .

Les conditions (9) donnent deux relations complémentaires entre ces

coefficients. Le résultat d'élimination de quantités $d_1\gamma_1^2, d_2\gamma_2^2 \dots C'_5$ et C'_6 présente un déterminant infini égalé à 0. Ce déterminant a la forme :

$$(11) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{Z_o(\gamma_1 R_1)}{\gamma_1} & \frac{Z_o(\gamma_2 R_1)}{\gamma_2} & \frac{Z_o(\gamma_3 R_1)}{\gamma_3} \\ 0 & 0 & \frac{Z_o(\gamma_1 R_2)}{\gamma_1} & \frac{Z_o(\gamma_2 R_2)}{\gamma_2} & \frac{Z_o(\gamma_3 R_2)}{\gamma_3} \\ M_1 Z_o(\gamma_1 R_1) & M_1 Z_o(\gamma_1 R_2) & L_1 + f_{1,1} & f_{2,1} & f_{3,1} \\ M_2 Z_o(\gamma_2 R_1) & M_2 Z_o(\gamma_2 R_2) & f_{1,2} & L_2 + f_{2,2} & f_{3,2} \\ M_3 Z_o(\gamma_3 R_1) & M_3 Z_o(\gamma_3 R_2) & f_{1,3} & f_{2,3} & L_3 + f_{3,3} \\ M_4 Z_o(\gamma_4 R_1) & M_4 Z_o(\gamma_4 R_2) & f_{1,4} & f_{2,4} & f_{3,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

On peut considérer ce déterminant comme une équation déterminant σ et donnant ainsi les conditions de stabilité du mouvement.

La température T et les composantes u et v satisfont à la condition de s'annuler aux parois, mais la composante w ne s'annule pas pour $r=R_1$ et $r=R_2$. Puisque la dérivée $\frac{dw_r}{dr}$ présente une série de fonctions de BESSEL de l'ordre 1, il est facile de démontrer, comme nous l'avons fait dans le chapitre II, 5, que la force tangentielle dans la direction de cette composante est égale à 0. C'est-à-dire qu'il ne se produit pas de frottement pendant le glissement du fluide dans cette direction.

4. — Valeurs approximatives de fonctions de Bessel.

Prenons les valeurs approximatives (15) des fonctions de BESSEL contenant les termes en $\frac{1}{\gamma_m r}$ et non les termes en $\left(\frac{1}{\gamma_m r}\right)^2$:

$$Z_o(\gamma_m r) = r^{-\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{r - R_1}{d} m \pi + \frac{d}{2m} \frac{1}{\pi r} \sin \frac{r - R_1}{d} m \pi \right],$$

$$Z_1(\gamma_m r) = r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{r - R_1}{d} m \pi,$$

γ_m étant égal à $m \frac{\pi}{d}$.

$$\gamma_m = m \gamma_1 = m \frac{\pi}{d}.$$

Nous aurons alors :

$$Z_o(\gamma_m R_1) = R_1^{-\frac{1}{2}}, \quad Z_o(\gamma_m R_2) = (-1)^m$$

et à l'aide de formules (3'), (7) et (8) :

$$H_m = \int_{R_1}^{R_2} \sin^2 \frac{r - R_1}{d} m \pi dr = \frac{d}{2},$$

$$(7') \quad L_m =$$

$$\frac{\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right) \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{k}\right) \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}\right)^2 + \frac{\Omega^2 \lambda^2}{k v^2} \left[4k \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{k}\right) - \alpha \beta v \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}\right)\right]}{m^2 \frac{\pi^2}{d^2} \left[\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right) \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}\right)^2 + \frac{4 \Omega^2 \lambda^2}{v^2}\right]}$$

$$(8') \quad M_m = \frac{2 \beta \lambda_m \pi}{kd} \frac{m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right) \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}\right)^2 + \frac{4 \Omega^2 \lambda^2}{v^2}}.$$

Les deux dernières formules prennent pour $\sigma = 0$ la forme :

$$(7'') \quad \bar{L}_m = \frac{\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right) \left[\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^3 + \frac{\Omega^2 \lambda^2}{k v^2} (4k - \alpha \beta v)\right]}{m^2 \frac{\pi^2}{d^2} \left[\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^3 + 4 \frac{\Omega^2 \lambda^2}{v^2}\right]},$$

$$(8'') \quad \bar{M}_m = \frac{2 \beta \lambda_m \pi}{kd} \cdot \frac{m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^3 + \frac{4 \Omega^2 \lambda^2}{v^2}}.$$

Les valeurs du coefficients $f_{m,s}$ doivent être calculées avec une même approximation que les fonctions de BESSEL. En posant $\eta = \frac{r - R_1}{d} \pi$ on obtient à l'aide de la formule (10) :

$$f_{m,s} = \frac{4}{m \pi} \frac{d}{R_1} \int_0^\pi \cos m \eta \sin s \eta \frac{d \eta}{1 + \frac{d}{R_1} \frac{\eta}{\pi}} - \frac{b}{m^2 \pi^3} \frac{d^2}{R_1^2} \int_0^\pi \sin m \eta \sin s \eta \frac{d \eta}{\left(1 + \frac{d}{R_1} \frac{\eta}{\pi}\right)^2}.$$

Prenons les deux premiers membres du développement :

$$\left(1 + \frac{d}{R_1} \frac{\eta}{\pi}\right)^{-1} = 1 - \frac{d}{R_1} \frac{\eta}{\pi} + \frac{d^2}{R_1^2} \frac{\eta^2}{\pi^2} \dots$$

et le premier membre seulement de :

$$\left(1 + \frac{d}{R_1} \frac{\eta}{\pi}\right)^{-2} = 1 - 2 \frac{d}{R_1} \frac{\eta}{\pi} + 3 \frac{d^2}{R_1^2} \frac{\eta^2}{\pi^2} \dots$$

Puisqu'on a pour $s \neq m$:

$$\int_0^\pi \cos m \eta \sin s \eta d \eta = 0 \quad \text{pour } s + m \text{ pair,}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos m\eta \sin s\eta \, d\eta &= \frac{2s}{s^2 - m^2} && \text{pour } s + m \text{ impair,} \\ \int_0^\pi \eta \cos m\eta \sin s\eta \, d\eta &= \frac{-s\pi}{s^2 - m^2} && \text{pour } s + m \text{ pair,} \\ \int_0^\pi \eta \cos m\eta \sin s\eta \, d\eta &= \frac{s\pi}{s^2 - m^2} && \text{pour } s + m \text{ impair,} \\ \int_0^\pi \sin m\eta \sin s\eta \, d\eta &= 0,\end{aligned}$$

et pour $s = m$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos m\eta \sin m\eta \, d\eta &= 0, \\ \int_0^\pi \eta \cos m\eta \sin m\eta \, d\eta &= -\frac{\pi}{4m}, \\ \int_0^\pi \sin^2 m\eta \, d\eta &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

on obtient pour les coefficients $f_{m,s}$ les valeurs :

$$\begin{aligned}f_{m,s} &= \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{s}{m(s^2 - m^2)} \cdot \frac{d^2}{R_1^2} && \text{pour } s + m \text{ pair,} \\ f_{m,s} &= \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{s}{m(s^2 - m^2)} \frac{d}{R_1} \left(2 - \frac{d}{R_1}\right) && \text{pour } s + m \text{ impair,} \\ f_{m,m} &= \frac{2}{\pi^2} \frac{d^2}{m^2 R_1^2} && \text{pour } s = m;\end{aligned}$$

ou, en se contentant de termes de premier ordre par rapport à $\frac{d}{R_1}$,

$$\begin{aligned}f_{m,s} &= 0 && \text{pour } s + m \text{ pair,} \\ f_{m,s} &= \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{s}{m(s^2 - m^2)} \frac{d}{R_1} && \text{pour } s + m \text{ impair,} \\ f_{m,m} &= 0 && \text{pour } s = m.\end{aligned}$$

Faisons maintenant avec le déterminant (11) les opérations suivantes :

1° Multiplions chaque colonne de l'ordre $m + 2$ par m .

2° Divisons chaque ligne de l'ordre $m + 2$ par m .

3° Divisons tous les membres par $\frac{8}{\pi^2}$,

4° Divisons les deux premières lignes par $\frac{\pi d}{4\sqrt{R_1}}$ et $\frac{\pi d}{4\sqrt{R_2}}$,

5° Divisons les deux premières colonnes par $\frac{\beta \lambda \pi^3}{2kd\sqrt{R_1}}$ et $\frac{\beta \lambda \pi^3}{2kd\sqrt{R_2}}$,

6° Faisons l'addition et la soustraction des deux premières lignes et des deux premières colonnes pour faire disparaître les membres alternatifs.

Nous obtenons alors le déterminant (11) sous la forme :

$$(11') \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ M'_1 & 0 & L'_1 & \frac{1}{2^2 - 1^2} \frac{d}{R_1} & 0 & \dots \\ 0 & M'_2 & \frac{1}{1^2 - 2^2} \frac{d}{R_1} & L'_2 & \frac{1}{3^2 - 2^2} \frac{d}{R_1} & \dots \\ M'_3 & 0 & 0 & \frac{1}{2^2 - 3^2} \frac{d}{R_1} & L'_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

avec L'_m et M'_m donnés par des formules :

$$L'_m = \frac{\pi^2}{8} L_m,$$

$$M'_m = \frac{m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right) \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2 + \frac{\sigma}{v}\right) + \frac{4 \Omega^2 \lambda^2}{v^2}}.$$

5. — Analyse de l'équation de stabilité.

Il est facile de voir que dans le développement du déterminant (11'), on n'obtient pas de termes contenant m facteurs $L'_1 L'_2 L'_3, \dots, L'_m$ ni de termes contenant $m - 1$ facteurs de ce genre. Les membres contenant $m - 2$ facteurs seront de la forme :

$$\frac{L'_1 L'_2 L'_3 \dots L'_m}{L'_t L'_r} M'_t M'_r$$

où r est impair si t est pair et inversement. Tous les autres termes du développement seront multipliés par le carré, au moins, du rapport $\frac{d}{R_1}$ et seront ainsi de l'ordre négligé par nous. On obtient ainsi une équation qui est analogue à celle qui a été obtenue par TAYLOR (16), mais avec une autre signification des expressions L'_m et M'_m . Cette équation peut être mise sous la forme :

$$(12) \quad (L'_1 L'_2 \dots L'_m) \left(\frac{M'_1}{L'_1} + \frac{M'_3}{L'_3} + \dots \right) \cdot \left(\frac{M'_2}{L'_2} + \frac{M'_4}{L'_4} + \dots \right) = 0.$$

Elle sera satisfaite si tous les L'_m sont nuls. On obtient ainsi les mêmes équations de stabilité que nous avons établies par un procédé approximatif beaucoup moins compliqué dans le chapitre II, 5.

TAYLOR a étudié les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à 0 le deuxième facteur de (12). Nous n'étudierons pas cette équation en détails; nous en tirerons seulement quelques conclusions pouvant confirmer les résultats obtenus auparavant par un calcul approximatif.

Cette équation prend pour $\sigma = 0$, dans notre cas, après quelques simplifications, la forme :

$$(13) \quad \sum_{m \text{ imp.}} \frac{m^2}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^3 - \frac{\alpha \beta \nu - 4k}{\nu^2 k} \lambda^2 \Omega^2} = 0.$$

Elle ne peut avoir lieu que sous la condition $\alpha\beta\nu - 4k > 0$, identique à celle trouvée dans le chapitre II, 5. En prenant la dérivée de l'équation (13) par rapport à λ^2 , on trouve qu'à la valeur minima de Ω correspond la valeur de λ^2 donnée par l'équation :

$$(14) \quad - \sum_{m \text{ imp.}} \frac{m^2 \left[3 \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^2 - \frac{\alpha \beta \nu - 4k}{\nu^2 k} \Omega^2 \right]}{\left[\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^3 - \frac{\alpha \beta \nu - 4k}{\nu^2 k} \Omega^2 \lambda^2 \right]^2} = 0$$

et, par suite, les petites valeurs de Ω^2 satisfont à l'inégalité :

$$(15) \quad 3 \left(\frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^2 < \frac{\alpha \beta \nu - 4k}{\nu^2 k} \Omega^2 < 3 \left(9 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^2.$$

D'autre part, en additionnant l'équation (13) avec l'équation (14) multipliée par λ^2 , on obtient une série :

$$- \sum_{m \text{ imp.}} \frac{m^2 \left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^2 \left(2 \lambda^2 - m^2 \frac{\pi^2}{d^2}\right)}{\left[\left(m^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \lambda^2\right)^3 - \frac{\alpha \beta \nu - 4k}{\nu^2 k} \Omega^2 \lambda^2 \right]^2} = 0$$

qui montre que λ^2 doit être plus grand que $\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{d^2}$. On peut prendre $\frac{9}{2} \frac{\pi^2}{d^2}$ comme limite supérieure de λ^2 puisque, d'après l'inégalité (15), Ω^2 décroît avec λ . On voit ainsi que la longueur de l'onde $l = \frac{2\pi}{\lambda}$ satisfait à l'inégalité :

$$(16) \quad \frac{2}{3} \sqrt{2} < \frac{l}{d} < 2\sqrt{2}$$

et la valeur $2\sqrt{2}$, trouvée dans le chapitre II, 4 et 5, est la limite supérieure de ce rapport $\frac{l}{d}$. L'inégalité (16) correspond au tableau, indiqué dans le chapitre II, 4, et trouvé par un calcul approximatif plus simple. La limite inférieure du rapport $\frac{l}{d}$, supérieur à $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, peut être trouvée par un calcul un peu plus compliqué.

MOUVEMENT GIRATOIRE du FLUIDE
ENTRE DEUX SPHÈRES CONCENTRIQUES MAINTENUES
à des TEMPÉRATURES CONSTANTES DIFFÉRENTES

1. — Application de la méthode générale.

Considérons une masse fluide, animée de rotation entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$), maintenues à des températures constantes différentes T' et T'' . Supposons la vitesse angulaire Ω constante. Le gradient de la température T_0 étant orthogonal à la vitesse $\vec{V}_0$, on déduit de l'équation :

$$\Delta T_0 = 0$$

la valeur de T_0 :

$$\frac{T_0 - T'}{T'' - T'} = \frac{r^{-1} - R_1^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1}},$$

où r désigne la distance d'un point quelconque du centre des sphères. Le gradient de la température a la valeur :

$$\frac{dT_0}{dr} = - \frac{\beta}{r^2}$$

avec β égal à :

$$\beta = \frac{T'' - T'}{R_2^{-1} - R_1^{-1}}.$$

Négligeons la force de pesanteur, comme très petite par rapport à la force centrifuge, $\text{grad } U$, ou $U = \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2)$. On peut étudier le mouvement perturbé par l'influence de la température en appliquant la méthode exposée dans le chapitre I, 4. Cette méthode permet de considérer la densité ρ du fluide comme constante pourvu qu'une petite force égale à $\alpha T_0 \text{ grad } U$, opposée à la force centrifuge et proportionnelle à l'échauffement, soit adjointe à cette force.

Nous avons vu dans le chapitre I, 5, que, si la force centrifuge et le gradient de la température ont la même direction, le mouvement initial ne sera

pas perturbé immédiatement par l'influence de la température. Ce n'est pas le cas dans le problème considéré et il faut appliquer la méthode générale, exposée dans le chapitre I, 4, pour déterminer, de proche en proche, les valeurs des fonctions $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots$ et $T_1, T_2, \dots$ dans les développements :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + (t - t_0) \vec{V}_1 + \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} \vec{V}_2 + \dots$$

$$T = T_0 + (t - t_0) T_1 + \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} T_2 + \dots$$

de la vitesse $\vec{V}$ et de la température T du mouvement perturbé.

Selon la formule (8) du chapitre I, 4, la fonction T_1 est égale à 0. Quant à la fonction $\vec{V}_1$, la formule (12'), du chapitre I, 5, montre que l'influence de la température fait naître, au moment initial, un tourbillon déterminé par la formule suivante :

$$(1) \quad \text{rot } \vec{V}_1 = \alpha (\text{grad } U \times \text{grad } T_0).$$

La vitesse $(t - t_0) \vec{V}_1$ doit satisfaire aussi à l'équation de continuité :

$$(2) \quad \text{div } \vec{V}_1 = 0.$$

Elle est ainsi complètement déterminée.

2. — Détermination de la fonction $\vec{V}_1$.

Introduisons les valeurs de U et de T_0 ; on obtient les équations (1) et (2) sous la forme :

$$(3) \quad \zeta_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = - \frac{\alpha \beta \Omega^2 y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\eta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\alpha \beta \Omega^2 x z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\zeta = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0.$$

Il est facile de voir que l'axe de tourbillon est, en chaque point, parallèle à la vitesse de rotation. Supposons le mouvement symétrique dans chaque plan passant par l'axe de rotation, et introduisons les coordonnées sphériques r, θ, φ :

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi.$$

En désignant par u_{1r} , $v_{1\varphi}$, $w_{1\varphi}$ les trois composantes de la vitesse suivant le rayon, la parallèle et le méridien de la sphère, on voit que la composante $v_{1\theta}$ est nulle; les équations (3) prennent la forme :

$$(3') \quad \begin{aligned} \frac{\partial w_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_{1r}}{\partial \varphi} + \frac{w_{1\varphi}}{r} &= \frac{\alpha \beta \Omega^2}{r} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \frac{\partial u_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_{1\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{u_{1r}}{r} + \frac{w_{1\varphi}}{r} \operatorname{ctg} \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Introduisons la fonction de courant ψ :

$$(4) \quad u_{1r} = - \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad w_{1\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

On obtient alors l'équation :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) = \alpha \beta \Omega^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

qui détermine ψ en fonction de r et de φ .

Cherchons les solutions de l'équation (5) sous la forme :

$$\psi = \psi_r \psi_\varphi = \psi_r \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

où ψ_r est fonction de r seulement; on obtient l'équation :

$$\frac{d^2 \psi_r}{dr^2} - 6 \frac{\psi_r}{r^2} = \alpha \beta \Omega^2,$$

dont la solution générale est :

$$\psi_r = - \frac{\alpha \beta \Omega^2}{4} \left(C_1 r^3 + r^2 + C_2 \frac{1}{r^2} \right).$$

La fonction ψ aura donc la forme :

$$(6) \quad \psi = - \frac{\alpha \beta \Omega^2}{4} \left(C_1 r^3 + r^2 + C_2 \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

et, à l'aide des formules (4), on obtient les composantes cherchées :

$$(7) \quad u_{1r} = - \frac{\alpha \beta \Omega^2}{4} \left(1 + C_1 r + C_2 \frac{1}{r^4} \right) (1 - 3 \cos^2 \varphi),$$

$$(8) \quad w_{1\varphi} = - \frac{\alpha \beta \Omega^2}{4} \left(1 + 3 C_1 r - 2 C_2 \frac{1}{r^4} \right) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Les constantes de l'intégration C_1 et C_2 peuvent être déterminées d'après les conditions aux limites, car la composante u_{1r} doit s'annuler pour $r = R_1$ et $r = R_2$. On obtient ainsi les équations :

$$1 + C_1 R_1 + C_2 \frac{1}{R_1^4} = 0,$$

$$1 + C_1 R_2 + C_2 \frac{1}{R_2^4} = 0,$$

d'où l'on tire :

$$C_1 = - \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^5 - R_1^5}, \quad C_2 = - \frac{R_2^4 R_1^4 (R_2 - R_1)}{R_2^5 - R_1^5}.$$

En remplaçant C_1 et C_2 dans les équations (6), (7) et (8) par leurs valeurs, et en introduisant les quantités sans dimensions :

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_2}, \quad x = \frac{r}{R_2}$$

on obtient les formules :

$$(6') \quad \psi = \frac{\alpha \beta \Omega^2 R_2^2}{4 (1 - \varepsilon^5)} \cdot \frac{(1 - x)(x - \varepsilon)}{x^2} \\ [(1 - \varepsilon^4)x^3 + \varepsilon(1 - \varepsilon^3)x^2 + \varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)x + \varepsilon^3(1 - \varepsilon)] \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

$$(7') \quad u_{1r} = \frac{\alpha \beta \Omega^2}{4 (1 - \varepsilon^5)} \cdot \frac{(1 - x)(x - \varepsilon)}{x^4} \\ [(1 - \varepsilon^4)x^3 + \varepsilon(1 - \varepsilon^3)x^2 + \varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)x + \varepsilon^3(1 - \varepsilon)] (1 - 3 \cos^2 \varphi),$$

$$(8') \quad w_{1\varphi} = \frac{\alpha \beta \Omega^2}{4 (1 - \varepsilon^5)} \cdot \frac{1}{x^4} [3(1 - \varepsilon^4)x^3 - 2(1 - \varepsilon^5)x^4 - 2\varepsilon^4(1 - \varepsilon)] \sin \varphi \cos \varphi.$$

Les quantités ε et x satisfont évidemment à l'inégalité :

$$0 \leq \varepsilon \leq x \leq 1.$$

3. — Lignes de courant du mouvement perturbé.

En appliquant la formule (6'), on peut calculer et reproduire graphiquement les lignes de courant :

$$\psi = \text{Cte}$$

du mouvement perturbé dans le plan vertical passant par l'axe de rotation. Ces lignes se distribueront symétriquement dans les quatre parties égales de l'anneau circulaire, que présente la section verticale de deux sphères concentriques partagée par deux diamètres perpendiculaires. Pour $\psi = 0$, on obtient une ligne de courant qui coïncide dans chaque partie avec les deux arcs de cercle et les éléments de deux diamètres compris entre ces arcs.

La ligne de courant qui correspond à la valeur maxima de ψ est réduite à un point déterminé par deux équations :

$$\frac{d\psi_{\varphi}}{d\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi_r}{dr} = 0.$$

La première équation :

$$1 - 3 \cos^2 \varphi = 0$$

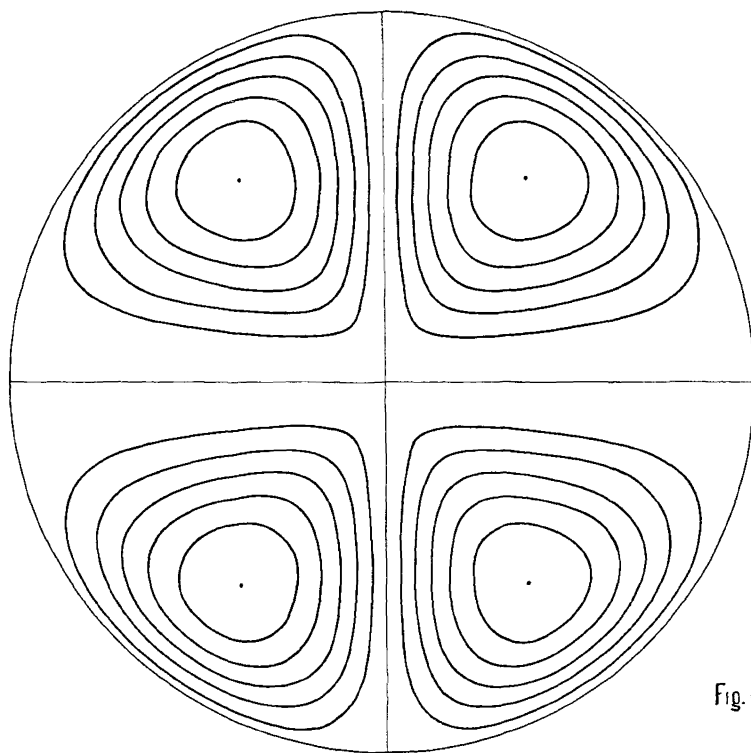


Fig. 6

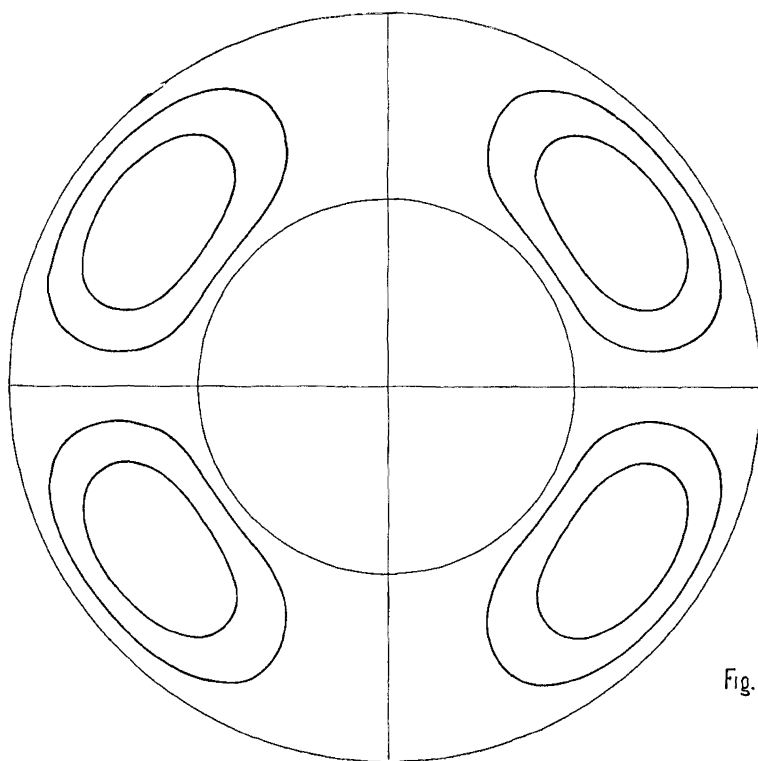


Fig. 7

sera satisfaite pour $\varphi_0 = 54^{\circ}44'$ et la seconde nous donne une équation :

$$3(1 - \varepsilon^4)x^3 - 2(1 - \varepsilon^6)x^4 - 2\varepsilon^4(1 - \varepsilon) = 0$$

qui détermine le rayon r . Il est facile de voir que cette équation a une seule racine dans l'intervalle :

$$0 \leq \varepsilon \leq x \leq 1,$$

que nous désignerons par x_0 . Au point $M_0(x_0, \varphi_0)$, les composantes u_{1r} et w_{1z} sont égales à 0. Les formules (7') et (8') montrent que la composante u_{1r} s'annule aux parois, ainsi qu'en chaque point du rayon déterminé par $\varphi = \varphi_0$. Quant à la composante w_{1z} elle est égale à 0 sur les rayons $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ et en chaque point de la circonférence $r = r_0$.

Dans le cas d'une seule sphère, $R_1 = 0$. En posant dans les équations (6'), (7'), (8') $\varepsilon = 0$, $R_2 = R$, on obtient :

$$\psi = \frac{\alpha \beta \Omega^2 R^2}{4} x^2 (1 - x) \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

$$u_{1r} = \frac{\alpha \beta \Omega^2}{4} (1 - x) (1 - 3 \cos^2 \varphi),$$

$$w_{1z} = \frac{\alpha \beta \Omega^2}{4} (3x - 2) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Dans ce cas, le point M_0 de vitesses nulles se trouve à la distance $\frac{2}{3} R$ du centre de la sphère.

Les figures 6 et 7 représentent les lignes de courant dans les cas où $R_1 = 0$ et $R_1 = \frac{1}{2} R_2$.

4. — Détermination de la fonction $\vec{V}_2$.

Après avoir trouvé la fonction $T_1 = 0$ et les composantes de l'accélération initiale $\vec{V}_1$, données par les formules (7') et (8'), on peut continuer le calcul, par approximations successives, des fonctions T et $\vec{V}$. Déterminons les fonctions $\vec{V}_2$ et T_2 à l'aide des formules générales (9) du chapitre I, 4, à savoir :

$$(9) \quad \left(\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} \right)_{t=t_0} = \vec{V}_2 = -\text{grad}(\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_1) + (\vec{V}_1 \times \text{rot} \vec{V}_0) + (\vec{V}_0 \times \text{rot} \vec{V}_1)$$

$$- \alpha T_1 \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_{t=t_0} = T_2 = -(\text{grad } T_0 \cdot \vec{V}_1) - (\text{grad } T_1 \cdot \vec{V}_0) + k \Delta T_1,$$

$$\text{div} \vec{V}_2 = 0.$$

Dans le cas considéré, nous avons :

$$\vec{V}_0 \vec{V}_1 = 0, \quad \vec{V}_0 \times \text{rot } \vec{V}_1 = 0, \quad T_1 = 0$$

et les formules (9) donnent :

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 &= (\vec{V}_1 \times \text{rot } \vec{V}_0) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_1, \\ T_2 &= -(\text{grad } T_0 \vec{V}_1), \\ \text{div } \vec{V}_2 &= 0. \end{aligned}$$

La température T_2 étant déterminée comme produit scalaire du $\text{grad } T_0$ et de l'accélération $\vec{V}_1$, on voit que :

$$T_2 = \beta \frac{u_{1r}}{r^2}.$$

Quant au vecteur $\vec{V}_2$, ses composantes seront données par les formules :

$$\begin{aligned} u_2 &= 2 \Omega v_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ v_2 &= -2 \Omega u_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y}, \\ w_2 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z}. \end{aligned}$$

Il est évident qu'on peut considérer $p_1 = 0$, car en calculant la divergence du vecteur $\vec{V}_2$:

$$\text{div } \vec{V}_2 = 2 \Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \Delta p_1 = 0$$

on obtient à l'aide des équations (3) :

$$\Delta p_1 = 0.$$

Le vecteur $\vec{V}_2$ est donné ainsi par les formules :

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 &= (\vec{V}_1 \times \text{rot } \vec{V}_0), \\ u_2 &= 2 \Omega v_1, \quad v_2 = -2 \Omega u_1, \quad w_2 = 0, \end{aligned}$$

qui montrent que $\vec{V}_2$ est dirigé suivant la vitesse de rotation $\vec{V}_0$. En désignant par v_2 la composante de $\vec{V}_2$ dans cette direction, on obtient :

$$\begin{aligned} (10) \quad v_{2\parallel} &= -2 \Omega (u_{1r} \sin \varphi + w_{1\varphi} \cos \varphi) \\ &= \frac{\alpha \beta \Omega^3 \sin \varphi}{2 (1 - \varepsilon^3) x^4} \{ [4 \varepsilon^4 (1 - \varepsilon) - (1 - \varepsilon^4) x^5] - [5 \varepsilon^4 (1 - \varepsilon) - (1 - \varepsilon^5) x^4] \sin^2 \varphi \}. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une seule sphère de rayon R , on a $R_1 = 0$ et l'équation (10) se simplifie :

$$(10') \quad v_{20} = \frac{\alpha \beta \Omega^3}{2} (\sin^2 \varphi - x) \sin \varphi.$$

On voit que la composante v_{20} est égale à 0 sur les rayons $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$ et aussi sur la courbe définie par l'équation :

$$(11) \quad \sin^2 \varphi = \frac{(1 - \varepsilon^4) x^5 - 4 \varepsilon^4 (1 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon^5) x^4 - 5 \varepsilon^4 (1 - \varepsilon)}.$$

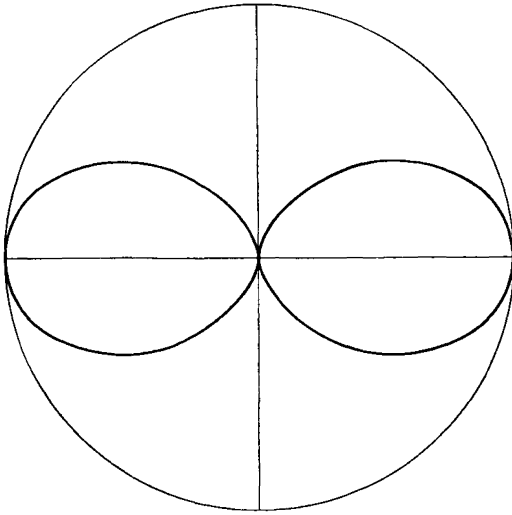


Fig. 8

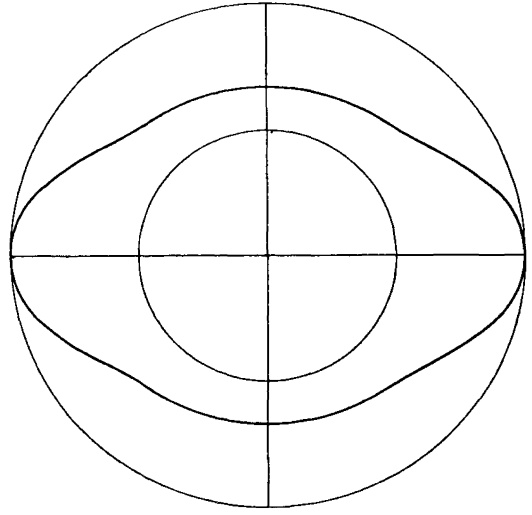


Fig. 9

Cette équation montre que dans l'intervalle :

$$\frac{4 \varepsilon^4}{1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3} < x^5 < 1$$

l'angle φ prend toutes les valeurs comprises entre 0 et π . Pour les valeurs de x plus petites que $\sqrt[5]{\frac{4 \varepsilon^4}{1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3}}$, il n'existe pas de points réels de la courbe (2), sauf un point isolé $x = \varepsilon$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Les points $M_0(r_0, \varphi_0)$, où $\vec{V}_1 = 0$, appartiennent aussi à la courbe (11), c'est-à-dire qu'en ces points la fonction $\vec{V}_2$ est aussi égale à 0. On voit ainsi que l'anneau circulaire, de la section verticale des sphères concentriques, est partagé en deux parties par la courbe (11). Les particules fluides qui se trouvent de part et d'autre de cette courbe sont poussées en sens inverses. Les particules se trouvant sur la courbe (11) restent immobiles pendant le mouvement défini par la vitesse $\vec{V}_2 \frac{(t - t_0)^2}{2}$.

La courbe (11) est dessinée sur les figures 8 et 9 pour $R_1 = 0$ et $R_1 = \frac{1}{2} R_2$.

5. — Propriétés des fonctions $\vec{V}_n$.

A l'aide des formules (10') du chapitre I, 4, on peut indiquer quelques propriétés générales des fonctions $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \dots$ qui apparaissent successivement dans le développement de la vitesse $\vec{V}$. En se souvenant des expressions des composantes de tourbillon $\vec{w}$ dans les coordonnées cylindriques (s, θ, z) et sphériques (r, θ, φ) :

$$\begin{aligned} 2 \omega_s &= \frac{1}{s} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, & 2 \omega_r &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (r v_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r w_\varphi) \right], \\ 2 \omega_\theta &= \frac{\partial u_s}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial s}, & 2 \omega_\theta &= \frac{1}{r \sin \varphi} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta \sin \varphi) \right], \\ 2 \omega_z &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_\theta) - \frac{1}{s} \frac{\partial u_s}{\partial \theta}, & 2 \omega_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r w_\varphi) - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right], \end{aligned}$$

on trouve aisément que le vecteur $\text{rot } \vec{V}_2$ se trouve dans le plan du méridien et, puisque les fonctions $\vec{V}_0$ et $\vec{V}_2$ ne dépendent pas de l'angle θ , on obtient que le vecteur $\vec{V}_3$ se trouve aussi dans le plan du méridien. Il est facile de voir que $\text{rot } \vec{V}_3$ est dirigé suivant la vitesse de rotation $\vec{V}_0$ et la fonction $\vec{V}_4$ est définie par :

$$\vec{V}_4 = \vec{V}_3 \times \text{rot } \vec{V}_0,$$

car la fonction p_3 peut être annulée. En effet, en calculant la divergence de vecteur $\vec{V}_4$, on obtient :

$$\text{div } \vec{V}_4 = \text{div} (\vec{V}_3 \times \text{rot } \vec{V}_0) = 2 \Omega \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 2 \Omega \zeta_3 = 0.$$

En continuant ces raisonnements, on voit que toutes les fonctions p_n pour n impair sont nulles et tous les vecteurs $\vec{V}_{n+1}$, pour n impair, sont dirigés suivant la vitesse de rotation, ne dépendent pas de θ et sont donnés par la formule :

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_n \times \text{rot } \vec{V}_0.$$

Les vecteurs $\vec{V}_{n+1}$, pour n pair, se trouvent dans le plan du méridien et ne dépendent pas non plus de l'angle θ .

On peut donc imaginer les perturbations du mouvement, dues à l'échauffement, comme une série de petits chocs de chaque particule fluide, dirigés alternativement, dans le plan du méridien et dans le sens de rotation générale du fluide. En étudiant le mouvement au moment initial, on peut se borner à l'analyse des quelques premiers membres du développement de $\vec{V}$ et de T , car chaque membre de l'ordre n , ayant comme facteur $\Omega^n (t - t_0)^n$ devient petit pour l'angle de rotation Θ petit.

6. — Quelques généralisations du problème considéré.

Dans le problème traité plus haut, nous avons supposé qu'aucune force extérieure n'agit sur le fluide en mouvement rotatoire. Il est facile de démontrer que, si les particules fluides sont soumises à la force attractive de NEWTON, rien ne change dans les raisonnements précédents.

En effet, supposons que le mouvement initial giratoire se produise sous l'influence d'une force d'attraction :

$$\vec{F}_1 = \text{grad } U_1, \quad U_1 = \frac{\gamma}{r}$$

dirigée dans le sens de rayon r . Si cette force n'est plus négligeable, les équations de mouvement, simplifiées par la méthode généralisée de J. BOUSSINESQ, reçoivent un membre complémentaire $\alpha \text{grad } U_1$ dû à l'échauffement T . La fonction $\vec{V}_1$ sera définie, dans ce cas, par l'équation :

$$\text{rot } \vec{V}_1 = \alpha (\text{grad } U \times \text{grad } T_0) + \alpha (\text{grad } U_1 \times \text{grad } T_0).$$

Mais le second produit vectoriel est nul, car la force attractive $\vec{F}_1$ et le gradient de la température ont la même direction. Les formules qui déterminent les rotations $\vec{V}_1, \vec{V}_2 \dots$ restent identiques à celles trouvées dans les paragraphes précédents. L'effet de la force d'attraction ne se manifeste que dans un changement de la pression p .

Si la force d'attraction $\vec{F}_1$ agissait sur le fluide en repos, les vitesses perturbatrices $\vec{V}_1, \vec{V}_2 \dots$ dues à l'influence de la température, seraient nulles et le fluide resterait non perturbé. On pourrait donc étudier la stabilité du fluide par les méthodes habituelles, en introduisant, par exemple, les petites vitesses perturbatrices et en examinant si les perturbations ainsi obtenues tendent à s'amortir. Le problème, ainsi posé, devient analogue à celui traité dans le chapitre II et III.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. BOUSSINESQ. — *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences*, T. 132, 1901, p. 1382.
Théorie Analytique de la Chaleur, T. 2, 1903, p. 172.
 - (2) LORD RAYLEIGH. — *Phil. Mag.*, 32, 1916, p. 529.
 - (3) H. BÉNARD. — *Rév. Gén. des Sciences*, 12, 1900, p. 1261 et 1309.
 - (4) D. RIABOUCHINSKY. — *Com. Ren. de l'Ac. des Sc.*, T. 195, 1932, p. 576.
 - (5) D. RIABOUCHINSKY. — *Comptes rendus du 2^e Congrès International de Mécanique Appliquée*, Zurich, 1926, p. 516.
 - (6) B. DEMTCHENKO. — *Thèse*, Paris, 1928, p. 21.
 - (7) G.J. TAYLOR. — *Phil. Trans. of the Roy. Soc.*, série A, 223, 1923, p. 289.
 - (8) H. JEFFREYS. — *Proc. Roy. Soc.*, A. 118, 1928, p. 195.
 - (9) C. WORONETZ. — *C. R. de l'Ac. des Sciences*, T. 196, 1933, p. 99.
 - (10) LORD RAYLEIGH. — *Phil. Mag.*, 32, 1916, p. 529.
 - (11) H. LAMB. — *Hydrodynamics.*, 1916, p. 570.
A. LOVE. — *Lehrbuch der Elastität*, 1907, p. 66.
 - (12) G.J. TAYLOR. — *Phil. Trans. of the Roy. Soc.*, série A, 223, 1923, p. 296.
 - (13) GRAY AND MATHEWS. — *Bessel Functions*, p. 53.
 - (14) JANKE UND EMDE. — *Functionen Taffeln*, p. 165.
 - (15) JANKE UND EMDE. — *Functionen Taffeln*, p. 99.
 - (16) G.J. TAYLOR. — *Phil. Trans. of the Roy. Soc.*, série A, 223, 1923, p. 309.
 - (17) D. RIABOUCHINSKY. — Sur les expériences de cours et les travaux pratiques dans l'enseignement de l'aérodynamique. *C. R. du 5^e Congrès International de la Navigation Aérienne*, La Haye, 1930.
 - (18) BJERKNES. — *Hydrodynamique physique*, T. II, p. 479.
-