MEYER

Solutions voisines des solutions de Lagrange dans le problème des *n* corps

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1932

N° D'ORDRE :
2228
Série A.
N° DE SÉRIE :
1363

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. MEYER

1re THÈSE. — Solutions voisines des solutions de Lagrange dans le problème des n corps.

2e THÈSE. — La variation des latitudes.

Soutenues le 1932 devant la Commission d'Examen.

MM. ESCLANGON, *Président.*
CHAZY
LAMBERT } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1932

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.
Doyen	G. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.
Doyen honoraire	M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires	H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, E. PICARD, R. PERRIER.

Professeurs

GOURSAT	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
JANET	Electrotechnique générale.
WALLERANT	Minéralogie.
PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
EMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
ABRAHAM	Physique.
M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
E. CARTAN	Géométrie supérieure.
GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
JEAN PERRIN	Chimie physique.
LAPICQUE	Physiologie générale.
Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
G. URBAIN	Chimie générale.
L. MARCHIS	Aviation.
E. VESSIOT	Théorie des fonctions, théorie des transformations.
A. COTTON	Physique générale.
J. DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
CH. FABRY	Physique.
R. LESPIEAU	Théories chimiques.
P. PORTIER	Physiologie comparée.
CH. PEREZ	Zoologie.
E. BLAISE	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD	Botanique.
LÉON BERTRAND	Géologie structurale et Géologie appliquée.
E. RABAUD	Biologie expérimentale.
G. JULIA	Calcul différentiel et Calcul intégral.
P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
V. AUGER	Chimie appliquée.
P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
EUGÈNE BLOCH	Physique théorique et Physique céleste.
N	Etude des combustibles.
L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
HENRI VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB	Géologie.
P. PASCAL	Chimie minérale.
LÉON BRILLOUIN	Théories physiques.
E. ESCLANGON	Astronomie.
H. BÉNARD	Mécanique expérimentale des fluides.
C. MAUGUIN	Minéralogie.
L. BLARINGHEM	Botanique.
A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
A. DENJOY	Mathématiques générales.
A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
H. BEGHIN	Mécanique physique et expérimentale.

E. PÉCHARD	Chimie (Enseignnt P.C.N.).
A. GUILLET	Physique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.
A. MICHEL-LEVY	Pétrographie.
A. DEREIMS	Géologie.
H. MOUTON	Chimie physique.
L. DUNOYER	Optique appliquée.
M. JAVILLIER	Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY	Zoologie.
A. DEBIERNE	Radioactivité.
E. DARMOIS	Physique.
G. BRUHAT	Physique.
F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
L. JOLEAUD	Paléontologie.
Mme RAMART-LUCAS	Chimie organique.
M. FRECHET	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
FOCH	Mécanique experle des fluides.
PAUTHENIER	Physique (P.C.N.)
VILLEY	Mécanique physique et expérimentale.
DE BROGLIE	Théories physiques.
LABROUSTE	Physique du Globe.
FREUNDLER	Chimie (P.C.N.).
PRENANT	Zoologie.
P. JOB	Chimie générale.
CHRÉTIEN	Optique appliquée.
BOHN	Zoologie (P.C.N.).
N.	Chimie (P.C.N.).
COMBES	Sciences naturelles (P.C.N.).
GARNIER	Mécanique rationnelle.

Secrétaire .... A. PACAUD.

94579 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A MA FEMME

PREMIÈRE THÈSE.

SOLUTIONS VOISINES

DES

SOLUTIONS DE LAGRANGE

DANS LE PROBLÈME DES n CORPS

INTRODUCTION

M. Andoyer nous avait conseillé de reprendre les recherches effectuées par de nombreux auteurs sur les solutions périodiques du problème des n corps, d'en faire un exposé d'ensemble, et, chemin faisant, de les compléter, d'en préciser les résultats partout où cela nous serait possible. Nous avons, dans ce but, réuni une grande masse de documents, dont beaucoup sont plus ou moins classiques et dont d'autres sont personnels. Nous avons commencé la réalisation du travail que nous avait proposé M. Andoyer, et nous en présentons ici la première tranche.

Nous nous occupons, dans les pages qui suivent, des solutions rigoureuses qu'Euler et Lagrange ont découvertes pour le problème des trois corps et qui existent encore dans le cas des n corps (nous nous bornerons toujours au cas où la loi d'attraction est celle de Newton).

Le *Chapitre I* est consacré à établir l'existence de ces solutions : la méthode utilisée dérive directement de celle que M. Andoyer a développée (*Bull. astronomique,* XXIII) en vue de la recherche des positions d'équilibre relatif dans le problème des n corps; l'introduction d'un paramètre de grandeur λ nous a permis d'obtenir ainsi les trajectoires qui sont des systèmes de coniques semblables ayant un de leur foyer au centre de gravité des masses.

Nous étudions, d'abord, le cas où les n masses restent alignées, et nous établissons, d'après M. F. R. Moulton (*Periodic Orbits*, Chap. VIII), que le problème admet $\frac{1}{2}n!$ solutions. Nous supposons ensuite que les n masses restent toujours dans un même plan, d'ailleurs fixe; comme illustration, nous étudions le cas $n = 4$. Après avoir exposé quelques généralités classiques, nous discutons aussi complètement que possible le problème restreint, c'est-à-dire le cas où trois des masses étant finies, la troisième est nulle; ce problème a été traité par M. F. R. Moulton (*Trans. of the Am. Math. Society*, I) par une méthode toute différente de la nôtre (l'étude des courbes de vitesse nulle), mais sans discussion. M. Moulton annonce l'existence de vingt-huit solutions : les dix-huit solutions, dans lesquelles les masses finies restent alignées, existent bien, et comme nous le montrons, pour tous rapports finis des masses [1]; mais, dans le cas où les masses finies sont en triangle équilatéral, nous montrons que les dix solutions annoncées par M. Moulton existent, comme il l'a lui-même prouvé si $m_1 = m_2 = m_3$, que les six solutions extérieures au triangle $M_1M_2M_3$ subsistent pour tous rapports des masses, mais que si, partant de l'égalité, nous faisons varier les masses par continuité, deux des quatre dernières solutions, intérieures au triangle, disparaissent, si l'une des masses devient ou trop petite ou trop grande par rapport aux deux autres. Enfin, nous montrons comment les solutions étudiées rejoignent celles du problème restreint des deux corps ($m_3 = 0$) ou celles du cas où une unique masse finie se trouve en présence de masses nulles ($m_1 = m_2 = 0$). Nous nous sommes étendu assez longuement sur ce cas, qui, à notre connaissance, n'avait jamais été discuté complètement, car c'est le plus simple après le problème restreint des trois corps.

Nous terminons cette étude du problème plan en exposant des cas spéciaux, symétriques, étudiés par M. Lindow et par M. Longley. Nous nous occupons enfin du cas où les n masses sont dans l'espace : les trajectoires

(1) La discussion, dans ce cas, se trouve aussi dans Henrick Block, *Sur une classe de singularités dans le problème des n corps* (*Meddelanden från Lunds Astronomika Observatorium*, Band I, n° 6).

sont alors des droites concourantes; comme illustration, nous étudions le cas où une masse nulle se trouve en présence de quatre masses finies égales aux sommets d'un tétraèdre régulier (généralisation du problème plan étudié précédemment); enfin, nous déduisons de notre théorie les résultats obtenus par M. E. Brehm (*Partikularen Integrale des Problems der n Körper*).

Le *Chapitre II* est consacré à l'étude des solutions voisines des positions d'équilibre relatif dans le problème de n corps ($\lambda = \text{const.}$) en se bornant aux termes du premier ordre dans les équations du mouvement; en d'autres termes, il est consacré à l'intégration des équations aux variations. Nous prenons pour cadre le beau Mémoire de M. Andoyer (*Bulletin astronomique*, 23). Les paragraphes 16 à 18 et 22 sont consacrés à cette exposition, fort importante pour la suite de notre travail; en voici d'ailleurs les résultats essentiels. Les équations aux variations forment deux groupes; l'un d'eux ne contient que les variables ζ, et son intégration dépend d'une équation algébrique d'ordre n en h^2, $\Delta(h^2) = 0$; cette équation admet la racine simple $h^2 = 0$, elle admet aussi $h^2 = -1$, racine simple si les masses sont alignées, double en cas contraire, et les $(n-2)$ ou $(n-3)$ autres racines sont réelles et négatives; l'autre groupe ne contient que ξ et η, et son intégration dépend d'une équation algébrique d'ordre $2n$ en g^2, $\Delta(g^2) = 0$; cette équation admet la racine simple $g^2 = 0$, et la racine triple $g^2 = 1$; enfin, dans le cas où les masses sont alignées, l'équation $\Delta(g^2) = 0$ se décompose : à chaque racine h^2 de $\Delta(h^2) = 0$, différente de 0 et -1, correspond un facteur du second degré en g^2, dont les racines en g^2 sont réelles et de signes contraires si $h^2 < -1$.

Nous avons explicité la solution dans le problème des trois corps de masses finies : nous retrouvons naturellement des résultats classiques, mais nous nous sommes efforcés de préciser la disposition des trajectoires infinitésimales. Dans les paragraphes 23 et 24, nous avons complété le travail de M. Andoyer. Nous montrons d'abord que dans le problème restreint aligné ($(n-1)$ masses finies $+1$ masse nulle, alignées), l'unique racine utile $h^2 = -P$ est inférieure à -1; il en résulte que les deux racines g^2 utiles sont réelles et de signes contraires. Nous montrons ensuite que si n masses finies restent alignées, les racines variables de $\Delta(h^2) = 0$ sont toujours inférieures à -1; il en résulte que celles de $\Delta(g^2) = 0$ se groupent en « quadruplets » de g, tous de même structure : deux racines réelles opposées, deux racines imaginaires pures opposées; ce fait nous permettra dans la suite de traiter complètement le cas où les n masses sont alignées. Nous terminons ce Chapitre en explicitant la solution : dans le problème restreint des trois corps (résultats classiques) ; dans le problème restreint des quatre corps, les trois masses finies étant égales (Lindow); dans le problème restreint des quatre corps, deux des masses finies étant égales. Ces deux dernières applications montrent, sur des exemples, que si les masses ne sont pas alignées, tous les cas théoriquement possibles se présentent effectivement : les deux racines de l'équation aux g^2 peuvent être toutes deux positives, toutes deux négatives, réelles et de signes contraires ou complexes conjuguées ; nous ne pouvons donc espérer ici la belle simplicité du problème aligné.

Dans le *Chapitre III*, nous développons les solutions périodiques au voisinage des positions d'équilibre relatif en nous bornant au problème restreint : $(n-1)$ masses finies et une masse nulle. Les raisonnements sont, à de petites modifications de détail près, ceux de M. Moulton et de M. Buck (*Periodic Orbits*, Chap. V et IX), mais leur portée se trouve considérablement accrue, du fait même de l'étude faite au Chapitre II de notre travail.

Dans le problème restreint aligné des trois corps (deux masses finies et une nulle, alignées), M. Moulton a montré l'existence d'orbites (A) à trois dimensions et rattachées à la racine $h^2 = -P$, et d'orbites (B) situées dans le plan du mouvement des masses finies et rattachées à la racine positive $g^2 = \sigma^2$; il a, de plus, donné la forme analytique des premiers termes du développement de ces orbites ; ces résultats subsistent entièrement pour n quelconque, les quantités P, A, C, etc. qui entrent dans les calculs ayant seulement une signification plus générale.

Si les masses ne sont pas en ligne droite, les orbites (A) existent toujours, et à chaque racine positive de l'équation aux g^2 correspond une famille d'orbites (B) : il peut donc y avoir deux familles de telles orbites (comme dans le problème restreint équilatéral des trois corps, étudié par M. Buck), une seule famille ou aucune. En résumé, dans le problème restreint, au voisinage de chaque position d'équilibre relatif de la masse nulle, il existe une famille d'orbites (A) à trois dimensions, et pour chaque racine positive de l'équation aux g^2, une famille d'orbites (B) planes ; l'existence d'orbites périodiques plus compliquées, dans des cas spéciaux de commensurabilité, reste possible quoique peu probable.

Le *Chapitre IV* est consacré au même problème dans le cas où les masses sont toutes finies. Nous étudions d'abord le problème aligné des trois masses; cette question a été traitée par M. H. E. Buchanan; mais dans son Mémoire, M. Buchanan élimine les coordonnées de l'un des points matériels, en utilisant les intégrales du mouvement du centre de gravité; ce faisant, il détruit la symétrie des équations, masque l'allure générale du problème et rend difficile la généralisation. Nous avons estimé qu'il valait mieux conserver la symétrie. Pour cela, nous avons tout d'abord mis les équations du problème sous forme normale; l'application des intégrales du mouvement du centre de gravité prend alors une forme très simple : six des variables sont nulles et les équations ne contiennent plus que douze variables symétriques. Les intégrales des aires, tout au moins en ce qui concerne les termes utiles à notre raisonnement (termes indépendants de ε), sont aussi fort simples dans ce système d'inconnues. Nous montrons ensuite l'existence d'orbites de période $\frac{2\pi}{h}$ et de période $\frac{2\pi}{\sigma}$ qui généralisent les orbites (A) et (B) du problème restreint; il existe aussi des orbites de période 2π, mais nous montrons que ce sont les solutions elliptiques de Lagrange déjà connues. Les cas de commensurabilité conduisent aux mêmes difficultés que dans le problème restreint.

Notre méthode permet d'étendre les résultats précédents au cas de n masses finies alignées : chaque masse nouvelle, en plus des trois premières, introduit une racine h^2 inférieure à -1 et un « quadruplet » de g, ayant même structure que celui que nous avons rencontré dans le cas $n = 3$; nous avons, en plus des solutions elliptiques de Lagrange, une famille d'orbites (A) pour chaque racine h^2 différente de 0 et -1 [soit $(n-2)$ familles], une famille d'orbites (B) rattachée à chacune des racines positives g^2 de $\Delta(g^2) = 0$ [soit aussi $(n-2)$ familles].

Nous faisons ensuite le même travail pour le cas équilatéral du problème des trois corps : le Mémoire de M. Buchanan qui traite du même sujet et le nôtre présentent les mêmes différences que ci-dessus. Ici, il n'existe que les orbites de Lagrange (de période 2π) et deux familles d'orbites (B) de période $\frac{2\pi}{\sigma_1}$ et $\frac{2\pi}{\sigma_2}$, encore faut-il, pour que ces orbites (B) existent, que $m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 < \frac{1}{27}$. La généralisation au cas $n > 3$ est beaucoup moins régulière que dans le cas des masses alignées.

Nous signalerons enfin que la méthode de calcul, en partant des équations en ξ et η, que nous développons au Chapitre V pour la construction des orbites asymptotiques, s'appliquerait ici presque sous la même forme.

Le *Chapitre V* traite enfin des orbites *asymptotiques aux positions d'équilibre relatif*. Nous étudions successivement le problème restreint, masses alignées et masses non alignées, le problème des trois masses finies alignées qui conduit naturellement à celui des n masses finies alignées, et enfin le problème des trois masses finies en triangle équilatéral. Nos preuves d'existence se font en appliquant un théorème de MM. Poincaré et Picard (E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. I et VIII), et nos constructions des solutions introduisent les constantes d'intégration sous la forme même de la démonstration de M. Picard.

D'une façon générale, toutes les orbites étudiées sont planes. M. Warren (*Am. Journ. of Math.*, vol. 38) avait étudié le problème restreint aligné des trois corps (deux masses finies et une nulle alignées), et il avait montré l'existence de deux orbites tendant asymptotiquement vers chaque position de Lagrange, avec une tangente limite : ces résultats subsistent entièrement pour n quelconque. Le problème restreint non aligné présente plusieurs cas : les deux racines g^2 sont positives et il n'y a pas d'orbites asymptotiques; les deux racines g^2 sont de signes contraires et les conclusions sont les mêmes que dans le problème restreint aligné; les deux racines g^2 sont négatives, et nous avons deux familles à un paramètre d'orbites asymptotiques tendant vers la position de Lagrange dans deux directions limites opposées; les deux racines en g^2 sont complexes : dans ce cas, déjà rencontré par M. Daniel Buchanan pour le problème restreint équilatéral des trois corps, nous avons deux familles à un paramètre d'orbites asymptotiques s'enroulant en spirale autour de la position de Lagrange et rétrogrades par rapport aux axes mobiles. Nous avons réservé à ce cas une discussion plus complète : d'abord il ne se présente pas si les masses sont alignées; au contraire, il se présente dans le problème restreint des trois corps pour lequel nous avons calculé les premiers termes de la solution.

Notre étude du problème des trois masses finies alignées diffère beaucoup de celle de M. Daniel Buchanan; d'abord, nous conservons partout la symétrie dans les calculs; ensuite, nous avons montré au Chapitre II de ce travail que, dans ce cas, les racines g^2 de $\Delta(g^2) = 0$ sont $-\rho^2$, 0, 1 (triple) et σ^2 : un seul des quatre cas envisagés par M. Buchanan se présente effectivement; nous montrons alors l'existence de deux systèmes de trois orbites qui tendent vers les positions de Lagrange avec une direction limite commune; enfin, nous esquissons à cette occasion une méthode de calcul des solutions à partir des équations en ξ et η.

La méthode s'étend facilement au cas de n masses finies alignées : en plus de o et 1, $\Delta(g^2)=0$ a $(n-2)$ couples de racines $-\rho_k^2$ et σ_k^2 $(k=3, 4, \ldots, n)$, nous obtenons deux familles à $(n-3)$ paramètres d'orbites tendant vers les positions de Lagrange avec une direction limite commune.

Nous traitons dans le même esprit le problème équilatéral des trois masses finies et nous obtenons deux familles à un paramètre d'orbites en spirales et rétrogrades.

Nous avons arrêté là notre présent travail ; l'étude des solutions voisines des solutions elliptiques de Lagrange demanderait une place au moins égale, nous la réservons pour une prochaine publication, ainsi que l'étude de l'évolution des solutions ainsi trouvées : c'est là qu'auront leur place l'exposition et la discussion des résultats numériques très complets dus à G. Darwin, à M. Strömgren et à ses collaborateurs et dont nous n'avons point parlé jusqu'ici.

CHAPITRE I.

SOLUTIONS DE LAGRANGE.

SOMMAIRE.

1. Equations générales du problème.
2. Cas où les masses sont alignées. Cas $\nu = 2$, $\nu = 3$.
3. Généralisation au cas : ν quelconque. Existence de $\frac{1}{2}\nu!$ Solutions (Moulton).
4. Cas où les masses sont dans un plan. Cas $\nu = 3$.
5. Cas $\nu = 4$. Généralités.
6. Cas $\nu = 4$. Problème restreint : trois masses finies alignées et une masse nulle.
7. Cas $\nu = 4$. Problème restreint : trois masses finies en triangle équilatéral et une masse nulle. Généralités.
8. Cas particulier $m_1 = m_2 = m_3$.
9. Etude des solutions doubles et évolution des solutions; (Γ) n'a pas de points dans l'aire (C), ni dans l'aire (B), mais en a dans le triangle $M_1M_2M_3$. Examen des cas limites $m_3 = 0$, $m_3 = 1$.
10. Étude de quelques cas symétriques (Lindow).
11. Autres cas symétriques (Longley).
12. Cas où les masses sont dans l'espace. Cas $\nu = 4$.
13. Cas $\nu = 5$. Problème restreint : quatre masses finies au sommet d'un tétraèdre régulier et une masse nulle.
14. Étude d'un cas particulier (E. Brehm).

Comme il est bien connu, Lagrange a montré l'existence de solutions particulières du problème des trois corps, dans lesquelles les distances des trois points matériels conservent des rapports constants pendant tout le mouvement. Euler avait déjà rencontré le cas où les trois corps restent en ligne droite, et Laplace (*Mécanique céleste*, IV) a repris les investigations de Lagrange en leur donnant une forme semi-géométrique. Ces résultats devenus classiques (*cf.* Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I, Chap. VIII; Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, 9e Partie; Moulton, *Introduction to Celestial Mechanics*, Chap. VIII) ont donné lieu à de nombreuses généralisations; nous nous bornerons ici au cas où la loi d'attraction est celle de Newton.

1. Nous pouvons, naturellement, supposer immobile le centre de gravité des masses, et le prendre pour origine O d'un trièdre trirectangle d'axes de coordonnées fixes, soit T.

Les distances mutuelles des ν points matériels $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ restant, durant tout le mouvement, proportionnelles, la configuration du système à un instant t quelconque, se déduit de sa configuration à un autre instant t_0 par une homothétie et une rotation autour de O : il existe donc un trièdre trirectangle T′, mobile, par rapport auquel chaque point du système décrit une droite passant par O; nous supposerons, de plus, qu'à l'instant initial T′ coïncide avec T. A l'instant initial, M_i a pour coordonnées (par rapport à T ou T′) x_i, y_i, z_i; à l'instant t, il a pour coordonnées par rapport à T′

$$\xi = \lambda x_i, \qquad \eta_i = \lambda y_i, \qquad \zeta = \lambda z_i.$$

Soient p, q, r les composantes sur T de la rotation de T′ à l'instant t.

Les composantes de la vitesse de M_i sur les axes T′ sont

$$\begin{aligned} V_{x_i} &= -\lambda(r y_i - q z_i) + \lambda' x_i \\ V_{y_i} &= -\lambda(p z_i - r x_i) + \lambda' y_i \\ V_{z_i} &= -\lambda(q x_i - p y_i) + \lambda' z_i \end{aligned} \qquad \left(\lambda' = \frac{d\lambda}{dt}\right);$$

celles de l'accélération du même point sont

$$J_{x_i} = -r V_{y_i} + q V_{z_i} + \frac{dV_{x_i}}{dt},$$

$$J_{y_i} = -p V_{z_i} + r V_{x_i} + \frac{dV_{y_i}}{dt},$$

$$J_{z_i} = -q V_{x_i} + p V_{y_i} + \frac{dV_{z_i}}{dt}.$$

De plus M_i est soumis, de la part des autres points à des attractions dont les composantes sur T′ sont

$$X_i = \frac{1}{\lambda^2} \sum_j m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

$$Y_i = \frac{1}{\lambda^2} \sum_j m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3},$$

$$Z_i = \frac{1}{\lambda^2} \sum_j m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3};$$

$$r_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 \qquad (j \neq i),$$

la constante d'attraction étant, par un choix convenable du système d'unités, faite égale à l'unité.

Les équations du mouvement du point M'_i sont donc

$$(1)\quad \begin{cases} x_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(q^2+r^2)] + y_i[\lambda^2 pq - (\lambda^2 r)'] + z_i[\lambda^2 pr + (\lambda^2 q)'] = \frac{1}{\lambda}\sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \\ x_i[\lambda^2 pq + (r\lambda^2)'] + y_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(p^2+r^2)] + z_i[\lambda^2 qr - (\lambda^2 p)'] = \frac{1}{\lambda}\sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}, \\ x_i[\lambda^2 pr - (\lambda^2 q)'] + y_i[\lambda^2 qr + (\lambda^2 p)'] + z_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(p^2+q^2)] = \frac{1}{\lambda}\sum m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}. \end{cases}$$

2. *Cas où les masses sont alignées.* — Supposons d'abord que tous les points M_i restent toujours en ligne droite ($\nu \geqq 2$), nous prendrons cette droite comme axe $O\xi$, alors $y_i = z_i = 0$; nous pouvons, de plus, choisir $O\eta$ de telle sorte que $q \equiv 0$; les équations (1) se réduisent alors à

$$\lambda'' - \lambda r^2 = \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{x_i}\sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu;\ j \neq i).$$

$$(r\lambda^2)' = 0,$$

$$\lambda^2 pr = 0.$$

Les deux dernières donnent :

Soit $r = 0$ ($O\xi$ fixe, mouvement rectiligne);

Soit $p = 0$, $r\lambda^2 = \mu$ (constante) ($O\xi$ tourne autour de Oz, mouvement plan).

Dans tous les cas, les ν premières équations deviennent

$$\lambda'' - \frac{\mu^2}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{x_i}\sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

Les ν quantités $\frac{1}{x_i}\sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}$ doivent être égales à une même constante $-k^2$, et l'on a

$$\lambda'' = \frac{-k^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{\lambda^3},$$

$$r\lambda^2 = \mu^2.$$

Chaque point décrit une orbite keplérienne de foyer O.

Les conditions de possibilité sont données par les équations

$$(2)\qquad X_i = \sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} + k^2 x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu;\ j \neq i).$$

On a la relation

$$\sum m_i X_i = 0.$$

Restent donc $n-1$ relations pour déterminer $n-1$ paramètres de forme (k étant donné).

Dans le cas $\nu = 2$, on retrouve (r étant la distance $M_1 M_2$)

$$x_1 = -\frac{m_2 r}{m_1 + m_2}, \qquad x_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}, \qquad k^2 = \frac{m_1 + m_2}{r^3}.$$

Dans le cas $\nu = 3$, en supposant $x_1 < x_2 < x_3$, on a les trois équations

$$\frac{m_2}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{13}^2} + k^2 x_1 = 0,$$

$$-\frac{m_1}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{23}^2} + k^2 x_2 = 0,$$

$$-\frac{m_1}{r_{13}^2} - \frac{m_2}{r_{23}^2} + k^2 x_3 - 0.$$

On peut d'ailleurs remplacer l'une d'elles par leur combinaison

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

en posant

$$z = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_2},$$

on tire

$$\frac{x_1}{m_2 + m_3(1+z)} = \frac{x_2}{m_2 z - m_1} = \frac{x_3}{-m_1 - (m_1 + m_2) z}.$$

z étant donné par

$$m_1 z^2[1 - (1+z)^3] + m_2(1+z)^2(1 - z^3) + m_3[(1+z)^3 - z^3] = 0,$$

équation du 5ᵉ degré, qui a une et une seule racine positive, convenant au problème.

A chacune des trois dispositions possibles des trois points correspond donc une solution.

3. On peut généraliser (Lehmann Filhès; Moulton) et montrer que ν points matériels peuvent pendant tout le mouvement rester en ligne droite, les distances mutuelles restant proportionnelles, et cela de $\frac{1}{2}\nu!$ façons, correspondant aux $\frac{1}{2}\nu!$ dispositions relatives de ces points.

Supposons d'abord la proposition démontrée pour ν points et ajoutons au système un $(\nu+1)^{\text{ième}}$ point de masse $m_{\nu+1}=0$; le système (2) se décompose.

1° Les ν premières équations, qui ne sont autres que les ν équations déterminant les solutions étudiées pour le système des ν points de masses finies, et admettant par hypothèse $\frac{1}{2}\nu!$ solutions réelles.

2° La dernière

$$X_{\nu+1}=m_1\frac{x_1-x_{\nu+1}}{r^3_{1,\nu+1}}+m_2\frac{x_2-x_{\nu+1}}{r^3_{2,\nu+1}}+\ldots+m_\nu\frac{x_\nu-x_{\nu+1}}{r^3_{\nu,\nu+1}}+k^2x_{\nu+1}=0,$$

qui détermine $x_{\nu+1}$, les autres x étant connus.

Considérons une solution $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_\nu^0$ des premières équations et supposons les notations telles que

$$x_1^0<x_2^0<\ldots<x_\nu^0;$$

d'ailleurs

$$\frac{\partial X_{\nu+1}}{\partial x_{\nu+1}}>0;$$

on conclut qu'il existe une racine réelle en $x_{\nu+1}$ dans chacun des intervalles

$$-\infty,\quad x_1^0,\quad x_2^0,\quad \ldots,\quad x_\nu^0,\quad +\infty,$$

soit $\nu+1$ solutions; soit en tout $\frac{1}{2}(\nu+1)!$ solutions.

Considérons maintenant une solution $x_1^0<x_2^0<\ldots<x_{\nu+1}^0$ obtenue pour $m_k=m_k^0\geqq 0$ et supposons que m_k varie d'une façon continue en restant supérieure ou au moins égale à zéro. Les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}$ subiront des variations continues à partir de leurs valeurs initiales; elles resteront des fonctions définies et continues de m_k tant qu'aucune d'elles ne deviendra infinie et tant que deux d'entre elles, restant finies, ne viendront pas se confondre; d'autre part, un système de solutions d'un système algébrique à coefficients réels ne peut devenir imaginaire qu'en devenant infini, ou en s'unissant à un autre, en solution double.

a. Si r_{ij} tend vers zéro $(i<j)$, x_i et x_j restant finies, le terme correspondant dans X_i devient $+\infty$, donc un r_{ig} doit tendre vers zéro de telle sorte que le terme correspondant tende vers $-\infty (g<i)$; ... finalement un $r_{1.q}$ doit tendre vers zéro et X_1 où tous les termes sont positifs, sauf k^2x_1,

ne peut être satisfaite; donc deux racines x_i et x_j ne peuvent se confondre en restant finies.

b. Si x_i tend vers $-\infty$, il en est *a fortiori* de même de x_1 et la relation $m_1 x_1 + \ldots + m_{\nu+1} x_{\nu+1} = 0$ montre alors que $x_{\nu+1}$ tend vers $+\infty$. Mais puisque $k^2 x_1$ tend vers $-\infty$, X_1 montre que x_2 tend aussi vers $-\infty$, de telle sorte que $x_2 - x_1$ tende vers zéro; $k_2 x_2$ et $\frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3}$ tendant vers $-\infty$, X_2 montre que x_3 tend vers $-\infty$; ... finalement $x_{\nu+1}$ doit tendre aussi vers $-\infty$, d'où contradiction; donc aucune racine x_i ne peut devenir infinie.

c. Le système (2) ne peut avoir de solution double que si

$$\Delta = \frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_{\nu+1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1})} = \begin{vmatrix} k^2 + \sum' \frac{2m_j}{r_{ij}^3} & -\frac{2m_2}{r_{12}^3} & \ldots \\ -\frac{2m_1}{r_{12}^3} & k^2 + \sum' \frac{2m_j}{r_{2j}^3} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Si tous les m sont différents de zéro, multipliant les lignes par $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, ... et divisant les colonnes par les mêmes quantités, on obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} k^2 + \sum' \frac{2m_j}{r_{ij}^3} & -\frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{r_{12}^3} & \ldots \\ -\frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{r_{12}^3} & k^2 + \sum' \frac{2m_j}{r_{2j}^3} & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

que l'on relie immédiatement à l'équation en $S(S = -k^2)$ de l'hyperquadrique

$$2\frac{(\sqrt{m_2}\alpha_1 - \sqrt{m_1}\alpha_2)^2}{r_{12}^3} + 2\frac{(\sqrt{m_3}\alpha_1 - \sqrt{m_1}\alpha_3)^2}{r_{13}^3} + \ldots = 0,$$

qui a manifestement toutes ses racines réelles et non négatives.

Donc $\Delta > 0$. D'ailleurs si $m_k = 0$, Δ se réduit à un déterminant de même forme, multiplié par un facteur positif, et le système (2) n'a jamais de solution double.

Finalement, quand m_k varie en restant supérieur ou au moins égal à zéro, les solutions du système (2) sont toujours des fonctions définies et continues de m_k qui ne peuvent jamais passer du réel à l'imaginaire, les $\frac{1}{2}(\nu + 1)!$

solutions trouvées pour $m_k = 0$ se retrouvent par continuité pour toute valeur positive de ce paramètre.

4. *Cas où les masses sont dans un plan.* — Supposons maintenant que les points M_i restent toujours dans un même plan ($\nu \geqq 3$), que nous prendrons pour plan $\zeta = 0$; le système (I) se réduit à

$$\begin{aligned}
&x_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(q^2+r^2)] + y_i[\lambda^2 pq - (\lambda^2 r)'] = \frac{1}{\lambda}\sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},\\
&x_i[\lambda^2 pq + (\lambda^2 r)'] + y_i[\lambda\lambda'' - \lambda^2(p^2+r^2)] = \frac{1}{\lambda}\sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_i^3},\\
&x_i[\lambda^2 pr - (\lambda^2 q)'] + y_i[\lambda^2 qr + (\lambda^2 p)'] = 0.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\lambda^2 pr - (\lambda^2 q)' = \lambda^2 qr + (\lambda^2 p)' = 0,$$

d'où

$$\lambda^4(p^2+q^2) = \text{const.},$$

on voit aussi que les quantités

$$\lambda\lambda'' - \lambda^2(q^2+r^2),\quad \lambda\lambda'' - \lambda^2(p^2+r^2),\quad \lambda^2 qp,\quad (\lambda^2 r)'$$

sont de la forme $\frac{K}{\lambda}$; il en est donc de même de $\lambda^2(q^2 - p^2)$, et par suite de

$$\lambda^2(q^2+p^2);$$

d'où

$$\lambda^3(p^2+q^2) = \text{const.}$$

Par suite, ou bien

$$p = q = 0$$

ou bien

$$\lambda = \text{const.}$$

Dans ce dernier cas, p^2+q^2, q^2+r^2, p^2+r^2 sont des constantes, donc aussi p, q, r, d'où

$$pr = qr = 0.$$

Alors, ou bien

$$p = q = 0 \qquad \text{(déjà trouvé)}$$

ou bien

$$r = 0:$$

le plan $\xi O \eta$ tourne autour d'un axe fixe contenu dans ce plan lui-même; on peut le choisir pour Ox de sorte que $q = 0$. Les équations d'équilibre sont alors

$$0 = \sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

$$-p^2 y_i = \frac{1}{\lambda} \sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}, \qquad \text{d'où } p^2 = \text{const.};$$

mais avec les premières on peut former la combinaison

$$\sum_i \left(m_i x_i \sum_j m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \right) = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = 0,$$

à laquelle il est manifestement impossible de satisfaire; donc $p = q = 0$: le mouvement est plan.

Les équations (1) deviennent donc

$$x_i(\lambda\lambda'' - \lambda^2 r^2) - y_i(\lambda^2 r)' = \frac{1}{\lambda} \sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

$$x_i(\lambda^2 r)' + y_i(\lambda\lambda'' - \lambda^2 r^2) = \frac{1}{\lambda} \sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3},$$

d'où l'on tire

$$(\lambda^2 r)'(x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{\lambda} \sum m_j \frac{x_i y_j - y_i x_j}{r_{ij}^3},$$

puis

$$(\lambda^2 r)' \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = 0;$$

$$(\lambda^2 r)' = 0;$$

enfin

$$\lambda^2 r = \mu^2$$

et

$$\lambda'' - \frac{\mu^2}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{x_i} \sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{y_i} \sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}.$$

Les quantités $\frac{1}{x_i} \sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}$ et $\frac{1}{y_i} \sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}$ doivent être égales à une même quantité $-k^2$, et l'on a

$$\lambda^2 r = \mu^2,$$

$$\lambda'' = -\frac{k^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{\lambda^3},$$

chaque point décrit encore une orbite keplérienne de foyer O. Les conditions de possibilité sont données par les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_i &= \sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} + k^2 x_i = 0, \\ Y_i &= \sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3} + k^2 y_i = 0. \end{aligned} \right.$$

En tenant compte des relations

$$\sum m_i X_i = 0,$$

$$\sum m_i Y_i = 0,$$

$$\sum m_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0,$$

il reste $2n - 3$ relations pour déterminer $2n - 3$ paramètres de forme du système (k étant donné).

On peut former des relations ne contenant que les masses m_i et les distances r_{ij}

$$(x_i - x_j)(Y_i - Y_j) - (y_i - y_j)(X_i - X_j) = 0$$

ou

$$\sum m_h (i, j, h)\left[\frac{1}{r_{ih}^3} - \frac{1}{r_{jh}^3}\right],$$

h étant différent de i et j et

$$(i, j, h) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_h & y_h & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut aussi remarquer que les équations de condition (3) expriment que la fonction

$$U = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}} + \frac{k^2}{2M} \sum m_i m_j r_{ij}^2 \qquad \left(M = \sum m_i\right)$$

satisfait aux conditions du premier ordre.

Ses dérivées premières sont toutes nulles, comme il arrive dans la recherche des maxima et minima.

Dans le cas de trois points, on a le résultat classique depuis Lagrange :

$$r_{12} = r_{23} = r_{31};$$

les trois points forment un triangle équilatéral.

5. Étudions le cas de quatre points. On a entre les r les six équations :

$$m\ (123)\left[\frac{1}{r_{13}^3}-\frac{1}{r_{23}^3}\right]+m_4(124)\left[\frac{1}{r_{14}^3}-\frac{1}{r_{24}^3}\right]=0,$$

$$m_2(132)\left[\frac{1}{r_{12}^3}-\frac{1}{r_{23}^3}\right]+m_4(134)\left[\frac{1}{r_{14}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right]=0,$$

$$m_2(142)\left[\frac{1}{r_{12}^3}-\frac{1}{r_{24}^3}\right]+m_3(143)\left[\frac{1}{r_{13}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right]=0,$$

$$m_1(231)\left[\frac{1}{r_{12}^3}-\frac{1}{r_{13}^3}\right]+m_4(234)\left[\frac{1}{r_{24}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right]=0,$$

$$m_1(241)\left[\frac{1}{r_{12}^3}-\frac{1}{r_{14}^3}\right]+m_3(243)\left[\frac{1}{r_{23}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right]=0,$$

$$m_1(341)\left[\frac{1}{r_{13}^3}-\frac{1}{r_{14}^3}\right]+m_2(342)\left[\frac{1}{r_{23}^3}-\frac{1}{r_{24}^3}\right]=0.$$

Outre la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^3 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^3 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

qui exprime que les quatre points sont dans un plan, les r vérifient encore, quelles que soient les masses, une relation obtenue par exemple en éliminant m_2, m_3, m_4 entre les trois premières équations ci-dessus, et qui peut s'écrire sous la forme symétrique :

$$\begin{vmatrix} 1 & r_{12}^3+r_{34}^3 & r_{12}^3 r_{34}^3 \\ 1 & r_{13}^3+r_{24}^3 & r_{13}^3 r_{24}^3 \\ 1 & r_{14}^3+r_{23}^3 & r_{14}^3 r_{23}^3 \end{vmatrix}=0.$$

(Cette relation nécessaire n'est pas suffisante : tout quadrilatère la vérifiant n'est pas une figure répondant au problème, car les masses placées aux sommets ne seraient pas forcément positives. Prenons par exemple un losange

$$r_{12}=r_{23}=r_{34}=r_{14}=a\,;$$

on trouve les conditions

$$m_2=m_4, \qquad m_1=m\ ,$$

et en appelant φ l'angle de M_1M_3 avec M_1M_2,

$$m_1\left[\frac{1}{8\cos^3\varphi}-1\right]=m_2\left[\frac{1}{8\sin^3\varphi}-1\right].$$

D'où

$$\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{3}.)$$

Des six équations du problème, on déduit facilement, en exprimant que les masses sont positives, les résultats généraux suivants (Dziobek) :

a. Les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 forment un quadrilatère convexe : chacune des diagonales M_1M_3 et M_2M_4 est supérieure à tous les côtés M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_1M_4, et, de plus, les deux côtés extrêmes (le plus grand et le plus petit) sont opposés.

b. L'un des points M_4 est intérieur au triangle $M_1M_2M_3$; et

$$M_1M_2 < M_2M_3 < M_3M_1 ;$$

alors $M_3M_4 < M_1M_4 < M_2M_4$, et dans chacun des triangles de sommet M_4, c'est le côté M_1M_2 ou M_2M_3 ou M_3M_1 qui est le plus grand.

6. Développons complètement les calculs dans le cas des quatre points, en supposant que trois d'entre eux aient des masses finies et que le quatrième (M_4) ait au contraire une masse infiniment petite ($m_4 = 0$). Ce dernier n'exerce aucune action sur les trois premiers qui, par suite, doivent être, soit en ligne droite, soit aux sommets d'un triangle équilatéral.

Supposons d'abord que les trois masses finies soient en ligne droite ; on peut prendre cette droite pour axe des x, et l'on a, pour déterminer les coordonnées de M_4, les deux équations :

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} & m_1\frac{x_4-x_1}{r_{14}^3} + m_2\frac{x_4-x_2}{r_{24}^3} + m_3\frac{x_4-x_3}{r_{34}^3} - k^2x_4 = 0. \\ & y_4\left[\frac{m_1}{r_{14}^3} + \frac{m_2}{r_{24}^3} + \frac{m_3}{r_{34}^3} - k^2\right] = 0 ; \end{aligned}\right.$$

ou bien $y_4 = 0$ et l'on retrouve les solutions alignées précédemment étudiées, ou bien on a les deux équations

$$\frac{m_1}{r_{14}^3} + \frac{m_2}{r_{24}^3} + \frac{m_3}{r_{34}^3} - k^2 = 0,$$

$$\frac{m_1x_1}{r_{14}^3} + \frac{m_2x_2}{r_{24}^3} + \frac{m_3x_3}{r_{34}^3} \qquad = 0.$$

On peut prendre comme variables r_{14}, r_{24}, r_{34} en ajoutant l'équation

$$r_{14}^2r_{23} + r_{34}^2r_{12} - r_{24}^2r_{13} - r_{12}r_{23}r_{13} = 0 \qquad (x_1 < x_2 < x_3)$$

d'où

$$\frac{1}{r_{14}^3} = \frac{k^2 x_3}{m_1 r_{13}} - \frac{m_2 r_{23}}{m_1 r_{13}} \frac{1}{r_{24}^3},$$

$$\frac{1}{r_{34}^3} = -\frac{k^2 x_1}{m_1 r_{13}} - \frac{m_2 r_{12}}{m_1 r_{13}} \frac{1}{r_{24}^3},$$

$$\frac{r_{23}}{\left[\dfrac{k^2 x_3}{m_1 r_{13}} - \dfrac{m_2 r_{23}}{m_1 r_{13}} \dfrac{1}{r_{24}^3}\right]^{\frac{2}{3}}} + \frac{r_{12}}{\left[-\dfrac{k^2 x_1}{m_1 r_{13}} - \dfrac{m_2 r_{12}}{m_1 r_{13}} \dfrac{1}{r_{24}^3}\right]^{\frac{2}{3}}} - r_{13} r_{24}^2 - r_{12} r_{23} r_{13} = 0.$$

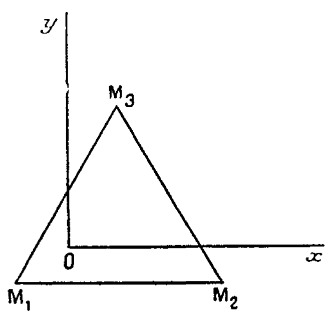
Quand $\frac{1}{r_{24}^3}$ reste inférieur à la plus petite des quantités $\frac{k^2 x_3}{m_2 r_{23}}$ et $-\frac{k^2 x_1}{m_2 r_{12}}$, l'expression qui constitue le premier membre de la troisième équation décroît de $+\infty$ à $-\infty$: nous avons toujours une et une seule solution réelle pour (r_{24}, r_{14}, r_{34}), donc deux solutions symétriques par rapport à $y = 0$.

7. Supposons maintenant que les trois masses finies forment un triangle équilatéral, dont nous prendrons le côté pour unité de longueur

$$(k^2 = m_1 + m_2 + m_3).$$

Les coordonnées de ces trois masses sont (en prenant Ox parallèle à

Fig. 1.



$M_1 M_2$] (*fig.* 1)

$$M_1 \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \dfrac{2m_2 + m_3}{M}, \\ y_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{m_3}{M}; \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{2m_1 + m_3}{M}, \\ y_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{m_3}{M}; \end{cases} \qquad M_3 \begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{2} \dfrac{m_1 - m_2}{M}, \\ y_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{m_1 + m_2}{M}. \end{cases}$$

On a de plus

$$r_{14}^2 - r_{24}^2 + \frac{m_1 - m_2}{M} = 2x_4,$$

$$r_{14}^2 + r_{24}^2 - 2r_{34}^2 + \frac{m_1 + m_2 - 2m_3}{M} = 2\sqrt{3}y_4.$$

Les équations sont ici :

$$(5)\begin{cases} m_1 \dfrac{x_4 + \dfrac{1}{2}\dfrac{2m_2 + m_3}{M}}{r_{14}^3} + m_2 \dfrac{x_4 - \dfrac{1}{2}\dfrac{2m_1 + m_3}{M}}{r_{24}^3} + m_3 \dfrac{x_4 - \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1 - m_2}{M}}{r_{34}^3} - Mx_4 = 0, \\[2ex] m_1 \dfrac{y_4 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{m_3}{M}}{r_{14}^3} + m_2 \dfrac{y_4 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{m_3}{M}}{r_{24}^3} + m_3 \dfrac{y_4 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{m_1 + m_2}{M}}{r_{34}^3} - My_4 = 0 \end{cases}$$

ou, en prenant comme variables les r :

$$(6)\begin{cases} (r_{14}^2 - r_{24}^2)\left[m_1\left(1 - \dfrac{1}{r_{14}^3}\right) + m_2\left(1 - \dfrac{1}{r_{24}^3}\right) + m_3\left(1 - \dfrac{1}{r_{34}^3}\right)\right] \\ \qquad + \left[m_1\left(1 - \dfrac{1}{r_{14}^3}\right) - m_2\left(1 - \dfrac{1}{r_{24}^3}\right)\right] = 0, \\ (r_{24}^2 - r_{34}^2)\left[m_1\left(1 - \dfrac{1}{r_{14}^3}\right) + m_2\left(1 - \dfrac{1}{r_{24}^3}\right) + m_3\left(1 - \dfrac{1}{r_{34}^3}\right)\right] \\ \qquad + \left[m_2\left(1 - \dfrac{1}{r_{24}^3}\right) - m_3\left(1 - \dfrac{1}{r_{34}^3}\right)\right] = 0, \\ r_{14}^2(r_{14}^2 - r_{24}^2 - 1) + r_{24}^2(r_{24}^2 - r_{34}^2 - 1) + r_{34}^2(r_{34}^2 - r_{14}^2 - 1) + 1 = 0, \end{cases}$$

la dernière des équations (6) exprimant que les quatre points sont dans un plan. On a d'ailleurs :

$$\frac{m_1\left(1 - \dfrac{1}{r_{14}^3}\right)}{(423)} = \frac{m_2\left(1 - \dfrac{1}{r_{24}^3}\right)}{(431)} = \frac{m_3\left(1 - \dfrac{1}{r_{34}^3}\right)}{(412)} = \frac{\sum m_1\left(1 - \dfrac{1}{r_{14}^3}\right)}{(123)}.$$

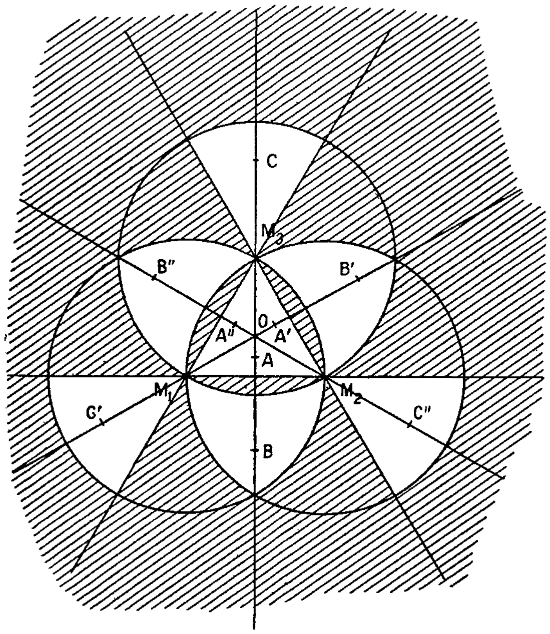
On en déduit facilement que si aucune des masses m_1, m_2, m_3 n'est nulle, il ne peut y avoir de solution que dans les aires laissées en blanc (*fig.* 2); et que de plus, pour toute solution,

$$\sum m_1\left(1 - \frac{1}{r_{14}^3}\right) < 0.$$

Il en résulte que si les trois masses m_1, m_2, m_3 restent finies, aucune solution ne peut ni disparaître ni apparaître à l'infini.

D'autre part, d'après les équations (5), aucun r ne peut tendre vers zéro, au moins tant qu'aucune des masses m_1, m_2, m_3 ne tend vers zéro.

Fig. 2.



Enfin le déterminant fonctionnel des équations (5) par rapport à x_4 et y_4 est

$$\begin{vmatrix} \frac{m_1}{r_{14}^3}+\frac{m_2}{r_{24}^3}+\frac{m_3}{r_{34}^3} - \mathrm{M} - 3\sum m_1 \frac{(x_4-x_1)^2}{r_{14}^5} & -3\sum m_1 \frac{(x_4-x_1)(y_4-y_1)}{r_{14}^5} \\ -3\sum m_1\frac{(x_4-x_1)(y_4-y_1)}{r_{14}^5} & \frac{m_1}{r_{14}^3}+\frac{m_2}{r_{24}^3}+\frac{m_3}{r_{34}^3} - \mathrm{M} - 3\sum m_1 \frac{(y_4-y_1)^2}{r_{14}^5}\end{vmatrix}$$

ou

$$\left[\sum m_1\left(1-\frac{1}{r_{14}^3}\right)\right]^2 + 3\sum m_1\left(1-\frac{1}{r_{14}^3}\right)\sum\frac{m_1}{r_{14}^3} + 9\sum\frac{m_1 m_2}{r_{14}^5 r_{24}^5}\begin{vmatrix}x_4&y_4&1\\x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\end{vmatrix}^2.$$

Or, des équations (6), nous tirons

$$\frac{m_1}{\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3 d_1} = \frac{m_2}{\mathrm{R}_3\mathrm{R}_1 d_2} = \frac{m_3}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 d_3}$$

avec

$$R_1 = 1 - \frac{1}{r_{14}^3}, \qquad R_2 = 1 - \frac{1}{r_{24}^3}, \qquad R_3 = 1 - \frac{1}{r_{34}^3},$$

$$d_1 = r_{34}^2 + r_{24}^2 - 2r_{14}^2 + 1,$$
$$d_2 = r_{14}^2 + r_{34}^2 - 2r_{24}^2 + 1,$$
$$d_3 = r_{14}^2 + r_{24}^2 - 2r_{34}^2 + 1.$$

Le lieu des solutions doubles des équations (6) est donc

$$9R_1R_2R_3\left[R_1R_2R_3 + R_2R_3\frac{d_1}{r_{14}^3} + R_3R_1\frac{d_1}{r_{24}^3} + R_1R_2\frac{d_3}{r_{34}^3}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{12}d_1d_2d_3\left(\frac{R_3d_3}{r_{14}^5r_{24}^5} + \frac{R_1d_1}{r_{24}^5r_{34}^5} + \frac{R_2d_2}{r_{34}^5r_{14}^5}\right)\right] = 0.$$

Le cercle $R_1 = 1 - \frac{1}{r_{14}^3} = 0$ correspond au cas limite $m_2 = m_3 = 0$; et il en est de même de $R_2 = 0$ et $R_3 = 0$, qui correspondent à $m_3 = m_1 = 0$ et $m_1 = m_2 = 0$.

Il reste enfin la courbe (Γ):

$$R_1R_2R_3 + \sum R_2R_3\frac{d_1}{r_{14}^3} + \frac{1}{12}d_1d_2d_3\sum\frac{R_3d_3}{r_{14}^5r_{24}^5} = 0$$

qui a, comme nous le verrons, des points réels.

8. Étudions d'abord le cas particulier $m_1 = m_2 = m_3$. Alors les deux premières équations (6) s'écrivent :

$$(r_{14} - r_{24})\left[(r_{14} + r_{24})\left(3 - \frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{34}^3}\right) + \frac{r_{14}^2 + r_{14}r_{24} + r_{24}^2}{r_{14}^3r_{24}^3}\right] = 0,$$

$$(r_{24} - r_{34})\left[(r_{24} + r_{34})\left(3 - \frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{34}^3}\right) + \frac{r_{24}^2 + r_{24}r_{34} + r_{34}^2}{r_{24}^3r_{34}^3}\right] = 0.$$

On a : ou

$$r_{14} = r_{24} = r_{34} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

ou

$$r_{14} = r_{24},$$

ou

$$r_{24} = r_{34},$$

ou les deux crochets nuls en même temps; mais alors

$$(r_{14} - r_{34})\left[\sum r_{14}^3(r_{24}^2 + r_{24}r_{34} + r_{34}^2) + 2r_{14}r_{24}r_{34}\sum r_{14}r_{34}\right] = 0;$$

donc, si les trois distances ne sont pas égales, deux d'entre elles le sont; il nous suffit d'étudier le cas $r_{14}=r_{24}$: $x_4=0$ et y_4 est racine de l'équation

$$F(y_4)=\frac{2\left(y_4+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{\left[\frac{1}{4}+\left(y_4+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{y_4-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left|y_4-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|^3}-3y_4=0.$$

Posons (en supprimant l'indice de y, puisqu'il ne peut y avoir d'ambiguïté) :

$$F_1(y)=\frac{2\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{\left[\frac{1}{4}+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},\qquad F_2(y)=3y-\frac{\varepsilon}{\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$\left(\varepsilon>0,\ \text{si } y>\frac{\sqrt{3}}{3};\ \varepsilon<0,\ \text{si } y<\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Alors

$$F'_1(y)=2\frac{\frac{1}{4}-2\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}{\left[\frac{1}{4}+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}},\qquad F'_2(y)=3+\frac{2\varepsilon}{\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3},$$

$$F''_1(y)=2\frac{\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left[6\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2-\frac{9}{4}\right]}{\left[\frac{1}{4}+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right]^{\frac{7}{2}}},\qquad F''_2(y)=-\frac{6\varepsilon}{\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4}.$$

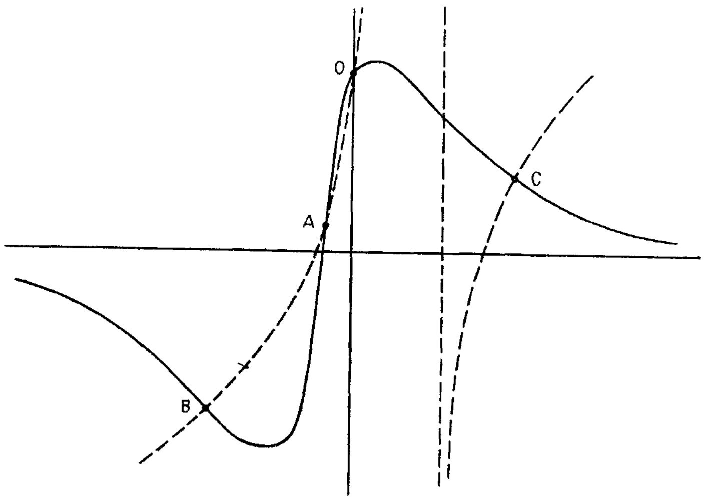
y	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{4}$		$-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{4}$		$-\frac{\sqrt{3}}{6}$		0		$-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{4}$		$-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{4}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
F_1	0	$\searrow$	Inflex.	$\searrow$	$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$16\frac{\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	Inflex.	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0
F'_1			$-$			$+$	16	$+$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+$			$-$				
F_2	$-\infty$		$\nearrow$		a	$\nearrow$	$\frac{8-3\sqrt{3}}{6}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$		$\nearrow$			$^{+}0 \mid 0_{-}$	$\nearrow$	$+\infty$
F'_2							$3+\frac{16\sqrt{3}}{9}$		$3+6\sqrt{3}$								

$$\left(a=\frac{56}{25}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{16\sqrt{6}}{25}\right)$$

Il y a donc pour $x = 0$, et outre $y = 0$ trois racines en y ;

$$y = -0,2390,$$
$$y = -0,9352,$$
$$y = \quad 1,1800.$$

Fig. 3.



Donc, dans le cas particulier,

$$m_1 = m_2 = m_3,$$

nous avons dix position de Lagrange : O; A, A′, A″; B, B′, B″; C, C′ et C″.

9. Reprenons l'étude de la courbe (Γ), lieu des solutions doubles des équations (5). Si nous prenons le point M_3 pour origine des coordonnées, (Γ) s'écrit :

$$\Gamma = R_1R_2R_3 - R_2R_3\sqrt{3}\,\frac{y+\sqrt{3}x}{r_{14}^3} - R_3R_1\sqrt{3}\,\frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3} + R_1R_2\sqrt{3}\,\frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3}$$
$$+\frac{3}{4}(y^2-3x^2)(2y+\sqrt{3})\left[\frac{R_3(2y+\sqrt{3})}{r_{14}^5 r_{24}^5} - \frac{R_1(y+\sqrt{3}x)}{r_{24}^5 r_{34}^5} - \frac{R_2(y-\sqrt{3}x)}{r_{14}^5 r_{34}^5}\right] = 0.$$

Plaçons-nous, d'abord, dans l'aire (C) qui contient la solution C : R_1 et R_2

sont positifs, R_3 négatif; de plus $\frac{y^2 - 3x^2}{r_{34}^2} < 1$; et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Gamma > &\left[R_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{y - \sqrt{3}x}{r_{14}^5}\right] \\
&\times\left[R_2R_3 + (2y + \sqrt{3})\sqrt{3}\frac{R_2}{r_{34}^3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(2y + \sqrt{3})^2(y + \sqrt{3}x)\frac{R_3}{r_{24}^5}\right] \\
&+ \frac{3}{4}\frac{(2y + \sqrt{3})}{r_{34}^3}\left[\frac{R_2(y - \sqrt{3}x)}{r_{14}^5} - \frac{R_1(y + \sqrt{3}x)}{r_{24}^5}\right] \\
&+ R_3 y\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{R_2}{r_{14}^5}(1 - 2r_{14}^2) + \frac{R_1}{r_{24}^5}[(2y + \sqrt{3})^2 - 2r_{24}^2]\right] \\
&+ R_3 x\ \frac{3}{2}\ \left[\frac{R_1}{r_{24}^5}[(2y + \sqrt{3})^2 + 2r_{24}^2] - \frac{R_2}{r_{14}^5}(1 + 2r_{14}^2)\right].
\end{aligned}$$

Posons $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ ($\rho = r_{34}$). Quand nous nous déplaçons sur un cercle $\rho = \text{const.}$, θ variant de $\frac{2\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{3}$, R_1 croît, r_{14} croît et $y - \sqrt{3}x$ décroît; le premier facteur du premier terme atteint son minimum sur $\theta = \frac{2\pi}{3}$; ce minimum

$$1 - \frac{\rho^2 + \frac{5}{2}\rho + 1}{(\rho^2 + \rho + 1)^{\frac{5}{2}}}$$

croît de o à $1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ quand ρ croît de o à 1 ; le facteur étudié est donc toujours positif. Le second facteur est la somme des deux quantités

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}(2y + \sqrt{3})^2(y + \sqrt{3}x)\frac{R_3}{r_{24}^5} \qquad \text{et} \qquad R_2\left[1 + \frac{2\sqrt{3}y + 2}{r_{34}^3}\right]$$

toujours positives dans (C). Le premier terme reste positif dans (C).

En raison de la symétrie évidente de (Γ) par rapport à l'axe M_3y, nous pourrons étudier les autres termes, seulement dans la moitié de (C) pour laquelle $x < 0$. Alors, $r_{14} < r_{24}$, $R_1 < R_2$: le second terme est positif. En tenant compte de la relation

$$(2r_{14}^2 - 1) - [(2y + \sqrt{3})^2 - 2r_{24}^2] = 4x^2,$$

nous voyons que le coefficient de R_3y est négatif; donc le terme entier est positif. Reste à étudier le coefficient de R_3x : son premier terme croît toujours, et son second décroît toujours quand on se déplace sur $\rho = \text{const.}$ de

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ à $\theta = 0$; le coefficient étudié sera donc toujours supérieur à sa valeur sur $\theta = \frac{2\pi}{3}$, qui n'est pas toujours positive ; mais sans détruire le raisonnement, nous pouvons prendre dans le second terme

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{2y+\sqrt{3}}{r_{24}^3}\frac{R_1}{r_{24}^5}x$$

et l'écrire

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}x(2y+\sqrt{3})\frac{R_1}{r_{24}^5}+\frac{3\sqrt{3}}{4}(2y+\sqrt{3})\frac{R_1}{r_{24}^5}R_3x;$$

la première partie est positive, et la deuxième permet d'écrire, comme coefficient de $\frac{3}{2}R_3x$,

$$\frac{R_1}{r_{24}^5}\left[(2y+\sqrt{3})^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(2y+\sqrt{3})+2r_{24}^2\right]-\frac{R_2}{r_{14}^5}(1+2r_{14}^2),$$

qui, pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$, prend la valeur

$$\frac{1}{(\rho+1)^4(1+\rho+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\left\{\left[(1+\rho+\rho^2)^{\frac{3}{2}}-1\right](1+\rho+\rho^2)\left(\frac{13}{2}+5\rho\right)\right.$$
$$\left.-(1+\rho)(3+2\rho+2\rho^2)(\rho^3+3\rho^2+3\rho)\right\};$$

mais si $0 < \rho < 1$

$$(1+\rho+\rho^2)^{\frac{3}{2}}-1 > \frac{3}{2}\rho(1+\rho),$$

$$(1+\rho+\rho^2)\left(\frac{13}{2}+5\rho\right) > \frac{2}{3}(3+2\rho+2\rho^2)(\rho^2+3\rho+3).$$

En définitive, (Γ) n'a aucun point réel dans l'aire (C) : la solution C existe seule, dans cette aire pour tous rapports des masses finies. Il en est de même de C′ et de C″ dans leurs aires respectives.

Plaçons-nous maintenant dans l'aire (B) qui contient la solution B. Cette aire se trouve divisée en deux parties par le cercle (γ) circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$: soient (B_1) la partie intérieure à ce cercle, et (B_2) la partie extérieure.

Plaçons-nous d'abord dans (B_2). Nous pouvons écrire :

$$\Gamma = R_3 \left\{ \left[R_1 - \sqrt{3}\,\frac{y+\sqrt{3}x}{r_{14}^3} \right] \left[R_2 - \sqrt{3}\,\frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3} \right] - \frac{3}{4}\,\frac{y^2-3x^2}{r_{14}^3 r_{24}^3} \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}\,\frac{y^2-3x^2}{r_{14}^3 r_{24}^3} \left[\frac{(2y+\sqrt{3})^2}{r_{14}^2 r_{24}^2} - 3 \right] \right\}$$
$$- \sqrt{3}\,\frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3} \left[- R_1 R_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} R_1 \frac{(y+\sqrt{3}x)^2}{r_{24}^2 r_{34}^2}\,\frac{(y-\sqrt{3}x)}{r_{24}^3} \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{4} R_2 \frac{(y-\sqrt{3}x)^2}{r_{14}^2 r_{34}^2}\,\frac{(y+\sqrt{3}x)}{r_{14}^3} \right].$$

Étudions le coefficient de R_3 : l'expression $R_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{y+\sqrt{3}x}{r_{14}^3}$, quand on se déplace sur un cercle $r_{14} = \text{const.}$, atteint sa valeur minimum sur le cercle (γ) ; les coordonnées d'un point de ce cercle peuvent s'écrire :

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta, \qquad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(1+\cos\theta) \qquad \left(-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$$

et la valeur minimum étudiée est :

$$1 - \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)}{\left[\frac{1}{3}(2+\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

qui décroît toujours, de $+\infty$ à o, quand θ croît de $-\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{3}$; on a donc

$$R_1 - \sqrt{3}\,\frac{(y+\sqrt{3}x)}{r_{14}^3} > -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{(y+\sqrt{3}x)}{r_{14}^3}$$

et de même

$$R_2 - \sqrt{3}\,\frac{(y-\sqrt{3}x)}{r_{24}^3} > -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{(y-\sqrt{3}x)}{r_{24}^3}.$$

D'autre part $\frac{(2y+\sqrt{3})^2}{r_{14}^2 r_{24}^2}$ est égal à $\frac{1}{\rho_3^2}$ [ρ_3 étant le rayon du cercle qui passe par M_1, M_2, et le point (x, y)] ; cette quantité, dans (B_2) reste comprise entre 3 et 4. Donc, le terme en R_3 reste toujours positif dans (B_2).

Considérons, maintenant, le coefficient de la quantité positive $-\sqrt{3}\,\frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3}$; les expressions $\frac{(y+\sqrt{3}x)^2}{r_{24}^3 r_{43}^2}$ et $\frac{(y-\sqrt{3}x)^2}{r_{14}^2 r_{34}^2}$ restent comprises entre 1 et 3, le coefficient étudié est donc supérieur à

$$
\begin{aligned}
&-R_1 R_2+\frac{\sqrt{3}}{4} R_1 \frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3}+\frac{\sqrt{3}}{4} R_2 \frac{y+\sqrt{3}x}{r_{14}^3} \\
&\quad=-\frac{R_1}{2}\left[R_2-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3}\right]-\frac{R_2}{2}\left[R_1-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{y+\sqrt{3}x}{r_{14}^3}\right]
\end{aligned}
$$

et reste positif dans (B_2). Par conséquent, Γ reste positive dans (B_2).

Plaçons-nous alors dans (B_1), ou plus exactement dans la moitié (B'_1) de (B_1) pour laquelle $x>0$. Nous pouvons écrire :

$$
\begin{aligned}
\Gamma=-R_1 \Bigg\{&\left[R_2-\sqrt{3} \frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3}\right]\left[-R_3-\sqrt{3} \frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3}\right]-\frac{3}{4} \frac{(y-\sqrt{3}x)(2y+\sqrt{3})}{r_{24}^3 r_{34}^3} \\
&+\frac{3}{4} \frac{(y-\sqrt{3}x)(2y+\sqrt{3})}{r_{24}^3 r_{34}^3}\left[\frac{(y+\sqrt{3}x)^2}{r_{24}^2 r_{34}^2}-3\right]\Bigg\} \\
&-\sqrt{3} \frac{y+\sqrt{3}x}{r_{14}^3}\left[R_2 R_3+\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{(y-\sqrt{3}x)^2}{r_{14}^2 r_{34}^2} \frac{(2y+\sqrt{3})}{r_{34}^3} R_2\right. \\
&\left.-\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{(2y+\sqrt{3})^2(y-\sqrt{3}x)}{r_{14}^2 r_{34}^5} R_3\right].
\end{aligned}
$$

Remarquons, d'abord, que $\dfrac{(y+\sqrt{3}x)^2}{r_{24}^2 r_{34}^2}$ et $\dfrac{(y-\sqrt{3}x)^2}{r_{14}^2 r_{34}^2}$ restent compris entre 3 et 4.

Puis, considérons l'expression

$$
-R_2-\lambda\sqrt{3} \frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3} \qquad (0<\lambda<1)
$$

et déplaçons-nous sur un cercle (K) passant par M_1 et M_2 :

$$
x^2+y^2+\mu\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1=0
$$

$\left[\text{ce cercle balayera } (B_1) \text{ quand } \mu \text{ variera de } 0 \text{ à } \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$; la quantité que nous étudions est :

$$
F=-1+\frac{1-\lambda\sqrt{3}(2y+\sqrt{3})}{\left[1-\mu\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}=-1+\frac{1-2\sqrt{3}\lambda u}{(1-\mu u)^{\frac{3}{2}}}
$$

avec

$$
u=y+\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad u_1<u<0, \qquad u_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mu}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mu}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}.
$$

(Par la suite, nous serons amenés à poser $\sqrt{3}-\mu=\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}$; alors $u_1=-\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.)

Nous avons le tableau de valeurs :

u	u_1	0
F'_u	$\left(\frac{3}{2}\mu-2\lambda\sqrt{3}\right)-\lambda\mu\sqrt{3}\,u_1$	$\left(\frac{3}{2}\mu-2\lambda\sqrt{3}\right)$
F	$-1+\dfrac{1-2\lambda\sqrt{3}\,u_1}{(1-\mu u_1)^{\frac{3}{2}}}$	0

de plus, $-\mu u_1$ est une fonction croissante de μ et

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\mu<\frac{(1-\mu u_1)^{\frac{3}{2}}-1}{-2\sqrt{3}\,u_1}.$$

Il en résulte que si

$$\lambda>\frac{(1-\mu u_1)^{\frac{3}{2}}-1}{-2\sqrt{3}\,u_1},$$

F est toujours positive sur le cercle (K). Soit λ_1 la valeur limite obtenue; en introduisant $v_1=-y_1$ et correspondant à u_1, nous avons

$$\lambda_1=\frac{v_1^3-1}{2\sqrt{3}\,v_1-3}\qquad\left(1<v_1<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

fonction qui croît de 0 à $\frac{8\sqrt{3}}{9}-1=0{,}5396$, quand v_1 varie de 1 à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Sur chacun des cercles (K) nous avons la relation

$$-R_3-\sqrt{3}\,\frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3}>-(1-\lambda_1)\sqrt{3}\,\frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3}.$$

Considérons, de même,

$$R_2-\lambda\sqrt{3}\,\frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3}\qquad(0<\lambda<1)$$

sur le même cercle; nous pouvons poser

$$x=-\frac{1}{2}+\rho\cos\theta,\qquad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\rho\sin\theta$$

avec

$$o < \theta < \alpha, \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3} - \mu}, \qquad \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Nous avons

$$r_2 = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha},$$

$$y - \sqrt{3}x = (\sqrt{3} - \mu)\sin^2\theta - \sqrt{3}\cos^2\theta + (2 - \mu\sqrt{3})\sin\theta\cos\theta$$
$$= \frac{2}{\sin\alpha}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\sin(\theta - \alpha).$$

Soit G l'expression étudiée, sa dérivée par rapport à θ a, dans l'intervalle utile, le signe de

$$\lambda\sqrt{3}(2 - \mu\sqrt{3})\operatorname{tang}^3\theta + (3 - 3\lambda - \lambda\mu\sqrt{3})\operatorname{tang}^2\theta + 2\lambda\sqrt{3}(2 - \mu\sqrt{3})\operatorname{tang}\theta + 3(1 - 3\lambda)$$

ou de

$$3\cos\theta + \frac{2\lambda\sqrt{3}}{\sin\alpha}\left[3\cos\theta\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\sin(\theta - \alpha) - \sin\theta\cos\left(2\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right];$$

la première forme montre que si $\lambda < \frac{3}{3 + \mu\sqrt{3}}$; cette dérivée croît avec θ, et nous avons le tableau de valeurs :

θ	o	$\frac{\alpha}{2}$
G'_θ	signe $(1 - 3\lambda)$	$3\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\frac{3}{2}\lambda}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left[3\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right]$
G	∞, signe $(3\lambda - 1)$	$1 - \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\left(\sqrt{3} + \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right)\right]8\cos^3\frac{\alpha}{2}.$

Or, dans notre intervalle

$$\frac{3 + \sqrt{3}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{4 + \sqrt{3}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}} < 1 - \frac{1}{8\cos^3\frac{\alpha}{2}}$$

(la première de ces expériences décroît de $\frac{3 + 4\sqrt{3}}{13} = 0,763$ à $0,75$, quand

$\frac{\alpha}{2}$ varie de $\frac{\pi}{12}$ à $\frac{\pi}{6}$, tandis que la deuxième décroît de

$$1-(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}=0,861 \text{ à } 1-\frac{3\sqrt{3}}{9}=0,808\Big).$$

Nous serons assuré que G sera décroissant et restera positif sur le demi-cercle (K) pour lequel $x>0$ si $\lambda>\lambda_2$,

$$\lambda_2=\frac{1-\dfrac{1}{8\cos^3\dfrac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+\operatorname{tang}\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1-\sqrt{1-\sqrt{3}\,\rho_1+\rho_1^2}}{\sqrt{3}\,\rho_1},$$

λ_2 est d'ailleurs une fonction de α qui décroît de $\dfrac{1-(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}=0,497$ à $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=0,404$, quand α varie de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{12}$, ou ρ_1 de 1 à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. On a donc

$$R_2-\sqrt{3}\,\frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3}>-(1-\lambda_2)\sqrt{3}\,\frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3}.$$

Par suite

$$\left[R_2-\sqrt{3}\,\frac{y-\sqrt{3}x}{r_{24}^3}\right]\left[-R_3-\sqrt{3}\,\frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3}\right]>3(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)\frac{(y-\sqrt{3}x)(2y+\sqrt{3})}{r_{24}^3\,r_{34}^3}.$$

Or

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)>\frac{1}{4}.$$

En effet, nous avons le tableau suivant :

ρ_1	1		1,13675		$\frac{2\sqrt{3}}{3}=1,155$
$1-\lambda_2$	0,503	$\nearrow$	0,58548	$\nearrow$	0,596
$1-\lambda_1$	1	$\searrow$	0,5	$\searrow$	0,460

Le coefficient de $-R_1$ est donc positif. Celui de $-\sqrt{3}\,\frac{y+\sqrt{3}x}{r_{14}^3}$ est la somme de deux termes :

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{(2y+\sqrt{3})^2(y-\sqrt{3}x)}{r_{14}^2\,r_{24}^5}<0$$

et

$$R_2 R_3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{(y-\sqrt{3}x)^2}{r_{14}^2 r_{34}^2} \cdot \frac{(2y+\sqrt{3})}{r_{34}^3} R_2 > -R_2 \left[-R_3 - \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2y+\sqrt{3}}{r_{34}^3} \right] > 0.$$

Le second terme de Γ est donc positif.

En définitive la courbe (L) n'a pas de points réels dans l'aire (B) : la solution B subsiste toujours, et seule dans cette aire. Il en est de même de B′ et B″ dans leurs aires respectives.

Les six solutions, extérieures au triangle $M_1 M_2 M_3$, trouvées dans le cas $m_1 = m_2 = m_3$, subsistent pour tous rapports des masses.

Avant d'étudier (Γ) à l'intérieur du triangle $M_1 M_2 M_3$, nous ferons deux remarques. D'abord, la courbe n'a, sur les côtés du triangle, aucun point en dehors des sommets; en effet, faisons $d_3 = \sqrt{3}\,(2y + \sqrt{3}) = 0$, nous obtenons

$$R_3 \left[R_1 R_2 + \frac{3 R_2}{r_{14}^3} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \frac{3 R_1}{r_{24}^3} \left(\frac{1}{2} + x \right) \right] = 0,$$

d'où

$$R_2 = 0 \qquad \text{(qui donne } M_1 \text{ et } M_2\text{)}$$

et

$$(r_{14}^3 - 1)(r_{24}^3 - 1) + 3(r_{24}^3 - 1)\left(\frac{1}{2} - x\right) + 3(r_{14}^3 - 1)\left(\frac{1}{2} + x\right) = 0$$

Entre les points M_1 et M_2

$$r_{14} = \frac{1}{2} + x, \qquad r_{24} = \frac{1}{2} - x,$$

d'où

$$\left(\frac{1}{4} - x^2\right)\left[\left(x^2 + \frac{7}{4}\right)^2 - 10\left(x^2 + \frac{7}{4}\right) + 7\right] = 0$$

qui n'a pas de racine entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Avant M_1

$$r_{14} = -\left(\frac{1}{2} + x\right), \qquad r_{24} = \frac{1}{2} - x,$$

d'où

$$r_{14}[r_{14}^5 + 3r_{14}^4 + 3r_{14}^3 + 11 r_{14}^2 + 15 r_{14} + 18] = 0$$

qui n'a pas de racine positive.

Remarquons encore que les points M_1, M_2, M_3 sont des points isolés de (Γ); en effet, au voisinage de M_3, nous avons, en posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

$$\frac{3}{2}\rho^4(7\sin^2\theta + 11\cos^2\theta) + \ldots = 0.$$

Étudions enfin (Γ) à l'intérieur du triangle ; plaçons-nous, plus particulièrement sur la bissectrice $x = 0$ (axe de symétrie de Γ) : $r_{14} = r_{24}$. L'équation qui donne les y des points de la courbe se décompose :

$$\left[R_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{y}{r_{14}^5}\right]\left[R_1 R_3 + \sqrt{3}(2y + \sqrt{3})\frac{R_1}{r_{34}^3} - \frac{\sqrt{3}}{2}y(2y + \sqrt{3})^2\frac{R_3}{r_{14}^5}\right] = 0.$$

L'origine de ce fait est la suivante : les équations (5) sont de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

leur déterminant fonctionnel est

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y}\right)^2;$$

si $x = 0$,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} = 0;$$

alors $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ fournit $R_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{y}{r_{14}^5}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, l'autre facteur.

L'expression

$$R_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{y}{r_{14}^5} = 1 - \frac{y^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}y + 1}{(y^2 + \sqrt{3}y + 1)^{\frac{5}{2}}}$$

s'annule pour $y = 0$, et pour une seule autre valeur de y, comprise entre $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et 0 :

$$y = -0{,}37233.$$

Soit P le point correspondant.

Considérons maintenant le second facteur

$$R_1 R_3 + \sqrt{3}(2y + \sqrt{3})\frac{R_1}{r_{34}^3} - \frac{\sqrt{3}}{2}y(2y + \sqrt{3})^2\frac{R_3}{r_{14}^5}.$$

Dans le cas particulier où nous nous sommes placés (étude de Γ sur $x = 0$), $m_1 = m_2$; nous pouvons poser

$$m_1 = m_2 = \frac{1 - \mu}{2}, \qquad m_3 = \mu.$$

Les solutions de Lagrange pour lesquelles $x = \text{o}$ sont données par l'équation

$$(7) \qquad y + \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{I} - \mu) - \frac{\mu y}{r_{34}^3} - \frac{(\text{I} - \mu)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{r_{14}^3} = \text{o}$$

ou

$$\mu y\left(\text{I} - \frac{\text{I}}{r_{34}^3}\right) + (\text{I} - \mu)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\text{I} - \frac{\text{I}}{r_{14}^3}\right) = \text{o}.$$

Cette équation aura une racine double, si nous avons aussi

$$\mu\left[\left(\text{I} - \frac{\text{I}}{r_{34}^3}\right) + \frac{3y^2}{r_{34}^5}\right] + (\text{I} - \mu)\left[\left(\text{I} - \frac{\text{I}}{r_{14}^3}\right) + \frac{3}{r_{14}^5}\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = \text{o}.$$

L'élimination du rapport $\frac{\text{I} - \mu}{\mu}$ donne, comme nous le savions *a priori*, l'expression que nous devons étudier. Or, il est facile de suivre l'évolution des solutions de (7) suivant les valeurs de μ. Posons ($\varepsilon\mu > \text{o}$) :

$$z_1 = y + \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{I} - \mu) - \frac{\mu\varepsilon}{y^2}, \qquad z_2 = \frac{(\text{I} - \mu)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(y^2 + \sqrt{3}y + \text{I})^{\frac{3}{2}}},$$

$$z_1' = \text{I} + \frac{2\mu\varepsilon}{y^3}, \qquad z_2' = \frac{(\text{I} - \mu)\left[\frac{\text{I}}{4} - 2\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}{(y^2 + \sqrt{3}y + \text{I})^{\frac{5}{2}}};$$

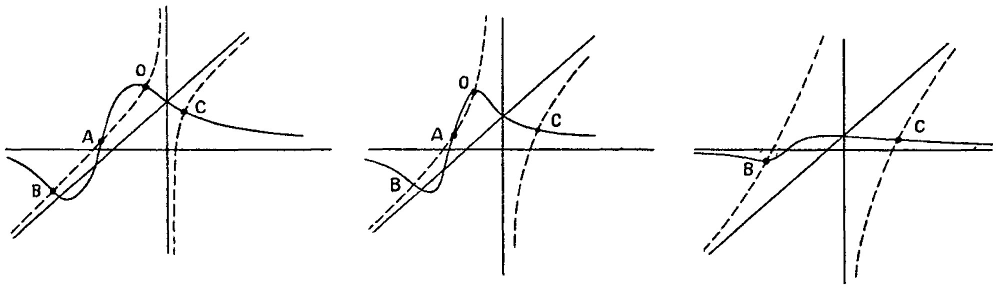
y	o		$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$		o		$+\infty$
z_2'		$-$	|		$+$		|		$-$		
z_2	o	$\searrow$	$-(\text{I}-\mu)\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	o	$\nearrow$	$(\text{I}-\mu)\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{I}-\mu)$	$\searrow$	o
z_1'					$+$				||	$+$	
z_1	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\mu\frac{(8-3\sqrt{3})}{6}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

de plus

$$z_1'' = -\frac{6\mu\varepsilon}{y^4}, \qquad z_2'' = \frac{(\text{I} - \mu)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[6\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]}{[y^2 + \sqrt{3}y + \text{I}]^{\frac{5}{2}}}.$$

Les cas extrêmes, et le cas $\mu = \frac{1}{3}$, ont l'allure suivante :

Fig 4.



$\mu = +\varepsilon$ $\qquad$ $\mu = 1/3$ $\qquad$ $\mu = 1-\varepsilon$

Nous voyons que pour une valeur de μ, comprise entre $\frac{1}{3}$ et 1, les deux courbes sont tangentes : les solutions A et O viennent se confondre en une solution double (pour disparaître quand μ croît), située en $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$: $y = -0{,}72574$. Soit Q le point correspondant.

Les valeurs de μ qui correspondent aux points P et Q sont

$$\mu_P = 0{,}11960, \qquad \mu_Q = 0{,}42342.$$

Si nous tenons compte de l'existence de trois axes de symétrie à 120° les uns des autres, nous voyons que (Γ) est une petite courbe entourant le centre du triangle $M_1 M_2 M_3$.

Quand les trois masses sont voisines de l'égalité, les dix solutions trouvées subsistent; quand cette égalité se trouve suffisamment rompue, deux des solutions intérieures au triangle disparaissent et il ne reste plus que huit solutions.

Examinons pour terminer les cas limites :

a. Une des masses, m_3 par exemple, tend vers zéro : B tend vers le sommet du second triangle équilatéral de base $M_1 M_2$; A, C′ et C″ tendent vers les solutions alignées du problème restreint des trois corps; deux des trois solutions O, A′ et A″ ont disparu; celle qui reste, ainsi que B′, B″ et C, tendent vers M_3 ; en posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ (l'origine étant M_3),

nous avons

$$\frac{m_1}{(\sqrt{3}\cos 2\theta - \sin 2\theta) + \rho \ldots} = \frac{m_2}{(\sqrt{3}\cos 2\theta + \sin 2\theta) + \rho \ldots}$$

$$= \frac{m_3}{\rho^3 \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta) + \ldots},$$

et nous voyons que les solutions de Lagrange tendent vers M_3 de telle sorte que, à la limite,

$$\operatorname{tang} 2\theta = \sqrt{3}\,\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1};$$

aucune difficulté ne se présente, tant que le rapport $\frac{m_2}{m_1}$ reste fini et non nul, c'est-à-dire tant que la seule masse m_3 tend vers zéro.

b. Deux des masses, m_1 et m_2 par exemple, tendent vers zéro : toutes les solutions de Lagrange tendent vers le cercle $\rho = r_{34} = 1$. Si nous posons $\rho = 1 + \varepsilon$, nous avons

$$\frac{m_1}{-(1+\varepsilon)\left(1 - \dfrac{1}{r_{24}^3}\right)(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)(3\varepsilon + \ldots)}$$

$$= \frac{m_2}{(1+\varepsilon)\left(1 - \dfrac{1}{r_{14}^3}\right)(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)(3\varepsilon + \ldots)}$$

$$= \frac{m_3}{\left(1 - \dfrac{1}{r_{14}^3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{r_{24}^3}\right)[\sqrt{3} + 2(1+\varepsilon)\sin\theta]}$$

avec

$$r_{14}^2 = (1+\varepsilon)[2 + \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta] + \varepsilon^2,$$

$$r_{24}^2 = (1+\varepsilon)[2 + \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta] + \varepsilon^2.$$

Les trois dénominateurs sont nuls pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$ et $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

Si nous posons $\theta = \frac{4\pi}{3} + u$, nous obtenons

$$\frac{m_1}{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(u^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} + \ldots} = \frac{m_2}{-2\dfrac{u}{\varepsilon}} = \frac{m_3}{\dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\dfrac{u}{\varepsilon}\right)\left(\sqrt{3} + \dfrac{u}{\varepsilon}\right)};$$

quand m_1 et m_2 tendent vers zéro, $\frac{u}{\varepsilon}$ tend vers zéro par valeurs négatives et

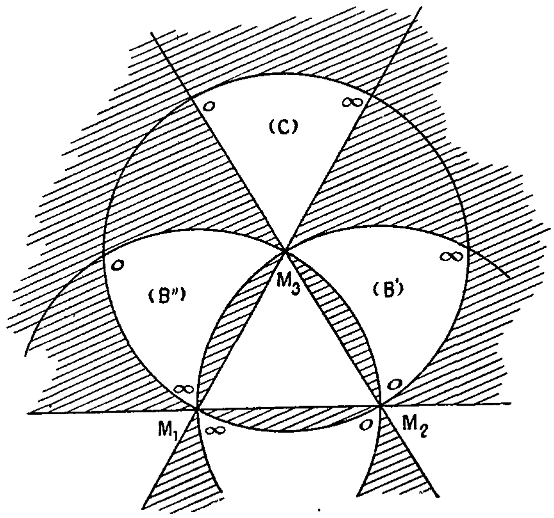
nous avons

$$u = -\frac{m_2}{m_1}\frac{3\sqrt{3}}{4}|\varepsilon|^3\varepsilon + \ldots,$$

C′ et A″ tendent vers M_1, tangentiellement à M_1M_3; de même A′ et C″ tendent vers M_2, tangentiellement à M_2M_3; O et A ont d'ailleurs disparu.

Si θ est différent de $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$, le dénominateur de m_3 est différent de zéro;

Fig. 5.



les positions limites de B, B′, B″ et C sont données par la relation

$$\frac{m_1}{-\left(1-\frac{1}{r_{24}^3}\right)(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)} = \frac{m_2}{\left(1-\frac{1}{r_{14}^3}\right)(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)},$$

$$r_{24}^2 = 2+\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta, \qquad r_{14}^2 = 2+\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta.$$

Ces positions dépendent de la valeur de $\frac{m_1}{m_2}$ et évoluent comme l'indique la figure 5.

10. Le cas symétrique, où les masses finies sont égales, peut être généralisé (Lindow) : n masses égales forment une figure de Lagrange quand on les dispose aux sommets d'un polygone régulier de n côtés; posons $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = \frac{1}{n}$ et prenons le rayon du cercle circonscrit pour

unité de longueur

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \cos\frac{2k\pi}{n} \\ y_k &= \sin\frac{2k\pi}{n} \end{aligned}\right\} \qquad [k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)],$$

$$r_{jk} = 2\sin(k-j)\frac{\pi}{n} \qquad (k > j),$$

on a alors

$$K^2 = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{\sin\dfrac{k\pi}{n}}$$

Considérons alors une masse infinitésimale M de coordonnées polaires ρ et θ, et soumise à l'action newtonienne de ces n masses; en posant

$$U = n\frac{K^2}{2}\rho + \sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n} - \theta\right) + \rho^2}},$$

les équations qui déterminent la position de M sont

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = nK^2\rho + \sum\frac{\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n} - \theta\right) - \rho}{\left[1 - 2\rho\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n} - \theta\right) + \rho^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \quad \rho \quad \sum\frac{\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n} - \theta\right)}{\left[1 - 2\rho\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n} - \theta\right) + \rho^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Or, en utilisant les coefficients $b^{(\lambda)}$ de Laplace et remarquant que

$$\sum_0^{n-1}\cos\lambda\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right) = 0$$

si λ n'est pas un multiple de n, et

$$\sum_0^{n-1}\cos\mu n\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right) = n\cos n\mu\theta,$$

on obtient pour $\rho < 1$

$$V = \sum_0^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right) + \rho^2}} = n\left[\frac{1}{2} b^{(0)} + b^{(n)} \cos n\theta + b^{(2n)} \cos 2n\theta + \ldots\right],$$

mais

$$b^{(\lambda)} = \frac{4}{\pi}\rho^\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\lambda}\alpha \, d\alpha}{(1 - \rho^2 \sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}};$$

on déduit

$$V = \sum_0^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right) + \rho^2}}$$

$$= \frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2 \operatorname{sn}^2\alpha}} \, \frac{1 - \rho^{2n} \sin^{4n}\alpha}{1 - 2\rho^n \sin^{2n}\alpha \cos n\theta + \rho^{2n} \sin^{4n}\alpha} \, d\alpha,$$

d'où

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{4n^2}{\pi}\rho^n \sin n\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\alpha}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2\alpha}} \, \frac{1 - \rho^{2n}\sin^{4n}\alpha}{[1 - 2\rho^n \sin^{2n}\alpha \cos n\theta + \rho^{2n}\sin^{4n}\alpha]^2} \, d\alpha.$$

Or,

$$V(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} V\left(\frac{1}{\rho}, \theta\right),$$

d'où

$$\frac{\partial U(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \, \frac{\partial U\left(\frac{1}{\rho}, \theta\right)}{\partial \theta}.$$

Donc, si $\rho \neq 1$, $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ n'est nul que si $\sin n\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = \frac{k\pi}{n}$.

Reste le cas $\rho = 1$, mais l'élément différentiel de l'intégrale qui donne $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ reste fini et continu en ρ pour $\rho = 1$ $\left(\text{sauf naturellement pour } \theta = \frac{2k\pi}{n}\right)$ et de plus positif; donc pour $\rho = 1$, $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ ne s'annule que pour $\theta = \frac{2k+1}{n}\pi$.

En définitive, M doit se trouver, soit sur le rayon vecteur d'une des masses finies $\left(\theta = \frac{2k\pi}{n}\right)$, soit sur la bissectrice de deux de ces rayons vecteurs $\left(\theta = \frac{2k+1}{n}\pi\right)$.

Considérons d'abord le cas $\theta = \frac{2k\pi}{n}$; $\rho < 1$.

On a

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = n\,K^2\rho + \frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho \sin^2\alpha}{(1-\rho^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1+\rho^n\sin^{2n}\alpha}{1-\rho^n\sin^{2n}\alpha}+\frac{1}{(1-\rho^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{2n\rho^{n-1}\sin^{2n}\alpha}{(1-\rho^n\sin^n\alpha)^2}\right]d\alpha,$$

quantité toujours positive.

Soit maintenant $\theta = \frac{2k\pi}{n}$; $\rho > 1$.

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = n\,K^2\rho - \frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho}{(\rho^2-\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\rho^n+\sin^{2n}\alpha}{\rho^n-\sin^{2n}\alpha}+\frac{1}{(\rho^2-\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{2n\rho^{n-1}\sin^{2n}\alpha}{(\rho^n-\sin^n\alpha)^2}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = U_1 - U_2.$$

Il est facile de vérifier que, entre 1 et $+\infty$, U_1 croît d'une quantité finie à $+\infty$, tandis que U_2 décroît de $+\infty$ à 0; l'équation $\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0$ a donc dans cet intervalle une et une seule racine.

Soit maintenant $\theta = \frac{2k+1}{n}\pi$

$$U = n\frac{K^2}{2}\rho^2 + \sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\rho^2}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = n\,K^2\rho + \sum_0^{n-1}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}-\rho}{\left[1-2\rho\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\rho^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si $\rho < 1$,

$$U = n\frac{K^2}{2}\rho^2 + \frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2\alpha}}\,\frac{1-\rho^n\sin^{2n}\alpha}{1+\rho^n\sin^{2n}\alpha}\,d\alpha.$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = n\,K^2\rho + \frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho\sin^2\alpha}{(1-\rho^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1-\rho^n\sin^{2n}\alpha}{1+\rho^n\sin^{2n}\alpha} - \frac{1}{(1-\rho^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{2n\rho^{n-1}\sin^{2n}\alpha}{(1+\rho^n\sin^{2n}\alpha)^2}\right]d\alpha.$$

Si ρ est très petit,

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = n\left(K^2+\frac{1}{2}\right)\rho + \dots,$$

donc positif et croissant.

Pour $\rho = 1$, on a

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{4}\left[\sum_{1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{n}} - \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(2k+1)\pi}{n}}\right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{2n}} - \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2n}} + \ldots + \frac{1}{\sin \frac{2n-2}{2n}\pi} - \frac{1}{\sin \frac{2n-1}{2n}\pi}\right].$$

Cette quantité est toujours négative.

Pour $\rho > 1$,

$$U = n\frac{K^2}{2}\rho^2 + \frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \sin^2\alpha}} \frac{\rho^n - \sin^{2n}\alpha}{\rho^n + \sin^{2n}\alpha},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = nK^2\rho + \frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{\rho}{(\rho^2 - \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho^n - \sin^{2n}\alpha}{\rho^n + \sin^{2n}\alpha} + \frac{1}{(\rho^2 - \sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} \frac{2n\rho^{n-1}\sin^{2n}\alpha}{(\rho^n + \sin^{2n}\alpha)^2}\right] d\alpha.$$

Quand ρ augmente indéfiniment, $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ a pour valeur asymptotique $nK^2\rho$ à laquelle elle reste d'ailleurs toujours inférieure.

Il y a donc toujours une racine de $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ entre $+\varepsilon$ et 1, et une autre entre 1 et $+\infty$. Il semble d'ailleurs que ce soient les seules.

Voici leurs valeurs pour les cas les plus simples (Lindow) :

n.	$\theta = \frac{2k\pi}{n}$.	$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$.	
3	2,04382	0,41389	1,61979
4	1,88046	0,69738	1,60241
5	1,78288	0,82218	1,59792
6	1,71728	0,88432	1,59224
7	1,67000	0,91899	1,58412
8	1,63430	0,94014	1,57452

11. Il est d'ailleurs possible d'obtenir des figures de Lagrange relativement compliquées, à condition qu'elles soient matériellement symétriques par rapport à chacune des droites qui joint l'une des masses au centre de gravité O; en passant en coordonnées polaires, les équations du problème

sont :

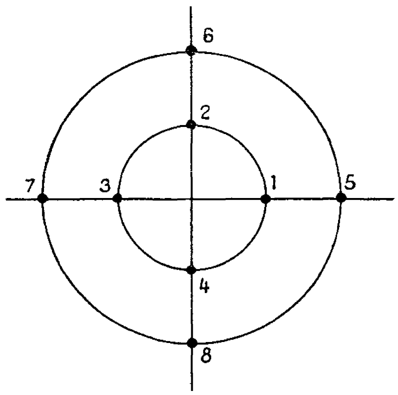
$$\left.\begin{aligned} K^2\rho_i + \sum m_j \frac{\rho_j \cos(\theta_j - \theta_i) - \rho_i}{r_{ij}^3} &= 0 \\ \sum m_j \frac{\rho_j \sin(\theta_j - \theta_i)}{r_{ij}^3} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i).$$

Puisque la figure est matériellement symétrique par rapport à chaque droite M_iO, les équations en $\sin(\theta_j - \theta_i)$ sont satisfaites; certaines des équations en $\cos(\theta_j - \theta_i)$ sont d'ailleurs identiques. Prenons par exemple avec M. Longley, $n = kl$ masses disposées sur l cercles concentriques, les k masses qui sont sur le cercle de rayon r_l étant égales : les k équations correspondant à ces k masses sont identiques; il reste donc l équations pour déterminer K^2 et les rapports de $l - 1$ rayons à l'un d'eux.

Bornons-nous, pour développer les calculs, au cas de huit masses sur deux cercles (Longley) :

Premier cas : Quatre masses m sur le cercle de rayon r, quatre masses M

Fig. 6.



sur le cercle de rayon $R > r$, chaque masse m a même angle polaire qu'une masse M, on obtient les deux équations

$$K^2 r = \frac{m}{r^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + M\left[\frac{2r}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R + r)^2} - \frac{1}{(R - r)^2}\right],$$

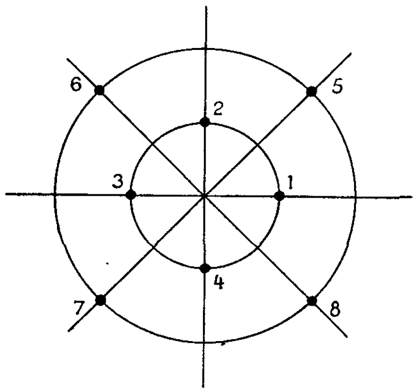
$$K^2 R = \frac{M}{R^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + m\left[\frac{2R}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R + r)^2} + \frac{1}{(R - r)^2}\right].$$

En éliminant K^2

$$M\left[\frac{r}{R^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{R}{(R-r)^2}-\frac{R}{(R+r)^2}-\frac{2Rr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$
$$=m\left[\frac{R}{r^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{r}{(R-r)^2}-\frac{r}{(R+r)^2}-\frac{2Rr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Deuxième cas : Les huit mêmes masses, mais les rayons vecteurs d'un

Fig. 7.



système de quatre masses sont les bissectrices de l'autre système :

$$K^2 r=\frac{m}{r^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2M\left[\frac{r-R\frac{\sqrt{2}}{2}}{(r^2-\sqrt{2}Rr+R^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{r+R\frac{\sqrt{2}}{2}}{(r^2+\sqrt{2}Rr+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

$$K^2 R=\frac{M}{R^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2m\left[\frac{R-r\frac{\sqrt{2}}{2}}{(r^2-\sqrt{2}Rr+R^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{R+r\frac{\sqrt{2}}{2}}{(r^2+\sqrt{2}Rr+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

En éliminant K^2, on a la relation

$$M\left[\frac{r}{R^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{R(R\sqrt{2}-2r)}{(R^2-\sqrt{2}Rr+r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{R(R\sqrt{2}+2r)}{(R^2-\sqrt{2}Rr+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$
$$=m\left[\frac{R}{r^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{r(2R-r\sqrt{2})}{(R^2-\sqrt{2}Rr+r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{r(2R+r\sqrt{2})}{(R^2-\sqrt{2}Rr+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

On obtient, par exemple,

	$\frac{R}{r}$.	2.	5.	10.
$\frac{M}{m}$	Premier cas	0,2636	9,5914	308,814
	Deuxième cas....	2,622	10,197	330,37

12. *Les masses sont dans l'espace.* — Supposons enfin que les M_i ne soient pas dans un plan ($\nu \geqq 4$). Les équations (I) montrent que $\lambda^2 pq$, $\lambda^2 qr$, $\lambda^2 rp$ sont de la forme $\frac{K}{\lambda}$; donc p, q, r restent proportionnels pendant tout le mouvement : la rotation a une direction fixe que nous pouvons prendre pour axe des Oz ($p = q = 0$).

Les équations (I) deviennent alors

$$(\text{I } bis) \quad \begin{cases} x_i(\lambda\lambda'' - \lambda^2 r^2) - y_i(\lambda^2 r)' = \frac{1}{\lambda} \sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \\ x_i(\lambda^2 r)' + y_i(\lambda\lambda'' - \lambda^2 r^2) = \frac{1}{\lambda} \sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}, \\ z_i \lambda\lambda'' = \frac{1}{\lambda} \sum m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}. \end{cases}$$

On déduit comme au paragraphe 4

$$(\lambda^2 r)' = 0;$$

mais alors,

$$\lambda^2 r^2 = \frac{K}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \lambda^2 r = \text{const.};$$

par suite : ou bien

$$\lambda = \text{const.} = 1,$$

r étant aussi une constante ω; ou bien

$$r = 0.$$

Si $\lambda = \text{const.}$, $r = \omega$, les troisièmes des équations (I *bis*) s'écrivent :

$$Z_i = \sum m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\sum m_i z_i Z_i = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = 0,$$

ce qui est impossible.

Si $r = 0$, il reste $\lambda^2 \lambda'' = -K^2$ (mouvement rectiligne keplérien de chaque M_i), avec les équations de conditions :

$$\sum m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} + K^2 x_i = 0,$$

$$\sum m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3} + K^2 y_i = 0,$$

$$\sum m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3} + K^2 z_i = 0.$$

En tenant compte des six relations,

$$\sum m_i x_i = 0, \qquad \ldots$$

et

$$\sum m_i (y_i X_i - x_i Y_i) = 0, \qquad \ldots,$$

on a $(3n - 6)$ relations pour déterminer $(3n - 6)$ paramètres de forme (K étant donné).

On peut former les relations

$$\begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_j & z_j & 1 \\ y_h & z_h & 1 \end{vmatrix} (X_i - X_j) + \begin{vmatrix} z_i & x_i & 1 \\ z_j & x_j & 1 \\ z_h & x_h & 1 \end{vmatrix} (Y_i - Y_j) + \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_h & y_h & 1 \end{vmatrix} (Z_i - Z_j) = 0$$

ou

$$\sum m_k (ijhk) \left[\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \right] = 0 \qquad (k \text{ différent de } i, j, h),$$

ou remarquer que les équations de conditions expriment que la fonction

$$U = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}} + \frac{K^2}{2M} \sum m_i m_j r_{ij}^2$$

satisfait aux conditions du premier ordre.

Dans le cas de quatre points, tous les r_{ij} sont égaux : les points forment un tétraèdre régulier.

13. Considérons le cas de quatre masses finies égales M_1, M_2, M_3, M_4 et d'une masse infinitésimale M; nous nous bornerons au cas où les quatre premières se placent aux sommets d'un tétraèdre régulier; on peut poser,

en prenant le côté de ce tétraèdre pour unité de longueur :

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1;$$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0, & y_1 = 0, & z_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{4}; \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, & y_2 = 0, & z_2 = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}; \\ x_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}, & y_3 = \dfrac{1}{2}, & z_3 = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}; \\ x_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}, & y_4 = -\dfrac{1}{2}, & z_4 = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}; \end{array}$$

alors $K^2 = 4$.

La position de M est déterminée par les équations

$$\frac{x}{r_1^3} + \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{r_2^3} + \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{6}}{r_3^3} + \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{6}}{r_4^3} - 4x = 0,$$

$$\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3} + \frac{y - \frac{1}{2}}{r_3^3} + \frac{y + \frac{1}{2}}{r_4^3} - 4y = 0,$$

$$\frac{z - \frac{\sqrt{6}}{4}}{r_1^3} + \frac{z + \frac{\sqrt{6}}{12}}{r_2^3} + \frac{z + \frac{\sqrt{6}}{12}}{r_3^3} + \frac{z + \frac{\sqrt{6}}{12}}{r_4^3} - 4z = 0,$$

avec

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2,$$

$$r_2^2 = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 + \left(z + \frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2,$$

$$r_3^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2.$$

$$r_4^2 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2,$$

c'est-à-dire les relations

$$3 + \sum r_1^2(3r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 - r_4^2 - 2) = 0.$$

$$2y = r_4^2 - r_3^2,$$

$$2\sqrt{3}\,x = r_4^2 + r_3^2 - 2r_2^2,$$

$$2\sqrt{6}\,z = r_4^2 + r_3^2 + r_2^2 - 3r_1^2;$$

on en déduit les équations

$$(r_3^2-r_4^2)\left[\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}+\frac{1}{r_3^3}+\frac{1}{r_4^3}-4\right]+\left(\frac{1}{r_3^3}-\frac{1}{r_4^3}\right)=0,$$

$$(r_3^2-r_2^2)\left[\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}+\frac{1}{r_3^3}+\frac{1}{r_4^3}-4\right]+\left(\frac{1}{r_3^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)=0,$$

$$(r_3^2-r_1^2)\left[\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}+\frac{1}{r_3^3}+\frac{1}{r_4^3}-4\right]+\left(\frac{1}{r_3^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)=0,$$

et par suite, ou bien

$$r_1=r_2=r_3=r_4=\frac{\sqrt{6}}{4},$$

ou bien trois des r sont égaux; on peut alors se borner au cas $x=y=0$ et les z de points cherchés sont donnés par

$$\frac{3\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)}{\left[\frac{1}{3}+\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{z-\frac{\sqrt{6}}{4}}{\left|z-\frac{\sqrt{6}}{4}\right|^3}-4z=0.$$

Posons

$$u_1=\frac{3\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)}{\left[\frac{1}{3}+\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},\qquad u_2=4z-\frac{\varepsilon}{\left(z-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}$$

$$\left(\varepsilon>0,\ \text{si } z>\frac{\sqrt{6}}{4};\ \varepsilon<0,\ \text{si } z<\frac{\sqrt{6}}{4}\right).$$

Alors,

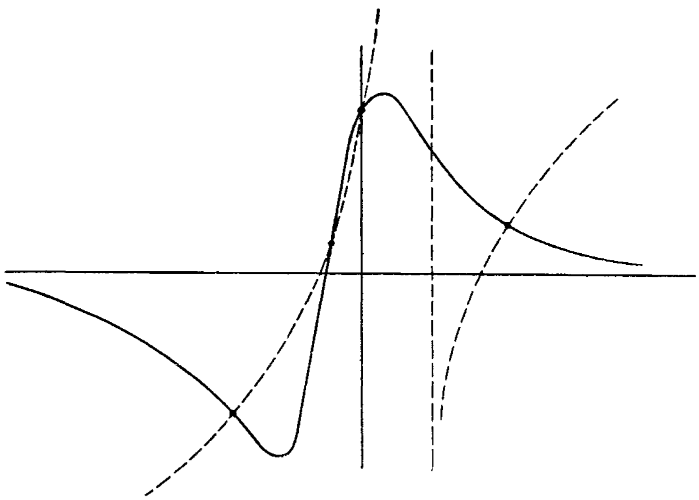
$$u'_1-\frac{1-6\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2}{\left[\frac{1}{3}+\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}},\qquad u'_2=4+\frac{2\varepsilon}{\left(z-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3},$$

$$u''_1=\frac{-9\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)\left[1-2\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2\right]}{\left[\frac{1}{3}+\left(z+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2\right]^{\frac{7}{2}}},\qquad u''_2=-\frac{6\varepsilon}{\left(z-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^4}.$$

z	$-\infty$		$\left(-\frac{\sqrt{6}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		$-\frac{\sqrt{6}}{4}$		$-\frac{\sqrt{6}}{12}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{12}$		$\left(-\frac{\sqrt{6}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		$\frac{\sqrt{6}}{4}$		$+\infty$
u'_1			$-$				$9\sqrt{3}$		$\frac{32\sqrt{6}}{9}$					$-$			
u_1	0	$\searrow$	Inflex.	$\searrow$	$-2\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	$2\sqrt{3}$	$\searrow$	Inflex.	$\searrow$	$\sqrt{6}$	$\searrow$	0
u'_2			$+$				$4+\frac{3\sqrt{6}}{2}$		$4+32\frac{\sqrt{6}}{9}$							$+$	
u_2	$-\infty$		$\nearrow$		$\frac{3}{4}-\sqrt{6}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$			$\nearrow$			$\overset{+}{\underset{-}{\infty}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Il y a donc pour $x=y=0$, et outre $z=0$, trois racines en z (*fig.* 8).

Fig. 8.



14. Pour terminer, nous déduirons de la théorie ci-dessus les résultats obtenus par M. Erich Brehm : considérons cinq masses M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 et cherchons les configurations dans lesquelles deux des distances sont égales, par exemple $r_{13}=r_{14}=a$.

Les équations

$$m_1(2341)\left(\frac{1}{r_{12}^3}-\frac{1}{r_{13}^3}\right)+m_5(2345)\left(\frac{1}{r_{25}^3}-\frac{1}{r_{35}^3}\right)=0,$$

$$m_1(2351)\left(\frac{1}{r_{12}^3}-\frac{1}{r_{13}^3}\right)+m_4(2354)\left(\frac{1}{r_{24}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)=0$$

nous montre que deux cas sont possibles :

1° $(2345)=0$. Les quatre points 2, 3, 4, 5 sont dans un même plan, ce qui entraîne par la considération de toutes les équations contenant (2345) ou (2354) ou (2453) ou (3452),

$$r_{12}=r_{13}=r_{14}=r_{15}=a\,;$$

2° $$r_{24}=r_{34}=b \qquad \text{et} \qquad r_{25}=r_{35}=c.$$

Considérons d'abord le premier cas : les cinq points matériels sont les sommets d'une pyramide quadrangulaire dont les arêtes latérales sont égales; le quadrilatère de base est inscriptible et par suite convexe; il reste les six équations

$$m_4(1234)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{24}^3}\right)+m_5(1235)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{25}^3}\right)=0,$$

$$m_4(1234)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)+m_5(1235)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{35}^3}\right)=0,$$

$$m_3(1234)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{23}^3}\right)-m_5(1245)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{25}^3}\right)=0,$$

$$m_3(1234)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)-m_5(1245)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{45}^3}\right)=0,$$

$$m_2(1234)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{23}^3}\right)+m_5(1345)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{35}^3}\right)=0,$$

$$m_2(1234)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)+m_5(1345)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{r_{45}^3}\right)=0.$$

Si l'on écrit les équations qui ne contiennent que les distances mutuelles des points M_2, M_3, M_4, M_5, telles que

$$m_4(1234)\left(\frac{1}{r_{24}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)+m_5(1235)\left(\frac{1}{r_{25}^3}-\frac{1}{r_{35}^3}\right)=0,$$

ou encore, plus simplement,

$$m_4(234)\left[\frac{1}{r_{24}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right]+m_5(235)\left[\frac{1}{r_{25}^3}-\frac{1}{r_{35}^3}\right]=0$$

[(234) exprimant le double de la surface M_2, M_3, M_4], on voit que ces quatre masses réalisent une configuration de Dziobek, précédemment étudiée.

On a alors, pour déterminer a, les équations

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{24}^3}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{35}^3}\right)-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{25}^3}\right)=0,$$
$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{23}^3}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{45}^3}\right)-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{25}^3}\right)=0$$
$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{23}^3}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{45}^3}\right)-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{24}^3}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_{35}^3}\right)=0,$$

qui se réduisent manifestement aux deux premières, celles-ci étant compatibles en vertu de la relation

$$\begin{vmatrix} 1 & r_{24}^3+r_{35}^3 & r_{24}^3 r_{35}^3 \\ 1 & r_{34}^3+r_{25}^3 & r_{34}^3 r_{25}^3 \\ 1 & r_{23}^3+r_{45}^3 & r_{23}^3 r_{45}^3 \end{vmatrix}=0$$

Enfin les équations aux z donnent

$$K^2=\frac{1}{a}(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)=\frac{M}{a}.$$

Examinons maintenant le deuxième cas. Nous avons, entre autres, les équations

$$m_2(1245)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+m_3(1345)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0,$$
$$m_2(1245)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+m_3(1345)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=0,$$
$$m_2(1245)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+m_3(1345)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0$$

satisfaites si

$$m_2=m_3,$$

car

$$(1245)=-(1345)$$

ou bien si

$$a=b=c$$

Dans cette dernière hypothèse, il faut ou bien que

$$(1245)=(1345)=0$$

(les cinq points sont dans un plan, ce que nous ne supposons pas) ou bien

$$r_{14}=r_{15}=r_{45},$$

on en déduit facilement que cette configuration ne peut se présenter que si

$$m_2=m_3 \quad \text{et} \quad m_1=m_4=m_5$$

Alors on a

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{1}{r^3_{23}} - \dfrac{1}{a^3}}{\dfrac{1}{r^3_{15}} - \dfrac{1}{a^3}} \qquad \text{avec} \qquad \frac{r^2_{23}}{4} + \frac{r^2_{15}}{3} = a^2.$$

Reprenons rapidement le cas général $m_2 = m_3$; il reste les six équations

$$\begin{aligned}
&m_1(1234)\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{a^3}\right) + m_5(1245)\left(\frac{1}{r^3_{15}} - \frac{1}{c^3}\right) = 0,\\
&m\;(1234)\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{b^3}\right) + m_5(1245)\left(\frac{1}{r^3_{15}} - \frac{1}{c^3}\right) = 0,\\
&m\;(1235)\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{a^3}\right) - m_4(1245)\left(\frac{1}{r^3_{14}} - \frac{1}{b^3}\right) = 0,\\
&m\;(1235)\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{c^3}\right) - m_4(1245)\left(\frac{1}{r^3_{45}} - \frac{1}{b}\right) = 0,\\
&m\;(2345)\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{b}\right) + m_1(1245)\left(\frac{1}{r^3_{14}} - \frac{1}{a^3}\right) = 0,\\
&m_3(2345)\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{c^3}\right) + m_1(1245)\left(\frac{1}{r^3_{15}} - \frac{1}{a}\right) = 0,
\end{aligned}$$

on en tire les relations indépendantes des m :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{a^3}\right)\left(\frac{1}{r^3_{15}} - \frac{1}{c^3}\right) - \left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{b^3}\right)\left(\frac{1}{r^3_{15}} - \frac{1}{c}\right) = 0,\\
&\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{r^3_{15}} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{c^3}\right)\left(\frac{1}{r^3_{14}} - \frac{1}{a}\right) = 0,\\
&\left(\frac{1}{r^3_{23}} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{r^3_{14}} - \frac{1}{b}\right) - \left(\frac{1}{r^3_{2}} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{r^3_{15}} - \frac{1}{b}\right) = 0,
\end{aligned}$$

qui se réduisent à deux par addition; et les relations

$$\begin{aligned}
\frac{m}{m_3} &= -\frac{(1234)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{r^3_{23}} - \dfrac{1}{a^3}}{\dfrac{1}{r^3_{15}} - \dfrac{1}{c}} = -\frac{(1234)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{r_{23}} - \dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{r^3_{45}} - \dfrac{1}{c}} = -\frac{(1234)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{b^3} - \dfrac{1}{a^3}}{\dfrac{1}{r_{15}} - \dfrac{1}{r^3_{15}}},\\
\frac{m_4}{m} &= \frac{(1235)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{r^3_{23}} - \dfrac{1}{c^3}}{\dfrac{1}{r^3_{15}} - \dfrac{1}{b^3}} = \frac{(1235)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{r^3_{23}} - \dfrac{1}{a^3}}{\dfrac{1}{r^3_{14}} - \dfrac{1}{b^3}} = \frac{(1235)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{r^3_{15}} - \dfrac{1}{r^3_{14}}},\\
\frac{m_1}{m_3} &= -\frac{(2345)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{r^3_{23}} - \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{r^3_{14}} - \dfrac{1}{a}} = -\frac{(2345)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{r^3_{23}} - \dfrac{1}{c^2}}{\dfrac{1}{r^3_{15}} - \dfrac{1}{a^2}} = -\frac{(2345)}{(1245)}\,\frac{\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{r^3_{14}} - \dfrac{1}{r^3_{15}}},
\end{aligned}$$

auxquelles il faut joindre la relation qui exprime que les cinq points sont dans un espace à trois dimensions :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & a^2 & r_{14}^2 & r_{15}^2 \\ 1 & a^2 & 0 & r_{23}^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & r_{23}^2 & 0 & b^2 & c^2 \\ 1 & r_{14}^2 & b^2 & b^2 & 0 & r_{45}^2 \\ 1 & r_{15}^2 & c^2 & c^2 & r_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & r_{14}^2 & r_{15}^2 \\ 1 & a^2 & 0 & b^2 & c^2 \\ 1 & r_{14}^2 & b^2 & 0 & r_{45}^2 \\ 1 & r_{15}^2 & c^2 & r_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} + r_{23}^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{14}^2 & r_{15}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & 0 & r_{45}^2 \\ 1 & r_{15}^2 & r_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

soient six équations homogènes pour sept quantités ; on a, d'autre part (en prenant les équations en z),

$$K^2 = \frac{m_1}{a^3} + \frac{m_4}{b^3} + \frac{m_5}{c_3} + \frac{2m_2}{r_{23}^3}.$$

Bibliographie (¹).

LAGRANGE, *Œuvres*, VI.

LAPLACE, *Mécanique céleste*, IV.

TISSERAND, *Mécanique céleste.*

CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, 9e Partie.

MOULTON, *Introduction to Celestial Mechanics*, Chap. VIII.

WELTMANN, *Bewegung in Kegelschnitten von mehr als zwei Körpern, welche sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen* (*A. N.*, 86).

LEHMANN-FILHÈS, *Ueber zwei Fälle des Vielköperproblems* (*A. N.*, 127).

HOPPE (R.), *Erweiterung der bekannten Speciallösung des Dreikörperproblems* (*Archiv der Mathematik und Physik von Grünert*, t. 64).

DZIOBEK, *Ueber einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems* (*A. N.*, 152).

SLOUDSKY (Th.), *Note sur quelques cas particuliers du problème de plusieurs corps* (*Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou*, nouvelle série, t. VII). — L'auteur renvoie à un article (en russe) paru dans *Matemat. Sbornik, Moskwa*, IX.

(¹) Par abréviation, uous notons partout :

AN : *Astronomische Nachrichten.*

Kopenhagen : *Publikationer og mindre Meddelelser fra Köbenhavns Observatorium.*

TSCHERNY, *Geometrische Lösung zweïer spezieller Fälle des Problems der drei Körper* (*A. N.*, 171).

WHITEMORE, *A note on the Problem of three bodies* (*Mathematische Annalen*, t. 64).

PIZETTI (Paolo), *Casi particolari del probleme dei tre corpi* (*Atti della reale Accademia dei Linceï*, Roma, 5e série, vol. XIII).

ENRIQUÈS (Frederigo), *Intorno alla seconda soluzione di Laplace del Problema dei tre corpi* (*Atti del reale Istituto Veneto dei Scienze, lettere ed arti*, t. LX, Parte seconda).

LOVETT (E. O.), *Periodic Solution of the problem of four bodies*) (*The Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, vol. XXXV).

LONGLEY (W. R.), *Some particular Solutions in the problem of* **n** *bodies* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. XIII).

— Voir aussi, dans *Periodic Orbits* de Moulton et ses collaborateurs, le Chapitre XIII.

MOULTON (F. R.), *On a class of particular solutions of the problem of four bodies* (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 1).

— *Periodic Orbits*. Carnegie Institution, 1920. Chapitre VIII : The straight-line solutions of the problem of n bodies.

BREHM (Erich), *Particulare Integrale des Problems der n Körper* (*Inaugural Dissertation*, Berlin, 1908).

ANDOYER (H.), *Sur l'équilibre relatif des n corps* (*Bulletin astronomique*, t. XXIII).

LINDOW, *Eine Transformation für das Problem der* $n+1$ *Körper* (*A. N.*, 219; *Kopenhagen*, 43).

— *Der Kreisfall im Problem der* $3+1$ *Körper* (*A. N.*, 220; *Kopenhagen*, 46).

— *Der Kreisfall im Problem der* $n+1$ *Körper* (*A. N.*, 228; *Kopenhagen*, 55).

— *Grenzkurven und Librationsbahnen im Problem der* $n+1$ *Körpen* (*A. N.*, 233; *Kopenhagen*, 62).

— *Ein Spezialfall des Vierkörperproblems* (*A. N.* 216; *Kopenhagen*, 40).

CHAZY, *Sur certaines trajectoires du problème des n corps* (*Bulletin astronomique*, t. XXXV).

CHAPITRE II.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES AUTOUR DES POSITIONS D'ÉQUILIBRE RELATIF PREMIÈRE APPROXIMATION.

SOMMAIRE.

Existe-t-il des solutions du problème des *n* corps qui, par déformation continue, peuvent se réduire aux solutions de Lagrange étudiées dans le Chapitre précédent? En particulier, existe-t-il des solutions périodiques satisfaisant à cette condition?

Nous étudierons, ici, le cas où $\lambda = \text{const.}$, c'est-à-dire le cas où les solutions de Lagrange sont des positions d'équilibre relatif, le système total étant alors animé d'une rotation constante ω.

15. Nous prendrons un système d'axes rectangulaires $Oxyz$: l'origine O sera le centre de gravité des masses M_i en équilibre relatif, et pourra être considérée comme fixe; Oz sera la perpendiculaire au plan de ces M_i et sera fixe dans l'espace; les axes Ox et Oy seront fixes dans le plan des M_i et par suite animés d'une vitesse de rotation ω autour de Oz; on supposera les unités choisies de telle sorte que la constante de gravitation et la vitesse de rotation ω soient égales à l'unité; les équations du mouvement seront

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_i}{dt^2}-2\frac{dy_t}{dt}&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\\ \frac{d^2y_i}{dt^2}+2\frac{dx_i}{dt}&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial F}{\partial y_i}\\ \frac{d^2z_i}{dt^2}\qquad\quad&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\end{aligned}\right.\qquad (i=1,2,3,\ldots,n)$$

avec

$$F=\frac{1}{2}\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)+\sum_{ij}\frac{m_im_j}{r_{ij}}.$$

On a d'ailleurs les relations

$$\sum m_ix_i\equiv 0,\qquad \sum m_iy_i\equiv 0,\qquad \sum m_iz_i\equiv 0$$

et l'intégrale de Jacobi

$$\sum\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]=F+C.$$

Nous poserons

$$u_i=x_i+y_i\sqrt{-1},$$
$$v_i=x_i-y_i\sqrt{-1}$$

ou

$$x_i=\frac{u_i+v_i}{2},\qquad y_i=\frac{v_i-u_i}{2}\sqrt{-1}.$$

On obtient

$$r_{ij}^2=(u_i-u_j)(v_i-v_j)+(z_i-z_j)^2,$$

$$F=\frac{1}{2}\sum_i m_iu_iv_i+\sum_{ij}\frac{m_im_j}{r_{ij}};$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u_i}{dt^2}+2\sqrt{-1}\frac{du_i}{dt}&=\frac{2}{m_i}\frac{\partial F}{\partial v_i},\\ \frac{d^2v_i}{dt^2}-2\sqrt{-1}\frac{dv_i}{dt}&=\frac{2}{m_i}\frac{\partial F}{\partial u_i},\\ \frac{d^2z_i}{dt^2}\qquad\qquad&=\frac{1}{m_i}\frac{\partial F}{\partial z_i}.\end{aligned}\right.$$

Soient $u_i = a_i$, $v_i = b_i$, $z_i = 0$ une solution de Lagrange (équilibre relatif); nous poserons

$$u_i = a_i + \varepsilon\xi_i, \qquad v_i = b_i + \varepsilon\eta_i, \qquad z_i = \varepsilon\zeta_i, \qquad t = (1+\delta)\tau,$$

ε et δ étant des paramètres, pour l'instant, arbitraires, ξ_i, η_i, ζ_i et τ les nouvelles variables.

On a d'ailleurs

$$a_i - \sum_j m_j(a_i - a_j)p_{ij} = 0,$$
$$b_i - \sum_j m_j(b_i - b_j)p_{ij} = 0,$$

en posant

$$p_{ij} = [(a_i - a_j)(b_i - b_j)]^{-\frac{3}{2}};$$

les équations (8) deviennent alors

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + 2\sqrt{-1}(1+\delta)\dfrac{d\xi_i}{d\tau} = (1+\delta)^2[X_{i1} + \varepsilon X_{i2} + \ldots], \\ \dfrac{d^2\eta_i}{d\tau^2} - 2\sqrt{-1}(1+\delta)\dfrac{d\eta_i}{d\tau} = (1+\delta)^2[Y_{i1} + \varepsilon Y_{i2} + \ldots], \\ \dfrac{d^2\zeta_i}{d\tau^2} \qquad\qquad\qquad\qquad = (1+\delta)^2[Z_{i1} + \varepsilon Z_{i2} + \ldots]; \end{cases}$$

$$X_{i1} = \xi_i + \sum_j \frac{m_j p_{ij}}{2}\left[(\xi_i - \xi_j) + 3(\eta_i - \eta_j)\frac{a_i - a_j}{b_i - b_j}\right],$$
$$Y_{i1} = \eta_i + \sum_j \frac{m_j p_{ij}}{2}\left[(\eta_i - \eta_j) + 3(\xi_i - \xi_j)\frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}\right],$$
$$Z_{i1} = \quad -\sum_j m_j p_{ij}(\zeta_i - \zeta_j);$$

$$X_{i2} = \sum_j m_j p_{ij}\left[-\frac{3}{8}\frac{(\xi_i - \xi_j)^2}{a_i - a_j} - \frac{3}{4}\frac{(\xi_i - \xi_j)(\eta_i - \eta_j)}{b_i - b_j} + \frac{3}{2}\frac{(\zeta_i - \zeta_j)^2}{b_i - b_j} - \frac{15}{8}(\eta_i - \eta_j)^2\frac{a_i - a_j}{(b_i - b_j)^2}\right],$$
$$Y_{i2} = \sum_j m_j p_{ij}\left[-\frac{3}{8}\frac{(\eta_i - \eta_j)^2}{b_i - b_j} - \frac{3}{4}\frac{(\xi_i - \xi_j)(\eta_i - \eta_j)}{a_i - a_j} + \frac{3}{2}\frac{(\zeta_i - \zeta_j)^2}{a_i - a_j} - \frac{15}{8}(\xi_i - \xi_j)^2\frac{b_i - b_j}{(a_i - a_j)^2}\right],$$
$$Z_{i2} = \sum_j m_i p_{ij}\frac{3}{2}(\zeta_i - \zeta_j)\left[\frac{\xi_i - \xi_j}{a_i - a_j} + \frac{\eta_i - \eta_j}{b_i - b_j}\right].$$

Pour $\varepsilon = \delta = 0$, les équations du mouvement se réduisent à

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + 2\sqrt{-1}\dfrac{d\xi_i}{d\tau} = X_{i1}, \\ \dfrac{d^2\eta_i}{d\tau^2} - 2\sqrt{-1}\dfrac{d\eta_i}{d\tau} = Y_{i1}, \\ \dfrac{d^2\zeta_i}{d\tau^2} \qquad\qquad = Z_{i1}. \end{cases}$$

Le système se décompose alors en deux systèmes linéaires à coefficients constants : les équations aux ζ_i ; et les équations aux ξ_i et η_i.

16. *Étude du système aux* ζ_i. — Posons

$$P_{ii} = \sum_j m_j p_{ij}, \qquad P_{ij} = -m_j p_{ij} \qquad (i \neq j, \text{ quantités réelles}).$$

On a

$$\frac{d^2\zeta_i}{d\tau_i} + \sum_j \zeta_j P_{ij} = 0.$$

La solution générale, de la forme $\zeta_i = \lambda_i e^{h\tau}$, est donnée par les équations

$$\lambda_i h^2 + \sum_j \lambda_j P_{ij} = 0 \tag{12}$$

et

$$\Delta(h^2) = \begin{vmatrix} P_{11} + h^2 & P_{12} & P_{13} & \dots \\ P_{21} & P_{22} + h^2 & P_{23} & \dots \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} + h^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation $\Delta(h^2)$ se réduit à une équation en $S = -h^2$ (multiplier les lignes par $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, ... et diviser les colonnes par ces mêmes quantités) : celle de l'hyperquadrique

$$p_{12}(\sqrt{m_2}\alpha_1 - \sqrt{m_1}\alpha_2)^2 + p_{13}(\sqrt{m_3}\alpha_1 - \sqrt{m_1}\alpha_3)^2 + \dots = 0.$$

Il en résulte que l'équation en h^2 a toutes ses racines réelles et non positives.

Il est d'ailleurs évident que $\Delta(h^2) = 0$ admet la racine $h^2 = 0$ (remplacer une colonne par la somme des colonnes). Mais alors les λ_i sont tous égaux et ne peuvent satisfaire à la condition $\Sigma m_i \lambda_i = 0$ [conséquence de $\Sigma m_i z_i = 0$] que si $\lambda_i = 0$: on retombe sur la solution de Lagrange d'où l'on est parti.

D'ailleurs, multiplions les équations (12) par m_i et faisons leur somme ; en tenant compte de $\Sigma_i m_i P_{ij} = 0$, on obtient

$$h^2 \sum m_i \lambda_i = 0,$$

et l'on voit que, pour toute racine de $\Delta(h^2) = 0$, autre que $h^2 = 0$, la condition $\Sigma m_i \lambda_i = 0$ est satisfaite.

Multiplions les équations (12) par $m_i a_i$ (ou par $m_i b_i$) et tenons compte des relations d'équilibre qui s'écrivent ainsi :

$$a_i - \sum_j a_j P_{ij} = 0, \qquad b_i - \sum_j b_j P_{ij} = 0$$

ou

$$m_i a_i - \sum_j m_j a_j P_{ji} = 0, \qquad m_i b_i - \sum_j m_j b_j P_{ji} = 0,$$

et des relations

$$m_i P_{ij} = m_j P_{ji},$$

on obtient

$$(h^2+1)\sum m_i a_i \lambda_i = 0, \qquad (h^2+1)\sum m_i b_i \lambda_i = 0.$$

En multipliant de même par $m_i a_i$ (ou $m_i b_i$) les lignes de $\Delta(h^2) = 0$, on voit que $h^2 = -1$ est une racine simple si les M_i sont alignés (les a_i sont alors proportionnels aux b_i) et double si les M_i ne sont pas en ligne droite.

Dans le premier cas, on peut prendre $\lambda_i = \lambda a_i$; dans le deuxième cas, $\lambda_i = \lambda a_i + \mu b_i$; cela correspond à la possibilité de mouvement de Lagrange suivant des coniques semblables.

Pour les racines différentes de $h^2 = -1$, les λ_i satisfont aux relations

$$\sum m_i a_i \lambda_i = \sum m_i b_i \lambda_i = 0.$$

Dans tous les cas, il existe des solutions périodiques pour lesquelles $\xi_i = \eta_i = 0$ et les ζ_i sont des fonctions sinusoïdales de τ.

17. *Étude du système aux ξ_i et η_i.* — Les P_{ij} et P_{ii} ayant la même signification que ci-dessus, posons

$$P'_{ij} = -m_j p_{ij}\frac{a_i - a_j}{b_i - b_j}, \qquad P'_{ii} = \sum_j m_j p_{ij}\frac{a_i - a_j}{b_i - b_j} \qquad (i \neq j),$$

$$P''_{ij} = -m_j p_{ij}\frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}, \qquad P''_{ii} = \sum_j m_j p_{ij}\frac{b_i - b_j}{a_i - a_j} \qquad (i \neq j),$$

les P' et les P'' sont des quantités conjuguées.

Les équations aux ξ et η sont alors

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + 2\sqrt{-1}\,\frac{d\xi_i}{d\tau} = \xi_i + \frac{1}{2}\sum_j \xi_j P_{ij} + \frac{3}{2}\sum_j \eta_j P'_{ij},$$

$$\frac{d^2\eta_i}{d\tau^2} - 2\sqrt{-1}\,\frac{d\eta_i}{d\tau} = \eta_i + \frac{3}{2}\sum_j \xi_j P''_{ij} + \frac{1}{2}\sum_j \eta_j P_{ij}.$$

La solution générale, de la forme

$$\xi_i = A_i e^{\sqrt{-1}g\tau}, \qquad \eta_i = B_i e^{\sqrt{-1}g\tau}$$

est donnée par les équations

$$(13) \qquad \begin{cases} A_i(g+1)^2 + \frac{1}{2}\sum_j A_j P_{ij} + \frac{3}{2}\sum_j B_j P'_{ij} = 0, \\ B_i(g-1)^2 + \frac{3}{2}\sum_j A_j P''_{ij} + \frac{1}{2}\sum_j B_j P_{ij} = 0 \end{cases}$$

et

$$\Delta(g^2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}P_{11} + (g+1)^2 & \frac{1}{2}P_{12} & \dots & \frac{3}{2}P'_{11} & \frac{3}{2}P'_{12} & \dots \\ \frac{1}{2}P_{21} & \frac{1}{2}P_{22} + (g+1)^2 & \dots & \frac{3}{2}P'_{21} & \frac{3}{2}P'_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{3}{2}P''_{11} & \frac{3}{2}P''_{12} & \dots & \frac{1}{2}P_{11} + (g-1)^2 & \frac{1}{2}P_{12} & \dots \\ \frac{3}{2}P''_{21} & \frac{3}{2}P''_{22} & \dots & \frac{1}{2}P_{21} & \frac{1}{2}P_{22} + (g-1)^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions les colonnes de $\Delta(g^2)$ par $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, $\dots$, $\sqrt{m_1}$. $\sqrt{m_2}$, $\dots$, et divisons les lignes par les mêmes quantités; si nous changeons alors $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, les lignes et les colonnes s'intervertissent : $\Delta(g^2) = 0$ a donc ses coefficients réels. Changeons g en $-g$, quelques permutations faciles de lignes, puis de colonnes, conduisent à un nouveau déterminant où les lignes et les colonnes sont interverties : l'équation est donc une équation de degré $2n$ en g^2.

Une racine positive en g^2 ou deux racines conjuguées fournissent pour g des couples de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $-\alpha + \beta\sqrt{-1}$, auxquels correspondent les constantes

$$A'_i + A''_i\sqrt{-1}, \qquad B'_i + B''_i\sqrt{-1}$$

et

$$B'_i - B''_i\sqrt{-1}, \qquad A'_i - A''_i\sqrt{-1},$$

et la solution

$$\xi_i = (A'_i + A''_i\sqrt{-1})\, e^{(-\beta+\alpha\sqrt{-1})\tau} + (B'_i - B''_i\sqrt{-1})\, e^{(-\beta-\alpha\sqrt{-1})\tau},$$
$$\eta_i = (B'_i + B''_i\sqrt{-1})\, e^{(-\beta+\alpha\sqrt{-1})\tau} + (A'_i - A''_i\sqrt{-1})\, e^{(-\beta-\alpha\sqrt{-1})\tau}.$$

Les ξ_i et η_i sont conjuguées et conduisent à une solution réelle en x_i et y_i.

On aura une solution périodique réelle (x_i, y_i; et $z_i = 0$) si $\beta = 0$, c'est-à-dire si l'on a pris une racine positive de l'équation en g^2.

A une racine négative en g^2 correspondent deux racines $\beta\sqrt{-1}$ et $-\beta\sqrt{-1}$; la première, par exemple, conduit à la solution

$$\xi_i = (A' + A''\sqrt{-1})\,e^{-\beta\tau}, \qquad \eta_i = (A' - A''\sqrt{-1})\,e^{-\beta\tau},$$

ξ_i et η_i encore conjuguées, mais ne fournissent pas de solution périodique. Utilisant les relations

$$\sum_i m_i P_{ij} = 0, \qquad \sum_i m_i P'_{ij} = 0, \qquad \sum_i m_i P''_{ij} = 0,$$

et les relations (déduites des conditions d'équilibre relatif)

$$a_i = \sum_j a_j P_{ij} = \sum_j b_j P'_{ij},$$
$$b_i = \sum_j b_j P_{ij} = \sum_j a_j P''_{ij}$$

ou

$$\sum_i m_i a_i P_{ij} = m_j a_j = \sum_i m_i b_i P'_{ij},$$
$$\sum_i m_i b_i P_{ij} = m_j b_j = \sum_i m_i a_i P''_{ij}.$$

En multiplant les n premières lignes par $m_1, m_2, \ldots, m_n$ et en ajoutant, on obtient une ligne qui contient $(g+1)^2$ en facteur; en opérant de même avec les n dernières, on met en évidence le facteur $(g-1)^2$; en multipliant les n premières lignes par $m_1 b_1$, $m_2 b_2 \ldots$, et additionnant, on obtient une nouvelle ligne :

$$m_1 b_1\left[\frac{1}{2} + (g+1)^2\right], \quad m_2 b_2\left[\frac{1}{2} + (g+1)^2\right], \quad \ldots, \quad \frac{3}{2} m_1 a_1, \quad \frac{3}{2} m_2 a_2, \quad \ldots,$$

en multipliant les n dernières par $m_1 a_1$, $m_2 a_2$, $\ldots$, on obtient de même

$$\frac{3}{2} m_1 b_1, \quad \frac{3}{2} m_2 b_2, \quad \ldots, \quad m_1 a_1\left[\frac{1}{2} + (g-1)^2\right], \quad m_2 a_2\left[\frac{1}{2} + (g-1)^2\right] \quad \ldots,$$

ces deux lignes deviennent identiques si

$$\left[\frac{1}{2} + (g+1)^2\right]\left[\frac{1}{2} + (g-1)^2\right]^2 - \frac{9}{4} = 0,$$

c'est-à-dire

$$g^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad g^2 = 1.$$

L'équation admet donc la racine triple $g^2 = 1$ et la racine simple $g^2 = 0$.

Considérons, par exemple, $g = 1$: on peut prendre les $A_i = 0$ et les B_i égaux, mais alors la relation $\Sigma m_i B_i = 0$ n'est vérifiée que si $B_i = 0$.

On peut prendre aussi

$$A_i = \lambda a_i, \qquad B_i = -3\lambda b_i;$$

alors, la racine $g = -1$ donnera $-3\mu a_i$ et μb_i, et l'on aura une solution réelle en prenant pour λ et μ deux quantités conjuguées; ce dernier cas correspond aux mouvements de Lagrange suivant des coniques semblables.

Les n premières équations (13), multipliées par $m_1, m_2, \ldots$, conduisent à la relation

$$(g+1)^2 \sum_i m_i A_i = 0,$$

les n dernières conduisent de même à

$$(g-1)^2 \sum_i m_i B_i = 0;$$

on en conclut que, pour toute racine autre que ± 1, les conditions nécessaires

$$\sum_i m_i A_i = \sum_i m_i B_i = 0$$

sont satisfaites.

Considérons maintenant $g^2 = 0$; on peut prendre alors

$$A_i = \lambda a_i, \qquad B_i = -\lambda b_i;$$

pour que ξ_i et η_i soient conjugués, il faut que λ soit imaginaire pure.

Cette racine correspond au fait qu'on peut faire tourner le système d'un angle arbitraire sans rompre l'équilibre relatif.

En multipliant les n premières équations par $m_1 b_1, m_2 b_2, \ldots$, on obtient

$$\left[\frac{1}{2} + (g+1)^2\right] \sum_i m_i b_i A_i + \frac{3}{2} \sum_i m_i a_i B_i = 0;$$

de même, les n dernières multipliées, par $m_1 a_1, m_2 a_2, \ldots$, donnent

$$\left[\frac{1}{2} + (g-1)^2\right] \sum_i m_i a_i B_i + \frac{3}{2} \sum_i m_i b_i A_i = 0;$$

pour toute autre racine que ± 1 et 0, on a les relations

$$\sum_i m_i a_i B_i = \sum_i m_i b_i A_i = 0.$$

En définitive, on aura de nouvelles solutions périodiques voisines des positions d'équilibre relatif en prenant :

1° Les racines de $\Delta(h^2)$, différentes de o et de -1 ;
2° Les racines réelles de $\dot{\Delta}(g^2)$, différentes de o et de ± 1.

18. Dans le cas où les masses M_i sont en ligne droite, en prenant cette droite pour axe Ox,

$$a_i = b_i = x_i^0 \text{ (réel)}$$

et

$$P_{ij} = P'_{ij} = P''_{ij}.$$

Soit h^2 une racine de $\Delta(h^2)$, il lui correspond des λ_i donnés par

$$(12) \qquad \lambda_i h^2 + \sum_j \lambda_j P_{ij} = 0$$

ou

$$m_i \lambda_i h^2 + \sum_j m_j \lambda_j P_{ji}.$$

Multiplions les n premières équations (13) par $m_i\lambda_i$; de même, les n dernières; il vient

$$\left[(g+1)^2 - \frac{h^2}{2}\right] \sum_i m_i \lambda_i A_i - \frac{3}{2} h^2 \sum_i m_i \lambda_i B_i = 0,$$
$$\left[(g-1)^2 - \frac{h^2}{2}\right] \sum_i m_i \lambda_i B_i - \frac{3}{2} h^2 \sum_i m_i \lambda_i A_i = 0;$$

l'équation en g admet donc les racines de

$$(e) \qquad g^4 - (h^2+2) g^2 + (1+h^2)(1-2h^2) = 0,$$

cette équation a une racine positive si $h^2 < -1$ et deux si $-1 < h^2 < -\frac{8}{9}$ (ce dernier cas ne peut d'ailleurs pas se présenter comme nous le montrerons par la suite); d'ailleurs, pour les racines de $\Delta(g)$ autres que celles de (e),

$$\sum_i m_i \lambda_i A_i = \sum_i m_i \lambda_i B_i = 0.$$

Dans le cas où les M_i sont en ligne droite, il suffit donc de pouvoir résoudre $\Delta(h^2) = 0$.

19. Appliquons cette première approximation à quelques exemples. D'abord, au problème des trois corps.

Supposons que les trois masses ne soient pas en ligne droite; la figure d'équilibre relatif est le triangle équilatéral, et les coordonnées de M_1, M_2, M_3 peuvent être prises égales à

$$x_1^0 = -\frac{1}{2}(2m_2+m_3), \qquad x_2^0 = \frac{1}{2}(2m_1+m_3), \qquad x_3^0 = \frac{1}{2}(m_1-m_2),$$
$$y_1^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}m_3, \qquad y_2^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}m_3, \qquad y_3^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(m_1+m_2)$$

avec

$$m_1+m_2+m_3 = 1 \qquad (\text{pour avoir } K^2 = 1),$$

on a

$$p_{12} = p_{23} = p_{13} = 1.$$

Si nous posons $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ (racine cubique de l'unité), nous avons

$$a_1 = -m_2 + m_3 j^2, \qquad a_2 = m_1 - m_3 j, \qquad a_3 = -m_1 j^2 + m_2 j,$$
$$b_1 = -m_2 + m_3 j, \qquad b_2 = m_1 - m_3 j^2, \qquad b_3 = -m_1 j + m_2 j^2.$$

puis

$$\Delta(h^2) = h^2(h^2+1)^2 = 0,$$
$$\Delta(g^2) = g^2(g^2-1)^3\left[g^4 - g^2 + \frac{27}{4}(m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1)\right];$$

l'équation en h^2 n'a que les solutions banales (0 et ± 1); l'équation en g^2 n'aura d'autres solutions que si

$$m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1 < \frac{1}{27}.$$

(m_1, m_2, m_3 sont les rapports des trois masses à la masse totale

$$M = m_1+m_2+m_3;$$

si ces quantités représentent les masses, l'unité étant quelconque, la relation ci-dessus devient, en rétablissant l'homogénéité,

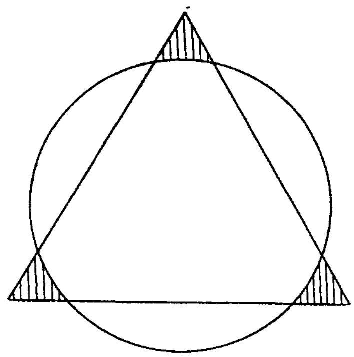
$$\frac{m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1}{(m_1+m_2+m_2)^2} < \frac{1}{27}\Bigg).$$

La distance du centre de gravité O au centre du triangle est

$$l = \frac{1}{4}(m_1-m_2)^2 + \frac{1}{12}(m_1+m_2-2m_3)^2$$
$$= \frac{1}{3} - (m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1),$$

la condition trouvée s'interprète donc géométriquement ainsi : le centre de gravité des trois masses doit être extérieur au cercle concentrique au

Fig. 9.



triangle et de rayon $\sqrt{\frac{8}{27}}$ (le côté étant l'unité et le rayon du cercle circonscrit $\sqrt{\frac{1}{3}}$).

Cette condition étant remplie, nous aurons deux solutions positives g'^2 et g''^2, donc, deux groupes de solutions périodiques de périodes $\frac{2\pi}{g'}$ et $\frac{2\pi}{g''}$.

Pour calculer les coefficients A_i et B_i, nous avons d'abord les relations

$$\sum m_i A_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum m_i b_i A_i = 0$$

qui donnent

$$\frac{A_1}{m_2 m_3 j^2} = \frac{A_3}{m_3 m_1 j} = \frac{A_3}{m_1 m_2} = \lambda$$

et

$$\sum m_i B_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum m_i a_i B_i = 0$$

qui donnent

$$\frac{B_1}{m_2 m_3 j} = \frac{B_2}{m_3 m_1 j^2} = \frac{B_3}{m_1 m_2} = \mu.$$

On peut déterminer λ et μ, les équations (13) fournissant les deux relations

$$\lambda\left[(g+1)^2 + \frac{1}{2}\right] + \frac{3}{2}\mu[m_1 j + m_2 j^2 + m_3] = 0,$$

$$\frac{3}{2}\lambda(m_1 j^2 + m_2 j + m_3) + \mu\left[(g-1)^2 + \frac{1}{2}\right] = 0,$$

compatibles si g est une racine, différente de o et de ± 1 de l'équation $\Delta(g^2)=0$, soit g' ou g''.

Chaque couple de racines ($\pm g'$ ou $\pm g''$) donne un groupe de solutions périodiques :

$$\xi_1 = m_2 m_3 j^2 U, \qquad \xi_2 = m_3 m_1 j\ U, \qquad \xi_3 = m_1 m_2 U,$$
$$\eta_1 = m_2 m_3 j\ V, \qquad \eta_2 = m_3 m_1 j^2 V, \qquad \eta_3 = m_1 m_2 V;$$

$$\begin{aligned} U &= \lambda\, e^{ig\tau} + \mu'\, e^{-ig\tau} \\ V &= \mu\, e^{ig\tau} + \lambda'\, e^{-ig\tau} \end{aligned} \qquad (g > 0);$$

$$\lambda = \frac{3}{2}\,(k+li)[m_1 j + m_2 j^2 + m_3], \qquad \lambda' = \frac{3}{2}\,(k-li)[m_1 j^2 + m_2 j + m_3],$$

$$\mu = -(k+li)\left[(g+1)^2 + \frac{1}{2}\right], \qquad \mu' = -(k-li)\left[(g+1)^2 + \frac{1}{2}\right],$$

k et l étant des constantes réelles.

Les trajectoires sont de petites ellipses ayant pour centres les points M_1, M_2, M_3, positions d'équilibre relatif.

Si, d'une façon générale, nous posons

$$\xi = u\, e^{i\alpha} + v'\, e^{-i\alpha},$$
$$\eta = v\, e^{i\alpha} + u'\, e^{-i\alpha},$$

u et u', v et v' étant des couples de constantes conjuguées, et α une variable réelle, l'ellipse a pour équation cartésienne

$$\begin{aligned} x^2[(uu'+vv') - (u'v+uv')] - 2i(u'v - uv')xy \\ + y^2[(uu'+vv') + (u'v+uv')] = (uu'-vv')^2. \end{aligned}$$

Les directions des axes sont données par

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{i(u'v - uv')}{u'v + uv',}.$$

Si nous prenons 2φ défini par les relations

$$\frac{\sin 2\varphi}{i(u'v - v'u)} = \frac{\cos 2\varphi}{u'v + uv'} = \frac{1}{2\sqrt{uu'vv'}}.$$

l'équation réduite de l'ellipse est

$$X^2\left[(uu'+vv') - 2\sqrt{uu'vv'}\right] + Y^2\left[(uu'+vv') + 2\sqrt{uu'vv'}\right] = (uu'-vv')^2.$$

Les carrés des axes ont pour valeurs

$$X^2 = uu' + vv' + 2\sqrt{uu'vv'},$$
$$Y^2 = uu' + vv' - 2\sqrt{uu'vv'}.$$

Pour les trois points M_1, M_2, M_3, nous trouvons

$$\operatorname{tang} 2\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}\,(m_3 - m_1)}{2m_2 - m_3 - m_1},$$
$$\operatorname{tang} 2\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}\,(m_2 - m_3)}{2m_1 - m_2 - m_3},$$
$$\operatorname{tang} 2\varphi_3 = \frac{\sqrt{3}\,(m_1 - m_2)}{2m_3 - m_1 - m_2}.$$

On peut construire ainsi les directions des axes : soit Δ la droite qui joint le centre de gravité des masses M_1, M_2, M_3 (en équilibre relatif) au centre du triangle équilatéral dont elles sont les sommets; les coordonnées du centre sont

$$\frac{1}{2}(m_1 - m_2) \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{3}}{6}(m_2 + m_2 - m_3);$$

de M_3, par exemple, abaissons la perpendiculaire sur Δ : les axes de l'ellipse (M_3) sont les bissectrices des angles formés par cette perpendiculaire et le côté opposé $M_1 M_2$.

On obtient ensuite :

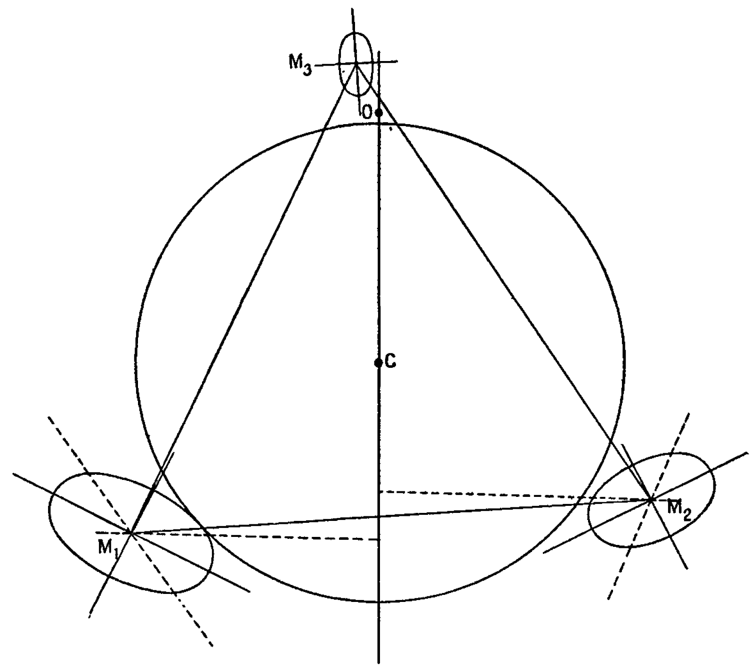
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin 2\varphi_1}{\sqrt{3}\,(m_1 - m_3)} = \dfrac{\cos 2\varphi_1}{m_3 + m_1 - 2m_2} \\ \dfrac{\sin 2\varphi_2}{\sqrt{3}\,(m_3 - m_2)} = \dfrac{\cos 2\varphi_2}{m_2 + m_3 - 2m_1} \\ \dfrac{\sin 2\varphi_3}{\sqrt{3}\,(m_3 - m_1)} = \dfrac{\cos 2\varphi_3}{m_1 + m_2 - 2m_3} \end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3\sum m_1 m_2}} = \frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{g^4 - g^2 + \frac{9}{4}}},$$

$$\frac{X_1^2}{m_2 m_3} = \frac{X_2^2}{m_3 m_1} = \frac{X_3^2}{m_1 m_2} = (k^2 + l^2)\left[(g+1)^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{g^4 - g^2 + \frac{9}{4}}\right]^2,$$

$$\frac{Y_1^2}{m_2 m_3} = \frac{Y_2^2}{m_3 m_1} = \frac{Y_3^2}{m_1 m_2} = (k^2 + l^2)\left[(g+1)^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{g^4 - g^2 + \frac{9}{4}}\right]^2.$$

En supposant $m_1 < m_2 < m_3$, on peut schématiser les résultats par la figure suivante.

Fig. 10.



D'ailleurs,

$$x_n^2 + y_n^2 = \xi_n \eta_n = \left\{ \begin{matrix} m_2^2 m_3^2 \\ m_3^2 m_1^2 \\ m_1^2 m_2^2 \end{matrix} \right\} \mathrm{UV},$$

et en appelant θ_n l'angle du demi-diamètre de l'ellipse qui passe par la position instantanée du mobile avec $\mathrm{O}x$:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1}{2\sqrt{\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2}} = \frac{j + j^2}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\eta_1\xi_2 - \xi_1\eta_2}{2\sqrt{\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2}}\, i = \frac{j^2 - j}{2}\, i = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les trois ellipses semblables sont donc parcourues de la même manière.

D'ailleurs,

$$\operatorname{tang}\theta_n = \frac{\eta_n - \xi_n}{\eta_n + \xi_n} i,$$

$$\frac{d}{d\tau}(\operatorname{tang}\theta_n) = \frac{2(\xi_n\eta'_n - \eta_n\xi'_n)i}{(\xi_n+\eta_n)^2} = \frac{2g(\lambda\lambda' - \mu\mu')}{(\xi_n+\eta_n)^2}$$
$$= -\frac{4(k^2+l^2)}{(\xi_n+\eta_n)^2} g^2(2g^2+4g+3) < 0,$$

les trois mouvements sont donc rétrogrades.

20. Supposons maintenant que les points M_1, M_2, M_3 dans leur position d'équilibre relatif soient en ligne droite. On a alors, en prenant cette droite pour axe Ox :

$$\Delta(h^2) = h^6 + h^4[p_{12}(m_1+m_2) + p_{23}(m_2+m_3) + p_{13}(m_3+m_1)]$$
$$+ h^2[m_1+m_2+m_3][m_1p_{12}p_{13} + m_2p_{12}p_{23} + m_2p_{13}p_{23}].$$

Cette équation admet la solution $h^2 = 0$ et la solution $h^2 = -1$ (ou plus généralement $h^2 = -\omega^2$, ω étant la rotation du système d'axes mobiles); elle ne peut avoir de racine double que si $p_{14} = p_{23} = p_{34}$, condition impossible à réaliser, puisque les points sont en ligne droite; la troisième racine $h^2 = -h_3^2$ est toujours différente de $-\omega^2$. Or, si $m_3 = 0$, les racines sont

$$-\omega^2 = -p_{12}(m_1+m_2) \qquad \text{et} \qquad -h_3^2 = -(m_1p_{13} + m_2p_{23})$$

et si M_3 est entre M_1 et M_2,

$$-h_3^2 < -\omega^2.$$

Les racines inconnues de $\Delta(g^2) = 0$ sont données par l'équation

$$g^4 - g^2(2\omega^2 - h_3^2) + (\omega^2 - h_3^2)(\omega^2 + 2h_3^2) = 0,$$

qui a toujours une et une seule racine positive en g^2, soit g_1^2; en substituant ω^2 et h_3^2, on voit que

$$\omega^2 < h_3^2 < g_1^2.$$

Pour $h^2 = -h_3^2$, les constantes λ_1, λ_2, λ_3 sont données par les relations

$$\sum m_i\lambda_i = 0, \qquad \sum m_i a_i \lambda_i = 0$$

(les a_i se réduisant aux abscisses x_i des positions d'équilibre relatif); donc,

$$\frac{\lambda_1}{\frac{a_3 - a_2}{m_1}} = \frac{\lambda_2}{\frac{a_1 - a_3}{m_2}} = \frac{\lambda_3}{\frac{a_2 - a_1}{m_3}}.$$

Pour $g^2 = g_1^2$ les constantes A_1, A_2, A_3 d'une part, B_1, B_2, B_3 d'autre part, vérifient les mêmes équations que les λ. On a donc

$$\frac{A_1}{\dfrac{a_3 - a_2}{m_1}} = \frac{A_2}{\dfrac{a_1 - a_3}{m_2}} = \frac{A_3}{\dfrac{a_2 - a_1}{m_3}} = \mu,$$

$$\frac{B_2}{\dfrac{a_3 - a_2}{m_1}} = \frac{B_2}{\dfrac{a_1 - a_3}{m_2}} = \frac{B_3}{\dfrac{a_2 - a_1}{m_3}} = \nu,$$

μ et ν étant donnés par les deux équations compatibles

$$\mu\left[(g_1 + \omega)^2 + \frac{h_3^2}{2}\right] + \frac{3}{2} h_3^2 \nu = 0,$$

$$\frac{3}{2} h_3^2 \mu + \nu\left[(g_1 - \omega)^2 + \frac{h_3^2}{2}\right] = 0;$$

d'où

$$\nu = -\frac{2(g_1 + \omega)^2 + h_3^2}{3h_3^2}\mu, \qquad \nu = -K\mu.$$

La solution est de la forme

$$\xi_1 = \frac{a_3 - a_2}{m_1}U, \qquad \xi_2 = \frac{a_1 - a_3}{m_2}U, \qquad \xi_3 = \frac{a_2 - a_1}{m_3}U,$$

$$\eta_1 = \frac{a_3 - a_2}{m_1}V, \qquad \eta_2 = \frac{a_1 - a_3}{m_2}V, \qquad \eta_3 = \frac{a_2 - a_1}{m_3}V$$

avec

$$U = (k + li)e^{ig_1\tau} - K(k - li)e^{-ig_1\tau},$$

$$V = -K(k + li)e^{ig_1\tau} + (k - li)e^{-ig_1\tau}.$$

On tire

$$x_1 = \frac{a_3 - a_2}{m_1}(1 - K)[k\cos g_1\tau - l\sin g_1\tau],$$

$$y_1 = \frac{a_3 - a_2}{m_1}(1 + K)[l\sin g_1\tau + l\cos g_1\tau],$$

$$\frac{x_1^2}{(K - 1)^2} + \frac{y_1^2}{(K + 1)^2} = \frac{(a_3 - a_2)^2}{m_1^2}(k^2 + l^2),$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{1 + K}{1 - K} g_1 \frac{k^2 + l^2}{(k\cos g_1\tau - l\sin g_1\tau)^2},$$

et les deux groupes analogues, en changeant $\dfrac{a_3 - a_2}{m_1}$ en $\dfrac{a_1 - a_3}{m_2}$ ou $\dfrac{a_2 - a_1}{m_3}$.

Les trajectoires sont des ellipses semblables dont un axe est porté par Ox (droite $M_1M_2M_3$). Pour la discussion, on peut supposer $g_1 > 0$ (si l'on prenait $g_1 < 0$, K se trouverait changé en $\frac{1}{K}$, mais le changement de i en $-i$, k en $-Kk$, et l en $-Kl$ redonnerait le même mouvement).

Alors,

$$K = 1 + \frac{2}{3h^2}(g_1 + \omega + h)(g_1 + \omega - h) > 1.$$

On en conclut que Ox porte le petit axe de l'ellipse et que le mouvement est rétrograde.

21. Développons les calculs dans le cas examiné par M. Stromgrën (*Monthly Notices*, LXXX, ou *Kopenhagen*, 34) :

$$m_1 = m_3 = \frac{m_2}{2},$$

les points étant dans l'ordre $M_1 M_2 M_3$. La position d'équilibre relatif est évidemment

$$r_{12} = r_{23},$$

que nous prendrons égaux à 1. On a alors

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 1$$

et

$$p_{12} = 1, \qquad p_{23} = 1, \qquad p_{13} = \frac{1}{8}.$$

Nous prendrons aussi

$$\frac{m_1}{1} = \frac{m_2}{2} = \frac{m_3}{1} = \frac{4}{9},$$

de façon à avoir $\omega^2 = 1$.

Alors

$$\Delta(h^2) = h^2(h^2 + 1)\left(h^2 + \frac{16}{9}\right) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 \qquad \text{(évident)}.$$

L'équation qui donne les valeurs de g^2 différentes de 0 et de ± 1 est ici

$$g^4 - \frac{2}{9}g^2 - \frac{287}{81} = 0;$$

d'où

$$g_1 = \frac{1}{3}\sqrt{1 + 12\sqrt{2}} = 1,41306.$$

On a ensuite

$$A_1 = -A_2 = A_3 = \mu,$$
$$B_1 = -B_2 = B_3 = \nu,$$

$$\mu\left[(g_1+1)^2 + \frac{8}{9}\right] + \frac{8}{3}\nu = 0,$$

$$\frac{K+1}{K-1} = \frac{7+2\sqrt{2}}{\sqrt{1+12\sqrt{2}}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{7}\sqrt{1+12\sqrt{2}} = 2,31848.$$

22. Dans le cas où l'une des masses, M_1 par exemple, est infiniment petite, d'influence négligeable, et peut sans erreur sensible être considérée comme nulle, le problème se décompose en deux : étude du mouvement des $(n-1)$ masses finies $M_2, M_3, \ldots, M_n$; puis ce mouvement étant considéré comme donné, étude du mouvement de M_1. En particulier, on peut supposer que les $(n-1)$ masses finies restent en équilibre relatif, et étudier alors le mouvement de M_1 : ce sera le problème restreint.

Les équations du mouvement sont alors $(\omega^2 = 1)$:

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\sqrt{-1}\,\frac{du_1}{dt} = 2\frac{\partial F}{\partial v_1},$$
$$\frac{d^2v_1}{dt^2} - 2\sqrt{-1}\,\frac{dv_1}{dt} = 2\frac{\partial F}{\partial u_1},$$
$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z_1};$$

$$F = \frac{1}{2}u_1v_1 + \sum_j \frac{m_j}{r_{1j}}.$$

Elles admettent alors l'intégrale première de Jacobi :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{du_1}{dt}\frac{dv_1}{dt} + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right] = F + C.$$

Les positions d'équilibre relatif sont ici les solutions des équations

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial F}{\partial v_1} = \frac{\partial F}{\partial z_1} = 0$$

$u_1 = a_1$, $v_1 = b_1$, $z_1 = 0$ étant l'une d'elles; posons encore

$$u_1 = a_1 + \varepsilon\xi, \qquad v_1 = b_1 + \varepsilon\eta, \qquad z_1 = \varepsilon\zeta, \qquad t = (1+\delta)\tau,$$

ε et δ étant des paramètres, pour l'instant, arbitraires.

Les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\sqrt{-1}(1+\delta)\frac{d\xi}{d\tau} = (1+\delta)^2[X_1 + \varepsilon X_2 + \ldots],\\
&\frac{d^2\eta}{d\tau^2} - 2\sqrt{-1}(1+\delta)\frac{d\eta}{d\tau} = (1+\delta)^2[Y_1 + \varepsilon Y_2 + \ldots],\\
&\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} \qquad\qquad\qquad\qquad = (1+\delta)^2[Z_1 + \varepsilon Z_2 + \ldots];
\end{aligned}$$

$$X_1 = \xi + \sum_2^n \frac{m_j p_{1j}}{2}\left[\xi + 3\eta\frac{a_1 - a_j}{b_1 - b_j}\right],$$

$$Y_1 = \eta + \sum_2^n \frac{m_j p_{1j}}{2}\left[\eta + 3\xi\frac{b_1 - b_j}{a_1 - a_j}\right],$$

$$Z_1 = -\zeta\sum_2^n m_j p_{1j};$$

$$X_2 = \sum_2^n m_j p_{1j}\left[-\frac{3}{8}\frac{\xi^2}{a_1 - a_j} - \frac{3}{4}\frac{\xi\eta}{b_1 - b_j} + \frac{3}{2}\frac{\zeta^2}{b_1 - b_j} - \frac{15}{8}\frac{\eta^2(a_1 - a_j)}{(b_1 - b_j)^2}\right],$$

$$Y_2 = \sum_2^n m_j p_{1j}\left[-\frac{3}{8}\frac{\eta^2}{b_1 - b_j} - \frac{3}{4}\frac{\xi\eta}{a_1 - a_j} + \frac{3}{2}\frac{\zeta^2}{a_1 - a_j} - \frac{15}{8}\frac{\xi^2(b_1 - b_j)}{(a_1 - a_j)^2}\right],$$

$$Z_2 = \frac{3}{2}\zeta\sum_2^n m_j p_{1j}\left[\frac{\xi}{a_1 - a_j} + \frac{\eta}{b_1 - b_j}\right];$$

$$\begin{aligned}
X_3 = \sum m_j p_{1j}\Bigg[&\frac{5}{16}\frac{\xi^3}{(a_1 - a_j)^2} + \frac{9}{16}\frac{\xi^2\eta}{r_{1j}^2} + \frac{15}{16}\frac{\xi\eta^2(a_1 - a_j)^2}{r_{1j}^4}\\
&+ \frac{35}{16}\frac{\eta^3(a_1 - a_j)^4}{r_{1j}^6} - \frac{9}{4}\frac{\zeta^2\xi}{r_{1j}^2} - \frac{15}{4}\zeta^2\eta\frac{(a_1 - a_j)^2}{r_{1j}^4}\Bigg],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_3 = \sum m_j p_{1j}\Bigg[&\frac{5}{16}\frac{\eta^3}{(b_1 - b_j)^2} + \frac{9}{16}\frac{\xi\eta^2}{r_{1j}^2} + \frac{15}{16}\frac{\xi^2\eta(b_1 - b_j)^2}{r_{ij}^4}\\
&+ \frac{35}{16}\frac{\xi^3(a_1 - b_j)^4}{r_{1j}^6} - \frac{15}{4}\frac{\zeta^2\xi(b_1 - b_j)^2}{r_{1j}^4} - \frac{9}{4}\frac{\zeta^2\eta}{r_{1j}^2}\Bigg],
\end{aligned}$$

$$Z_3 = \sum m_j p_{1j}\frac{\zeta}{r_{1j}^2}\left[\frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{15}{8}\frac{\xi^2(b_1 - b_j)^2}{r_{1j}^2} - \frac{9}{4}\xi\eta - \frac{15}{8}\frac{\eta^2(a_1 - a_j)^2}{r_{1j}^2}\right];$$

pour $\varepsilon = \delta = 0$, les équations donnant la première approximation sont :

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\sqrt{-1}\frac{d\xi}{d\tau} = X_1 = \xi\left(1 + \frac{1}{2}P_{11}\right) + \eta\frac{3}{2}P'_{11}.\\
&\frac{d^2\eta}{d\tau^2} - 2\sqrt{-1}\frac{d\eta}{d\tau} = Y_1 = \xi\frac{3}{2}P''_{11} + \eta\left(1 + \frac{1}{2}P_{11}\right),\\
&\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} \qquad\qquad\quad = Z_1 = -\zeta P_{11}.
\end{aligned}$$

(Comme il n'y a pas de confusion possible, nous écrirons simplement P, P', P''.) On a encore une équation qui ne contient que ζ :

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}+P\zeta=0,$$

$$\zeta=c_1\cos h\tau+c_2\sin h\tau,\qquad h^2=-P.$$

Les deux équations en ξ et η conduisent aux relations

$$A\left[(g+1)^2+\frac{1}{2}P\right]+\frac{3}{2}P'B=0,$$

$$\frac{3}{2}P''A+B\left[(g-1)^2+\frac{1}{2}P\right]=0,$$

g étant racine de l'équation

$$g^4-g^2(2-P)+\left(\frac{1}{2}P+1\right)^2-\frac{9}{4}P'P''=0.$$

A toute racine positive de cette équation en g^2 correspond une solution périodique :

$$\xi=A\,e^{ig\tau}+B'\,e^{-ig\tau},$$

$$\eta=B\,e^{ig\tau}+A'\,e^{-ig\tau}.$$

A, A' et B, B' étant conjugués; les directions des axes sont données par

$$\operatorname{tang}2\varphi=i\frac{(A'B-AB')}{A'B+AB'}=i\frac{P''-P'}{P'+P''}.$$

Il est commode, ainsi que l'ont fait de nombreux auteurs, d'utiliser pour la discussion de ce cas (mouvements plans du problème restreint) l'étude de la surface

$$\Phi=F+C.$$

Un mouvement réel s'effectue tout entier dans les régions

$$F+C=V^2>0.$$

Si

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=\frac{\partial F}{\partial v_1}=\frac{\partial F}{\partial z_1}=0,$$

et si C est choisi de telle sorte que $F+C=0$, la surface $\Phi=0$ a en M_1 un point conique, les axes du cône des tangentes étant Oz et les directions

$$\operatorname{tang}2\varphi=i\frac{P''-P'}{P''+P'};$$

car alors, en portant l'origine en M_1

$$\Phi = \frac{3}{8}P''\xi^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}P\right)\xi\eta + \frac{3}{8}P'\eta^2 - \frac{1}{2}P\zeta^2 + \ldots,$$

les termes non écrits étant du troisième degré au moins.

23. Portons plus spécialement notre attention sur le cas, où les masses finies étant alignées, la masse nulle est voisine d'une des positions d'équilibre situées sur cette droite.

L'équation aux g^2 se réduit à

$$g^4 - g^2(2 - P) + (1 - P)(1 + 2P) = 0.$$

On peut alors montrer que $P - 1 > 0$ et que, par suite, l'équation en g^2 n'a qu'une racine positive.

En effet, supposons M_1 entre M_K et M_{K+1} ; alors

$$P = (m_2 p_{1,2} + \ldots + m_{k-1} p_{1,k-1} + m_{k+2} p_{1,k+2} + \ldots + m_n p_{1,n}) + (m_k p_{1k} + m_{k+1} p_{1,k+1}).$$

La première parenthèse est positive, et nous allons montrer que la deuxième est supérieure à 1. On a

$$u = m_k p_{1,k} + m_{k+1} p_{1,k+1} = \frac{m_k}{(x_1 - x_k)^3} + \frac{m_{k+1}}{(x_{k+1} - x_1)^3}$$

avec $x_k < x_1 < x_{k+1}$;

$$\frac{du}{dx_1} = -\frac{3m_k}{(x_1 - x_k)^4} + \frac{3m_{k+1}}{(x_{k+1} - x_1)^4}.$$

Cette dérivée s'annule pour

$$x' = \frac{m_k^{\frac{1}{4}} x_{k+1} + m_{k+1}^{\frac{1}{4}} x_k}{m_k^{\frac{1}{4}} + m_{k+1}^{\frac{1}{4}}}$$

et la fonction u a alors pour valeur

$$u' = \frac{\left(m_k^{\frac{1}{4}} + m_{k+1}^{\frac{1}{4}}\right)^4}{(x_{k+1} - x_k)^3} > (m_k + m_{k+1}) p_{k,k+1};$$

on a d'ailleurs pour u la variation

$$\begin{array}{c|ccccc} x_1 & x_k & & x'_1 & & x_{k+1} \\ \hline u & +\infty & \searrow & u' & \nearrow & +\infty \end{array};$$

u reste donc toujours supérieur à $(m_k + m_{k+1})p_{k,k+1}$, quelle que soit la position d'équilibre relatif dans l'intervalle $M_k M_{k+1}$. Or, parmi les équations d'équilibre des masses finies, il y a

$$\begin{aligned} m_2(x_2 - x_k)p_{2,k} &+ \ldots + m_{k-1}(x_{k-1} - x_k)p_{k-1,k} \\ &+ m_{k+1}(x_{k+1} - x_k)p_{k,k+1} + \ldots + m_n(x_n - x_k)p_{k,n} + x_k = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2(x_2 - x_{k+1})p_{2,k+1} &+ \ldots + m_k\ (x_k - x_{k+1})p_{k,k+1} \\ &+ m_{k+2}(x_{k+2} - x_{k+1})p_{k+1,k+2} + \ldots \\ &+ m_n\ (x_n - x_{k+1})p_{k+1,n} + x_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

avec

$$x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < x_1 < x_{k+1} < \ldots < x_n.$$

Retranchons la seconde équation de la première. Il vient

$$\begin{aligned} & m_2\left[\frac{1}{r_{2,k+1}^2} - \frac{1}{r_{2k}^2}\right] + \ldots + m_{k-1}\left[\frac{1}{r_{k-1,k+1}^2} - \frac{1}{r_{k-1,k}^2}\right] \\ & + (x_{k+1} - x_k)[m_k + m_{k+1}]p_{k,k+1} \\ & + m_{k+2}\left[\frac{1}{r_{k,k+2}^2} - \frac{1}{r_{k+1,k+2}^2}\right] + \ldots + m_n\left[\frac{1}{r_{k,n}^2} - \frac{1}{r_{k+1,n}^2}\right] = (x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

Toutes les parenthèses où les r sont explicités sont négatives, $(x_{k+1} - x_k)$ est positif; donc

$$(m_k + m_{k+1})p_{k,k+1} > 1$$

et

$$P > 1.$$

Reste à examiner le cas où M_1 est ou avant $M_2 (x_1 < x_2)$, ou après $M_n (x_1 > x_n)$; il suffit évidemment d'étudier l'un d'eux : $x_1 < x_2$.

L'équation qui détermine x, quand on connaît $x_2, \ldots, x_n$, s'écrit

$$\sum_{i=2}^{i=n} \frac{m_j x_j}{r_{1j}^3} + x_1(1 - P) = 0.$$

Appelons M_h et M_{h+1} les masses finies les plus voisines de 0 $(x_h < 0,\ x_{h+1} > 0)$:

$$r_{12} < r_{13} < \ldots < r_{1h} < r_{1,h+1} < \ldots < r_{1n}.$$

En tenant compte de la relation

$$-(m_1 x_1 + \ldots + m_h x_h) = (m_{h+1} x_{h+1} + \ldots + m_n x_n),$$

nous pouvons écrire

$$-\left[\frac{m_2 x_2}{r_{12}^3}+\ldots+\frac{m_h x_h}{r_{1h}^3}\right]>-\left[\frac{m_2 x_2+\ldots+m_h x_h}{r_{1h}^3}\right]$$
$$>\frac{m_{h+1} x_{h+1}+\ldots+m_n x_n}{r_{1,h+1}^3}>\frac{m_{h+1} x_{h+1}}{r_{1,h+1}^3}+\ldots+\frac{m_n x_n}{r_{1n}^3}.$$

Par suite

$$\sum \frac{m_j x_j}{r_{1j}^3}<0, \qquad (x_1<0);$$

donc encore

$$P>1.$$

Dans le cas où $m_1=0$, l'équation aux g^2 n'a qu'une seule racine positive.

24. Nous pouvons en déduire qu'il en est de même pour toutes les équations en g^2, quand toutes les masses alignées sont finies. Il faut montrer que l'équation $\Delta(h^2)=0$ n'a, en plus des solutions $h^2=0$ et $h^2=-1$, que des racines inférieures à -1; nous avons déjà vu qu'il en est bien ainsi dans le cas des trois corps. Supposons que la propriété soit vraie pour $(n-1)$ masses, et montrons qu'elle est encore vraie pour n.

Si l'une des n masses, M_k par exemple, est nulle, $\Delta(h^2)=0$ admet la racine $h^2=-P_{kk}<-1$ et les racines d'un déterminant $\Delta_1(h^2)$ d'ordre $n-1$, qui n'est autre que le $\Delta(h^2)$ de $n-1$ masses finies : il admet donc les racines 0, 1 et $n-3$ racines inférieures à -1.

Faisons croître M_k depuis zéro jusqu'à une valeur finie arbitraire (la rotation $\omega^2=k^2$ restant égale à 1); les x, donc les p, varient d'une façon continue, les p restant toujours les inverses des cubes des distances mutuelles. Il en résulte que les racines h^2 varieront aussi d'une façon continue.

D'autre part, aucun des p ne deviendra ni infini, ni nul, et le terme en h^{2n} qui a pour coefficient $+1$ ne peut disparaître : les racines h^2, d'abord inférieures à -1, ne peuvent lui devenir supérieures qu'en traversant cette valeur. Nous allons montrer que $\Delta(h^2)=0$ ne peut admettre $h^2=-1$ comme racine double si les masses sont alignées.

Supposons en effet que $\Delta(h^2)=0$ admette $h^2=-1$ comme racine double; les équations

$$(P_{ii}+1)\lambda_i+\sum{}' \lambda_j P_{ij}=0$$

se réduiraient à $n-2$ distinctes et donneraient pour les λ des expressions de la forme $\lambda_i=\mu a_i+\nu b_i$ (les b_i n'étant pas proportionnels aux a_i); nous aurions deux groupes d'équations

$$\sum m_j(a_j - a_i)p_{ij} + a_i = 0$$

et

$$\sum m_j(b_j - b_i)p_{ij} + b_i = 0,$$

de même forme que celles qui donnent les solutions de Lagrange dans le plan; nous pourrions former les équations

$$\sum m_h(ijh)(p_{ih} - p_{jh}) = 0,$$

dans lesquelles les (i, j, h) ne seraient pas tous nuls, et il existerait entre les p des relations dans lesquelles ils pourraient être interprétés comme p d'un système de points non linéaires, ce qui est impossible.

25. Dans le cas des masses alignées, les axes de l'ellipse (trajectoire de première approximation) sont : la ligne des masses et sa perpendiculaire, car $P'' = P' = P$.

Posons $(g > 0)$:

$$k = \frac{(g+1)^2 + \frac{1}{2}P}{\frac{3}{2}P} = \frac{\frac{3}{2}P}{(g-1)^2 + \frac{1}{2}P} \qquad (k > 1),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \xi &= \,A\,e^{ig\tau} - k\,A'\,e^{-ig\tau}, \\ \eta &= -k\,A\,e^{ig\tau} + \,A'\,e^{-ig\tau}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-k}{2}\,(A\,e^{ig\tau} + A'\,e^{-ig\tau}) = (1-k)\;\;a\cos(g\tau + \varphi), \\ y &= \frac{1+k}{2}\,i(-A\,e^{ig\tau} + A'\,e^{-ig\nu}) = (1+k)\;\;a\sin(g\tau + \varphi); \end{aligned}$$

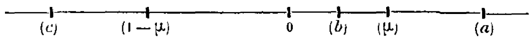
le grand axe est perpendiculaire à la droite des masses, et le mouvement est rétrograde.

Développons les calculs pour quelques cas particuliers et occupons-nous d'abord de celui où il y a deux masses finies. Nous pouvons poser :

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = 1 - \mu, \qquad m_3 = \mu \qquad \left(\mu < \frac{1}{2}\right),$$

M_2 et M_3 dont la distance est prise égale à 1 étant sur l'axe Ox, leurs coordonnées sont $(\mu, 0, 0)$ et $(1 - \mu, 0, 0)$.

Supposons d'abord que M_1 soit sur la droite M_2M_3; nous aurons trois positions d'équilibre relatif possibles :



1° En posant : $x_1 = 1 - \mu + u$, la position (a) est donnée par la racine réelle positive de

$$u^5 + (3-\mu)u^4 + (3-2\mu)u^3 - \mu u^2 - 2\mu u - \mu = 0,$$

qui se développe sous la forme

$$u = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right) + \ldots.$$

2° En posant de même $x_1 = 1 - \mu - u$, la position (b) est donnée par la racine réelle positive de

$$u^5 - (3-\mu)u^4 + (3-2\mu)u^3 - \mu u^2 + 2\mu u - \mu = 0,$$

dont les premiers termes du développement sont

$$u = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right) + \ldots.$$

3° Enfin, en posant $x_1 = -1 - \mu + u$, la position (c) est donnée par la racine réelle positive de

$$u^5 - (7+\mu)u^4 + (19+6\mu)u^3 - (24+13\mu)u^2 + (12+14\mu)u - 7\mu = 0,$$

qui donne le développement

$$u = \frac{7}{12}\mu + \frac{23 \times 7^2}{12^4}\mu^3 + \ldots.$$

Alors,

$$P = \frac{1-\mu}{[(\mu + x_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{[(x_1 - 1 + \mu)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

où x_1 a l'une des trois valeurs précédentes.

26. Supposons maintenant que M_1 soit l'un des sommets des triangles équilatéraux de base M_2M_3, par exemple

$$x_1 = \frac{1}{2} - \mu, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$P = 1$, l'équation en ζ n'a pour solution que

$$\zeta = c_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau.$$

De plus,

$$P' = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2\mu), \qquad P'' = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2\mu);$$

l'équation aux g^2 est donc

$$g^4 - g^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0,$$

qui a deux racines positives si

$$1 - 27\mu(1-\mu) > 0;$$

donc si

$$\mu < 0{,}0385209\ldots.$$

Chacune d'elles donne une solution de la forme

$$\zeta = \frac{3}{2}P'A\, e^{ig\tau} - \left[(g+1)^2 + \frac{1}{2}\right]A'\, e^{-ig\tau}$$

$$\eta = -\left[(g+1)^2 + \frac{1}{2}\right]A\, e^{ig\tau} + \frac{3}{2}P''A'\, e^{-ig\tau},$$

A et A′ étant imaginaires conjuguées, et g une racine positive de l'équation aux g.

Les directions des axes de la trajectoire sont données par

$$\operatorname{tang} 2\varphi = i\frac{P'' - P'}{P'' + P'} = -\sqrt{3}(1-2\mu) = 0.$$

Si nous choisissons

$$\frac{\sin 2\varphi}{-\sqrt{3}(1-2\mu)} = \frac{\cos 2\varphi}{1} = \frac{1}{2\sqrt{1-3\mu+3\mu^2}},$$

nous obtenons pour longueurs des axes :

$$X = \sqrt{AA'}\left[(g+1)^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{P'P''}\right],$$

$$Y = \sqrt{AA'}\left[(g+1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{P'P''}\right];$$

le petit axe est dirigé approximativement vers la grosse masse (les directions des axes étant les mêmes pour les deux solutions g_1 et g_2), si

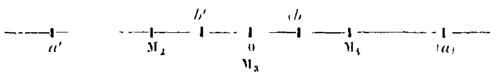
$$g_1 > g_2, \qquad X_1 > X_2 \qquad \text{et} \qquad Y_1 < Y_2.$$

27. Examinons encore sommairement le cas de trois masses finies égales. Ces masses M_2, M_3, M_4 peuvent être alignées, ou aux sommets d'un triangle équilatéral.

1° Si elles sont alignées (sur Ox), on peut prendre :

$$x_2 = -1, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 1,$$
$$m_2 = m_3 = m_4 = \frac{4}{5} \qquad (\text{pour } \omega^2 = 1).$$

M_1 peut occuper quatre positions d'équilibre deux à deux symétriques par rapport à o : (a) et (a'), (b) et (b'),



La position (a) est déterminée par l'unique racine supérieure à 1 de l'équation

$$\frac{4}{5}\left[\frac{1}{(x_1+1)^2} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{(x_1-1)^2}\right] - x_1 = 0 \qquad (x_1 = 1,75767);$$

la position (b) par la racine comprise entre o et 1 de l'équation

$$\frac{4}{5}\left[\frac{1}{(x_1+1)^2} + \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{(x_1-1)^2}\right] - x_1 = 0 \qquad (x_1 = 0,49467).$$

Alors,

	(a).	(b).
P	2,02476	13,04830
g	1,50413	3,65228
$\frac{1+k}{1-k}$	$-2,43062$	$-11,07979$

2° Les masses M_2, M_3, M_4 étant toujours alignées, il existe pour M_1 deux positions d'équilibre relatif, symétriques par rapport à Ox et qui, ici, seront, par raison de symétrie, sur Oy ; celle dont l'ordonnée est positive sera déterminée par

$$\frac{4}{5}\left[\frac{2}{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y_1^3}\right] - 1 = 0 \qquad (y_1 = 1,13943),$$

$$P = 1, \qquad P' = P'' = \frac{4}{5}\left[\frac{2(1-y_1^2)}{(1+y_1^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{y_1^3}\right] = \frac{4}{5}\,\frac{4}{(1+y_1^2)^{\frac{5}{2}}} - 1.$$

D'où

$$\mathrm{P}'\,\mathrm{P}'' = \frac{8}{9}\,\mathrm{P} = \left[\frac{4}{5}\,\frac{4}{(1+y_1^2)^{\frac{5}{2}}} - 1\right]^2 - \frac{8}{9} < 0.$$

L'équation aux g^2 n'a que des racines imaginaires ; la seule solution périodique est donc ici

$$\zeta = c'_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau.$$

3° Les masses M_2, M_3, M_4 étant les sommets d'un triangle équilatéral, on peut poser

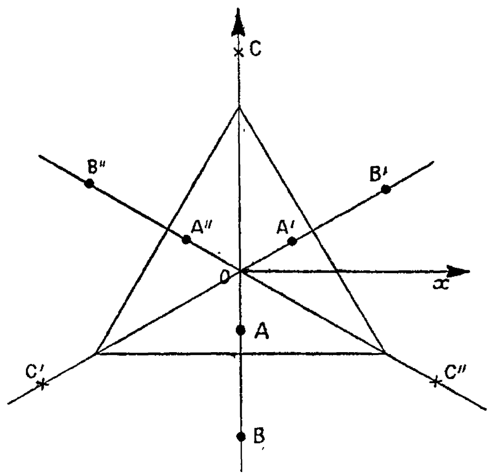
$$x_2 = -\frac{1}{2}, \qquad x_3 = \frac{1}{2}, \qquad x_4 = 0,$$

$$y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \qquad y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \qquad y_4 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$m_2 = m_3 = m_4 = \frac{1}{3}.$$

Comme nous l'avons vu, les positions d'équilibre relatif de $M_1 (m_1 = 0)$

Fig. 11.



sont sur les hauteurs du triangle $M_2 M_3 M_4$ et, par raison de symétrie, il suffit d'étudier celles qui sont sur $Oy (x_1 = 0)$. Alors,

$$\mathrm{P} = \frac{1}{3}(2p_{12} + p_{14}).$$

$$\mathrm{P}' = \mathrm{P}'' = \frac{1}{3}\left[2p_{12}\,\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + y\right)^2}{\frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + y\right)^2} - p_{14}\right] = \frac{1}{3}\,\frac{1}{r_{12}^3} - \mathrm{P}.$$

Donc $\tang 2\varphi = 0$, et les axes des ellipses trajectoires sont parallèles à Ox et Oy.

En posant

$$k = \frac{(g+1)^2 + \frac{1}{2}P}{\frac{3}{2}P'} = \frac{\frac{3}{2}P''}{(g-1)^2 + \frac{1}{2}P},$$

un calcul déjà fait nous conduit à

$$x = (1-k)a\cos(g\tau + \varphi),$$
$$y = (1+k)a\sin(g\tau + \varphi).$$

Le tableau suivant donnera un résumé des résultats :

	y_1.	P.	$P' = P''$.	g.	$\frac{1-k}{1+k}$.
o	o	$3\sqrt{3}$	o	imaginaire	–
A	—0,238958	5,568000	4.539508	1,987645	—0,270538
B	—0,935186	1,317475	—0,403412	imaginaire	–
C	1,180007	1,701481	—1,664396	1,353340	—2,282820

Pour A, mouvement rétrograde, grand axe parallèle à Oy.

Pour B, mouvement rétrograde, grand axe parallèle à Ox.

28. Pour terminer, disons quelques mots du cas où deux des trois masses finies, placées au sommet du triangle équilatéral, sont égales.

Posons

$$m_2 = m_3 = \frac{1-\mu}{2}, \qquad m_4 = \mu,$$

et plaçons l'origine des coordonnées au point M_4

$$x_2 = -\frac{1}{2}, \qquad x_3 = \frac{1}{2}, \qquad x_4 = 0,$$
$$y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y_4 = 0,$$

les coordonnées du centre de gravité des trois masses étant d'ailleurs

$$x = 0, \qquad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mu).$$

Les solutions de Lagrange qui sont sur l'axe de symétrie ($x = 0$) sont données par l'équation

$$y + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mu) - \frac{\mu\varepsilon}{y^2} - \frac{(1-\mu)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left[\frac{1}{4} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0 \qquad (\varepsilon y > 0).$$

Nous avons toujours une solution (B) entre $-\sqrt{3}$ et 1 ; et une solution (C) entre 0 et 1. Si $\mu < 0{,}42342$ (*cf.* § 9), nous avons encore deux solutions, O et A, entre $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et zéro, mais quand μ croît et traverse la valeur précédente, ces deux solutions se réunissent en solution double et disparaissent.

Ici

$$P = \frac{\mu}{|y|^3} + \frac{1-\mu}{\left[\frac{1}{4} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$P' = P'' = -\frac{\mu}{|y|^3} + \frac{(1-\mu)\left[\frac{1}{4} - \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}{\left[\frac{1}{4} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}},$$

$$P' = -P + \frac{1-\mu}{2}\,\frac{1}{r_{12}^5}.$$

Rappelons que les racines de l'équation aux g^2 sont réelles si

$$9P'^2 - 8P > 0,$$

le signe de leur produit est celui de $(P+2)^2 - 9P'^2$, et celui de leur somme, celui de $2 - P$. Le tableau suivant donne les signes de ces quantités :

μ.	ρ.	P.	P′.	$(P+2)^2-9P'^2$.	$9P'^2-8P$.	
$+\varepsilon$	$-\left(\frac{9}{4}\varepsilon\right)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{13}{4}$	$-\frac{11}{4}$	—		O
0,11960	−0,37233	4,8547	−2,2849	0	+	
$\frac{1}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$3\sqrt{3}$	0	+	—	
0,42342	−0,72574	5,2246	2,4082	0	+	
$\frac{1}{3}$	−0,81631	5,8680	4,5395	—	+	A
0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	8	8	—		
$+\varepsilon$	$\left(\frac{9}{4}\varepsilon\right)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{13}{4}$	$-\frac{11}{3}$	—	+	C
$\frac{1}{3}$	0,60284	−1,7015	−1,6640	—	+	
1	1	1	−1	0	+	
1	−1	1	−1	0		B
$\frac{1}{3}$	−1,51234	1,3175	−0,4334	+	—	
0	$-\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	+	—	

Ce tableau montre que, dans le cas où les masses ne sont pas alignées, les racines de l'équation aux g^2 peuvent présenter toutes les combinaisons possibles : imaginaires conjuguées, réelles et positives, réelles et négatives, réelles et de signes contraires.

Bibliographie.

CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels* (9ª partie).

ANDOYER (H.), *Sur les solutions périodiques voisines des positions d'équilibre relatif dans le problème des n corps* (*Bulletin astronomique*, t. 23).

ROUTH (E. J.), *On Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. VI).

PEDERSEN (P.), *Die Erweiterung der Lagrangeschen Dreieckslösungen im allgemeinen Dreikörperproblem* (*A. N.*, 211, ou *Kopenhagen*, n° 35).

STROMGREN (ELIS), *A new class of periodic solutions in the general problem of three bodies* (*Monthly Notices*, LXXX, ou *Kopenhagen*, n° 34).

CHARLIER, *On periodic Örbits* (*Öfversigt af K. S. V. Vet. Akad. Forhandl* n° 9 ou *Meddelanden frâm Lunds Astronomika Observatorium*, n° 18).

LINDERS (F. J.), *Über die Bewegung eines kleinen Planeten in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckspunkte* (*Arkiw för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band 4, n° 20, ou *Meddelande frâm Lunds Astronomika Observatorium*, n° 35).

PLUMMER (H. C.), *On periodic Orbits in the Neighbourhood of Centres of Libration* (*Monthly Notices*, vol. LXII).

— *On oscillating Satellites* (*Monthly Notices*, vol. LXIII).

MARTIN (Monroe), *On the libration points of the restricted problem of three bodies* (*American Journal of Mathematics*, vol. LIII).

ROSENTHAL (Jenny E.), *Note on the numerical value of a particular mass ratio in the restricted problem of three bodies* (*American Journal of Mathematics*, vol. LIII).

MURRAY (F. H.), *On certains families of orbits with arbitary masses in the problem of three bodies* (*Transactions of the Mathematical Society*, vol. 28).

LOWETT (E. O.), LINDOW, Articles cités au Chapitre I.

HAPPEL (H.), *Über die Lösungen bein Dreikörperproblem in der Nähe der Librationszentra* (*Mathematische Annalen*, 71).

GREAVES (W. M. H.), *The existence Theorem for certain periodic orbits in the restricted problem of three bodies* (*Monthly Notices*, 82).

CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES (PROBLÈME RESTREINT).

SOMMAIRE.

Nous avons vu, au Chapitre précédent, qu'au voisinage de certaines solutions, d'équilibre relatif de Lagrange, il existait, au moins en première approximation, des solutions périodiques; ces résultats ont été obtenus en faisant, dans les équations du mouvement, $\delta = \varepsilon = 0$. Nous nous proposons maintenant de chercher si ces équations du mouvement admettent des solutions périodiques, développables suivant les puissances de ε, et qui se réduisent à celles que nous avons trouvées quand $\varepsilon = 0$; ces dernières ayant pour période T, tant en t qu'en τ, celles que nous nous proposons d'obtenir auront encore T comme période en τ, mais leur période en t sera $T' = \frac{T}{1+\delta}$, et nous verrons que δ n'est en général pas nul, mais développable suivant les puissances de ε.

Nous nous placerons au voisinage d'une des solutions de Lagrange:

$$\xi = \eta = \zeta = 0.$$

Problème restreint.

29. Nous examinerons d'abord le cas le plus simple, le problème restreint; le seul mouvement à déterminer, celui de la masse nulle est donné par les équations

$$
(14)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2i(1+\delta)\frac{d\xi}{d\tau} - (1+\delta)^2\left[\xi\left(1+\frac{P}{2}\right) + \frac{3}{2}\eta P'\right] = (1+\delta)^2[\varepsilon X_2 + \varepsilon^2 X_3 + \ldots],\\
&\frac{d^2\eta}{d\tau^2} - 2i(1+\delta)\frac{d\eta}{d\tau} - (1+\delta)^2\left[\frac{3}{2}\xi P'' + \eta\left(1+\frac{P}{2}\right)\right] = (1+\delta)^2[\varepsilon Y_2 + \varepsilon^2 Y_3 + \ldots],\\
&\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} \qquad\qquad\qquad + (1+\delta)^2\zeta P \qquad\qquad\qquad = (1+\delta)^2[\varepsilon Z_2 + \varepsilon^2 Z_3 + \ldots],
\end{aligned}
\right.
$$

avec

$$
P = \sum m_j p_{1j}; \qquad P' = \sum m_j p_{1j}\frac{a_1 - a_j}{b_1 - b_j}, \qquad P'' = \sum m_j p_{1j}\frac{b_1 - b_j}{a_1 - a_j};
$$

$$
X_2 = -\frac{3}{8}A'\xi^2 - \frac{3}{4}A''\xi\eta - \frac{15}{8}B'\eta^2 + \frac{3}{2}A''\zeta^2,
$$

$$
Y_2 = -\frac{15}{8}B''\xi^2 - \frac{3}{4}A'\xi\eta - \frac{3}{8}A''\eta^2 + \frac{3}{2}A'\zeta^2,
$$

$$
Z_2 = -\frac{3}{2}\zeta(A'\xi + A''\eta);
$$

$$
A' = \sum \frac{m_j p_{1j}}{a_1 - a_j}, \qquad A'' = \sum \frac{m_j p_{1j}}{b_1 - b_j},
$$

$$
B' = \sum m_j p_{1j}\frac{a_1 - a_j}{(b_1 - b_j)^2}, \qquad B'' = \sum m_j p_{1j}\frac{b_1 - b_j}{(a_1 - a_j)^2};
$$

$$
X_3 = \frac{5}{16}C'\xi^3 + \frac{9}{16}C\,\xi^2\eta + \frac{15}{16}D'\xi\eta^2 + \frac{35}{16}E'\eta^3 - \frac{9}{4}C\,\zeta^2\xi - \frac{15}{4}D'\zeta^2\eta,
$$

$$
Y_3 = \frac{35}{16}E''\xi^3 + \frac{15}{16}D''\xi^2\eta + \frac{9}{16}C\,\xi\eta^2 + \frac{5}{16}C''\eta^3 - \frac{15}{4}D''\zeta^2\xi - \frac{9}{4}C\,\zeta^2\eta,
$$

$$
Z_3 = \zeta\left(\frac{3}{2}C\zeta^2 - \frac{15}{8}D''\xi^2 - \frac{9}{4}C\xi\eta - \frac{15}{8}D'\eta^2\right);
$$

$$
C' = \sum \frac{m_j p_{1j}}{(a_1 - a_j)^2}, \qquad C = \sum \frac{m_j p_{1j}}{r_{1j}^2}, \qquad C'' = \sum \frac{m_j p_{1j}}{(b_1 - b_j)^2};
$$

$$
D' = \sum m_j p_{1j}\frac{(a_1 - a_j)^2}{r_{1j}^4}, \qquad D'' = \sum m_j p_{1j}\frac{(b_1 - b_j)^2}{r_{1j}^4},
$$

$$
E' = \sum m_j p_{1j}\frac{(a_1 - a_j)^4}{r_{1j}^6}, \qquad E'' = \sum m_j p_{1j}\frac{(b_1 - b_j)^4}{r_{1j}^6},
$$

les sommations étant étendues à $j = 2, 3, \ldots, n$, c'est-à-dire à toutes les masses finies.

Dans le cas où les masses finies sont en ligne droite, ainsi que la masse nulle,

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}' = \mathrm{P}'' = \sum m_j p_{1j},$$

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}'' = \mathrm{B}' = \mathrm{B}'' = \sum \frac{m_j p_{1j}}{a_1 - a_j},$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{C}' = \mathrm{C}'' = \mathrm{D}' = \mathrm{D}'' = \mathrm{E}' = \mathrm{E}'' = \sum \frac{m_j p_{1j}}{r_{1j}^2} = \sum \frac{m_j}{r_{1j}^3}.$$

Si nous réduisons ces équations aux termes du premier ordre en ξ, η, ζ, c'est-à-dire si nous faisons $\varepsilon = 0$, $\delta \neq 0$, nous pouvons écrire la solution générale. En appelant σ_1, $-\sigma_1$, σ_2 et $-\sigma_2$ les solutions de

$$g^4 - g^2(2 - \mathrm{P}) + \left(1 + \frac{\mathrm{P}}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\mathrm{P}'\mathrm{P}'' = 0,$$

nous pouvons l'écrire sous la forme suivante (en vue des calculs ultérieurs) :

$$\begin{aligned}
\xi_0 = {} & (1 + b_1 i)\mathrm{K}_1 e^{i\sigma_1(1+\delta)\tau} + (1 + b_2 i)\mathrm{K}_2 e^{-i\sigma_1(1+\delta)\tau} \\
& + (1 + b_3 i)\mathrm{K}_3 e^{i\sigma_2(1+\delta)\tau} + (1 + b_4 i)\mathrm{K}_4 e^{-i\sigma_2(1+\delta)\tau}, \\
\eta_0 = {} & (1 - b_1 i)\mathrm{K}_1 e^{i\sigma_1(1+\delta)\tau} + (1 - b_2 i)\mathrm{K}_2 e^{-i\sigma_1(1+\delta)\tau} \\
& + (1 - b_3 i)\mathrm{K}_3 e^{i\sigma_2(1+\delta)\tau} + (1 + b_4 i)\mathrm{K}_4 e^{-i\sigma_2(1+\delta)\tau}, \\
\zeta_0 = {} & \mathrm{L}_1 e^{i(1+\delta)\sqrt{\mathrm{P}}\tau} + \mathrm{L}_2 e^{-i(1+\delta)\sqrt{\mathrm{P}}\tau},
\end{aligned}$$

les K et L étant des constantes arbitraires et

$$\frac{1 - bi}{1 + bi} = -\frac{2(g+1)^2 + \mathrm{P}}{3\mathrm{P}'} = -\frac{3\mathrm{P}''}{2(g-1)^2 + \mathrm{P}} = \frac{2(g+1)^2 + \mathrm{P} - 3\mathrm{P}''}{2(g-1)^2 + \mathrm{P} - 3\mathrm{P}'},$$

$$b = \frac{8gi + 3i(\mathrm{P}' - \mathrm{P}'')}{4g^2 + 2\mathrm{P} + 4 - 3(\mathrm{P}' + \mathrm{P}'')} = \frac{4g^2 + 2\mathrm{P} + 4 + 3(\mathrm{P}' + \mathrm{P}'')}{-8gi + 3i(\mathrm{P}' - \mathrm{P}'')},$$

g étant égal à σ_1, $-\sigma_1$, σ_2, $-\sigma_2$ respectivement pour b_1, b_2, b_3, b_4.

Dans le cas où les masses sont toutes alignées

$$\sigma_1 = \sigma > 0, \qquad \sigma_2 = i\rho, \qquad \rho > 0,$$

$$b_1 = -b_2 = \frac{\sigma^2 + 1 + 2\mathrm{P}}{-2\sigma i}, \qquad b_3 = -b_4 = -\frac{\rho^2 - 1 - 2\mathrm{P}}{2\rho}.$$

Pour discuter l'existence des solutions périodiques quand ε n'est pas nul, il nous sera commode de mettre les équations différentielles sous la forme normale (tout au moins les deux premières); à cet effet, nous poserons :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi &= (1+b_1 i)u_1 + (1+b_2 i)u_2 + (1+b_3 i)u_3 + (1+b_4 i)u_4,\\
\frac{d\xi}{d\tau} &= (1+\delta)[i\sigma_1(1+b_1 i)u_1 - i\sigma_1(1+b_2 i)u_2 + i\sigma_1(1+b_3 i)u_3 - i\sigma_2(1+b_4 i)u_4],\\
\eta &= (1-b_1 i)u_1 + (1-b_2 i)u_2 + (1-b_3 i)u_3 + (1-b_4 i)u_4,\\
\frac{d\eta}{d\tau} &= (1+\delta)[i\sigma_1(1-b_1 i)u_1 - i\sigma_1(1-b_2 i)u_2 + i\sigma_2(1-b_3 i)u_3 - i\sigma_2(1-b_4 i)u_4].
\end{aligned}\right.$$

Le déterminant Δ_2 de cette transformation n'est pas nul, en général; en effet, il est égal à

$$\Delta_2 = \frac{-256(1+\delta)^2\sigma_1\sigma_2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2}{[4\sigma_1^2+2P+4-3(P'+P'')][4\sigma_2^2+2P+4-3(P'+P'')]},$$

$$\Delta_2 = \frac{-256(1+\delta)^2\sigma_1\sigma_2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2}{32(2+P)-48(P'+P'')+9(P'-P'')^2}.$$

En particulier, si les points sont en ligne droite, il est égal à

$$-\frac{4i(1+\delta)^2\sigma\rho(\sigma^2+\rho^2)^2}{1-P} \neq 0,$$

et dans le cas des trois corps en triangle équilatéral, avec les notations du chapitre précédent, nous trouvons

$$-\frac{256(1+\delta)\sigma_1\sigma_2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^2}{144-27(1-2\mu)^2} \neq 0 \qquad \text{tant que } \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2.$$

Si nous effectuons le changement de variables (15), les équations (14) prennent la forme

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{du_1}{d\tau} - i\sigma_1(1+\delta)u_1 &= \frac{1+\delta}{\Delta}\{\Delta_{21}(\varepsilon X_2+\varepsilon^2 X_3+\ldots)+\Delta_{41}(\varepsilon Y_2+\varepsilon^2 Y_3+\ldots)\},\\
\frac{du_2}{d\tau} + i\sigma_1(1+\delta)u_2 &= \frac{1+\delta}{\Delta}\{\Delta_{22}(\varepsilon X_2+\varepsilon^2 X_3+\ldots)+\Delta_{42}(\varepsilon Y_2+\varepsilon^2 Y_3+\ldots)\},\\
\frac{du_3}{d\tau} - i\sigma_2(1+\delta)u_3 &= \frac{1+\delta}{\Delta}\{\Delta_{23}(\varepsilon X_2+\varepsilon^2 X_3+\ldots)+\Delta_{43}(\varepsilon Y_2+\varepsilon^2 Y_3+\ldots)\},\\
\frac{du_4}{d\tau} + i\sigma_2(1+\delta)u_4 &= \frac{1+\delta}{\Delta}\{\Delta_{24}(\varepsilon X_2+\varepsilon^2 X_3+\ldots)+\Delta_{44}(\varepsilon Y_2+\varepsilon^2 Y_3+\ldots)\},\\
\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + (1+\delta)^2 P.\zeta &= (1+\delta)^2\,(\varepsilon Z_2+\varepsilon^2 Z_3+\ldots),
\end{aligned}\right.$$

Δ_{hj} étant le mineur par rapport à la ligne de rang h et à la colonne de rang j du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+b_1 i & 1+b_2 i & 1+b_3 i & 1+b_4 i \\ \sigma_1(1+b_1 i) & -\sigma_1(1+b_2 i) & \sigma_2(1+b_3 i) & -\sigma_2(1+b_4 i) \\ 1-b_1 i & 1-b_2 i & 1-b_3 i & 1-b_4 i \\ \sigma_1(1-b_1 i) & -\sigma_1(1-b_2 i) & \sigma_2(1-b_3 i) & -\sigma_2(1-b_4 i) \end{vmatrix}.$$

30. Nous remarquerons encore que la trajectoire traverse sûrement le plan $z=0$: en effet, la solution étudiée étant périodique, z présente au moins un minimum $\left(\text{pour lequel } \frac{d^2 z}{dt^2} \geqq 0\right)$; et un maximum $\left(\text{pour lequel } \frac{d^2 z}{dt^2} \leqq 0\right)$; et l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z \sum \frac{m_j}{r_{1j}^3} = 0$$

montre que le maximum de z est positif ou nul, tandis que le minimum est négatif ou nul. Nous pourrons donc toujours prendre la valeur initiale de ζ nulle

$$L_2 = -L_1 \qquad \text{et} \qquad \zeta_0 = \frac{L}{(1+\delta)\sqrt{P}} \sin(1+\delta)\sqrt{P}\tau.$$

Si nous voulons obtenir la solution des équations (14) développée suivant les puissances de ε, nous sommes amenés à poser

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots, \\ \eta &= \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots, \\ \zeta &= \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon^2 \zeta_2 + \dots \end{aligned}$$

et à déterminer successivement (ξ_0, η_0, ζ_0) puis $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$, etc. Nous connaissons déjà ξ_0, η_0, ζ_0 ; les triades suivantes seront déterminées par les équations

$$\left\{\begin{aligned} X(\xi_1 \eta_1) &= \xi_1'' + 2i(1+\delta)\xi_1' - (1+\delta)^2\left[\left(1+\frac{P}{2}\right)\xi_1 + \frac{3}{2}P'\eta_1\right] \\ &= (1+\delta)^2\left[-\frac{3}{8}A'\xi_0^2 - \frac{3}{4}A''\xi_0\eta_0 - \frac{15}{8}B'\eta_0^2 + \frac{3}{2}A''\zeta_0^2\right], \\ Y(\xi_1 \eta_1) &= \eta_1'' - 2i(1+\delta)\eta_1' - (1+\delta)^2\left[\frac{3}{2}P''\xi_1 + \left(1+\frac{P}{2}\right)\eta_1\right] \\ &= (1+\delta)^2\left[-\frac{15}{8}B''\xi_0^2 - \frac{3}{4}A'\xi_0\eta_0 - \frac{3}{8}A''\eta_0^2 + \frac{3}{2}A'\zeta_0^2\right], \\ Z(\zeta_1) \quad &= \xi_1'' + (1+\delta)^2 P\zeta_1 = (1+\delta)^2 \frac{3}{2}\zeta_0[A'\xi_0 + A''\eta_0]; \end{aligned}\right.$$

et

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X}(\xi_2, \eta_2) &= (1+\delta)^2 \Big[-\frac{3}{4} \mathrm{A}' \xi_0 \xi_1 - \frac{3}{4} \mathrm{A}''(\xi_0 \eta_1 + \xi_1 \eta_0) - \frac{15}{4} \mathrm{B}' \eta_0 \eta_1 \\
&\quad + 3 \mathrm{A}'' \zeta_0 \zeta_1 + \frac{5}{16} \mathrm{C}' \xi_0^3 + \frac{9}{16} \mathrm{C} \xi_0^2 \eta_0 \\
&\quad + \frac{15}{16} \mathrm{D}' \xi_0 \eta_0^2 + \frac{35}{16} \mathrm{E}' \eta_0^3 - \frac{9}{4} \mathrm{C} \zeta_0^2 \xi_0 - \frac{15}{4} \mathrm{D}' \zeta_0^2 \eta_0 \Big], \\
\mathrm{Y}(\xi_2, \eta_2) &= (1+\delta)^2 \Big[-\frac{15}{4} \mathrm{B}'' \xi_0 \xi_1 - \frac{3}{4} \mathrm{A}'(\xi_0 \eta_1 + \xi_1 \eta_0) - \frac{3}{4} \mathrm{A}'' \eta_0 \eta_1 \\
&\quad + 3 \mathrm{A}' \zeta_0 \zeta_1 + \frac{35}{16} \mathrm{E}'' \xi_0^3 + \frac{15}{16} \mathrm{D}'' \zeta_0^2 \eta_0 \\
&\quad + \frac{9}{16} \mathrm{C} \xi_0 \eta_0^2 + \frac{15}{16} \mathrm{C}'' \eta_0^3 - \frac{15}{4} \mathrm{D}'' \zeta_0^2 \xi_0 - \frac{9}{4} \mathrm{C} \zeta_0^2 \eta_0 \Big], \\
\mathrm{Z}(\zeta_2) &= (1+\delta)^2 \Big[\frac{3}{2} \zeta_0 (\mathrm{A}' \xi_1 + \mathrm{A}'' \eta_1) + \frac{3}{2} \zeta_1 (\mathrm{A}' \xi_0 + \mathrm{A}'' \eta_0) \\
&\quad + \frac{3}{2} \mathrm{C} \zeta_0^3 - \zeta_0 \left(\frac{15}{8} \mathrm{D}'' \zeta_0^2 + \frac{9}{4} \mathrm{C} \xi_0 \eta_0 + \frac{15}{8} \mathrm{D}' \eta_0^2 \right) \Big], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Les premiers membres sont les mêmes pour tous ces systèmes, et les seconds membres de chacun d'eux sont connus par l'intégration des systèmes précédents. Les constantes K_1, K_2, K_3, K_4 et L qui entrent dans $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ seront déterminées de telle sorte que, pour $\tau = 0$, ces trois fonctions et leurs dérivées se réduisent aux valeurs initiales de ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{d\tau}$, $\frac{d\eta}{d\tau}$, $\frac{d\zeta}{d\tau}$, ce qui est possible puisque $\Delta \neq 0$; alors, à chaque stade suivant, les fonctions ξ_n, η_n, ζ_n devront s'annuler, ainsi que leurs dérivées, pour $\tau = 0$. Ces fonctions sont obtenues de l'intégration, sous la forme

$$
\begin{aligned}
\xi_n &= (1 + b_1 i) \mathrm{K}_{1,n} e^{i\sigma_1(1+\delta)\tau} + (1 + b_2 i) \mathrm{K}_{2,n} e^{-i\sigma_1(1+\delta)\tau} + (1 + b_3 i) \mathrm{K}_{3,n} e^{i\sigma_2(1+\delta)\tau} \\
&\quad + (1 + b_4 i) \mathrm{K}_{4,n} e^{-i\sigma_2(1+\delta)\tau} + \mathrm{F}_{1,n}(\mathrm{K}_1 \mathrm{K}_2 \mathrm{K}_3 \mathrm{K}_4 \mathrm{L};\ \delta, \tau), \\
\eta_n &= (1 - b_1 i) \mathrm{K}_{1,n} e^{i\sigma_1(1+\delta)\tau} + (1 - b_2 i) \mathrm{K}_{2,n} e^{-i\sigma_1(1+\delta)\tau} + (1 - b_3 i) \mathrm{K}_{3,n} e^{i\sigma_2(1+\delta)\tau} \\
&\quad + (1 - b_4 i) \mathrm{K}_{4,n} e^{-i\sigma_2(1+\delta)\tau} + \mathrm{F}_{2,n}(\mathrm{K}_1 \mathrm{K}_2 \mathrm{K}_3 \mathrm{K}_4 \mathrm{L};\ \delta, \tau), \\
\zeta_n &= \mathrm{L}_{1,n} e^{i(1+\delta)\sqrt{\mathrm{P}}\tau} + \mathrm{L}_{2,n} e^{-i(1+\delta)\sqrt{\mathrm{P}}\tau} + \mathrm{F}_{3n}(\mathrm{K}_1 \mathrm{K}_2 \mathrm{K}_3 \mathrm{K}_4 \mathrm{L};\ \delta, \tau),
\end{aligned}
$$

les F_{jn} étant homogènes par rapport aux constantes K_j et L et de degré $n+1$; Δ n'étant pas nul, nous déterminerons les K_{jn} par les relations

$$
\xi_n = \frac{d\xi_n}{d\tau} = \eta_n = \frac{d\eta_n}{d\tau} = 0 \qquad \text{pour } \tau = 0;
$$

$L_{1,n}$ et $L_{2,n}$ seront donnés, de même par $\zeta_n = \frac{d\zeta_n}{d\tau} = 0$; finalement, ξ_n, η_n, ζ_n seront des polynomes homogènes de degré $n+1$ par rapport aux K_j et L.

Nous aurons les mêmes conclusions pour les u_{jn} et ζ_n, les u_{jn} étant des combinaisons linéaires et homogènes des quantités ξ_n, $\frac{d\zeta_n}{d\tau}$, η_n et $\frac{d\eta_n}{d\tau}$.

Soient

$$u_j = K_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$
$$\zeta = 0, \qquad \frac{d\zeta}{d\tau} = L,$$

les valeurs initiales correspondant à une solution périodique, pour $\varepsilon = \delta = 0$; prenons des conditions initiales voisines

$$u_j = K_j + \alpha_j, \qquad \zeta = 0, \qquad \frac{d\zeta}{d\tau} = L + \gamma.$$

nous aurons

$$u_{1,0} = (K_1 + \alpha_1)\, e^{i\sigma_1(1+\delta)\tau}, \qquad u_{2,0} = (K_2 + \alpha_2)\, e^{i\sigma_1(1+\delta)\tau},$$
$$u_{3,0} = (K_3 + \alpha_3)\, e^{i\sigma_2(1+\delta)\tau}, \qquad u_{4,0} = (K_4 + \alpha_4)\, e^{i\sigma_2(1+\delta)\tau},$$
$$\zeta_0 = \frac{L+\gamma}{\sqrt{P(1+\delta)}} \sin\sqrt{P(1+\delta)}\,\tau, \qquad \frac{d\zeta_0}{d\tau} = (L+\gamma)\cos\sqrt{P(1+\delta)}\,\tau,$$

et la solution générale des équations (16) sera de la forme

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} u_j &= u_{j_0} + \sum_1^\infty \varepsilon^n \Phi_{j,n}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \delta,\ \tau) \qquad (j = 1, 2, 3, 4),\\ \zeta &= \zeta_0 + \sum_1^\infty \varepsilon^n \Phi_{5,n}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \delta,\ \tau),\\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= \frac{d\zeta_0}{d\tau} + \sum_1^\infty \varepsilon^n \Phi_{6,n}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \delta,\ \tau),\end{aligned}\right.$$

les $\Phi_{k,n}$ étant des polynomes aux α_j et γ, dont les coefficients sont des fonctions de τ et de δ.

Cette solution sera périodique, de période T, si

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_j(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \varepsilon,\ \delta,\ T) - u_j(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \varepsilon,\ \delta,\ 0) = 0,\\ &\zeta\ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \varepsilon,\ \delta,\ T) - \zeta\ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \varepsilon,\ \delta,\ 0) = 0,\\ &\zeta'(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \varepsilon,\ \delta,\ T) - \zeta'(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\gamma;\ \varepsilon,\ \delta,\ 0) = 0.\end{aligned}\right.$$

Mais il ne faut pas oublier que les équations (14) admettent l'intégrale première de Jacobi, qui peut s'écrire ici

$$(19)\qquad \frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\eta}{d\tau}+\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 = C+(1+\delta)^2\left[\xi\eta\left(1+\frac{P}{2}\right)+\frac{3}{4}P'\eta^2+\frac{3}{4}P''\xi^2-P\zeta^2\right] + \varepsilon(1+\delta)^2[\ldots].$$

Les six relations de périodicité se réduisent à cinq distinctes, auxquelles nous devons ajouter (pour achever de déterminer α_1, α_2, α_3, β_4, γ et δ, en fonction de ε) une relation arbitraire.

31. *Orbites* A. — Nous savons qu'à toute solution d'équilibre relatif du problème restreint correspond une solution périodique infinitésimale ($\varepsilon=\delta=0$)

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0,\qquad \zeta=\frac{L}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}\,\tau,$$

de période $\frac{2\pi}{\sqrt{P}}$ (l'origine étant choisie de telle sorte que, pour $\tau=0$, le mobile traverse le plan $z=0$ avec une vitesse L).

Alors

$$K_1=K_2=K_3=K_4=0,\qquad L\neq 0;$$

d'ailleurs la dérivée partielle de l'intégrale (19) par rapport à $\zeta'=\frac{d\zeta}{d\tau}$ est $2\frac{d\zeta}{d\tau}$ qui, pour $\alpha_i=\gamma=\varepsilon=0$, se réduit à $2L(1+\delta)$, non nul : nous pourrons donc supprimer la sixième relation de périodicité. Examinons d'un peu plus près comment les α_i et γ entrent dans la solution générale ; nous représenterons cette solution, symboliquement, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\xi &= f_1(\alpha_i)+\varepsilon[f_2(\alpha_i)+(L+\gamma)^2]+\varepsilon^2[f_3(\alpha_i)+(L+\gamma)^2p_1(\alpha_i)]+\ldots,\\
\eta &= \varphi_1(\alpha_i)+\varepsilon[\varphi_2(\alpha_i)+(L+\gamma)^2]+\varepsilon^2[\varphi_3(\alpha_i)+(L+\gamma)^2q_1(\alpha_i)]+\ldots,\\
\zeta &= (L+\gamma)\psi_0+\varepsilon[L+\gamma]\psi_1(\alpha_i)\qquad+\varepsilon^2(L+\gamma)[\psi_2(\alpha_i)+(L+\gamma)^2]+\ldots,
\end{aligned}$$

entendant par exemple que ξ_2 est la somme d'un polynome homogène et du troisième degré aux α_j, et de $(L+\gamma)^2$ multiplié par un polynome linéaire et homogène aux α_j (les u conserveront la forme de ξ et η) ; nous ajouterons que le terme en $(L+\gamma)^3$ dans ζ provient uniquement des termes

$$\frac{3}{2}\zeta_0[A'\xi_1+A\eta_1](1+\delta)^2+\frac{3}{2}C(1+\delta)^2\zeta_0^3$$

dans la troisième équation du troisième système, et que les termes en $\varepsilon(L+\gamma)^2$ proviennent de $\frac{3}{2}(1+\delta)^2 A''\zeta_0^2$ et $\frac{3}{2}(1+\delta)^2 A'\zeta_0^2$.

Les cinq relations de périodicité qui nous restent s'écrivent alors

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_1[e^{i\sigma_1(1+\delta)T}-1]+\varepsilon[(L+\gamma)^2 e_1+\ldots]=0,\\ &\alpha_2[e^{-i\sigma_1(1+\delta)T}-1]+\varepsilon[(L+\gamma)^2 e_2+\ldots]=0,\\ &\alpha_3[e^{i\sigma_2(1+\delta)T}-1]+\varepsilon[(L+\gamma)^2 e_3+\ldots]=0,\\ &\alpha_4[e^{-i\sigma_2(1+\delta)T}-1]+\varepsilon[(L+\gamma)^2 e_4+\ldots]=0;\\ &\frac{L+\gamma}{(1+\delta)\sqrt{P}}\sin 2\pi\delta+\varepsilon(L+\gamma)h_1+\varepsilon^2(L+\gamma)[h_2+(L+\gamma)^2 h_0]+\ldots=0. \end{aligned} \right.$$

Le déterminant fonctionnel des quatre premières équations (20) par rapport à α_1, α_2, α_3, α_4 est pour $\varepsilon=\delta=0$

$$(e^{i\sigma_1 T}-1)(e^{-i\sigma_1 T}-1)(e^{i\sigma_2 T}-1)(e^{-i\sigma_2 T}-1).$$

Il est différent de zéro si, ni $\sigma_1 T$, ni $\sigma_2 T$ ne sont des multiples de 2π, c'est-à-dire si ni σ_1 ni σ_2 ne sont des multiples de $\sqrt{P}$ (cas que nous réservons pour l'instant).

Nous pouvons alors résoudre ces quatre équations par rapport aux α_j, sous la forme

$$\alpha_j = \varepsilon\, Q_j(\gamma,\delta,\varepsilon).$$

Si ni σ_1 ni σ_2 ne sont des multiples de $\sqrt{P}$, les e_j ne seront pas nuls, et les Q_j contiendront des termes en $(L+\gamma)^2$ seul. Portons ces valeurs dans la dernière équation (20) : nous obtiendrons une relation entre γ, δ, ε, à laquelle nous devrons joindre une relation supplémentaire, d'ailleurs arbitraire. Cette relation ne peut être $\delta=0$: en effet, supposons δ nul identiquement ; h_1 étant homogène et de degré un aux α_j, notre relation sera divisible par ε^2, et, d'autre part, elle le sera aussi par $L+\gamma$ (car l'équation différentielle en ζ contient ζ en facteur dans son second membre) ; après division par $\varepsilon^2(L+\gamma)$, il restera des termes en $(L+\gamma)^2$ seul qui ne disparaîtront pas identiquement : les uns proviendront de la substitution des α_j dans h_1 et contiendront A' ou A'' en facteur, parmi les autres le seul qui contient C :

$$h_0(L+\gamma)^2 = -\frac{9\pi}{8}\frac{C(L+\gamma)^2}{P^{\frac{5}{2}}},$$

n'est pas nul.

Au contraire, γ n'entre que par la combinaison $L+\gamma$ et peut être soit fixé, soit incorporé à L : alors, l'unique relation entre δ et ε peut être résolue par rapport à δ sous forme de série entière commençant par un terme en ε^2; en reportant la valeur fixée de γ et celle de δ en fonction de ε dans les α_j, on obtient la solution des équations (20) sous la forme

$$\delta=\varepsilon^2 p(\varepsilon), \qquad \alpha_j=\varepsilon\, p_j(\varepsilon).$$

les p étant des séries entières en ε.

Remarquons que les résultats auraient été les mêmes en remplaçant $T=\frac{2\pi}{\sqrt{P}}$ par $\mu\frac{2\pi}{\sqrt{P}}$ (μ entier) : ε étant donné, il existe une seule orbite de période $\frac{2\mu\pi}{\sqrt{P}}$ (le mobile traversant pour $\tau=0$ le plan $\zeta=z=0$ avec une vitesse donnée $L+\gamma$), mais la solution de période $\frac{2\pi}{\sqrt{P}}$ peut être considérée comme ayant pour période $\frac{2\mu\pi}{\sqrt{P}}$ quel que soit l'entier μ : donc les orbites étudiées se ferment après une révolution.

Nous appellerons ces orbites, orbites A (désignation de M. Moulton dans le cas de $2+1$ masses alignées).

32. *Orbites* B. — Soit σ^2, une racine positive de l'équation aux g^2; nous savons qu'il existe pour $\varepsilon=\delta=0$ une solution périodique infinitésimale

$$u_1=K\,e^{i\sigma_1\tau}, \qquad u_2=K\,e^{-i\sigma_1\tau}\quad (K \text{ réel}), \qquad u_3=u_4=\zeta=0$$

de période $\frac{2\pi}{\sigma_1}$ (l'origine de τ étant choisie de telle sorte que pour $\tau=0$, le mobile ait une vitesse perpendiculaire à l'axe des x : $\frac{dx}{d\tau}=0$.

Alors

$$K_1=K_2=K, \qquad K_3=K_4=L=0;$$

la dérivée partielle de l'intégrale de Jacobi par rapport à u_1 se réduit, pour

$$\varepsilon=K_3=K_4=L=0, \qquad K_1=K_2=K,$$

à

$$K(1+\delta)^2\frac{16\sigma_1^2[2\sigma_1^2+P-2]}{4\sigma_1^2+2P+4-3(P'+P'')}$$

et n'est en général pas nulle : si toutes les masses sont alignées cette dérivée se réduit à

$$4K(1+\delta)^2\frac{2\sigma_1^2+P-2}{\sigma_1^2+1-P}.$$

Or, P étant supérieur à un, ni $P - 1$ ni $1 - \frac{P}{2}$ ne peuvent être racines de l'équation aux g^2. Dans le cas équilatéral des trois masses, cette dérivée est égale à

$$16K(1+\delta)^2 \frac{\sigma_1^2(2\sigma_1^2 - 1)}{4\sigma_1^2 + 9},$$

qui n'est pas nulle si les racines σ_1^2 et σ_2^2 sont distinctes.

Nous pouvons donc supprimer la première relation de périodicité.

Considérons d'abord l'avant-dernière

$$\frac{\gamma}{(1+\delta)\sqrt{P}} \sin 2\pi(1+\delta)\frac{\sqrt{P}}{\sigma_1} + \varepsilon\gamma P(\alpha_j, \gamma, \delta, \varepsilon),$$

qui contient, comme nous l'avons déjà remarqué, γ en facteur; après division par γ, cette relation se réduit, pour $\alpha_j = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$, au terme

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \sin 2\pi \frac{\sqrt{P}}{\sigma_1}$$

qui n'est pas nul, si, comme nous le supposons pour l'instant, $\sqrt{P}$ et σ_1 ne sont pas commensurables; il faudra prendre $\gamma = 0$, alors $\zeta = \zeta' \equiv 0$: l'orbite cherchée est plane.

Il nous restera donc pour déterminer α_1, α_2, α_3, α_4 et δ en fonction de ε les trois relations

$$(21) \qquad \begin{cases} (K+\alpha_2)\left[e^{-2i\pi\delta} - 1\right] + \varepsilon\, \mathfrak{Q}_2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\delta\varepsilon) = 0, \\ \alpha_3\left[e^{2i\pi(1+\delta)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\, \mathfrak{Q}_3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\delta\varepsilon) = 0, \\ \alpha_4\left[e^{-2i\pi(1+\delta)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\, \mathfrak{Q}_4(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\delta\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Mais nous devons ajouter deux relations : l'une, remplaçant $\zeta(0) = 0$ et provenant de ce que τ n'entre pas explicitement dans les équations du mouvement, et l'autre, remplaçant la relation défaillante du fait de l'existence de l'intégrale de Jacobi.

L'orbite, étant périodique, est fermée; nous pourrons donc choisir l'origine des τ de telle sorte que $\frac{dx}{d\tau} = 0$, ce qui donne

$$(22) \qquad \sigma_1(\alpha_1 - \alpha_2) + \sigma_2(\alpha_3 - \alpha_4) = 0.$$

Pour choisir la deuxième relation, examinons de plus près la forme des équations (21) : reportons-nous aux équations (16); le système qui donne les u_{j1} est de la forme

$$\frac{du_{j1}}{d\tau} - i\sigma(1+\delta)u_{j1} = \Phi_{j1}(u_{10}u_{20}u_{30}u_{40}) \qquad (j=1, 2, 3, 4);$$

les Φ_{j1} étant homogènes du deuxième degré et σ ayant les valeurs σ_1, $-\sigma_1$, σ_2 et $-\sigma_2$; développées, les Φ_{j1} contiennent des termes constants et des termes d'argument

$$\pm 2i\sigma_1(1+\delta)\tau, \quad \pm 2i\sigma_2(1+\delta)\tau, \quad \pm i(\sigma_1+\sigma_2)(1+\delta)\tau \quad \text{et} \quad \pm i(\sigma_1-\sigma_2)(1+\delta)\tau$$

et n'introduiront, par l'intégration, aucun terme séculaire; d'autre part, les termes en σ_1 et ses multiples disparaîtront dans les relations de périodicité : on en conclut que $\mathfrak{D}_3$ et $\mathfrak{D}_4$ contiendront des termes constants par rapport aux α_j, tandis que $\mathfrak{D}_2$ n'en contiendra pas.

Si nous considérons ensuite les équations

$$\frac{du_{j2}}{d\tau} - i\sigma(1+\delta)u_{j2} = \Phi_{j2},$$

qui donnent les u_{j2}, nous remarquerons que les Φ_{j2} contiennent des termes d'argument $\pm i\sigma_1(1+\delta)\tau$ qui introduisent par intégration des termes séculaires dans les u_{21} et u_{22} : $\mathfrak{D}_2$ contiendra des termes en ε^2 seul qui ne s'annuleront pas identiquement. Les équations (21) sont donc de la forme

$$\begin{aligned}
(K+\alpha_2)\left[e^{-2i\pi\delta} - 1\right] + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots &= 0,\\
\alpha_3\left[e^{2i\pi(1+\delta)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon f_3 + \varepsilon^2\varphi_3 + \ldots &= 0,\\
\alpha_4\left[e^{-2i\pi(1+\delta)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon f_4 + \varepsilon^2\varphi_4 + \ldots &= 0.
\end{aligned}$$

Pour $\delta = \varepsilon = \alpha_j = 0$, le déterminant fonctionnel des deux dernières, par rapport à α_3 et α_4, se réduit à

$$\left[e^{2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - 1\right]\left[e^{-2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - 1\right]$$

et n'est pas nul si, comme nous le supposons pour l'instant, σ_2 et σ_1 sont incommensurables; on peut résoudre ces deux équations sous la forme

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \varepsilon S_3(\alpha_1\alpha_2\delta\varepsilon),\\
\alpha_4 &= \varepsilon S_4(\alpha_1\alpha_2\delta\varepsilon),
\end{aligned}$$

les séries S ayant en général un terme constant, puisqu'il en est ainsi de f_3 et f_4.

L'équation (22) devient alors

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \varepsilon \Psi_1(\alpha_1 \alpha_2 \delta \varepsilon);$$

elle permet d'exprimer α_1 (et, par suite, α_3 et α_4) sous forme de série entière en α_2, δ et ε.

Portons dans la première des équations (21); elle deviendra

$$(K + \alpha_2)[e^{-2\pi i\delta} - 1] + \varepsilon^2 \Psi(\alpha_2 \delta \varepsilon). \tag{23}$$

Ψ contenant un terme constant; il résulte que l'on ne peut supposer $\delta \equiv 0$. On peut, au contraire, fixer α_2 (par exemple, l'incorporer à K avec lequel il apparaît toujours par la combinaison $K + \alpha_2$); l'équation (23) donne alors δ sous forme de série entière, commençant par un terme en ε^2.

Les résultats eussent été de même forme si nous avions remplacé $T = \frac{2\pi}{\sigma_1}$ par $\mu \frac{2\pi}{\sigma_1}$ (μ entier) : on en conclut que les orbites étudiées se ferment après une révolution.

Nous les appellerons orbites B.

33. *Cas de commensurabilité.* — Les quantités $\sqrt{P}$, σ_1, σ_2 peuvent-elles devenir commensurables? Si les masses sont alignées, σ_2^2 est négatif et ne peut donner d'orbites périodiques; il n'y a donc à examiner que le cas $\sqrt{P}$ et σ_1. Posons $\sigma_1 = \lambda\sqrt{P}$, nous obtenons la relation

$$\lambda^4 P^2 - \lambda^2 P(2 - P) + (1 - P)(1 + 2P);$$

P étant supérieur à 1, cette équation a une seule racine positive en λ^2 qui croît de 1 à $\frac{9}{8}$ quand P croît de 1 à $\frac{8}{5}$, puis décroît de $\frac{9}{8}$ à 1 quand P croît de $\frac{8}{5}$ à ∞. Or, P varie d'une façon continue avec les masses : il sera donc possible d'une infinité de façons d'avoir une valeur de λ^2 rationnelle et carré parfait.

Examinons encore le cas équilatéral des trois masses

$$P = 1, \qquad \sigma_1^4 - \sigma_1^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

Quand μ varie de 0 à 0,0385..., l'une des racines en σ^2 varie de 0 à $\frac{1}{2}$, et l'autre de 1 à $\frac{1}{2}$; chacune d'elles, ainsi que leur rapport, sera une infinité de fois le carré d'une fraction ; d'ailleurs,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1, \qquad 27\mu(1-\mu) = \sigma_1^2\sigma_2^2.$$

Si $\sigma_1^2 = \frac{p^2}{q^2}$, p et q entiers, la première de ces relations donne

$$\sigma_2^2 = \frac{q^2-p^2}{q^2}.$$

Si $q^2 - p^2$ est un carré parfait, la deuxième détermine μ de telle sorte que σ_1, σ_2 soient rationnels.

Nous voyons qu'il est possible que deux des quantités $\sqrt{P}$, σ_1, σ_2 soient commensurables et aussi que ces trois quantités peuvent être des multiples d'une même quatrième. Les cas que nous avons réservés peuvent donc se présenter : nous allons les examiner maintenant.

Supposons d'abord

$$\sqrt{P} = p\sigma, \qquad \sigma_1 = q\sigma \qquad (p,\ q \text{ et } \sigma > 0).$$

Nous avons alors, pour $\delta = \varepsilon = 0$, une solution périodique infinitésimale de la forme

$$u_1 = K_1 e^{i\sigma_1\tau}, \qquad u_2 = K_2 e^{-i\sigma_1\tau} \qquad (K_1 \text{ et } K_2 \text{ conjugués}).$$

$$u_3 = u_4 = 0, \qquad \zeta = \frac{L}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}\,\tau,$$

de période $T = \frac{2\pi}{\sigma}$ (l'origine des τ étant choisie de telle sorte que, pour $\tau = 0$, le mobile traverse le plan $\zeta = 0$).

On a alors

$$K_3 = K_4 = 0.$$

Nous allons d'abord expliciter, dans les relations de périodicité, les termes qui nous seront utiles pour la discussion.

Eu égard aux équations (16), les cinq premières peuvent s'écrire :

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} (K_1+\alpha_1)\left[e^{2i\pi q\delta}-1\right]+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2 f_1+\ldots &= 0,\\ (K_2+\alpha_2)\left[e^{-2i\pi q\delta}-1\right]+\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^2 f_2+\ldots &= 0,\\ \alpha_3\left[e^{2i\pi(1+\delta)\frac{\sigma_2}{\sigma}}-1\right]+\varepsilon\varphi_3+\ldots\ldots &= 0,\\ \alpha_4\left[e^{-2i\pi(1+\delta)\frac{\sigma_2}{\sigma}}-1\right]+\varepsilon\varphi_4+\ldots\ldots &= 0,\\ \frac{L+\gamma}{(1+\delta)\sqrt{P}}\sin 2\pi p\delta+\varepsilon(L+\gamma)\varphi_5+\varepsilon^2(L+\gamma)f_5+\ldots &= 0. \end{aligned}\right.$$

Nous avons, sans calcul, les résultats suivants : φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des polynomes homogènes et du deuxième degré en $K_1+\alpha$, $K_2+\alpha_2$, α_3, α_4 et $L+\gamma$; φ_1 et φ_2 ne contiennent ni $(L+\gamma)$, ni termes du deuxième degré en $K_1+\alpha_1$ et $K_2+\alpha_2$; φ_3 et φ_4, au contraire, contiennent $(L+\gamma)^2$ et des termes du deuxième degré en $K_1+\alpha_1$ et $K_2+\alpha_2$; φ_5 est linéaire et homogène en α_3 et α_4; f_1 et f_2 contiennent des termes en $(L+\gamma)^2(K_1+\alpha_1)$, $(L+\gamma)^2(K_2+\alpha_2)$ et des termes du troisième degré en $K_1+\alpha_1$ et $K_2+\alpha_2$; f_5 contient des termes du deuxième degré en $L+\gamma$, $K_1+\alpha_1$ et $K_2+\alpha_2$.

Si, comme nous le supposons, σ_2 est incommensurable avec σ, les troisième et quatrième équations (24) sont résolubles par rapport à α_3 et α_4 sous forme de séries entières en α_1, α_2, γ, δ, ε commençant par des termes en ε seul; en portant dans les trois autres équations (24), nous n'aurons, après les premiers termes, que des termes en ε^2. Comme précédemment, nous voyons que nous ne pouvons supposer $\delta = 0$, car si nous admettions cette hypothèse, les trois équations que nous venons de former, après division par ε^2, contiendraient des termes constants et ne pourraient être vérifiées pour $\alpha_j=\gamma=\varepsilon=0$ [δ n'entrant, en somme, que par la combinaison $(1+\delta)\tau$ et n'étant pas nul identiquement, nous le négligerons, nous le ferons nul dans les termes en ε et ε^2 où il se trouverait toujours multiplié par des puissances des variables étudiées].

Il nous faut, avant tout, préciser la forme de tous les termes utiles. Revenons aux équations (16), et posons

$$u_j = u_{j0} + \varepsilon u_{j1} + \varepsilon^2 u_{j2} + \ldots,$$
$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon\,\zeta_1 + \varepsilon^2\,\zeta_2 + \ldots;$$

les u_{j_0} et ζ_0 sont connus; les u_{j_1} et ζ_1 sont déterminés par le système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{du_{j1}}{d\tau} - i\rho_j u_{j1} = {} & \mathcal{A}_j(K_1+\alpha_1)^2 e^{2i\sigma_1\tau} + \mathcal{B}_j(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2) + \mathcal{C}_j(K_2+\alpha_2)^2 e^{-2i\sigma_1\tau} \\ & + \mathcal{D}_j(K_1+\alpha_1)\alpha_3\, e^{i(\sigma_1+\sigma_2)\tau} + \mathcal{E}_j(K_1+\alpha_1)\alpha_4\, e^{i(\sigma_1-\sigma_2)\tau} \\ & + \mathcal{F}_j(K_2+\alpha_2)\alpha_3\, e^{i(-\sigma_1+\sigma_2)\tau} + \mathcal{H}_j(K_2+\alpha_2)\alpha_4\, e^{i(-\sigma_1-\sigma_2)\tau} \\ & + \mathcal{M}_j\,\frac{(L+\gamma)^2}{P}\sin^2\sqrt{P}\tau + \text{termes en } \alpha_3^2,\ \alpha_3\alpha_4,\ \alpha_4^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta_1}{d\tau^2} + P\zeta_1 = {} & \frac{3}{2}\,\frac{L+\gamma}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}\tau\big[\mathcal{P}(K_1+\alpha_1)\,e^{i\sigma_1\tau} + \mathcal{Q}(K_2+\alpha_2)\,e^{-i\sigma_1\tau} \\ & + \mathcal{R}\alpha_3\,e^{i\sigma_2\tau} + \mathcal{S}\alpha_4\,e^{-i\sigma_2\tau}\big],\end{aligned}$$

les $\mathcal{A}_j$, ..., $\mathcal{M}_j$; $\mathcal{P}$, ..., $\mathcal{S}$ étant des constantes et $\rho_1=\sigma$, $\rho_2=-\sigma_1$, $\rho_3=\sigma_2$, $\rho_4=-\sigma_2$. Nous avons besoin, dans φ_1, φ_2 et φ_5, des termes du premier degré en α_3 et α_4, dans φ_3 et φ_4, des termes indépendants de α_3

et α_4 :

$$\varphi_1 = u_{11}(\mathrm{T}) - u_{11}(0) = \left[e^{2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1\right]\left\{\frac{\mathcal{D}_1(\mathrm{K}_1+\alpha_1)\alpha_3}{i\sigma_2} + \frac{\mathcal{F}_1(\mathrm{K}_2-\alpha_2)\alpha_3}{i(\sigma_2-2\sigma_1)}\right\}$$
$$-\left[e^{-2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1\right]\left\{\frac{\mathcal{E}_1(\mathrm{K}_1+\alpha_1)\alpha_4}{i\sigma_2} + \frac{\mathcal{H}_1(\mathrm{K}_2+\alpha_2)\alpha_4}{i(\sigma_2+2\sigma_1)}\right\}$$
$$+ \text{ termes en } \alpha_3^2,\ \alpha_3\alpha_4 \text{ et } \alpha_4^2,$$

$$\varphi_2 = u_{21}(\mathrm{T}) - u_{21}(0) = \left[e^{2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1\right]\left\{\frac{\mathcal{D}_2(\mathrm{K}_1+\alpha_1)\alpha_3}{i(2\sigma_1+\sigma_2)} + \frac{\mathcal{F}_2(\mathrm{K}_2+\alpha_2)\alpha_3}{i\sigma_2}\right\}$$
$$+\left[e^{-2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1\right]\left\{\frac{\mathcal{E}_2(\mathrm{K}_1+\alpha_1)\alpha_4}{i(2\sigma_1-\sigma_2)} - \frac{\mathcal{H}_2(\mathrm{K}_2+\alpha_2)\alpha_4}{i\sigma_2}\right\}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_3 = u_{31}(\mathrm{T}) - u_{31}(0) = -\left[e^{2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1\right]\left\{\frac{\mathcal{A}_3(\mathrm{K}_1+\alpha_1)^2}{i(2\sigma_1-\sigma_2)} - \frac{\mathcal{B}_3(\mathrm{K}_1+\alpha_1)(\mathrm{K}_2+\alpha_2)}{i\sigma_2}\right.$$
$$\left. - \frac{\mathcal{C}_3(\mathrm{K}_2+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1+\sigma_2)} + \frac{2\mathcal{M}_3(\mathrm{L}+\gamma)^2}{i\sigma_2(\sigma_2^2-4\mathrm{P})}\right\} + \ldots,$$

$$\varphi_4 = u_{41}(\mathrm{T}) - u_{41}(0) = -\left[e^{-2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1\right]\left\{\frac{\mathcal{A}_4(\mathrm{K}_1+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1+\sigma^2)} + \frac{\mathcal{B}_4(\mathrm{K}_1+\alpha_1)(\mathrm{K}_2+\alpha_2)}{i\sigma_2}\right.$$
$$\left. - \frac{\mathcal{C}_4(\mathrm{K}_2+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1-\sigma_2)} - \frac{2\mathcal{M}_4(\mathrm{L}+\gamma)^2}{i\sigma_2(\sigma_2^2-4\mathrm{P})}\right\} + \ldots,$$

$$(\mathrm{L}+\gamma)\varphi_5 = \zeta_1(\mathrm{T}) - \zeta_1(0) = \frac{3}{2}(\mathrm{L}+\gamma)\frac{2i}{\sigma_2^2(\sigma_2^2-4\mathrm{P})}\left\{-\mathcal{R}\alpha_3\left(e^{2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1\right) + \mathcal{S}\alpha_4\left(e^{-2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1\right)\right\}.$$

Il nous faut encore les termes de f_1, f_2, f_5 qui sont indépendants de α_3 et α_4 ; ces termes ont deux origines distinctes : les uns proviennent des termes en $e^{\pm i\sigma_1\tau}$ dans les seconds membres des équations qui donnent u_{12}, u_{22} et ζ_2 ; les autres sont les termes séculaires provenant des termes qui, dans les seconds membres des mêmes équations, sont en $e^{i\sigma_1\tau}$ pour la première, $e^{-i\sigma_1\tau}$ pour la seconde et $\sin\sqrt{\mathrm{P}}\tau$ ou $\cos\sqrt{\mathrm{P}}\tau$ pour la dernière.

Nous avons, pour déterminer les termes indépendants de α_3 et α_4 dans u_{12} :

$$
\begin{aligned}
\frac{du_{12}}{d\tau} - i\sigma_1 u_{12} = \Bigg[& \frac{\mathcal{A}_1(K_1+\alpha_1)^2}{i\sigma_1}\left(e^{2i\sigma_1\tau} - e^{i\sigma_1\tau}\right) \\
& - \frac{\mathcal{B}_1(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)}{i\sigma_1}\left(1 - e^{i\sigma_1\tau}\right) - \frac{\mathcal{C}_1(K_2+\alpha_2)^2}{3i\sigma_1}\left(e^{-2i\sigma_1\tau} - e^{i\sigma_1\tau}\right) \\
& - \frac{\mathcal{M}_1(L+\gamma)^2}{2P}\Bigg(\frac{1}{i\sigma_1} + \frac{2\sqrt{P}\sin 2\sqrt{P}\tau - i\sigma_1\cos 2\sqrt{P}\tau}{4P-\sigma_1^2} \\
& \qquad - \frac{4P}{i\sigma_1(4P-\sigma_1^2)}\, e^{i\sigma_1\tau}\Bigg)\Bigg] \\
& \times \left[2\mathcal{A}'(K_1+\alpha_1)\, e^{i\sigma_1\tau} + \mathcal{B}_1(K_2+\alpha_2)\, e^{-i\sigma_1\tau}\right] \\
+ \Bigg[& \frac{\mathcal{A}_2(K_1+\alpha_1)^2}{3i\sigma_1}\left(e^{2i\sigma_1\tau} - e^{-i\sigma_1\tau}\right) + \frac{\mathcal{B}_2(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)}{i\sigma_1}\left(1 - e^{-i\sigma_1\tau}\right) \\
& - \frac{\mathcal{C}_2(K_2+\alpha_2)^2}{i\sigma_1}\left(e^{-2i\sigma_1\tau} - e^{-i\sigma_1\tau}\right) + \frac{\mathcal{M}_2(L+\gamma)^2}{2P} \\
& \times \left(\frac{1}{i\sigma_1} - \frac{2\sqrt{P}\sin 2\sqrt{P}\tau + i\sigma_1\cos 2\sqrt{P}\tau}{4P-\sigma_1^2} - \frac{4P}{i\sigma_1(4P-\sigma_1^2)}\, e^{-i\sigma_1\tau}\right)\Bigg] \\
& \times \left[\mathcal{B}_1(K_1+\alpha_1)\, e^{i\sigma_1\tau} + 2\mathcal{C}_1(K_2+\alpha_2)\, e^{-i\sigma_1\tau}\right] \\
+ \Bigg[& \frac{\mathcal{A}_3(K_1+\alpha_1)^2}{i(2\sigma_1-\sigma_2)}\left(e^{2i\sigma_1\tau} - e^{i\sigma_2\tau}\right) - \frac{\mathcal{B}_3(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)}{i\sigma_2}\left(1 - e^{i\sigma_2\tau}\right) \\
& - \frac{\mathcal{C}_3(K_2+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1+\sigma_2)}\big) e^{-2i\sigma_1\tau} - e^{i\sigma_2\tau}\big) - \frac{\mathcal{M}_3(L+\gamma)^2}{2P} \\
& \times \left(\frac{1}{i\sigma_2} + \frac{2\sqrt{P}\sin 2\sqrt{P}\tau - i\sigma_2\cos 2\sqrt{P}\tau}{4P-\sigma_2^2} - \frac{4P}{i\sigma_2(4P-\sigma_2^2)}\, e^{i\sigma_2\tau}\right)\Bigg] \\
& \times \left[\mathcal{D}_1(K_1+\alpha_1)\, e^{i\sigma_1\tau} + \mathcal{F}_1(K_2+\alpha_2)\, e^{-i\sigma_1\tau}\right] \\
+ \Bigg[& \frac{\mathcal{A}_4(K_1+\alpha_1)^2}{i(2\sigma_1+\sigma_2)}\left(e^{2i\sigma_1\tau} - e^{-i\sigma_2\tau}\right) + \frac{\mathcal{B}_4(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)}{i\sigma_2}\left(1 - e^{-i\sigma_2\tau}\right) \\
& - \frac{\mathcal{C}_4(K_2+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1-\sigma_2)}\left(e^{-2i\sigma_1\tau} - e^{-i\sigma_2\tau}\right) + \frac{\mathcal{M}_4(L+\gamma)^2}{2P} \\
& \times \left(\frac{1}{i\sigma_2} - \frac{2\sqrt{P}\sin 2\sqrt{P}\tau + i\sigma_2\cos 2\sqrt{P}\tau}{4P-\sigma_2^2} - \frac{4P}{i\sigma_2(4P-\sigma_2^2)}\, e^{-i\sigma_2\tau}\right)\Bigg] \\
& \times \left[\mathcal{E}_1(K_1+\alpha_1)\, e^{i\sigma_1\tau} + \mathcal{H}_1(K_2+\alpha_2)\, e^{-i\sigma_1\tau}\right] \\
+ \frac{L+\gamma}{\sqrt{P}}\Bigg\{ & \frac{\mathcal{L}(K_1+\alpha_1)}{\sigma_1(4P-\sigma_1^2)}\Big[\left(\sigma_1\sin\sqrt{P}\tau + 2i\sqrt{P}\cos\sqrt{P}\tau\right) e^{i\sigma_1\tau} \\
& \qquad - 2i\sqrt{P}\cos\sqrt{P}\tau + \sigma_1\sin\sqrt{P}\tau\Big] \\
& + \frac{\mathcal{Q}(K_2+\alpha_2)}{\sigma_1(4P-\sigma_1^2)}\Big[\left(\sigma_1\sin\sqrt{P}\tau - 2i\sqrt{P}\cos\sqrt{P}\tau\right) e^{-i\sigma_1\tau} \\
& \qquad + 2i\sqrt{P}\cos\sqrt{P}\tau + \sigma_1\sin\sqrt{P}\tau\Big]\Bigg\} \\
& \times 2\mathcal{M}_1\frac{L+\gamma}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}\tau
\end{aligned}
$$

+ termes du 3e degré en u_{10} et u_{20}, et en $\zeta_0^2 u_{10}$ et $\zeta_0^2 u_{20}$.

Les termes séculaires sont de la forme

$$(K_1 + \alpha_1)[(K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2)M + (L + \gamma)^2 N],$$

M et N étant des constantes. Ceux qui contiennent $(e^{\pm i\sigma_2 T} - 1)$ sont :

$$\begin{aligned}
&-\left[\frac{\mathcal{A}_3(K_1+\alpha_1)^2}{i(2\sigma_1-\sigma_2)} - \frac{\mathcal{B}_3(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)}{i\sigma_2} - \frac{\mathcal{C}_3(K_2+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1+\sigma_2)} - \frac{2\mathfrak{M}_3(L+\gamma)^2}{i\sigma_2(4P-\sigma_2^2)}\right] \\
&\quad\times\left[\frac{\mathcal{D}_1(K_1+\alpha_1)}{i\sigma_2} + \frac{\mathcal{F}_1(K_2+\alpha_2)}{i(\sigma_2-2\sigma_1)}\right]\left(e^{2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}}-1\right) \\
&+\left[\frac{\mathcal{A}_4(K_1+\alpha_1)^2}{i(2\sigma_1+\sigma_2)} + \frac{\mathcal{B}_4(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)}{i\sigma_2} - \frac{\mathcal{C}_4(K_2+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1-\sigma_2)} + \frac{2\mathfrak{M}_4(L+\gamma)^2}{i\sigma_2(4P-\sigma_2^2)}\right] \\
&\quad\times\left[\frac{\mathcal{E}_1(K_1+\alpha_1)}{i\sigma_2} + \frac{\mathcal{H}_1(K_2+\alpha_2)}{i(\sigma_2+2\sigma_1)}\right]\left(e^{-2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}}-1\right).
\end{aligned}$$

On aurait des résultats analogues pour u_{22}; on obtient de même avec ζ_2 : termes séculaires de la forme

$$(L + \gamma)[R(L + \gamma)^2 + S(K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2)]$$

et termes en $(e^{\pm i\sigma_3 T} - 1)$:

$$\begin{aligned}
&+\frac{3}{2}(L+\gamma)\frac{2i}{\sigma_2^2(\sigma_2^2-4P)}\left\{\left[\frac{\mathcal{A}_3(K_1+\alpha_1)^2}{i(2\sigma_1-\sigma_2)} - \frac{\mathcal{B}_3(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)}{i\sigma_2}\right.\right. \\
&\qquad\left. - \frac{\mathcal{C}_3(K_2+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1+\sigma_2)} - \frac{2\mathfrak{M}_3(L+\gamma)^2}{i\sigma_2(4P-\sigma_2^2)}\right] \times \mathcal{R}\left(e^{2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}}-1\right) \\
&\qquad - \left[\frac{\mathcal{A}_4(K_1+\alpha_1)^2}{i(2\sigma_1+\sigma_2)} + \frac{\mathcal{B}_4(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)}{i\sigma_2}\right. \\
&\qquad\left.\left. - \frac{\mathcal{C}_4(K_2+\alpha_2)^2}{i(2\sigma_1-\sigma_2)} + \frac{2\mathfrak{M}_4(L+\gamma)^2}{i\sigma_2(4P-\sigma_2^2)}\right] \times \mathcal{S}\left(e^{-2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}}-1\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors reprendre la discussion : en portant les valeurs de α_3 et α_4 tirées des troisième et quatrième équations (24); dans les trois autres, on obtient

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}
&(K_1+\alpha_1)[e^{2i\pi q\delta} - 1] + \varepsilon^2(K_1+\alpha_1)[M(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2) + N(L+\gamma)^2] + \ldots = 0, \\
&(K_2+\alpha_2)[e^{-2i\pi q\delta} - 1] + \varepsilon^2(K_2+\alpha_2)[M'(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2) + N'(L+\gamma)^2] + \ldots = 0, \\
&\frac{L+\gamma}{(1+\delta)\sqrt{P}}\sin 2\pi p\delta + \varepsilon^2(L+\gamma)[R(L+\gamma)^2 + S(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2)] + \ldots = 0,
\end{aligned}\right.$$

car les termes en $e^{\pm 2i\pi\frac{\sigma_2}{\sigma}} - 1$ disparaissent.

Si $K_1 \neq 0$, l'intégrale de Jacobi permet de supprimer la première des relations (24), mais alors la seconde équation (25) peut être résolue par rapport à δ, et si nous portons dans la dernière, nous obtenons une équation qui n'est pas satisfaite pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma = \varepsilon = 0$, que si

$$L(M'_1 K_1 K_2 + N'_1 L^2) = 0.$$

Nous pouvons prendre $L = 0$, nous devons prendre alors $\gamma = 0$, et nous retombons sur les orbites B qui se ferment après une révolution.

Si $L \neq 0$, l'intégrale de Jacobi permet de supprimer la sixième relation de périodicité (que nous n'avons pas écrite); la dernière des (25), après division par $(L + \gamma)$, peut être résolue par rapport à δ, et après substitution et division par ε^2, les deux premières deviennent

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (K_1 + \alpha_1)[M_1(K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2) + N_1(L + \gamma)^2] + \varepsilon \ldots = 0, \\ (K_2 + \alpha_2)[M'_1(K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2) + N'_1(L + \gamma)^2] + \varepsilon \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Pour que ces deux équations soient résolubles en α_1, α_2 et γ s'annulant avec ε, il faut

$$K_1[M_1 K_1 K_2 + N_1 L^2] = 0,$$
$$K_2[M'_1 K_1 K_2 + N'_1 L^2] = 0.$$

Ces relations sont satisfaites pour $K_1 = K_2 = 0$, et nous retombons sur les orbites A qui se ferment après une révolution.

Pour qu'il existe des orbites périodiques distinctes de (A) et de (B), il faut que les conditions

$$(27) \qquad M_1 K_1 K_2 + N_1 L^2 = M'_1 K_1 K_2 + N'_1 L^2 = 0$$

soient satisfaites.

Dans le cas où les corps sont alignés, elles se réduisent à une, comme on peut le voir de la façon suivante : les coefficients M, N, M′, N′ sont indépendants de K_1, K_2 et L; supposons $K_1 = K_2$ (réels), c'est-à-dire supposons que le mobile infinitésimal traverse l'axe des x perpendiculairement : $x = u_1 + u_2$ sera une fonction paire de τ et $y = n\,i(u_1 - u_2)$, uue fonction impaire; il en résulte que $M' = -M$ et $N' = -N$, ces quantités étant d'ailleurs des imaginaires pures.

La condition unique déterminera L si K_1 et K_2 sont donnés (pour une solution réelle, il faut d'ailleurs que $M_1 N_1 < 0$), et les équations (26) deviennent

$$M_1(K_1 + \alpha_1)[K_1\alpha_1 + K_2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2] + \varepsilon \ldots = 0,$$
$$M_1(K_2 + \alpha_2)[K_1\alpha_1 + K_2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2] + \varepsilon \ldots = 0.$$

Si nous éliminons α_1, par exemple, la relation obtenue après division par ε contient un terme constant qu'il faudrait annuler.

Dans le cas où tous les corps ne sont pas en ligne droite, on obtient encore une condition en écrivant que les deux relations (27) sont compatibles, condition qui n'est en général pas satisfaite.

Dans un cas comme dans l'autre, la condition que doivent satisfaire les masses (en plus de la condition de commensurabilité) est fort compliquée, et la discussion en serait très laborieuse.

34. Supposons maintenant que $\sigma_1 = q\sigma$, $\sigma_2 = p\sigma$ (σ réel et positif). Nous avons alors, pour $\delta = \varepsilon = 0$, une solution périodique infinitésimale :

$$\begin{aligned} u_1 &= K_1 e^{i\sigma_1\tau}, & u_2 &= K_2 e^{-i\sigma_1\tau} & &(K_1 \text{ et } K_2 \text{ conjugués}), \\ u_3 &= K_3 e^{i\sigma_2\tau}, & u_4 &= K_4 e^{-i\sigma_2\tau} & &(K_3 \text{ et } K_4 \text{ conjugués}), \end{aligned}$$

de période $T = \frac{2\pi}{\sigma}$.

Alors $L = 0$. La cinquième relation de périodicité

$$\frac{\gamma}{(1+\delta)\sqrt{P}} \sin 2\pi(1+\delta)\frac{\sqrt{P}}{\sigma} + \varepsilon\gamma\varphi_1 + \ldots = 0$$

(φ_1 étant linéaire et homogène en $K_1 + \alpha_1$, $K_2 + \alpha_2$, $K_3 + \alpha_3$ et $K_4 + \alpha_4$) ne peut être satisfaite que par $\gamma = 0$ si nous supposons $\sqrt{P}$ incommensurable avec σ_1 et σ_2. Si K_1, par exemple, est différent de zéro, l'intégrale de Jacobi permet de supprimer la première relation, et il reste trois relations de la forme

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &(K_2+\alpha_2)[e^{-2i\pi q\delta} - 1] + \varepsilon^2 (K_2+\alpha_2)[M_2(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2) + N_2(K_3+\alpha_3)(K_4+\alpha_4)] + \ldots = 0, \\ &(K_3+\alpha_3)[e^{2i\pi p\delta} - 1] + \varepsilon^2 (K_3+\alpha_3)[M_3(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2) + N_3(K_3+\alpha_3)(K_4+\alpha_4)] + \ldots = 0, \\ &(K_4+\alpha_4)[e^{-2i\pi p\delta} - 1] + \varepsilon^2 (K_4+\alpha_4)[M_4(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2) + N_4(K_3+\alpha_3)(K_4+\alpha_4)] + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

K_2 ne peut être nul; nous ne pouvons donc faire $\delta \equiv 0$; si nous résolvons la première des relations (28) par rapport à δ et si nous substituons dans les deux autres, nous obtenons, après division par ε^2,

$$\begin{aligned} &(K_3+\alpha_3)[R(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2) + S(K_3+\alpha_3)(K_4+\alpha_4)] + \varepsilon \ldots = 0, \\ &(K_4+\alpha_4)[R'(K_1+\alpha_1)(K_2+\alpha_2) + S'(K_3+\alpha_3)(K_4+\alpha_4)] + \varepsilon \ldots = 0, \end{aligned}$$

et il faut, pour pouvoir les résoudre, que

$$K_3(RK_1K_2 + SK_3K_4) = 0, \qquad K_4(R'K_1K_2 + S'K_3K_4) = 0.$$

Si $K_3 = K_4$, nous retombons sur les orbites (B) qui existent même pour $\sigma_2 = m.\sigma_1$.

Pour qu'il y ait d'autres orbites périodiques, les masses devraient vérifier une condition non identiquement satisfaite.

35. Supposons enfin que $\sqrt{P} = p\sigma$, $\sigma_1 = q\sigma$ et $\sigma_2 = r\sigma$. Nous avons une solution infinitésimale :

$$u_1 = K_1 e^{i\sigma_1\tau}, \qquad u_2 = K_2 e^{-i\sigma_1\tau} \qquad (K_1 \text{ et } K_2 \text{ conjugués}),$$
$$u_3 = K_3 e^{i\sigma_2\tau}, \qquad u_4 = K_4 e^{-i\sigma_2\tau} \qquad (K_3 \text{ et } K_4 \text{ conjugués}),$$
$$\zeta = \frac{L}{\sqrt{P}} \sin\sqrt{P}\tau,$$

de période $T = \frac{2\pi}{\sigma}$ (l'origine des τ étant telle que pour $\tau = 0$, $\zeta = 0$).

Les relations de périodicité sont de la forme

$$(K_1 + \alpha_1)[e^{2i\pi q\delta} - 1]$$
$$+ \varepsilon^2 (K_1 + \alpha_1)[M_1(K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2) + N_1(K_3 + \alpha_3)(K_4 + \alpha_4) + R_1(L + \gamma)^2] + \ldots = 0$$

et les trois analogues..., et

$$\frac{(L + \gamma)}{(1 + \delta)\sqrt{P}} \sin 2p\,\delta\pi$$
$$+ \varepsilon^2 (L + \gamma)[M_5(K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2) + N_5(K_3 + \alpha_3)(K_4 + \alpha_4) + R_5(L + \gamma)^2] + \ldots = 0.$$

Nous ne pouvons faire $\delta \equiv 0$.

Si $K_1 \neq 0$, nous pouvons supprimer la première, mais en résolvant, par exemple, la deuxième par rapport à δ, et en portant dans la cinquième, nous devons avoir $L = \gamma = 0$, et nous retrouvons les orbites (B) ou une relation que nous reverrons par la suite.

Si $L \neq 0$, nous pouvons supprimer la sixième (que nous n'avons pas écrite); résolvant la cinquième par rapport à δ, et substituant dans les quatre premières, nous obtenons quatre relations de la forme

$$K_j[T_j K_1 K_2 + S_j K_3 K_4 + V_j L^2] = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

(T_j, S_j, V_j étant des constantes) qui doivent être vérifiées pour que le système donne une solution.

Ou bien $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 0$, et nous retrouvons les orbites (A);

Ou bien les masses vérifient deux relations obtenues en éliminant $K_1 K_2$, $K_3 K_4$ et L^2 et qui ne sont pas identiquement vérifiées.

En résumé, nous sommes assurés de l'existence des orbites (A) à trois dimensions et des orbites (B) planes, sans pouvoir affirmer que, dans certains cas spéciaux de commensurabilité, ce soient les seules : dans chaque cas particulier, il serait d'ailleurs possible de lever l'incertitude.

36. Nous allons construire ces deux sortes d'orbites, mais auparavant, nous montrerons que, dans le cas où toutes les masses sont alignées, elles sont symétriques par rapport à l'axe Ox.

Par rapport aux axes (x, y, z), les équations du mouvement sont de la forme

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= F_1(x, y^2, z^2), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= y\,F_2(x, y^2, z^2), \\ \frac{d^2z}{dt^2} \qquad\quad &= z\,F_3(x, y^2, z^2). \end{aligned}$$

Elles ne changent pas par la transformation

$$x = x', \qquad y = -y', \qquad z = -z', \qquad t = -t';$$

il en résulte que si nous prenons les conditions initiales

$$x = a_1, \qquad \frac{dy}{dt} = a_2, \qquad \frac{dz}{dt} = a_3, \qquad y = z = \frac{dx}{dt} = 0;$$

x, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ seront des fonctions paires; y, z et $\frac{dx}{dt}$ des fonctions impaires de t; d'où symétrie par rapport à l'axe Ox et par rapport à l'époque $t = 0$; si l'orbite est périodique, elle coupera donc Ox perpendiculairement à chaque demi-période.

Considérons d'abord les orbites (A) et supposons que pour $\varepsilon = 0$,

$$y = z = \frac{dx}{d\tau} = 0,$$

c'est-à-dire $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\alpha_3 = \alpha_4$; si ce choix est possible, les orbites obtenues seront telles que, pour $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{P}}$,

$$u_1 = u_2, \qquad u_3 = u_4, \qquad \zeta = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1\left[e^{i\sigma_1(1+\delta)\frac{\pi}{\sqrt{P}}}-e^{-i\sigma_1(1+\delta)\frac{\pi}{\sqrt{P}}}\right]+\varepsilon\mathcal{Q}_1=0,$$
$$\alpha_3\left[e^{i\sigma_2(1+\delta)\frac{\pi}{\sqrt{P}}}-e^{-i\sigma_2(1+\delta)\frac{\pi}{\sqrt{P}}}\right]+\varepsilon\mathcal{Q}_2=0,$$
$$\frac{L}{(1+\delta)\sqrt{P}}\sin\pi\delta+\varepsilon\mathcal{Q}_3=0$$

(en faisant $\gamma=0$ comme nous en avons le droit). Ces relations ont une solution unique en α_1, α_3 et δ, développable suivant les puissances de ε : ce résultat est immédiat car $\sigma_1\neq 2m\sqrt{P}$.

Considérons ensuite les orbites (B); avec les mêmes hypothèses, nous avons les conditions

$$K_1[e^{i\pi\delta}-e^{-i\pi\delta}]+\varepsilon\mathcal{Q}_1=0,$$
$$\alpha_3\left[e^{i\pi(1+\delta)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}-e^{-i\pi(1+\delta)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\right]+\varepsilon\mathcal{Q}_2=0$$

(en faisant $\alpha_1=\alpha_2=0$) qui déterminent une solution unique en α_3 et δ.

Or, ε étant donné, il existe une seule orbite périodique : elle est donc symétrique.

37. *Construction des orbites* A. — Posons donc

$$\begin{aligned} u_j &= u_{j0}+\varepsilon u_{j1}+\varepsilon^2 u_{j2}+\ldots,\\ \zeta_j &= \zeta_0+\varepsilon\zeta_1+\varepsilon^2\zeta_2+\ldots,\\ \delta &= \varepsilon^2\delta_2+\ldots, \end{aligned}$$

on a d'abord

$$u_{10}=u_{20}=u_{30}=u_{40}=0,\qquad \zeta_0=\frac{L}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}\,\tau.$$

Les termes en ε sont donnés par

$$\frac{du_{11}}{d\tau}-i\sigma_1u_{11}=U_{11},\qquad \frac{du_{21}}{d\tau}+i\sigma_1u_{21}=U_{21},$$
$$\frac{du_{31}}{d\tau}-i\sigma_2u_{31}=U_{31},\qquad \frac{du_{41}}{d\tau}-i\sigma_2u_{41}=U_{41},$$
$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}+P\zeta=0,$$

les U_{j_1} étant de la forme $\mathfrak{A}\zeta_0^2$; les u_{j_1} et ζ_1 devant être périodiques et de période

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{P}}\qquad\text{et}\qquad \zeta_1(0)=\frac{d\zeta_1(0)}{d\tau}=0.$$

Nous obtenons

$$u_{j1} = a_{j1}^{(0)} + a_{j1}^{(2)} \cos 2\sqrt{P}\tau + b_{j1}^{(2)} \sin 2\sqrt{P}\tau.$$

$$\zeta_1 = 0.$$

Ensuite, les termes en ε^2 sont donnés par

$$\frac{du_{12}}{d\tau} - i\sigma_1 u_{12} = \quad i\sigma_1 \delta_2 u_{10} + U_{11} = 0,$$

$$\frac{du_{22}}{d\tau} + i\sigma_1 u_{22} = - i\sigma_1 \delta_2 u_{20} + U_{22} = 0,$$

$$\frac{du_{32}}{d\tau} - i\sigma_2 u_{32} = \quad i\sigma_2 \delta_2 u_{30} + U_{32} = 0,$$

$$\frac{du_{42}}{d\tau} + i\sigma_2 u_{42} = - i\sigma_2 \delta_2 u_{40} + U_{42} = 0,$$

$$\frac{d^2\zeta_2}{d\tau^2} + P\zeta_2 = - 2P\delta_2\zeta_0 + V_2.$$

V_2 étant de la forme

$$C_2^{(1)} \sin \sqrt{P}\tau + C_2^{(3)} \sin 3\sqrt{P}\tau;$$

les u_{j_1} et ζ_2 devant être périodiques, de période

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{P}} \qquad \text{et} \qquad \zeta_2(0) = \frac{d\zeta_2(0)}{d\tau} = 0.$$

Nous obtenons

$$u_{j2} = 0, \qquad \delta_2 = \frac{C_2^{(1)}}{2L\sqrt{P}}$$

et

$$\zeta_2 = c_2[3 \sin \sqrt{P}\tau - \sin 3\sqrt{P}\tau].$$

Il est facile de montrer que le procédé pourra se continuer indéfiniment : supposons que jusqu'à une certaine puissance $n - 1$ de ε, on ait développé la solution, jouissant des propriété suivantes :

$$u_{j.2k} \equiv 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \qquad \zeta_{2k+1} = \delta_{2k+1} = 0,$$

$\zeta_{2k} =$ somme homogène de sinus de multiples impairs de $\sqrt{P}\tau$,

$u_{j.2k+1} =$ somme de sinus et cosinus de multiples pairs de $\sqrt{P}\tau$.

Les termes suivants seront donnés par

$$\frac{du_{jn}}{d\tau} - i\sigma_j u_{jn} = \qquad i\sigma_j \qquad \sum \delta_k u_{j.n-k} + U_{jn}.$$

. . . . ;

$$\frac{d^2\zeta_n}{d\tau^2} + P\zeta_n = - 2P\delta_n\zeta_0 + \sum \lambda\delta_q^\alpha \delta_p^\beta \zeta_{n-q\alpha-p\beta} + V_n.$$

Reportons-nous aux équations (16); les seconds membres des quatre premières sont de la forme

$$(1+\delta)[\varepsilon\Phi_1+\varepsilon^2\Phi_2+\ldots+\varepsilon^n\Phi_n+\ldots],$$

Φ_n étant une fonction homogène de degré $n+1$ en ξ, η, ζ, donc en u_j et ζ, ζ n'entrant d'ailleurs que par son carré.

Le coefficient de ε^p dans Φ_n s'obtient en prenant l'ensemble $\Phi_n^{(p)}$ des termes de poids p en u_{jk} et ζ_k (les ζ_k entrant dans leur ensemble à des puissances paires seulement); donc

$$U_{jn}=\sum \delta_q \Phi_p^{(n-p-q)}.$$

Si q est impair, le terme correspondant disparaît; nous allons montrer que les autres termes disparaissent aussi si n est pair; en effet, un terme quelconque

$$\delta_q u_{10}^{\alpha_{10}} u_{11}^{\alpha_{11}}\ldots u_{20}^{\alpha_{20}} u_{21}^{\alpha_{21}}\ldots u_{30}^{\alpha_{30}} u_{31}^{\alpha_{31}}\ldots u_{40}^{\alpha_{40}} u_{41}^{\alpha_{41}}\ldots \zeta_0^{\beta_0}\zeta_1^{\beta_1}\ldots$$

est tel que (q étant pair)

$$\begin{gathered}\alpha_{10}+\alpha_{11}+\ldots+\alpha_{20}+\alpha_{21}+\ldots+\alpha_{30}+\alpha_{31}+\ldots\\ +\alpha_{40}+\alpha_{41}+\ldots+\beta_0\;+\beta_1\;+\ldots=p+1.\\ \alpha_{11}+2\alpha_{12}+3\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{21}+2\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{31}+2\alpha_{32}\\ +\alpha_{41}+2\alpha_{41}+\ldots+\beta_1\;+2\beta_2+\ldots=n-p-q.\end{gathered}$$

S'il y a des β d'indice impair, le terme est nul; s'il n'y a pas de β d'indice impair, la somme des β d'indice pair est paire; donc,

$$\sum \alpha_{jk} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\neq 0}{}' k\alpha_{jk}$$

sont de parité différente; leur somme $\Sigma(k+1)\alpha_{jk}$ est impaire et $\Sigma(2\lambda+1)\alpha_{j,2\lambda}$ est impaire, par suite différente de zéro; le terme contient donc des u_{jk} (k pair) et disparaît.

Quand n est impair, U_{jn} est une somme de sinus et cosinus de multiples pairs de $\sqrt{P}\tau$ (car les ζ_k entrent, dans leur ensemble, à des degrés pairs).

D'ailleurs U_{1n} et U_{2n}, U_{3n} et U_{4n} sont à coefficients conjugués.

Étudions de même le second membre de la dernière des équations (16)

$$(1+\delta)^2[\varepsilon\Psi_1+\ldots+\varepsilon^n\Psi_n+\ldots],$$

les Ψ_n étant homogènes et de degré $n+1$ par rapport aux u_j et ζ, mais les ζ

entrant sous forme impaire, nous pouvons écrire

$$V_n = \sum \delta_q^{\alpha_1} \delta_p^{\alpha_2} \Psi_r^{(n-r-p\alpha_2-q\alpha_1)}.$$

Si p ou q est impair, le terme correspondant est nul; si p et q sont pairs tous deux, un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire montre que $V_n = 0$ si n est impair, et que si n est pair, V_n est une somme homogène de sinus de multiples impairs de $\sqrt{P}\tau$.

D'ailleurs, V_n ne changera pas si l'on change i en $-i$: tous ses coefficients sont donc réels.

Alors si $n = 2m$, nous avons

$$\frac{du_{j,2m}}{d\tau} - i\sigma_j u_{j,2m} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2\zeta_{2m}}{d\tau^2} + P\zeta_{2m} = -2P\delta_{2m}\zeta_0 + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} C_{2m}^{(2\lambda+1)} \sin(2\lambda+1)\sqrt{P}\tau.$$

Donc,

$$u_{j,2m} = 0, \qquad \delta_{2m} = \frac{C_{2m}^{(1)}}{2L\sqrt{P}}, \qquad \zeta_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} C_{2m}^{(2\lambda+1)} \sin(2\lambda+1)\sqrt{P}\tau.$$

Si, au contraire, $n = 2m+1$, nous avons

$$\frac{du_{j,2m+1}}{d\tau} - i\sigma_j u_{j,2m} = A_{j,2m+1}^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+1} A_{j,2m+1}^{(2\lambda)} \cos 2\lambda\sqrt{P}\tau + B_{j,2m+1}^{(2\lambda)} \sin 2\lambda\sqrt{P}\tau.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2\zeta_{2m+1}}{d\tau^2} + P\zeta_{2m+1} = -2P\delta_{2m+1}\zeta_0;$$

d'où

$$\delta_{2m+1} = 0, \qquad \zeta_{2m+1} = 0,$$

$$u_{j,2m+1} = a_{j,2m+1}^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+1} a_{j,2m+1}^{(2\lambda)} \cos 2\lambda\sqrt{P}\tau + b_{j,2m+1}^{(2\lambda)} \sin 2\lambda\sqrt{P}\tau.$$

Le procédé continue donc indéfiniment.

En pratique, dans ce cas, il est plus simple d'opérer, par la même méthode, directement sur les équations en x, y et z.

38. *Construction des orbites* B *de période* $\frac{2\pi}{\sigma_1}$. Nous pourrons supposer que

pour $\tau = 0$, $x' = 0$, c'est-à-dire que pour $\tau = 0$,

$$\sigma_1(u_1 - u_2) + \sigma_2(u_3 - u_4) = 0$$

et que

$$x = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = a.$$

Alors

$$u_{10} = \frac{a}{2} e^{i\sigma_1\tau}, \qquad u_{20} = \frac{a}{2} e^{-i\sigma_1\tau}, \qquad u_{30} = u_{40} = 0.$$

Les termes en ε sont donnés par

$$\frac{du_{11}}{d\tau} - i\sigma_1 u_{11} = U_{11},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

les U_{j1} sont de la forme

$$C_{j1}^{(0)} + C_{j1}^{(2)} e^{2i\sigma_1\tau} + D_{j1}^{(2)} e^{-2i\sigma_1\tau};$$

les u_{j1} doivent être périodiques, de période $\frac{2\pi}{\sigma_1}$, et vérifier pour $\tau = 0$ les deux relations

$$\sigma_1(u_{11} - u_{21}) + \sigma_2(u_{31} - u_{41}) = 0,$$
$$u_{11} + u_{21} + u_{31} + u_{41} = 0;$$

nous aurons une solution de la forme

$$\begin{aligned}
u_{11} &= c_{11}^{(0)} + c_{11}^{(1)} e^{i\sigma_1\tau} + c_{11}^{(2)} e^{2i\sigma_1\tau} + d_{11}^{(1)} e^{-i\sigma_1\tau} + d_{11}^{(2)} e^{-2i\sigma_1\tau},\\
u_{21} &= c_{21}^{(0)} + c_{21}^{(1)} e^{i\sigma_1\tau} + c_{21}^{(2)} e^{2i\sigma_1\tau} + d_{21}^{(1)} e^{-i\sigma_1\tau} + d_{21}^{(2)} e^{-2i\sigma_1\tau},\\
u_{31} &= c_{31}^{(0)} + c_{31}^{(2)} e^{2i\sigma_1\tau} + d_{31}^{(2)} e^{-2i\sigma_1\tau},\\
u_{41} &= c_{41}^{(0)} + c_{41}^{(2)} e^{2i\sigma_1\tau} + d_{41}^{(2)} e^{-2i\sigma_1\tau}.
\end{aligned}$$

D'une façon générale, le terme en ε^n sera donné par

$$\begin{aligned}
\frac{du_{1n}}{d\tau} - i\sigma_1 u_{1n} &= i\sigma_1 \delta_n u_{10} + i\sigma_1 \sum_{k \neq 0} \delta_k u_{1.n-k} + U_{1n},\\
\frac{du_{2n}}{d\tau} + i\sigma_1 u_{2n} &= -i\sigma_1 \delta_n u_{20} - i\sigma_1 \sum_{k \neq 0} \delta_k u_{2.n-k} + U_{2n}.\\
\frac{du_{3n}}{d\tau} - i\sigma_2 u_{3n} &= i\sigma_2 \sum_{k \neq 0} \delta_k u_{3,n-k} + U_{3n},\\
\frac{du_{4n}}{d\tau} + i\sigma_2 u_{4n} &= - i\sigma_2 \sum_{k \neq 0} \delta_k u_{4,n-k} + U_{4n},
\end{aligned}$$

les U_{jn} étant des polynomes en u_{jk} $(k < n)$ de degré $n + 1$; en nous reportant aux équations (16), nous voyons que le changement de i en $-i$ intervertit les équations qui définissent, d'une part u_1 et u_2, d'autre part, u_3 et u_4; les fonctions initiales u_{10} et u_{20} jouissent de la même propriété; il en sera de même à toutes les étapes du calcul : u_{1k} et u_{2k}, u_{3k} et u_{4k} $(k < n)$ forment des couples conjugués; il en résulte que le coefficient de $e^{i\sigma_1\tau}$ dans U_{1n} et celui de $e^{-i\sigma_1\tau}$ dans U_{2n} sont conjugués. Mais nous avons montré que la détermination de δ_n est possible; donc

$$\delta_n = \frac{A + Bi}{i\sigma_1} = \frac{A - Bi}{-i\sigma_1},$$

A est donc nul et δ_n réel.

On obtient ensuite les u_{jn} sous forme de somme de la forme

$$c_{jn}^{(0)} + \sum_{k=1}^{k=n+1} c_{jn}^{(k)} e^{2ik\sigma_1} + \sum_{k=1}^{k=n+1} d_{in}^{(k)} e^{-2ik\sigma_1},$$

les couples u_{1n} et u_{2n}, u_{3n} et u_{4n} étant conjugués.

Et le procédé peut être continué indéfiniment.

Nous avons supposé, dans ces conditions, qu'il n'y avait pas de commensurabilité entre $\sqrt{P}$, σ_1 et σ_2; la construction se poursuit de façon tout à fait analogue, quoique un peu plus compliquée dans les cas de commensurabilité.

39. Donnons quelques résultats; dans le cas où les masses sont alignées, les calculs et les résultats sont relativement simples, car le nombre des quantités qui entrent dans les équations est assez limité; en posant

$$P = \sum m_j p_{1j}, \qquad A = \sum \frac{m_j p_{1j}}{a_1 - a_j}, \qquad C = \sum \frac{m_j}{r_{1j}^5},$$

nous pourrons calculer les termes du troisième ordre.

Pour les orbites (A), nous obtenons (en incorporant L à ε avec lequel il apparaît toujours sous la forme $L^n\varepsilon^n$) :

$$x_1 = a_1 + \left[\frac{-3A}{4P(1+2P)} + \frac{3A(1+3P)}{4P(1-7P+18P^2)}\cos 2\sqrt{P}\tau\right]\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$y_1 = \left[\frac{-3A}{\sqrt{P}(1-7P+18P^2)}\sin 2\sqrt{P}\tau\right]\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$z_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}\tau\right]\varepsilon + \frac{3}{64P^{\frac{5}{2}}}\left[\frac{3A^2(1+3P)}{1-7P+18P^2} - C\right]\left[3\sin\sqrt{P}\tau - \sin 3\sqrt{P}\tau\right]\varepsilon^3 + \ldots$$

$$\delta = -\frac{9}{16P^2}\left[\frac{3A^2(1-3P+14P^2)}{(1+2P)(1-7P+18P^2)} - C\right]\varepsilon^2 + \ldots.$$

Pour les orbites (B), nous avons, de même, en incorporant K à ε, et en posant

$$n = -b_1 i = \frac{\sigma^2 + 1 + 2P}{2\sigma},$$

$$m = b_4 = \frac{\rho^2 - 1 - 2P}{2\rho},$$

$$a = \frac{3A(n^2 - 2)}{8(m\sigma - n\rho)}\left[\frac{m}{\sigma} + \frac{n}{\rho}\right],$$

$$b = \frac{A(n^2 + 2)}{8(m\sigma - n\rho)}\left[\frac{m}{\sigma} - \frac{3n\rho}{4\sigma^2 + \rho^2}\right] - \frac{nA}{2(m\rho + n\sigma)}\frac{\rho^2 + \sigma^2}{\sigma(4\sigma^2 + \rho^2)},$$

$$c = -\frac{Anm(n^2 + 2)}{4(m\sigma - n\rho)}\frac{\sigma^2 + \rho^2}{\sigma(4\sigma^2 + \rho^2)} + \frac{nA}{4(m\rho + n\sigma)}\left[\frac{n}{\sigma} + \frac{3m\rho}{4\sigma^2 + \rho^2}\right];$$

$$x_1 = a_1 + \cos\sigma\tau\varepsilon + 2[a - (a + b)\cos\sigma\tau + b\cos 2\sigma\tau]\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$y_1 = -n\ \sin\sigma\tau\varepsilon + 2[\quad n(a + b)\sin\sigma\tau + c\sin 2\sigma\tau]\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\delta = \left\{-\frac{3A}{2}\left[\frac{m(4a + 2b + nc)}{\rho(m\sigma - n\rho)} + \frac{(-2na + nb + c)}{\sigma(m\rho + n\sigma)}\right] + \frac{3C}{8\sigma}\left[\frac{m(2 - n^2)}{m\sigma - n\rho} - \frac{n(4 - 3n^2)}{4(m\rho + n\sigma)}\right]\right\}\varepsilon^2 + \ldots.$$

Prenons encore le problème restreint des trois corps, cas équilatéral; les masses finies μ et $1 - \mu$ ont pour coordonnées

$$x_2 = 1 - \mu \qquad \text{et} \qquad x_3 = -\mu;$$

la solution de Lagrange donne, pour la masse nulle, la position

$$x_1 = \frac{1}{2} - \mu, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_1 = 0.$$

Les orbites A sont alors

$$x_1 = \left(\frac{1}{2} - \mu\right) + \frac{8}{73 - 9(1 - 2\mu)^2}[(1 - 2\mu)\cos 2\tau + \sqrt{3}\sin 2\tau]\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left[\frac{19 - 3(1 - 2\mu)^2}{73 - 9(1 - 2\mu)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\tau - \frac{8(1 - 2\mu)}{73 - 9(1 - 2\mu)^2}\sin 2\tau - \frac{\sqrt{3}}{6}\right]\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$z_1 = \sin\tau.\varepsilon + \frac{3\mu(1 - \mu)}{73 - 9(1 - 2\mu)^2}[\sin 3\tau - 3\sin\tau]\varepsilon^3,$$

$$\delta = \frac{12\mu(1 - \mu)}{73 - 9(1 - 2\mu)^2}\varepsilon^2 + \ldots$$

Pour les orbites B, nous emprunterons à M. Th. Buck les expressions suivantes :

$$x_1 = \left(\frac{1}{2} - \mu\right) + \varepsilon \cos\sigma_1\tau + \varepsilon^2[a_{10} + a_{11} \cos\sigma_1\tau + a'_{11} \sin \sigma_1\tau + a_{12} \cos 2\sigma_1\tau + a'_{12} \sin 2\sigma_1\tau] + \dots,$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon\left[\frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4\sigma_1^2+9}\cos\sigma_1\tau + \frac{8\sigma_1}{4\sigma_1^2+9}\sin\sigma_1\tau\right] + \varepsilon^2[b_{10} + b_{11}\cos \sigma_1\tau + b'_{11}\sin \sigma_1\tau + b_{12}\cos 2\sigma_1\tau + b'_{12}\sin 2\sigma_1\tau] + \dots,$$

les coefficients a et b ayant les valeurs ci-dessous :

$$a_{10} = -\frac{9A_{10} + 3\sqrt{3}(1-2\mu)B_{10}}{27\mu(1-\mu)},$$

$$b_{10} = \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)A_{10} - 3B_{10}}{27\mu(1-\mu)},$$

$$a_{11} = -(a_{10} + a_{12}),$$

$$a'_{11} = -2a'_{12},$$

$$b_{11} = -\frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)a_{11} + 8\sigma_1 a'_{11}}{4\sigma_1^2+9},$$

$$b'_{11} = -\frac{8\sigma_1 a_{11} - 3\sqrt{3}(1-2\mu)a'_{11}}{4\sigma_1^2+9},$$

$$a_{12} = -\frac{(16\sigma_1^2+9)A_{12} + 3\sqrt{3}(1-2\mu)B_{12} + 16\sigma_1 B'_{12}}{12\sigma_1^2(5\sigma_1^2-1)},$$

$$b_{12} = +\frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)A_{12} - 16\sigma_1 A'_{12} - (16\sigma_1^2+3)A_{12}}{12\sigma_1^2(5\sigma_1^2-1)},$$

$$a'_{12} = -\frac{(16\sigma_1^2+9)A'_{12} - 16\sigma_1 B_{12} + 3\sqrt{3}(1-2\mu)B'_{12}}{12\sigma_1^2(5\sigma_1^2-1)},$$

$$b'_{12} = +\frac{16\sigma_1 A_{12} + 3\sqrt{3}(1-2\mu)A'_{12} - (16\sigma_1^2+3)B'_{12}}{12\sigma_1^2(5\sigma_1^2-1)},$$

les quantités A et B s'exprimant au moyen des coefficients

$$b_1 = \frac{8\sigma_1 i - 3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4\sigma_1^2+9}, \qquad b_2 = \frac{-8\sigma_1 i - 3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4\sigma_1^2+9},$$

sous la forme suivante :

$$A_{10} = \frac{3}{32}\left[7(1-2\mu) - 2\sqrt{3}(b_1+b_2) - 44(1-2\mu)b_1 b_2\right],$$

$$A_{12} = \frac{3}{32}\left[7(1-2\mu) - 2\sqrt{3}(b_1+b_2) - 22(1-2\mu)(b_1^2+b_2^2)\right],$$

$$A'_{12} = \frac{3\sigma_1}{4\sigma_1^2+9}\left[\sqrt{3} + 11(1-2\mu)(b_1+b_2)\right],$$

$$B_{10} = -\frac{3}{32}\left[\sqrt{3} + 66(1-2\mu)(b_1+b_2) + 12\sqrt{3}\,b_1 b_2\right],$$

$$B_{12} = -\frac{3}{32}\left[\sqrt{3} + 66(1-2\mu)(b_1+b_2) + 6\sqrt{3}\,b_1 b_2\right],$$

$$B'_{12} = \frac{3\sigma_1}{4\sigma_1^2+9}\left[11(1-2\mu) + 3\sqrt{3}(b_1+b_2)\right].$$

Bibliographie.

MOULTON (F. R.), *Periodic Orbits*, Chap. V et VI : Oscillating satellites about the straight-line equilibrium points (Carnegie Institution).

BUCK (Th.), Dans *Periodic Orbits* de F. R. MOULTON, Chap. IX : Oscillating satellites near the Lagrangian équilateral triangle points.

PLUMMER (H. C.), *On oscillating Satellites* (second Paper), (*Monthly Notices*, vol, LXIV).

PERCHOT (J.) et MASCART (J.), *Sur une classe de solutions périodiques dans un cas spécial du problème des trois corps* (*Bulletin astronomique*, t. 12).

BROWN (Ernest W,), *On a new family of periodic Orbits in the problem of three bodies* (*Monthly Notices*, vol. LXXI).

WILLARD (R.), *On a family of Osciltating Orbits of Short period* (*Monthly Notices*, vol. LXXIII).

CHAPITRE IV.

DÉVELOPPEMENT DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES (CAS DES MASSES FINIES).

SOMMAIRE.

Trois masses finies alignées.

Trois masses finies en triangle équilatéral.

Cas de trois corps, de masses finies, alignés.

40. Les équations du problème sont alors

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + 2\sqrt{-1}(1+\delta)\frac{d\xi_i}{d\tau} = (1+\delta)^2[X_{i1} + \varepsilon X_{i2} + \ldots], \\ &\frac{d^2\eta_i}{d\tau^2} - 2\sqrt{-1}(1+\delta)\frac{d\eta_i}{d\tau} = (1+\delta)^2[Y_{i1} + \varepsilon Y_{i2} + \ldots], \\ &\frac{d^2\zeta_i}{d\tau^2} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = (1+\delta)^2[Z_{i1} + \varepsilon Z_{i2} + \ldots], \end{aligned}\right.$$

$$X_{i1} = \xi_i + \sum_j \frac{P_{ij}}{2} \xi_j + \sum_j \frac{3}{2} P_{ij} \eta_j,$$

$$Y_{i1} = \eta_i + \sum_j \frac{3}{2} P_{ij} \xi_j + \sum_j \frac{P_{ij}}{2} \eta_j,$$

$$Z_{i1} = \quad -\sum_j P_{ij} \zeta_j.$$

Les polynomes X_{in}, Y_{in}, Z_{in} étant homogènes et de degré $n+1$ aux ξ, η, ζ; dans les deux premiers, les ζ n'entrent qu'à des degrés pairs, dans le dernier, ils entrent seulement à des degrés impairs.

Pour $\varepsilon = 0$, le système se décompose : un système au ζ et un système aux ξ et η.

L'intégrale générale du système aux ζ est (pour $\varepsilon = 0$) :

$$\zeta_1 = L_1 a_1 e^{i(1+\delta)\tau} + L_2 a_1 e^{-i(1+\delta)\tau} + m_2 m_3 (a_2 - a_3)[L_3 e^{i(1+\delta)h\tau} + L_4 e^{-i(1+\delta)h\tau}] + L_5 + L_6 (1+\delta)\tau,$$

$$\zeta_2 = L_1 a_2 e^{i(1+\delta)\tau} + L_2 a_2 e^{-i(1+\delta)\tau} + m_3 m_1 (a_3 - a_1)[L_3 e^{i(1+\delta)h\tau} + L_4 e^{-i(1+\delta)h\tau}] + L_5 + L_6 (1+\delta)\tau,$$

$$\zeta_3 = L_1 a_3 e^{i(1+\delta)\tau} + L_3 a_3 e^{-i(1+\delta)\tau} + m_1 m_2 (a_1 - a_2)[L_3 e^{i(1+\delta)h\tau} + L_4 e^{-i(1+\delta)h\tau}] + L_5 + L_6 (1+\delta)\tau,$$

avec, d'ailleurs, les deux intégrales premières :

$$\sum m_j \zeta_j = 0, \qquad \sum m_j \frac{d\zeta_j}{d\tau} = 0,$$

d'où $L_5 = L_6 = 0$ ($-h^2$ étant la dernière racine de $\Delta(h^2) = 0$; $-h^2 < -1$).

L'intégrale générale du système aux ξ et η est ;

	ξ_1.	ξ_2.	ξ_3.	η_1.	η_2.	η_3.
$K_1\, e^{i(1+\delta)\tau}$	a_1	a_2	a_3	$-3a_1$	$-3a_2$	$-3a_3$
$K_2\, e^{-i(1+\delta)\tau}$	$-3a_1$	$-3a_2$	$-3a_3$	a_1	a_2	a_3
$K_3\, e^{i\sigma(1+\delta)\tau}$	$m_2m_3(a_2-a_3)(1+n)$	$m_3m_1(a_3-a_1)(1+n)$	$m_1m_2(a_1-a_2)(1+n)$	$m_2m_3(a_2-a_3)(1-n)$	$m_3m_1(a_3-a_1)(1-n)$	$m_1m_2(a_1-a_2)(1-n)$
$K_4\, e^{-i\sigma(1+\delta)\tau}$	$m_2m_3(a_2-a_3)(1-n)$	$m_3m_1(a_3-a_1)(1-n)$	$m_1m_2(a_1-a_2)(1-n)$	$m_2m_3(a_2-a_3)(1+n)$	$m_3m_1(a_3-a_1)(1+n)$	$m_1m_2(a_1-a_1)(1+n)$
$K_5\, e^{\rho(1+\delta)\tau}$	$m_2m_3(a_2-a_3)(1+li)$	$m_3m_1(a_3-a_1)(1+li)$	$m_1m_2(a_1-a_2)(1+li)$	$m_2m_3(a_2-a_3)(1-li)$	$m_3m_1(a_3-a_1)(1-li)$	$m_1m_2(a_1-a_2)(1-li)$
$K_6\, e^{-\rho(1+\delta)\tau}$	$m_2m_3(a_2-a_3)(1-li)$	$m_3m_1(a_3-a_1)(1-li)$	$m_1m_2(a_1-a_2)(1-li)$	$m_2m_3(a_2-a_3)(1+li)$	$m_3m_1(a_3-a_1)(1+li)$	$m_1m_2(a_1-a_2)(1+li)$
$K_7+K_8(1+\delta)\tau$...	a_1	a_2	a_3	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$
$K_8\,\frac{2}{3}\,i$............	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3
$K_9\, e^{-i(1+\delta)\tau}$	1	1	1	0	0	0
$K_{10}(1+\delta)\tau\, e^{-i(1+\delta)\tau}$.	1	1	1	0	0	0
$K_{11}\, e^{i(1+\delta)\tau}$........	0	0	0	1	1	1
$K_{12}(1+\delta)\tau\, e^{i(1+\delta)\tau}$..	0	0	0	1	1	1

avec les intégrales premières :

$$\sum m_j \xi_j = \sum m_j \frac{d\xi_j}{d\tau} = \sum m_j \eta_j = \sum m_j \frac{d\eta_j}{d\tau} = 0,$$

qui imposent

$$K_9 = K_{10} = K_{11} = K_{12} = 0;$$

σ^2 et $-\rho^2$ étant les deux racines de l'équation en g^2 :

$$g^4 - g^2(2 - h^2) + (1 - h^2)(1 + 2h^2) = 0$$

et

$$\frac{1-n}{1+n} = \frac{(\sigma+1)^2 + \frac{h^2}{2}}{-\frac{3}{2}h^2} = \frac{-\frac{3}{2}h^2}{(\sigma-1)^2 + \frac{h^2}{2}} = \frac{(\sigma+1)^2 - h^2}{(\sigma-1)^2 - h^2},$$

$$n = \frac{2\sigma}{\sigma^2 + 1 - h^2} = \frac{\sigma^2 + 1 + 2h^2}{2\sigma},$$

$$-li = \frac{2\rho i}{-\rho^2 + 1 - h^2} = \frac{-\rho^2 + 1 + 2h^2}{2\rho i},$$

Nous sommes amenés à faire le changement de variables :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi_1 = {} & a_1 u_1 - 3a_1 u_2 + m_2 m_3 (a_2 - a_3)[(1+n)u_3 + (1-n)u_4 + (1+li)u_5 + (1-li)u_6] \\
& + \frac{2i}{3} a_1 u_7 + a_1 u_8 + u_9 + u_{10}, \\
\xi_2 = {} & a_2 u_1 - 3a_2 u_2 + m_3 m_1 (a_3 - a_1)[(1+n)u_3 + (1-n)u_4 + (1+li)u_5 + (1-li)u_6] \\
& + \frac{2i}{3} a_2 u_7 + a_2 u_8 + u_9 + u_{10}, \\
\xi_3 = {} & a_3 u_1 - 3a_3 u_2 + m_1 m_2 (a_1 - a_2)[(1+n)u_3 + (1-n)u_4 + (1+li)u_5 + (1-li)u_6] \\
& + \frac{2i}{3} a_3 u_7 + a_3 u_8 + u_9 + u_{10}, \\
\eta_1 = {} & -3a_1 u_1 + a_1 u_2 + m_2 m_3 (a_2 - a_3)[(1-n)u_3 + (1+n)u_4 + (1-li)u_5 + (1+li)u_6] \\
& + \frac{2i}{3} a_1 u_7 - a_1 u_8 + u_{11} + u_{12}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\xi'_1 = {} & (1+\delta)\{a_1 i u_1 + 3a_1 i u_2 + m_2 m_3 (a_2 - a_3) \\
& \times [(1+n)i\sigma u_3 - (1-n)i\sigma u_4 + (1+li)\rho u_5 - (1-li)\rho u_6] \\
& + a_1 u_7 + (1-i)u_9 - i u_{10}\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\eta'_1 = {} & (1+\delta)\{-3a_1 i u_1 - a_1 i u_2 + m_2 m_3 (a_2 - a_3) \\
& \times [(1-n)i\sigma u_3 - (1+n)i\sigma u_4 + (1-li)\rho u_5 - (1+li)\rho u_6) \\
& - a_1 u_7 + (1+i)u_{11} + i u_{12}\}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Le déterminant de cette transformation n'est pas nul, car c'est celui d'un système fondamental d'intégrales du système aux ξ et η (pour $\varepsilon = 0$). Les équations aux ξ et η prennent alors la forme

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
&u'_1 - i(1+\delta)u_1 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_1,\\
&u'_2 + i(1+\delta)u_2 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_2,\\
&u'_3 - i\sigma(1+\delta)u_3 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_3,\\
&u'_4 + i\sigma(1+\delta)u_4 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_4,\\
&u'_5 - \rho(1+\delta)u_5 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_5,\\
&u'_6 + \rho(1+\delta)u_6 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_6,\\
&u'_7 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_7,\\
&u'_8 - (1+\delta)u_7 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_8,\\
&u'_9 + i(1+\delta)u_9 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_9,\\
&u'_{10} + i(1+\delta)u_{10} - (1+\delta)u_9 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_{10},\\
&u'_{11} - i(1+\delta)u_{11} &&= \varepsilon(1+\delta)Q_{11},\\
&u'_{12} - i(1+\delta)u_{12} - (1+\delta)u_{11} &&= \varepsilon(1+\delta)Q_{12},
\end{aligned}\right.
$$

les Q étant des séries en ε dont les coefficients sont des polynomes homogènes aux u_j et ζ_j ayant les mêmes propriétés que ci-dessus.

De même, en posant

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\zeta_1 = a_1 v_1 + a_1 v_2 + m_2 m_3(a_2 - a_3)[v_3 + v_4] + v_5 + v_6,\\
&\zeta'_1 = (1+\delta)[a_1 i v_1 - a_1 i v_2 + m_2 m_3(a_2 - a_3)hi(v_3 - v_4) + v_5],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.
$$

nous obtenons

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
&v'_1 - i(1+\delta)v_1 = \varepsilon(1+\delta)R_1, \qquad && v'_2 + i(1+\delta)v_2 = \varepsilon(1+\delta)R_2,\\
&v'_3 - ih(1+\delta)v_3 = \varepsilon(1+\delta)R_3, && v'_4 + ih(1+\delta)v_4 = \varepsilon(1+\delta)R_4,\\
&v'_5 = \varepsilon(1+\delta)R_5, && v'_6 - (1+\delta)v_5 = \varepsilon(1+\delta)R_6.
\end{aligned}\right.
$$

Les équations du mouvement admettent dix intégrales premières.

Les six intégrales du mouvement du centre de gravité (que nous avons fixé à l'origine) donnent ici :

$$v_5 = v_6 = 0, \qquad u_9 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = 0.$$

nous pourrons réduire les équations (31) aux huit premières, et les équations (33) aux quatre premières, en faisant dans les seconds membres :

$$v_5 = v_6 = u_9 = \ldots = u_{12} = 0.$$

Les intégrales des aires s'écrivent, par rapport aux axes fixes :

$$\sum m_j\left(X_j \frac{dY_j}{dt} - Y_j \frac{dX_j}{dt}\right) = C_1,$$
$$\sum m_j\left(Y_j \frac{dZ_j}{dt} - Z_j \frac{dY_j}{dt}\right) = C_2,$$
$$\sum m_j\left(Z_j \frac{dX_j}{dt} - X_j \frac{dZ_j}{dt}\right) = C_3.$$

Or, la rotation des axes mobiles étant constante et égale à 1,

$$X_j = x_j \cos t - y_j \sin t, \qquad Y_j = x_j \sin t + y_j \cos t;$$

d'autre part,

$$x_j = a_j + \varepsilon \frac{\xi_j + \eta_j}{2}, \qquad y_j = \varepsilon \frac{\eta_j - \xi_j}{2} i, \qquad z_j = \varepsilon \zeta_j, \qquad t = (1 + \delta)\tau.$$

Si nous posons

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \sum m_j(x_j^2 + y_j^2 + x_j y'_j - y_j x'_j) \\
&= \sum m_j a_j^2 + \varepsilon \sum m_j a_j \left[\xi_j + \eta_j + \frac{i}{2} \frac{\eta'_j - \xi'_j}{1+\delta}\right] + \varepsilon^2[\ldots] \\
&= \sum m_j a_j^2 + \varepsilon \frac{i}{3} u_7 \sum m_j a_j^2 + \varepsilon^2[\ldots],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \sum m_j(x_j z'_j - z_j x'_j + y_j z_j] \\
&= \varepsilon \sum m_j a_j \frac{\zeta'_j}{1+\delta} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum m_j \left[i \zeta_j(\eta_j - \xi_j) + \frac{\zeta'_j(\xi_j + \eta_j) - \zeta_j(\xi'_j + \eta'_j)}{1+\delta}\right] \\
&= \varepsilon i(v_1 - v_2) \sum m_j a_j^2 + \varepsilon^2[\ldots],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \sum m_j[y_j z'_j - z_j y'_j - x_j z_j] \\
&= \varepsilon \sum m a_j \zeta_j + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum m_j \left[i \frac{\zeta'_j(\eta_j - \xi_j) - \zeta_j(\eta'_j - \xi'_j)}{1+\delta} - \zeta_j(\xi_j + \eta_j)\right] \\
&= -\varepsilon(v_1 + v_2) \sum m_j a_j^2 + \varepsilon^2[\ldots]
\end{aligned}$$

(les dérivées x', y', z' étant prises par rapport à t, mais ξ', η', ζ' étant prises par rapport à τ), les intégrales des aires s'écrivent :

$$\Phi_1 = C_1, \qquad \Phi_2 \sin t + \Phi_3 \cos t = C_2, \qquad -\Phi_2 \cos t + \Phi_3 \sin t = C_3.$$

La première seule ne contient pas t, ou τ. Mais, τ_0 et T étant deux valeurs de τ, nous tirons des deux dernières intégrales les relations

$$\Phi_3(\tau_0+T)\cos(1+\delta)T-\Phi_3(\tau_0)+\Phi_2(\tau_0+T)\sin(1+\delta)T=0,$$
$$\Phi_2(\tau_0+T)\cos(1+\delta)T-\Phi_2(\tau_0)-\Phi_3(\tau_0+T)\sin(1+\delta)T=0.$$

S'il existe une solution périodique, de période $T\not\equiv 2k\pi$, nous avons, pour cette solution, quel que soit τ_0,

$$\Phi_2(\tau_0)=\Phi_3(\tau_0)=0$$

et il en est de même si $T=2k\pi$ et $S\not\equiv 0$. Nous voyons en particulier que φ_1 et φ_2 ne peuvent avoir de termes indépendants de ε.

Si $T=2k\pi$, $\delta\equiv 0$, les relations précédentes donnent seulement

$$\Phi_2(\tau_0+T)-\Phi_2(\tau_0)=0,$$
$$\Phi_3(\tau_0+T)-\Phi_3(\tau_0)=0,$$

et nous en concluons que φ_1 et φ_2 sont périodiques si les autres variables le sont.

Mais, dans ce dernier cas, la solution étudiée est périodique, non seulement par rapport aux axes mobiles, mais aussi par rapport aux axes fixes; d'autre part, la solution de Lagrange, circulaire, dont nous sommes partis, subsiste quand on donne à son plan une orientation quelconque autour de O; nous pourrons donc supposer que

$$\Phi_2=\Phi_3=0,$$

cela revient à remplacer notre solution circulaire par celle dont le plan est perpendiculaire au moment de la quantité de mouvement; cela ne diminue pas la généralité du problème.

En définitive, nous poserons

$$\Phi_1=\sum m_j a_j^2\left[1+\varepsilon\frac{i}{3}F_1\right],\qquad \Phi_2=\varepsilon i\sum m_j a_j^2\,F_2,\qquad \Phi_3=-\varepsilon\sum m_j a_j^2\,F_3,$$

d'où

$$F_1=u_7+\varepsilon[\ldots],$$
$$F_2=(\varphi_1-\varphi_2)+\varepsilon[\ldots],$$
$$F_3=\varphi_1+\varphi_2+\varepsilon[\ldots];$$

nous aurons

$$F_1=C'_1,\qquad F_2=F_3=0,$$

et nous aurons toujours $L_1=L_2=0$.

Nous remarquerons encore que la solution circulaire de Lagrange, qui nous a servi de point de départ, se reproduit quand on la fait tourner dans son plan, ou ce qui revient au même quand on change l'origine des temps; nous pourrons donc faire partout $u_8(0) = 0$, c'est-à-dire $K_7 = 0$ (ce qui revient à poser $t = t_1 + \varepsilon K_7 i$).

Écrivons encore l'intégrale des forces vives :

$$\begin{aligned}
F_4 = \sum m_j(\xi'_j\eta'_j + \zeta'^2_j) \\
-(1+\delta)^2\Big[\sum m_j\xi_j\eta_j + \frac{1}{2}\sum m_j m_k p_{jk}(\xi_j - \xi_k)(\eta_j - \eta_k) \\
+\frac{3}{4}\sum m_j m_k p_{jk}(\xi_j - \xi_k)^2 \\
+\frac{3}{4}\sum m_j m_k p_{jk}(\eta_j - \eta_k)^2 - \sum m_j m_k p_{jk}(\zeta_j - \zeta_k)^2\Big] + \varepsilon[\ldots] = \text{const.}
\end{aligned}$$

Nous avons, *a priori*, 12 relations de périodicité. qui doivent être compatibles :

$$u_j(T) - u_j(0) \quad (j = 1, 2, \ldots, 8), \qquad v_j(T) - v(0) \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

mais le nombre des relations distinctes est moindre, à cause de l'existence des intégrales premières.

Nous poserons encore

$$\begin{aligned}
u_j &= u_{j0} + \varepsilon u_{j1} + \varepsilon^2 u_{j2} + \ldots, \\
v_j &= v_{j0} + \varepsilon v_{j1} + \varepsilon^2 v_{j2} + \ldots
\end{aligned}$$

et nous déterminerons successivement les coefficients des diverses puissances de ε.

41. *Orbites de période* $\frac{2\pi}{h}$. — Nous prendrons comme solution génératrice

$$u_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 8), \qquad v_1 = v_2 = 0,$$
$$v_3 = -\frac{Li}{2h}e^{ih\tau}, \qquad v_4 = \frac{Li}{2h}e^{-ih\tau} \qquad (\text{L réel})$$

(pour $\tau = 0$, les mobiles traversent le plan $\zeta = 0$).

Si nous partons, avec des conditions initiales voisines, pour $\tau = 0$:

$$u_j = \alpha_j, \qquad v_1 = \gamma_1, \qquad v_2 = \gamma_2, \qquad v_3 = -(L + \gamma_3)\frac{i}{2h}, \qquad v_4 = (L + \gamma_3)\frac{i}{2h},$$

en faisant $\gamma_4 = \gamma_3$ puisque le temps n'entre pas explicitement dans les équations du mouvement.

Les conditions de périodicité s'écriront :

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha_1\left[e^{i(1+\delta)\frac{2\pi}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_1=0, & \alpha_2\left[e^{-i(1+\delta)\frac{2\pi}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_2=0,\\ \alpha_3\left[e^{i(1+\delta)2\pi\frac{\sigma}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_3=0, & \alpha_4\left[e^{-i(1+\delta)2\pi\frac{\sigma}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_4=0,\\ \alpha_5\left[e^{(1+\delta)2\pi\frac{\rho}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_5=0, & \alpha_6\left[e^{-(1+\delta)2\pi\frac{\rho}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_6=0,\\ \varepsilon\,\Phi_7=0, & \alpha_7(1+\delta)\frac{2\pi}{h}\qquad+\varepsilon\,\Phi_8=0,\\ \gamma_1\left[e^{i(1+\delta)\frac{2\pi}{h}}-1\right]+\varepsilon\Psi_1=0, & \gamma_2\left[e^{-i(1+\delta)\frac{2\pi}{h}}-1\right]+\varepsilon\Psi_2=0,\\ -(L+\gamma_3)\frac{i}{2h}[e^{2i\pi\delta}-1]+\varepsilon\Psi_3=0, & (L+\gamma_3)\frac{i}{2h}[e^{-2i\pi\delta}-1]+\varepsilon\Psi_4=0. \end{array}\right.$$

Le déterminant fonctionnel $\frac{D(F_1 F_4)}{D(u_7 v_3)}$ se réduit pour $\alpha_j=\gamma_j=\varepsilon=\tau=0$, à $\frac{\partial F_4}{\partial v_3}$. Or, dans les conditions indiquées,

$$\frac{\partial F}{\partial v_3}=2(1+\delta)^2 m_1 m_2 m_3 L h i \sum m_2 m_2 (a_2-a_3)^2;$$

le déterminant n'est donc pas nul et l'on peut supprimer les relations de périodicité relatives à u_7 et v_3, et les remplacer par des relations arbitraires. D'autre part, nous avons $h>1$; si nous posons $\sigma=\lambda h$, quand h varie de 1 à $+\infty$, λ reste compris entre 1 et $\frac{9}{8}$, et ne peut être ni un entier ni l'inverse d'un entier. Alors, les relations (34) donnent

$$\alpha_j=\varepsilon S_j(\alpha_8,\gamma_3,\delta,\varepsilon)\qquad (j=1,2,\ldots,7).$$
$$\gamma_j=\varepsilon S'_j(\alpha_3,\gamma_3,\delta,\varepsilon)\qquad (j=1,2).$$

En portant ces valeurs dans la dernière des équations (34), elle devient

$$(L+\gamma_3)\frac{1}{2h}[e^{-2i\pi\delta}-1]+\varepsilon^2 R(\alpha_8,\gamma_3,\delta,\varepsilon),$$

R contenant des termes en $(L+\gamma)^3$ qui ne sont pas, en général, identiquement nuls : nous ne pourrons donc faire $\delta=0$; au contraire le coefficient de δ n'étant pas nul, nous obtiendrons

$$\delta=\varepsilon^2 S(\alpha_8,\gamma_3,\varepsilon).$$

En reportant dans les expressions des α_j ($j=1, 2, \ldots, 7$) et de γ_1 et γ_2, ceux-ci seront aussi exprimés sous forme de séries en α_8, γ_3, ε.

Le paramètre γ_3 entre toujours par la combinaison $L+\gamma_3$; il peut donc être fait nul, ce qui revient à l'incorporer à L; α_8 n'a d'autre effet que de faire tourner dans son plan la solution de Lagrange initiale, il peut être pris égal à o.

En résumé, les solutions périodiques de période $\frac{2\pi}{h}$ existent.

Nous allons montrer que l'on peut choisir les conditions initiales de telle sorte que les orbites obtenues coupent Ox orthogonalement à chaque demi-période. Les équations du mouvement en x, y, z [équation (8), Chapitre II] ne changent pas, si l'on change y_i en $-y_i$, z_i en $-z_i$ et t en $-t$: il en résulte que, si l'on prend les conditions initiales :

$$x_j = a_j, \qquad \frac{dy_j}{dt} = b_j, \qquad \frac{dz_j}{dt} = c_j, \qquad y_j = z_j = \frac{dx_j}{dt} = 0,$$

les x_j seront des fonctions paires du temps, et les y_j et z_j des fonctions impaires : Ox sera un axe de symétrie.

Avec nos variables, ces conditions initiales deviennent :

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \alpha_3 = \alpha_4, \qquad \alpha_5 = \alpha_6, \qquad \alpha_8 = 0, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

et il nous suffira d'écrire qu'au bout d'une demi-période :

$$\left(\tau = \frac{\pi}{h}\right), \qquad \frac{dx_j}{dt} = y_j = z_j = 0,$$

c'est-à-dire

$$u_1 = u_2, \qquad u_3 = u_4, \qquad u_5 = u_6, \qquad u_8 = 0, \qquad v_1 + v_2 = 0, \qquad v_3 + v_4 = 0.$$

Ces relations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\left[e^{i(1+\delta)\frac{\pi}{h}} - e^{-i(1+\delta)\pi\frac{\pi}{h}}\right] + \varepsilon\,\Phi'_1 = 0, &\qquad& \alpha_3\left[e^{i(1+\delta)\pi\frac{\sigma}{h}} - e^{-i(1+\delta)\pi\frac{\sigma}{h}}\right] + \varepsilon\,\Phi'_3 = 0,\\
&\alpha_5\left[e^{(1+\delta)\pi\frac{\rho}{h}} - e^{-(1+\delta)\pi\frac{\rho}{h}}\right] + \varepsilon\,\Phi'_5 = 0, && \alpha_7[1+\delta]\frac{\pi}{h} + \varepsilon\,\Phi'_8 = 0,\\
&\gamma_1\left[e^{i(1+\delta)\frac{\pi}{h}} - e^{-i(1+\delta)\frac{\pi}{h}}\right] + \varepsilon\,\Psi_1 = 0, && (L+\gamma_3)\frac{i}{2h}\left[e^{i\pi\delta} - e^{-i\pi\delta}\right] + \varepsilon\,\Psi'_3 = 0.
\end{aligned}$$

Si nous incorporons γ_3 à L ($\gamma_3 = 0$) nous avons, pour déterminer α_1, α_3, α_5, α_7, γ_1 et δ, six équations qui sont résolubles par rapport à ces variables.

42. La construction de ces orbites se présente d'une façon tout à fait analogue à celle des orbites (A) du problème restreint. Nous posons

$$\begin{aligned}
u_j &= u_{j0} + \varepsilon u_{j1} + \varepsilon^2 u_{j2} + \ldots,\\
v_j &= v_{j0} + \varepsilon v_{j1} + \varepsilon^2 v_{j0} + \ldots,
\end{aligned}$$

nous connaissons les u_{j0} et v_{j0} :

$$u_{j0}=0, \qquad v_{10}=v_{20}=0, \qquad v_{30}=-\frac{\mathrm{L}i}{2h}e^{ih\tau}, \qquad v_{40}=\frac{\mathrm{L}i}{2h}e^{-ih\tau}.$$

Dans le calcul des termes en ε, les Q_j se réduiront à des termes en $e^{\pm 2ih\tau}$ et des constantes, les R_j seront nuls; en tenant compte des conditions de périodicité et des conditions initiales, $v_j=0$, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} u_{j1} &= a_{j1}^{0}+a_{j1}^{1}\,e^{2ih\tau}+b_{j1}^{1}\,e^{-2ih\tau}, \\ v_{j1} &= 0. \end{aligned}$$

D'une façon générale, nous aurons, pour déterminer les termes en ε^n :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}
u'_{1n}-i\;u_{1n} &= i\;\partial_n u_{10}+i\sum_{2}^{n-1}\partial_k u_{1,n-k}+\mathrm{U}_{1n},\\
u'_{2n}+i\;u_{2n} &= -i\;\partial_n u_{20}-i\sum\partial_k u_{2,n-k}+\mathrm{U}_{2n},\\
u'_{3n}-i\sigma u_{3n} &= i\sigma\partial_n u_{30}+i\sigma\sum\partial_k u_{3,n-k}+\mathrm{U}_{3n},\\
u'_{4n}+i\sigma u_{4n} &= -i\sigma\partial_n u_{40}-i\sigma\sum\partial_k u_{4,n-k}+\mathrm{U}_{4n},\\
u'_{5n}-\rho\,u_{5n} &= \rho\partial_n u_{50}+\rho\sum\partial_k u_{5,n-k}+\mathrm{U}_{5n},\\
u'_{6n}+\rho\,u_{6n} &= -\rho\partial_n u_{60}-\rho\sum\partial_k u_{6,n-k}+\mathrm{U}_{6n},\\
u'_{7n} &= \mathrm{U}_{7n},\\
u'_{8n}-u_{7n} &= -\partial_n u_{70}-\sum\partial_k u_{7,n-k}+\mathrm{U}_{8n},\\
v'_{1n}-i\;v_{1n} &= i\;\partial_n v_{10}+i\sum\partial_k v_{1,n-k}+\mathrm{V}_{1,n},\\
v'_{2n}+i\;v_{2n} &= -i\;\partial_n v_{20}-i\sum\partial_k v_{2,n-k}+\mathrm{V}_{2n},\\
v'_{3n}-ihv_{3n} &= ih\partial_n v_{30}+i\sum\partial_k v_{3,n-k}+\mathrm{V}_{3n},\\
v'_{4n}+ihv_{4n} &= -ih\partial_n v_{40}-i\sum\partial_k v_{4,n-k}+\mathrm{V}_{4n},
\end{aligned}\right.$$

Admettons que les termes précédant ε^n satisfassent aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
u_{2k} &= 0,\\
v_{2k+1} &= \partial_{2k+1}=0,\\
u_{2k+1} &= \text{somme des puissances paires de } e^{\pm ih\tau},\\
v_{2k} &= \text{somme homogène des puissances impaires de } e^{\pm ih\tau}.
\end{aligned}$$

Les équations du mouvement ont, par rapport aux variables u d'une part, et aux variables v d'autre part, la même structure que les équations du problème restreint : l'induction obtenue dans ce cas, pour les orbites A subsiste; ici, cependant, nous avons deux relations pour déterminer δ_n, mais nous les savons compatibles et nous verrions qu'alors, elles donnent pour δ_n une valeur réelle, car les équations en v_{3n} et v_{4n} sont conjuguées.

Nous savons d'ailleurs, et nous pourrions le vérifier en utilisant à chaque étape, les équations en x, y et z que : x_{jn} ne contient que les cosinus des multiples pairs de $h\tau$, y_{jn} que les sinus des multiples pairs de $h\tau$ et z_{jn} que les sinus de multiples impairs de $h\tau$.

43. *Orbites de période* $\frac{2\pi}{\sigma}$. — Nous prendrons la solution génératrice :

$$u_3 = \mathrm{K}\, e^{i\sigma\tau}, \qquad u_4 = \mathrm{K}\, e^{-i\sigma\tau} \qquad (\mathrm{K} \text{ réel}),$$
$$u_j = 0 \quad (j = 1, 2, 5, 6, 7, 8), \qquad v_j = 0$$

(pour $\tau = 0$, le mobile traverse, perpendiculairement, l'axe Ox). Prenons des conditions initiales voisines :

$$u_{30} = \mathrm{K} + \alpha_3, \qquad u_{40} = \mathrm{K} + \alpha_3, \qquad u_j = \alpha_j, \qquad v_j = \gamma_j.$$

en faisant $\alpha_3 = \alpha_4$ puisque le temps n'entre pas explicitement dans les équations du mouvement.

Nous avons les conditions de périodicité, parmi lesquelles nous considèrerons d'abord

$$\gamma_1\left[e^{i(1+\delta)\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right] + \varepsilon\Psi'_1 = 0, \qquad \gamma_2\left[e^{-i(1+\delta)\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right] + \varepsilon\Psi'_2 = 0,$$
$$\gamma_3\left[e^{i(1+\delta)2\pi\frac{h}{\sigma}} - 1\right] + \varepsilon\Psi'_3 = 0, \qquad \gamma_4\left[e^{-i(1+\delta)2\pi\frac{h}{\sigma}} - 1\right] + \varepsilon\Psi'_4 = 0.$$

Toutes les fonctions $\varepsilon\Psi'$ contiennent en facteur un terme linéaire aux γ; si donc nous résolvons les trois premières relations par rapport à γ_1, γ_2, γ_3 et substituons dans la quatrième, elle sera divisible par γ_4; mais, après division, elle contiendra un terme indépendant des α, γ, δ, ε : la seule solution acceptable est donc $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$, et les orbites étudiées sont planes.

Il nous reste les huit conditions :

$$
(36)\quad \left\{
\begin{array}{rr}
\alpha_1\left[e^{i(1+\delta)\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right]+\varepsilon\Phi_1=0, & \alpha_2\left[e^{-i(1+\delta)\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right]+\varepsilon\Phi_2=0,\\
(K+\alpha_3)\left[e^{2i\pi\delta}-1\right]+\varepsilon\Phi_2=0, & (K+\alpha_3)\left[e^{-2i\pi\delta}-1\right]+\varepsilon\Phi_4=0,\\
\alpha_5\left[e^{(1+\delta)2\pi\frac{\rho}{\sigma}}-1\right]+\varepsilon\Phi_5=0, & \alpha_6\left[e^{-(1+\delta)2\pi\frac{\rho}{\sigma}}-1\right]+\varepsilon\Phi_6=0,\\
\varepsilon\Phi_7=0, & \alpha_7(1+\delta)\dfrac{2\pi}{\sigma}+\varepsilon\Phi_8=0.
\end{array}
\right.
$$

Mais le mouvement étant plan, il ne nous reste que deux intégrales premières : la première intégrale des aires et l'intégrale des forces vives. Or, pour $\alpha_j=\delta=\varepsilon=0$,

$$\frac{D(F_1,\ F_4)}{D(u_7,\ u_3)}=\frac{\partial F_4}{\partial u_3}$$

et

$$\frac{\partial F_4}{\partial u_3}=4m_1m_2m_3(1+\delta)^2K\sum\left[m_2m_3(a_2-a_3)^2(n^2\sigma^2-1)-2M^2m_3a_3^2p_{12}\right].$$

Mais en tenant compte des relations qui définissent la position d'équilibre relatif

$$\sum m_3a_3^2p_{12}=\left(\sum m_1p_{12}p_{13}\right)\left(\sum m_1a_1^2\right)=\frac{h^2}{M}\sum m_1a_1^2,$$

$$\sum m_2m_3(a_2-a_3)^2=M\sum m_1a_1^2.$$

On a donc

$$\frac{\partial F_4}{\partial u_3}=4m_1m_2m_3M(1+\delta)^2K\left[n^2\sigma^2-1-2h^2\right]\sum m_1a_1^2,$$

mais

$$n=\frac{2\sigma}{\sigma^2+1-h^2}=\frac{\sigma^2+1+2h^2}{2\sigma},$$

d'où

$$n^2\sigma^2-1-2h^2=\sigma^2+n^2(h^2-1)>0.$$

Donc

$$\frac{D(F_1,\ F_4)}{D(u_3,\ u_7)}<0;$$

nous devons supprimer les relations de périodicité relatives à u_3 et u_7 ; il nous reste six conditions pour les huit inconnues α_j et δ; nous pouvons déterminer α_1, α_2, α_5, α_6, α_7 sous la forme

$$\alpha_j=\varepsilon K_j(\alpha_3,\ \alpha_8,\ \delta,\ \varepsilon)\qquad (j=1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7)$$

et nous obtenons une relation

$$(K+\alpha_3)\left[e^{-2i\pi\delta}-1\right]+\varepsilon^2\Phi'=0.$$

Φ' contenant des termes du deuxième degré en $K + \alpha_3$; nous ne pourrons faire $\delta \equiv o$, mais nous pourrons au contraire tirer de cette équation

$$\delta = \varepsilon^2 S(\alpha_7, \alpha_8, \varepsilon)$$

et le paramètre α_3 pourra être incorporé à K ; de plus, la solution initiale de Lagrange, dépendant, dans son plan, d'une arbitraire, nous pourrons imposer une condition supplémentaire aux α_j : par exemple $\alpha_8 = o$.

Nous pouvons aussi prendre les α_j de telle sorte que la solution obtenue soit symétrique par rapport à Ox ; en effet, si nous posons

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \alpha_3 = \alpha_4, \qquad \alpha_5 = \alpha_6, \qquad \alpha_8 = o,$$

et si nous écrivons qu'au bout d'une demi-période l'orbite coupe perpendiculairement Ox, nous obtenons les conditions

$$\begin{aligned}
u_1 - u_2 &= \alpha_1 \left[e^{i(1+\delta)\frac{\pi}{\sigma}} - e^{-i(1+\delta)\frac{\pi}{\sigma}} \right] + \varepsilon \Phi'_1 = o, \\
u_3 - u_4 &= (K + \alpha_3) \left[e^{i\pi\delta} - e^{-i\pi\delta} \right] + \varepsilon \Phi'_3 = o, \\
u_5 - u_6 &= \alpha_5 \left[e^{(1+\delta)\pi\frac{\rho}{\sigma}} - e^{-(1+\delta)\pi\frac{\rho}{\sigma}} \right] + \varepsilon \Phi'_5 = o, \\
u_8 &= \alpha_7 (1 + \delta) \frac{\pi}{\sigma} + \varepsilon \Phi'_8 = o.
\end{aligned}$$

En incorporant α_3 à K, nous avons quatre équations résolubles par rapport à α_1, α_5, α_7 et δ.

44. La construction de ces orbites se présente d'une façon tout à fait analogue à celle des orbites B du problème restreint. Les termes indépendants de ε nous sont connus :

$$u_{j0} = o \qquad (j = 1, 2, 5, 6, 7, 8),$$
$$u_{30} = K e^{i\sigma\tau}, \qquad u_{40} = K e^{-i\sigma\tau} \qquad (K \text{ réel});$$

d'où

$$x_1 = m_2 m_3 (a_2 - a_3) K \cos\sigma\tau,$$
$$y_1 = n . m_2 m_3 (a_2 - a_3) K \sin\sigma\tau,$$

et deux groupes analogues.

Étudions les termes en ε ; les équations du mouvement en x, y ne changent pas par la transformation

$$x = x', \qquad y = -y', \qquad \tau = -\tau' ;$$

il en résulte qu'elles ne changent pas, par l'une des transformations :

a. u_1 en u_2, u_3 en u_4, u_5 en u_6 et vice versa, u_8 en $-u_8$, τ en $-\tau$ (u_7 et i restant inchangés);

b. u_5 en u_6 et vice versa, u_7 en $-u_7$, i en $-i$, τ en $-\tau$ (u_1, u_2, u_3, u_4, u_8 restant inchangés).

Considérons Q_{11} et Q_{21} : ce sont deux polynomes homogènes et du second degré aux u_{j0}; les coefficients des termes conjugués (u_{30}^2 et u_{40}^2, par exemple) sont conjugués; comme la transformation (a) intervertit les deux premières équations (31), nous pouvons conclure que Q_{11} et Q_{21} sont de la forme

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \quad A_{11}^{(0)} i + A_{11}^{(2)} i\, e^{2i\sigma\tau} + B_{11}^{(2)} i\, e^{-2i\sigma\tau}, \\ Q_{21} &= -A_{11}^{(0)} i - A_{11}^{(2)} i\, e^{-2i\sigma\tau} - B_{11}^{(2)} i\, e^{2i\sigma\tau}; \end{aligned}$$

nous aurions des résultats analogues pour Q_{31} et Q_{41}, Q_{51} et Q_{61}.

Précisons encore la forme de Q_{71} et Q_{81}; en utilisant les transformations a et b, nous trouvons

$$\begin{aligned} Q_{71} &= \qquad\qquad A_{71}(e^{2i\sigma\tau} + e^{-2i\sigma\tau}), \\ Q_{81} &= A_{81}^{(0)} i + A_{81}^{(2)} i[e^{2i\sigma\tau} + e^{-2i\sigma\tau}]. \end{aligned}$$

En imposant la condition que les u_{j1} soient périodiques, de période $\frac{2\pi}{\sigma}$, nous obtenons la solution sous la forme

$$\begin{aligned} u_{11} &= \qquad\qquad a_{11}^{(0)} + a_{11}^{(2)} e^{2i\sigma\tau} + b_{11}^{(2)} e^{-2i\sigma\tau}, \\ u_{21} &= \qquad\qquad a_{11}^{(0)} + a_{11}^{(2)} e^{-2i\sigma\tau} + b_{11}^{(2)} e^{2i\sigma\tau}, \\ u_{31} &= K_{31} e^{i\sigma\tau} + a_{31}^{(0)} + a_{31}^{(2)} e^{2i\sigma\tau} + b_{31}^{(2)} e^{-2i\sigma\tau}, \\ u_{41} &= K_{41} e^{-i\sigma\tau} + a_{31}^{(0)} + a_{31}^{(2)} e^{-2i\sigma\tau} + b_{31}^{(2)} e^{2i\sigma\tau}, \\ u_{51} &= \qquad\qquad a_{51}^{(0)} + a_{51}^{(2)} e^{2i\sigma\tau} + b_{51}^{(2)} e^{2i\sigma\tau}, \\ u_{61} &= \qquad\qquad a_{51}^{(0)} + a_{51}^{(2)} e^{-2i\sigma\tau} + b_{51}^{(2)} e^{-2i\sigma\tau}, \\ u_{71} &= a_{71}^{(0)} i + a_{71}^{(2)} i[e^{2i\sigma\tau} + e^{-2i\sigma\tau}], \\ u_{81} &= K_{81} \;\; + b_{81}^{(2)} \;[e^{2i\sigma\tau} - e^{-2i\sigma\tau}], \end{aligned}$$

les a_{jk} et b_{jk} étant des constantes réelles.

Il nous reste à déterminer K_{31}, K_{41} et K_{81} : nous imposerons aux u_{j1} les conditions qui expriment que les mobiles coupent orthogonalement pour $t = 0$

$$u_8 = 0, \qquad u_3 = u_4, \qquad \text{d'où} \qquad K_{81} = 0, \qquad K_{31} = K_{41};$$

nous achèverons de déterminer K_{31} en posant par exemple $x_{11} = 0$. Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} x_{j1} &= C_{j1}^{(0)} + C_{j1}^{(1)} \cos\sigma\tau + C_{j1}^{(2)} \cos 2\sigma\tau, \\ y_{j1} &= \qquad\quad D_{j1}^{(1)} \sin\sigma\tau + D_{j1}^{(2)} \sin 2\sigma\tau. \end{aligned}$$

Supposons que jusqu'à ε^{n-1} nous ayons développé la solution jouissant des propriétés suivantes :

Les x_{jk} sont des sommes de cosinus de multiples de σt;

Les y_{jk} sont des sommes de sinus de multiples de σt, sans terme constant, le plus grand multiple étant $(k+1)\sigma t$.

Nous aurons, pour déterminer les termes en ε^n, les huit premières équations (35) : nous aurons, pour déterminer δ_n deux relations forcément compatibles, et conduisant à une valeur réelle; l'application des transformations a et b nous amènerait ensuite à conclure que la forme de la solution reste la même et que le processus peut se continuer indéfiniment.

45. *Orbites de période* 2π. — La solution génératrice est alors

$$\begin{array}{llll} u_1 = K\,e^{i\tau}, & u_2 = K\,e^{-i\tau}, & u_j = 0 & (j = 3, 4, \ldots, 8), \\ v_1 = -0, & v_2 = 0, & v_3 = v_4 = 0 & \end{array}$$

(K étant réel).

Partons alors des conditions initiales

$$\begin{array}{llll} u_1 = K + \alpha_1, & u_3 = K + \alpha_1, & u_j = \alpha_j & (j = 3, 4, \ldots, 8), \\ v_1 = \gamma_1, & v_2 = \gamma_2, & v_3 = \gamma_3, & v_4 = \gamma_4, \end{array}$$

en faisant $\alpha_2 = \alpha_1$, puisque le temps n'entre pas explicitement dans les équations du mouvement.

Les relations de périodicité sont alors :

$$(37)\quad \left\{ \begin{array}{ll} (K+\alpha_1)[e^{-2i\pi\delta} - 1] + \varepsilon\,\Phi_2 = 0, & (K+\alpha_1)[e^{-2i\pi\delta} - 1] + \varepsilon\,\Phi_2 = 0. \\ \alpha_3[{}^{2i\pi(1+\delta)\sigma} - 1] + \varepsilon\,\Phi_3 = 0, & \alpha_4[e^{-2i\pi(1+\delta)\sigma} - 1] + \varepsilon\,\Phi_4 = 0, \\ \alpha_5[e^{2\pi p(1+\delta)} - 1] + \varepsilon\,\Phi_5 = 0, & \alpha_6[e^{-2\pi p(1+\delta)} - 1] + \varepsilon\,\Phi_6 = 0, \\ \varepsilon\,\Phi_7 = 0, & \alpha_7(1+\delta)2\pi + \varepsilon\,\Phi_8 = 0, \\ \gamma^2[e^{2i\pi\delta} - 1] + \varepsilon\,\Psi_1 = 0, & \gamma_2[e^{-2i\pi\delta} - 1] + \varepsilon\,\Psi_2 = 0, \\ \gamma_3[e^{2i\pi h(1+\delta)} - 1] + \varepsilon\,\Psi_3 = 0, & \gamma_4[e^{-2i\pi h(1+\delta)} - 1] + \varepsilon\,\Psi_4 = 0. \end{array} \right.$$

Mais précisons la forme de Φ_j; revenons toujours aux équations (31) et étudions les Q_j; si nous appelons Δ le déterminant de la transformation (30), ou, plus exactement, si nous posons

$$\Delta = \frac{D\left(\xi_1, \dfrac{\xi'_1}{1+\delta}, \eta_1; \dfrac{\eta'_1}{1+\delta}, \xi_2, \dfrac{\xi'_2}{1+\delta}, \ldots, \dfrac{\eta'_3}{1+\delta}\right)}{D(u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, u_{12})},$$

nous avons

$$\begin{aligned}\Delta Q_j = {} & \Delta_{2j}[X_{12}+\varepsilon X_{13}+\ldots]+\Delta_{4j}[Y_{12}+\varepsilon Y_{13}+\ldots]+\Delta_{6j}[X_{22}+\varepsilon X_{23}+\ldots] \\ & +\Delta_{8j}[Y_{22}+\varepsilon Y_{23}+\ldots]+\Delta_{10j}[X_{32}+\varepsilon X_{33}+\ldots]+\Delta_{12j}[Y_{32}+\varepsilon Y_{33}+\ldots]\end{aligned}$$

(Δ_{hk} étant le mineur de Δ relatif à la ligne de rang h et à la colonne de rang k).

Considérons les fonctions u_1, u_2, u_7, u_8, v_1, v_2 (celles qui, dans les expressions de ξ_j, η_j, ζ_j, ont pour coefficient a_j) et cherchons dans Q_j les termes qui ne contiennent *que* ces fonctions, c'est-à-dire ceux qui introduiront dans les Φ_j les constantes non nulles K et L seules. Dans les X_{jk}, Y_{jk}, Z_{jk}, les termes qui ne dépendent que des fonctions ci-dessus auront des coefficients de la forme

$$\sum_i m_i p_{ij}(a_j - a_i),$$

et, en vertu des relations qui définissent l'équilibre relatif, ils sont de la forme $A a_j$.

Portons alors notre attention sur les colonnes de Δ qui proviennent de u_1, u_2, u_7, u_8; transcrivons explicitement leurs premières lignes :

$$\begin{vmatrix} a_1 & -3a_1 & \frac{2i}{3}a_1 & a_1 & \ldots \\ a_1 i & 3a_1 i & a_1 & 0 & \ldots \\ -3a_1 & a_1 & \frac{2i}{3}a_1 & -a_1 & \ldots \\ -3a_1 i & -a_1 i & -a_1 & 0 & \ldots \\ a_2 & -3a_2 & \frac{2i}{3}a_2 & a_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Si nous multiplions ces colonnes par 1, 3, $-6i$, 4, et si nous en faisons la somme, les seules lignes non nulles sont la deuxième, la sixième et la dixième, respectivement égales à $4a_1 i$, $4a_2 i$ et $4a_3 i$; de même les multiplicateurs 3, 1, $-6i$ et -4 ne laissent subsister que les lignes de rangs 4, 8, 12 avec les valeurs $-4a_1 i$, $-4a_2 i$, $-4a_3 i$; nous pouvons en conclure que Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 ne contiennent pas de termes formés uniquement avec u_1, u_2, u_7, u_8, v_1 et v_2; il en résulte que Φ_3, Φ_4, Φ_5, Φ_6 n'ont pas de termes indépendants de α_3, α_4, α_5, α_6, γ_3 et γ_4.

Nous pouvons de même constater que R_3 et R_4 [équations (33)] et par suite Ψ_3 et Ψ_4 jouissent des mêmes propriétés.

Finalement, nous voyons que les équations (7) donnent

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$$

et que, par suite de la structure des Q_j ($j = 3, 4, 5, 6$) et de R_3 et R_4,

$$u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = v_3 = v_4 = 0.$$

Il en résulte que

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad \ldots.$$

Les trois masses sont toujours alignées, les rapports de leurs distances restant constants et égaux à ceux de la solution circulaire de Lagrange qui nous a servi de point de départ, nous retrouvons les solutions elliptiques de Lagrange, et ce sont donc les seules solutions périodiques de période 2π.

Alors les deux dernières intégrales des aires donnent $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (car F_2 et F_3 sont homogènes et linéaires par rapport à ces quantités). De plus, K n'étant pas nul, la première intégrale des aires et l'intégrale des forces vives nous permettent de supprimer les conditions de périodicité relatives à u_7 et u_1, car pour $\varepsilon = \delta = \tau = \alpha_j = 0$

$$\frac{D(F_1, F_4)}{D(u_7, u_1)} = \frac{\partial F_4}{\partial u_1}$$

et

$$\frac{\partial F_4}{\partial u_1} = 4K(1+\delta)^2 \sum 3m_1 a_1^2 - 2m_1 m_2 p_{12}(a_1 - a_2)^2$$

$$= 4K(1+\delta)^2 \sum m_1 a_1^2 \neq 0.$$

nous ferons, comme toujours, $\alpha_8 = 0$ et il nous restera deux équations :

$$(K+\alpha_1)[e^{-2i\pi\delta} - 1] + \varepsilon[2\pi(K+\alpha_1)\alpha_7 + \ldots] + \varepsilon^2[12(K+\alpha_1)^3 i\pi + \ldots] + 0$$

$$2\pi\alpha_7 + \varepsilon[12(K+\alpha_1)^2 i\pi + \ldots] = 0.$$

La seconde détermine α_7 et la première donne alors $\delta = 0$; ce dernier résultat pouvait être prévu : la solution cherchée est périodique dans l'espace absolu et dans l'espace relatif; il faut donc que δ, fonction continue de ε, qui tend vers zéro avec lui, soit une fraction, quel que soit ε; elle doit donc être nulle. Enfin α_1 reste arbitraire et peut être incorporé à K.

Le développement de cette solutiou est celui, bien connu, de la solution du problème des deux corps :

$$x_j = a_j\,[\,1 - 2K\varepsilon\cos t - 2K^2\varepsilon^2(1-\cos 2t) - 3K^3\varepsilon^3(\cos t - \cos 3t) + \ldots],$$
$$y_j = a_j\left[\quad 4K\varepsilon\sin^1 + \quad K^2\varepsilon^2\sin 2t \qquad + \frac{K^3\varepsilon^3}{3}(7\sin 3t - 9\sin t) + \ldots\right],$$

ellipse de grand axe $2a_j$ et d'excentricité $e = K\varepsilon$.

46. *Cas de commensurabilité.* — Examinons rapidement les cas où les racines h, σ et 1 sont commensurables.

Supposons d'abord $h = \frac{p}{q}$ (p et q entiers) et partons de la solution (pour $\varepsilon = \delta = 0$) :

$$u_1 = K_1 e^{i\tau}, \qquad u_2 = K_2 e^{-i\tau}, \qquad u_j = 0 \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7, 8),$$
$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = -L_3 i\, e^{ih\tau}, \qquad v_4 = L_3 i\, e^{-ih\tau},$$

de période

$$2q\pi = \frac{2p\pi}{h},$$

les conditions initiales seront

$$K_1 + \alpha_1, \quad K_2 + \alpha_2, \quad \alpha_j\ (j = 3, 4, 5, 6, 7, 8),$$
$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad -(L_3 + \gamma_3)i, \quad (L_3 + \gamma_3)i.$$

Si L_3 n'est pas nul, nous pouvons supprimer les conditions de périodicité relatives à u_7 et v_3; celles qui restent sont de la forme

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l}
(K_1+\alpha_1)[e^{2i\pi q\delta} \quad -1] + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2\varphi_1 + \ldots,\\
(K_2+\alpha_2)[e^{-2i\pi q\delta} \quad -1] + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots,\\
\qquad \alpha_3[e^{2i\pi q\sigma(1+\delta)} - 1] + \varepsilon f_3 + \ldots,\\
\qquad \alpha_4[e^{-2i\pi q\sigma(1+\delta)} - 1] + \varepsilon f_4 + \ldots,\\
\qquad \alpha_5[e^{2\pi q\rho(1+\delta)} - 1] + \varepsilon f_5 + \ldots,\\
\qquad \alpha_6[e^{-2\pi q\rho(1+\delta)} - 1] + \varepsilon f_6 + \ldots,\\
\qquad \alpha_7(1+\delta)2\pi q \qquad + \varepsilon f_8 + \ldots,\\
(L_3+\gamma_3)[e^{-2i\pi p\delta} - 1] + \varepsilon\psi_4 + \varepsilon^2\varphi'_4 + \ldots,
\end{array}\right.$$

ainsi que les deux relations remplaçant les conditions relatives à v_1 et v_2.

Les f et ψ_4 sont du second degré par rapport aux conditions initiales; φ_1, φ_2 et φ'_4 du troisième degré. f_1 et f_2 ne contiennent pas L_3, et ne contiennent pas les K au second degré; f_3, f_4, f_5, f_6 ne contiennent pas de termes du second degré en $K_1 + \alpha_1$, $K_2 + \alpha_2$, α_7, α_8, γ_1, γ_2, mais en présentent en $(L_3+\gamma_3)^2$; f_8 contient des termes du second degré aux K, et $(L_3+\gamma_3)^2$; ψ_4 ne contient pas les K et ne contient pas $(L_3+\gamma_3)^2$; φ_1 et φ_2 contiennent des termes du troisième degré par rapport aux K, mais ne contiennent pas $(L_3+\gamma_3)^3$; φ'_4 ne contient pas de termes du troisième degré par rapport aux K, mais contient $(L_3+\gamma_3)^3$.

Nous ferons $\alpha_8=0$; α_3, α_4, α_5, α_6, α_7 sont développables sous forme de séries commençant par des termes du premier degré en δ et ε; en portant dans la dernière équation, nous obtenons

$$-2i\pi p\,\delta[L_3+\gamma_3+\varepsilon\ldots]+\varepsilon^2 S_4=0,$$

S_4 contenant des termes en $(L_3+\gamma_3)^3$ qui ne sont pas nuls; nous ne pouvons donc pas faire $\delta\equiv 0$; nous ferons $\gamma_3=0$ et nous aurons δ, commençant par un terme en ε^2; de plus $F_2=F_3=0$ nous donnent γ_1 et γ_2 commençant par des termes en ε.

Substituons ces résultats dans les deux premières équations : nous obtenons deux relations qui, après division par ε^2, contiennent des termes indépendants de $\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2$. Ces termes disparaissent si nous faisons $K_1=K_2=0$ et alors α_1 et α_2 sont déterminés : nous retrouvons les orbites (A) de période $\frac{2\pi}{h}$. Si les K ne sont pas nuls, il ne pourrait, peut-être, exister d'orbites périodiques que si les K et L_3 vérifiaient une condition dont les coefficients sont des fonctions compliquées des masses.

Si, au contraire, L_3 est nul, nous avons les solutions de Lagrange, sans, cependant, pouvoir affirmer que ce sont toujours les seules.

Supposons maintenant que $\sigma=\frac{p}{q}$, nous aurons (pour $\varepsilon=\delta=0$) la solution

$$\begin{array}{llll} u_1=K_1e^{i\tau}, & u_2=K_2e^{-i\tau}, & u_3=K_3e^{i\sigma\tau}, & u_4=K_3e^{-i\sigma\tau}, \\ v_1=0, & v_2=0, & u_j=0\quad(j=5,6,7,8), & v_3=v_3=0 \end{array}$$

de période

$$2q\pi=p\frac{2\pi}{\sigma}.$$

Si K_3 n'est pas nul, nous pouvons supprimer les conditions de périodicité en u_3 et u_7; nous ferons $\alpha_8=0$; nous aurons $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$; les orbites seront planes. Nous aurons ensuite α_5, α_6, α_7, débutant par des termes linéaires en ε et δ; nous ne pourrons faire $\delta\equiv 0$; nous ferons, au contraire, $\alpha_3=0$, et nous obtiendrons δ, commençant par des termes en ε^2;

en substituant ces résultats dans les deux premières équations, nous obtiendrons deux conditions qui seront vérifiées :

Si $K_1 = K_2 = 0$ et nous retombons sur les orbites (B) de période $\frac{2\pi}{\sigma}$; ou si $K_1 K_2 K_3$ vérifient une relation dont les coefficients sont des fonctions compliquées des masses.

Si au contraire, K_3 est nul, nous avons les orbites de Lagrange, sans, toutefois, pouvoir affirmer que ce sont toujours les seules.

Supposons encore que $h = \frac{p}{q}$, $\sigma = \frac{r}{q}$; nous aurons (pour $\varepsilon = \delta = 0$) la solution

$$\begin{array}{llll} u_1 = K_1 e^{i\tau}, & u_2 = K_2 e^{-i\tau}, & u_3 = K_3 e^{i\sigma\tau}, & u_4 = K_4 e^{-i\sigma\tau}, \\ v_1 = 0, & v_2 = 0, & v_3 = -L_3 i e^{ih\tau}, & v_4 = L_3 i e^{-ih\tau}, \end{array}$$

$$u_j = 0 \qquad (j = 5, 6, 7, 8)$$

de période

$$2\pi q = p\frac{2\pi}{h} = r\frac{2\pi}{\sigma}.$$

Nous sommes amenés à des conclusions analogues : existence des orbites déjà connues, sans pouvoir affirmer leur unicité.

Reste enfin le cas $\frac{h}{p} = \frac{\sigma}{q}$ (h et σ n'étant pas rationnels) pour $\varepsilon = \delta = 0$, nous avons la solution

$$\begin{array}{lll} u_3 = K_3 e^{i\sigma\tau}, & u_4 = K_3 e^{-i\sigma\tau}, & u_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), \\ v_1 = v_2 = 0, & v_3 = L_3 e^{ih\tau}, & v_4 = L_4 e^{-ih\tau} \end{array}$$

de période

$$T = q\frac{2\pi}{h} = p\frac{2\pi}{\sigma}.$$

Les relations $F_2 = F_3 = 0$ donneront γ_1 et γ_2 commençant par des termes en ε.

Si K_3 n'est pas nul, les intégrales premières permettent la suppression des conditions de périodicité relatives à u_3, u_7; celles qui restent sont de la forme

$$\alpha_1\left[e^{2i\pi(1+\delta)\frac{q}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_1=0,\qquad \alpha_2\left[e^{-2i\pi(1+\delta)\frac{q}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_2=0,$$

$$\alpha_5\left[e^{2\pi i(1+\delta)q\frac{\sigma}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_5=0,\qquad \alpha_6\left[e^{-2\pi i(1+\delta)q\frac{\sigma}{h}}-1\right]+\varepsilon\,\Phi_6=0,$$

$$\alpha_7[1+\delta]2\pi\frac{q}{h}\qquad+\varepsilon\,\Phi_7=0,\qquad (K_3+\alpha_3)\left[e^{-2i\pi\rho\delta}\qquad-1\right]+\varepsilon\,\Phi_3=0,$$

$$(L_3+\gamma_3)\left[e^{2i\pi q}\qquad-1\right]+\varepsilon\Psi_3=0,\qquad (L_4+\gamma_4)\left[e^{-2i\pi q}\qquad-1\right]+\varepsilon\Psi_4=0.$$

Les premières donnent α_1, α_2, α_5, α_6, α_7 commençant par des termes en ε et en δ, la sixième donne alors δ commençant par des termes en ε^2; en portant dans les deux dernières, nous obtenons deux relations qui ne sont pas satisfaites si nous faisons $\alpha_j=\gamma_i=\delta=\varepsilon=0$; mais elles le sont si nous faisons préalablement $L_3=L_4=0$, et nous retrouvons les orbites de période $\frac{2\pi}{\sigma}$; si L_3 et L_4 ne sont pas nuls nous avons, comme toujours, une relation entre K_3, L_3 et L_4, qui conduit aux mêmes conclusions.

Dans le cas $L_3\neq 0$, nous pouvons procéder différemment, supprimer les conditions en u_7 et v_3; alors, par le raisonnement habituel, nous retrouvons les orbites de période $\frac{2\pi}{h}$ en faisant $K_3=0$, où nous devons satisfaire à une relation entre K_3, L_3 et L_4.

En résumé, dans le cas des trois masses finies et alignées; nous sommes assurés qu'il existe, en plus des solutions elliptiques de Lagrange, deux classes d'orbites périodiques : les unes à trois dimensions qui généralisent les orbites (A) du problème restreint, les autres planes qui généralisent les orbites (B). Dans certains cas très particuliers, il pourrait peut-être exister des orbites plus compliquées, et nous saurions lever l'incertitude dans chaque problème numérique.

47. *Cas de n masses finies alignées.* — Ces conclusions peuvent être étendues au cas de n masses finies et alignées. Comme nous l'avons vu au Chapitre II, le problème de la première approximation dépend de la résolution de l'équation $\Delta(h^2)=0$.

Chaque corps, en plus des deux premiers, introduit une racine $-h^2$ (différente de 0 et de -1), mais nous avons vu que ces racines sont, en valeur absolue, supérieures à 1; le raisonnement que nous avons fait pour prouver que la racine $h^2=-1$ est simple nous permet aussi de montrer que les racines de l'équation $\Delta(h^2)$ sont, toutes, simples. La solution générale des équations en ζ (pour $\varepsilon = 0$) contiendra donc les fonctions v_1, v_2, v_5 et v_6 avec les mêmes coefficients, et en plus, $(n-2)$ couples du type (v_3, v_4); les coefficients de ceux-ci vérifient, en particulier, les relations

$$\sum m_i \lambda_i = 0, \qquad \sum m_i a_i \lambda_i = 0.$$

Les intégrales de translation du centre de gravité imposeront encore $v_5 = v_6 = 0$; les autres intégrales premières conserveront, par rapport aux v_j non nuls, la forme trouvée.

Chaque racine $-h_j^2$ (différente de 0 et de -1) fournira pour ξ et η un quadruplet de solutions; les exposants de ces solutions sont donnés par

$$g_j^4 - g_j^2(2-h^2) + (1-h^2)(1+2h^2),$$

cette équation en g_j^2 ayant une racine positive et une racine négative; les coefficients sont donnés par

$$\sum_i m_i A_{ij} = 0, \quad \sum_i m_i a_i A_{ij} = 0, \quad \sum_i m_i \lambda_{ik} A_{ij} = 0$$

et

$$\sum_i m_i B_{ij} = 0, \quad \sum_i m_i a_i B_{ij} = 0, \quad \sum_i m_i \lambda_{ik} A_{ij} = 0$$

(les λ_{ik} étant les coefficients des termes des ζ_i correspondant à $-h_k^2$, avec k différent de j); nous avons ainsi $(n-1)$ équations aux A_i et $(n-1)$ équations aux B_i, qui nous fourniront ces coefficients sous la forme

$$A_{ij} = \mu \Delta_{ij}, \qquad B_i = \nu \Delta_{ij},$$

les Δ_{ij} étant les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_n \\ m_1 a_1 & m_2 a_2 & m_3 a_3 & \dots & m_n a_n \\ m_1 \lambda_{12} & m_2 \lambda_{22} & m_3 \lambda_{32} & \dots & m_n \lambda_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ m_1 \lambda_{1n} & m_2 \lambda_{2n} & \dots\dots & \dots & m_n \lambda_{nn} \end{vmatrix};$$

μ et ν sont alors donnés par les équations compatibles :

$$\left[(g_j+1)^2 + \frac{h^2}{2}\right]\mu + \frac{3}{2} h_j^2 \nu = 0,$$
$$\frac{3}{2} h_j^2 \mu + \left[(g_j-1)^2 + \frac{h^2}{2}\right]\nu = 0.$$

Chaque racine $-h_j^2$ donnera un quadruplet du type (u_3, u_4, u_5, u_6), les coefficients internes du quadruplet ayant la même forme que dans le cas étudié et les coefficients externes (Δ_{ij}) vérifiant les relations

$$\sum_i m_i \Delta_{ij} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_i m_i a_i \Delta_{ij} = 0.$$

La solution générale des équations aux ξ et η (pour $\varepsilon = 0$) contiendra donc $u_1, u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}$ (avec les mêmes coefficients) et en plus $(n-2)$ quadruplets du type (u_3, u_4, u_5, u_6).

Les intégrales de translation du centre de gravité imposent encore

$$u_9 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = 0$$

et les autres intégrales premières conserveront par rapport aux u_j la forme trouvée dans le cas $n = 3$.

Il en résulte que tous les raisonnements précédents, qui ont été basés sur les propriétés ci-dessus, sont encore valables et conduisent aux mêmes conclusions :

La racine 1 (plus généralement ω) redonne les solutions elliptiques de Lagrange.

Chaque $-h_j^2$ donne une famille d'orbites A, à trois dimensions. Chaque racine positive g_j^2 donne une famille d'orbites B, planes.

Cas de trois corps, de masses finies, en triangle équilatéral.

48. Nous prendrons la solution de Lagrange sous la forme

$$x_1 = -\frac{1}{2}(2m_2 + m_3), \qquad x_2 = \frac{1}{2}(2m_1 + m_3), \qquad x_3 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2),$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_3, \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_3, \qquad y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 + m_2),$$

$$p_{12} = p_{23} = p_{13} = 1$$

et

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1 \qquad (\text{pour avoir } \omega^2 = 1).$$

Les équations du mouvement sont ici

$$
(39)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + 2\sqrt{-1}(1+\delta)\dfrac{d\xi_i}{d\tau} - (1+\delta)^2\left[\xi_i + \dfrac{1}{2}\sum_j \xi_j P_{ij} + \dfrac{3}{2}\sum_j \eta_j P'_{ij}\right] \\
\qquad = (1+\delta)^2[\varepsilon X_{i2} + \varepsilon^2 X_{i3} + \ldots], \\
\dfrac{d^2\eta_i}{d\tau^2} - 2\sqrt{-1}(1+\delta)\dfrac{d\eta_i}{d\tau} - (1+\delta)^2\left[\dfrac{3}{2}\sum_j \eta_j P''_{ij} + \eta_i + \dfrac{1}{2}\sum_j \eta_j P_{ij}\right] \\
\qquad = (1+\delta)^2[\varepsilon Y_{i2} + \varepsilon^2 Y_{i3} + \ldots], \\
\dfrac{d^2\zeta_i}{d\tau^2} + (1+\delta)\sum_j \zeta_j P_{ij} = (1+\delta)^2[\varepsilon Z_{i2} + \varepsilon^2 Z_{i3} + \ldots].
\end{cases}
$$

X_{in}, Y_{in}, Z_{in} sont des polynomes homogènes par rapport aux différences $\xi_i - \xi_j$, $\eta_i - \eta_j$, $\zeta_i - \zeta_j$, de degré $n+1$; dans X_{in} et Y_{in} les ζ entrent sous forme paire; dans Z_{in} ils entrent sous forme impaire.

Nous appellerons j et j^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité

$$
j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
$$

Pour $\varepsilon = 0$, nous pouvons écrire la solution générale des équations (39). Les équations aux ζ_j sont indépendantes des autres, nous prendrons leur solution générale sous la forme

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= a_1[L_1 e^{i\tau(1+\delta)} + L_2 e^{-i\tau(1+\delta)}] + b_1[L_3 e^{i\tau(1+\delta)} + L_4 e^{-i\tau(1+\delta)}] + L_5 + L_6\tau(1+\delta), \\
\zeta_2 &= a_2[L_1 e^{i\tau(1+\delta)} + L_2 e^{-i\delta(1+\delta)}] + b_2[L_3 e^{i\tau(1+\delta)} + L_4 e^{-i\tau(1+\delta)}] + L_5 + L_6\tau(1+\delta), \\
\zeta_3 &= a_3[L_1 e^{i\tau(1+\delta)} + L_2 e^{-i\tau(1+\delta)}] + b_3[L_3 e^{i\tau(1+\delta)} + L_4 e^{-i\tau(1+\delta)}] + L_5 + L_6\tau(1+\delta),
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -m_2 + m_3 j^2, & a_2 &= m_1 - m_3 j, & a_3 &= -m_1 j^2 + m_2 j, \\
b_1 &= -m_2 + m_3 j, & b_2 &= m_1 - m_3 j^2, & b_3 &= -m_1 j + m_2 j^2.
\end{aligned}
$$

Nous avons d'ailleurs les intégrales premières

$$
\sum m_k \zeta_k = 0, \qquad \sum m_k \frac{d\zeta_k}{d\tau} = 0,
$$

qui donnent

$$
L_5 = L_6 = 0.
$$

Nous ferons la transformation

$$
(40)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\zeta_1 = a_1(v_1 + v_2) + b_1(v_3 + v_4) + v_5 + v_6,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{d\zeta_1}{d\tau} = (1+\delta)[a_1 i(v_1 - v_2) + b_1 i(v_3 - v_4) + v_5],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}
\right.
$$

dont le déterminant n'est pas nul; et les équations aux ζ_j deviennent

$$
(41)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&v'_1 - i(1+\delta)v_1 = \varepsilon(1+\delta)R_1, &\quad& v'_2 + i(1+\delta)v_2 = \varepsilon(1+\delta)R_2,\\
&v'_3 - i(1+\delta)v_3 = \varepsilon(1+\delta)R_3, && v'_4 + i(1+\delta)v_4 = \varepsilon(1+\delta)R_4,\\
&v'_5 \qquad\qquad\quad\;\; = \varepsilon(1+\delta)R_5, && v'_6 - \;(1+\delta)v_6 = \varepsilon(1+\delta)R_6.
\end{aligned}
\right.
$$

Les intégrales premières ci-dessus s'écrivent $v_5 = v_6 = 0$; nous pourrons réduire les équations (41) aux quatre premières, en faisant dans leurs seconds membres $v_5 = v_6 = 0$.

Occupons-nous maintenant des équations aux ξ_k et η_k. Pour $\varepsilon = 0$, leur solution générale est donnée par le tableau suivant :

	ξ_1.	ξ_2.	ξ_3.	η_1.	η_2.	η_3.
$K_1\, e^{i(1+\delta)\tau}$	a_1	a_2	a_3	$-3\,b_1$	$-3\,b_2$	$-3\,b_3$
$K_2\, e^{-i(1+\delta)\tau}$	$-3\,a_1$	$-3\,a_2$	$-3\,a_3$	b_1	b_2	b_3
$K_3\, e^{i\sigma_1(1+\delta)\tau}$	$m_2 m_3 j^2(1+n_1 i)$	$m_3 m_1 j(1+n_1 i)$	$m_1 m_2(1+n_1 i)$	$m_2 m_3 j(1-n_1 i)$	$m_3 m_1 j^2(1-n_1 i)$	$m_1 m_2(1-n_1 i)$
$K_4\, e^{-i\sigma_1(1+\delta)\tau}$	$m_2 m_3 j^2(1+n_2 i)$	$m_3 m_1 j(1+n_2 i)$	$m_1 m_2(1+n_2 i)$	$m_2 m_3 j(1-n_2 i)$	$m_3 m_1 j^2(1-n_2 i)$	$m_1 m_2(1-n_2 i)$
$K_5\, e^{i\sigma_2(1+\delta)\tau}$	$m_2 m_3 j^2(1+n_3 i)$	$m_3 m_1 j(1+n_3 i)$	$m_1 m_2(1+n_3 i)$	$m_2 m_3 j(1-n_3 i)$	$m_3 m_1 j^2(1-n_3 i)$	$m_1 m_2(1-n_3 i)$
$K_6\, e^{-i\sigma_2(1+\delta)\tau}$	$m_2 m_3 j^2(1+n_4 i)$	$m_3 m_1 j(1+n_4 i)$	$m_1 m_2(1+n_4 i)$	$m_2 m_3 j(1-n_4 i)$	$m_3 m_1 j^2(1-n_4 i)$	$m_1 m_2(1-n_4 i)$
$K_7 + K_8(1+\delta)\tau$	a_1	a_2	a_3	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$
$K_8\,\dfrac{2i}{3}$	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
$K_9\, e^{-i(1+\delta)\tau}$	1	1	1	0	0	0
$K_{10}(1+\delta)\tau\, e^{-i(1+\delta)\tau}$ ...	1	1	1	0	0	0
$K_{11}\, e^{i(1+\delta)\tau}$	0	0	0	1	1	1
$K_{12}(1+\delta)\tau\, e^{i(1+\delta)\tau}$	0	0	0	1	1	1

avec les intégrales premières

$$\sum m_k \zeta_k = \sum m_k \frac{d\zeta_k}{d\tau} = \sum m_k \eta_k = \sum m_k \frac{d\eta_k}{d\tau} = 0,$$

qui imposent

$$K_9 = K_{10} = K_{11} = K_{12} = 0.$$

σ_1^2 et σ_2^2 sont les racines de l'équation

$$g^4 - g^2 + \frac{27}{4}(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) = 0.$$

Ces deux racines sont réelles et positives si

$$m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 < \frac{1}{27};$$

elles sont imaginaires conjuguées en cas contraire; dans le premier cas, nous avons deux couples de racines réelles opposées $\pm\sigma_1$ et $\pm\sigma_2$; dans le second cas, nous avons deux couples de racines imaginaires opposées. D'autre part,

$$\frac{1 - ni}{1 + ni} = \frac{(g+1)^2 + \frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}(m_1 j + m_2 j^2 + m_3)} = \frac{-\frac{3}{2}(m_1 j^2 + m_2 j + m_3)}{(g-1)^2 + \frac{1}{2}},$$

$$= \frac{8gi - 3\sqrt{3}(m_1 - m_2)}{4g^2 + 6 + 3(m_1 + m_2 - 2m_3)}.$$

Nous aurons n_1, n_2, n_3, n_4 en remplaçant g par σ_1, $-\sigma_1$, σ_2 et $-\sigma_2$.

Nous ferons le changement de variables :

$$
(42)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1 u_1 - 3 a_1 u_2 \\
&\quad + m_2 m_3 j^2 [(1 + n_1 i) u_3 + (1 + n_2 i) u_4 + (1 + n_3 i) u_5 + (1 + n_4 i) u_6] \\
&\quad + \frac{2i}{3} a_1 u_7 + a_1 u_8 + u_9 + u_{10}, \\
\xi_2 &= a_2 u_1 - 3 a_2 u_2 \\
&\quad + m_3 m_1 j [(1 + n_1 i) u_3 + (1 + n_2 i) u_4 + (1 + n_3 i) u_5 + (1 + n_4 i) u_6] \\
&\quad + \frac{2i}{3} a_2 u_7 + a_2 u_8 + u_9 + u_{10}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\eta_1 &= - 3 b_1 u_1 + b_1 u_2 \\
&\quad + m_2 m_3 j [(1 - n_1 i) u_3 + (1 - n_2 i) u_4 + (1 - n_3 i) u_5 + (1 - n_4 i) u_6] \\
&\quad \frac{2i}{3} b_1 u_7 - b_1 u_8 + u_{11} + u_{12}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{d\xi_1}{d\tau} &= (1 - \delta) \{ a_1 i u_1 + 3 a_1 i u_2 \\
&\qquad + m_2 m_3 j^2 [(1 + n_1 i) \sigma_1 i u_3 - (1 + n_2 i) \sigma_1 i u_4 \\
&\qquad\quad + (1 + n_3 i) \sigma_2 i u_5 - (1 + n_4 i) \sigma_2 i u_6] \\
&\qquad\qquad + a_1 u_7 + (1 - i) u_9 - i u_{10} \}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\frac{d\eta_1}{d\tau} &= (1 + \delta) \{ - 3 b_1 i u_1 - b_1 i u_2 \\
&\qquad + m_2 m_3 j [(1 - n_1 i) \sigma_1 i u_3 - (1 - n_2 i) \sigma_1 i u_4 \\
&\qquad\quad + (1 - n_3 i) \sigma_2 i u_5 - (1 - n_4 i) \sigma_2 i u_6] \\
&\qquad\qquad - b_1 u_7 + (1 + i) u_{11} + i u_{12} \}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Le déterminant de cette transformation, qui est celui d'un système fondamental de solutions d'un système linéaire, n'est pas nul.

Les équations aux ξ et η prennent la forme

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
&u'_1 - i(1+\delta)u_1 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_1,\\
&u'_2 + i(1+\delta)u_2 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_2,\\
&u'_3 - i\sigma_1(1+\delta)u_3 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_3,\\
&u'_4 + i\sigma_1(1+\delta)u_4 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_4,\\
&u'_5 - i\sigma_2(1+\delta)u_5 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_5,\\
&u'_6 + i\sigma_2(1+\delta)u_6 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_6,\\
&u'_7 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_7,\\
&u'_8 - (1+\delta)u_7 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_8,\\
&u'_9 + i(1+\delta)u_9 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_9,\\
&u'_{10} + i(1+\delta)u_{10} - (1+\delta)u_9 &&= \varepsilon(1+\delta)Q_{10},\\
&u'_{11} - i(1+\delta)u_{11} &&= \varepsilon(1+\delta)Q_{11},\\
&u'_{12} - i(1+\delta)u_{12} - (1+\delta)u_{11} &&= \varepsilon(1+\delta)Q_{12}.
\end{aligned}\right.$$

Les intégrales premières de translation du centre de gravité s'écrivent ici

$$u_9 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = 0$$

et le système (43) peut être réduit aux huit premières équations dans les seconds membres desquelles on fait $u_9 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = 0$.

Si nous posons

$$\begin{aligned}
\Phi_1 = {} & \sum m_k a_k b_k + \varepsilon \sum m_k\left[(b_k\xi_k + a_k\eta_k) + \frac{i}{2}\frac{(a_k\eta'_k - b_k\xi'_k)}{1+\delta}\right]\\
& \qquad + \varepsilon^2 \sum m_k\left[\xi_k\eta_k + \frac{i}{2}\frac{\xi_k\eta'_k - \eta_k\xi'_k}{1+\delta}\right]\\
= {} & \sum m_k a_k b_k + \varepsilon\frac{i}{3}u_7 \sum m_k a_k b_k + \varepsilon^2[\ldots],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2 = {} & \frac{\varepsilon}{2}\sum m_k\left[(a_k + b_k)\frac{\zeta'_k}{1+\delta} + (b_k - a_k)i\zeta_k\right]\\
& + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum m_k\left[i\zeta_k(\eta_k - \xi_k) + \frac{(\xi_k + \eta_k)\zeta'_k - (\xi'_k + \eta'_k)\zeta_k}{1+\delta}\right]\\
= {} & \varepsilon i\left[v_1 \sum m_k a_k b_k - v_2 \sum m_k a_k^2 + v_3 \sum m_k b_k^2 - v_4 \sum m_k a_k b_k\right] + \varepsilon^2[\ldots],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3 = {} & \frac{\varepsilon}{2}\sum m_k\left[(b_k - a_k)i\frac{\zeta'_k}{1+\delta} - (a_k + b_k)\zeta_k\right]\\
& + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum m_k\left[\frac{(\eta_k + \xi_k)\zeta'_k - (\eta'_k - \xi'_k)\zeta_k}{1+\delta}i - \zeta_k(\eta_k + \xi_k)\right]\\
= {} & -\varepsilon\left[v_1 \sum m_k a_k b_k + v_2 \sum m_k a_k^2 + v_3 \sum m_k b_k^2 + v_4 \sum m_k a_k b_k\right] + \varepsilon^2[\ldots],
\end{aligned}$$

les intégrales des aires s'écrivent :

$$\Phi_1 = C_1, \qquad \Phi_2 \sin t + \Phi_3 \cos t = C_2, \qquad -\Phi_2 \cos t + \Phi_3 \sin t = C_3,$$

la première est indépendante du temps. Des deux dernières on déduit que $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$, toutes les fois qu'on a une solution périodique dont la période n'est pas $2k\pi$ avec $\delta \equiv 0$; mais dans ce dernier cas, on peut substituer à la solution circulaire de Lagrange qui nous a servi de point de départ, celle dont le plan est perpendiculaire au moment de la quantité de mouvement, et l'on a encore

$$\Phi_2 = \Phi_3 = 0.$$

En définitive on a

$$\begin{aligned} F_1 &= u_\tau + \varepsilon[\ldots] = C'_1, \\ F_2 &= v_1 \sum m_k a_k b_k + v_3 \sum m_k b_k^2 \quad + \varepsilon[\ldots] = 0, \\ F_3 &= v_2 \sum m_k a_k^2 \quad + v_4 \sum m_k a_k b_k + \varepsilon[\ldots] = 0, \end{aligned}$$

En particulier, on doit avoir, pour $\tau = \varepsilon = 0$,

$$L_1 \sum m_k a_k b_k + L_3 \sum m_k b_k^2 = L_2 \sum m_k a_k^2 + L_4 \sum m_k a_k b_k = 0.$$

D'ailleurs, $\sum m_k a_k b_k$ n'est jamais nul; $\sum m_k a_k^2$ et $\sum m_k b_k^2$ ne peuvent s'annuler que si

$$m_1 = m_2 = m_3.$$

Mais, nous pouvons, sans changer les axes des coordonnées, remplacer notre solution circulaire de Lagrange par celle que l'on obtient en la faisant tourner dans son plan d'un angle φ [a_k devient alors $a_k e^{i\varphi}$ et b_k devient $b_k e^{-i\varphi}$]; nous avons donc

$$L_1 \sum m_k a_k b_k + L_3 e^{-2i\varphi} \sum m_k b_k^2 = L_2 e^{2i\varphi} \sum m_k a_k^2 + L_4 \sum m_k a_k b_k = 0$$

et, par suite,

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0;$$

mais alors, le même raisonnement appliqué aux relations $F_2 = F_3 = 0$ montre que

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0.$$

D'autre part, nous pourrons faire $K_\tau = 0$.

Enfin, nous transcrirons l'intégrale des forces vives :

$$
\begin{aligned}
F_4 = \sum m_k(\xi'_k\eta'_k + \zeta'^2_k) \\
-(1+\delta)^2 \Big\{ \sum m_k\xi_k\eta_k + \frac{1}{2}\sum m_k m_l p_{kl}(\xi_k-\xi_l)(\eta_k-\eta_l) \\
+\frac{3}{4}\sum m_k m_l p_{kl}\frac{b_k-b_l}{a_k-a_l}(\xi_k-\xi_l)^2 \\
+\frac{3}{4}\sum m_k m_l p_{kl}\frac{a_k-a_l}{b_k-b_l}(\eta_k-\eta_l)^2 \\
-\sum m_k m_l p_{kl}(\zeta_k-\zeta_l)^2 \Big\} + \varepsilon \ldots = C_4.
\end{aligned}
$$

Ici, d'ailleurs, les p_{kl} sont égaux à 1.

49. *Orbites de période* $\frac{2\pi}{\sigma_1}$. — Pour que de telles orbites existent, il faut que

$$\mu = m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 < \frac{1}{27}.$$

Alors, quand μ croît de 0 à $\frac{1}{27}$, l'une des racines de l'équation aux g^2 croît de 0 à $\frac{1}{2}$, et l'autre décroît de 1 à $\frac{1}{2}$. La plus petite peut être l'inverse d'un entier, et leur rapport peut être rationnel.

Nous supposerons d'abord que σ_1 et σ_2 sont irrationnels et incommensurables entre eux.

La solution génératrice sera

$$u_3 = K_3\, e^{i\sigma_1\tau}, \qquad u_4 = K_3\, e^{-i_1\sigma\tau}, \qquad u_k = 0 \quad (k = 1, 2, 5, 6, 7, 8).$$
$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0.$$

Nous partirons de conditions initiales voisines :

$$u_3 = K_3 + \alpha_3, \qquad u_4 = K_3 + \alpha_3, \qquad u_k = \alpha_k \quad (k = 1, 2, 5, 6, 7, 8),$$
$$v_k = \gamma_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

en faisant $\alpha_3 = \alpha_4$ puisque le temps n'entre pas explicitement dans les équations du mouvement.

Parmi les relations de périodicité, nous aurons

$$\gamma_1\left[e^{(i_1+\delta_1)\frac{2\pi}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\Psi_1 = 0, \qquad \gamma_2\left[e^{(-i_1+\delta_1)\frac{2\pi}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\Psi_2 = 0,$$
$$\gamma_3\left[e^{(i_1-\delta_1)\frac{2\pi}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\Psi_3 = 0, \qquad \gamma_4\left[e^{(-i_1+\delta_1)\frac{2\pi}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\Psi_4 = 0.$$

Ces quatre équations ont une solution unique en γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4, car pour $\delta = \varepsilon = 0$, leur déterminant fonctionnel par rapport à γ se réduit à

$$\left[e^{\frac{2i\pi}{\sigma_1}} - 1\right]^2 \left[e^{-\frac{2i\pi}{\sigma_1}} - 1\right]^2 \neq 0.$$

Or, ces équations admettent la solution $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ (car dans les seconds membres des équations du mouvement relatives aux ζ, ces ζ se trouvent en facteur). Les orbites étudiées, si elles existent, sont planes.

Mais alors il nous reste une intégrale des aires F_1 et l'intégrale des forces vives F_4; pour $\alpha_k = \delta = \varepsilon = \tau = 0$,

$$\frac{D(F_1, F_4)}{D(u_7, u_3)} = \frac{\partial F_1}{\partial u_7} \frac{\partial F_4}{\partial u_3}.$$

$\frac{\partial F_1}{\partial u_7}$ n'est pas nul; calculons $\frac{\partial F_4}{\partial u_3}$; nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_4}{\partial u_3} &= m_1 m_2 m_3 (1 + \delta)^2 K_3 \sum m_1 m_2 . 4\sigma_1^2 \left| 1 + n_1 n_2 - \frac{16}{4g^2 + 6 + 3(m_1 + m_2 - 2m_3)} \right| \\ &= m_1 m_2 m_3 (1 + \delta)^2 K_3 \sum m_1 m_2 . \frac{4\sigma_1^2 (2\sigma_1^2 - 1)}{4\sigma_1^2 + 9(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Cette quantité n'est pas nulle si $\sigma_1^2 \neq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si les racines de l'équation aux g^2 sont distinctes.

Nous pouvons donc supprimer les relations de périodicité relatives à u_3 et u_7 et il nous reste

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \left[e^{i(1+\delta)\frac{2\pi}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\Phi_1 = 0, & &\alpha_2 \left[e^{-i(1+\delta)\frac{2\pi}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\Phi_2 = 0, \\ &(K_3 + \alpha_3)\left[e^{-2i\pi\delta} - 1\right] + \varepsilon\Phi_4 = 0, & &\alpha_5 \left[e^{i(1+\delta)2\pi\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\Phi_5 = 0, \\ &\alpha_6 \left[e^{-i(1+\delta)2\pi\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} - 1\right] + \varepsilon\Phi_6 = 0, & &\alpha_7 (1 - \delta)\frac{2\pi}{\sigma_1} + \varepsilon\Phi_8 = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons en tirer α_1, α_2, α_5, α_6, α_7 sous forme de séries commençant par des termes en ε, puis δ, débutant en ε^2; il nous reste α_8 que nous pouvons faire nul, car la solution de Lagrange n'est définie qu'à une rotation près dans son plan, et α_3 que nous pouvons incorporer à K_3. Nous voyons d'ailleurs que si σ_1 est irrationnel et incommensurable avec σ_2, les orbites se ferment après une révolution.

La construction de ces orbites se présente toujours de la même façon :

nous partons de

$$u_{30}=\mathrm{K}\,e^{i\sigma_1\tau},\qquad u_{40}=\mathrm{K}\,e^{-i\sigma_1\tau}\qquad(\mathrm{K}\text{ réel}).$$
$$u_{k0}=0\qquad(k=1,\,2,\,5,\,6,\,7,\,8).$$

A chaque étape du calcul, nous imposerons aux u_{kn} d'être périodiques de période $\frac{2\pi}{\sigma_1}$; pour cela, nous devrons d'abord annuler les termes en $e^{i\sigma_1\tau}$ dans l'équation en u_3 et les termes en $e^{-i\sigma_1\tau}$ dans l'équation en u_4; nous obtiendrons ainsi deux équations en δ_n forcément compatibles, et donnant des valeurs réelles; après intégration, il nous restera, à chaque étape, trois constantes que nous déterminerons en imposant, par exemple, les conditions suivantes (pour $\tau=0$)

$$u_{8n}=0$$

(car u_8 définit seulement une rotation des solutions dans leur plan)

$$\frac{dx_3}{d\tau}=0,\qquad x_3=x_{30}.$$

Dans le cas où σ_1 et σ_2 seraient commensurables, en étant cependant tous les deux irrationnels, nous retrouverions les orbites précédentes, sans toutefois pouvoir affirmer que, dans certains cas très particuliers, elles soient les seules.

50. *Orbites de période* 2π. — La solution génératrice sera

$$u_1=\mathrm{K}\,e^{i\tau},\qquad u_2=\mathrm{K}\,e^{-i\tau},\qquad u_k=0\quad(k=3,\,4,\,5,\,6,\,7,\,8),$$
$$v_1=0,\qquad v_2=0,\qquad v_3=0,\qquad v_4=0.$$

Ici, pour $\alpha_k=\gamma_k=\varepsilon=\tau=0$,

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1,\,\mathrm{F}_4)}{\mathrm{D}(u_7,\,u_1)}=\frac{\partial\mathrm{F}_4}{\partial u_1}=4(1+\delta)\,\mathrm{K}\sum m_1m_2\neq 0.$$

Nous pouvons supprimer les conditions de périodicité relatives à u_1 et u_7, faire $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$, et il nous reste

$$(44)\qquad\left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{K}+\alpha_1)\,[e^{-2\pi i\delta}-1]+\varepsilon f_2+\varepsilon^2\varphi_2+\ldots=0,\\
&\alpha_3[e^{2i\pi\sigma_1(1+\delta)}-1]+\varepsilon f_3+\ldots\ldots\ldots=0,\\
&\alpha_4[e^{-2i\pi\sigma_1(2+\delta)}-1]+\varepsilon f_4+\ldots\ldots\ldots=0,\\
&\alpha_5[e^{2i\pi\sigma_2(1+\delta)}-1]+\varepsilon f_5+\ldots\ldots\ldots=0,\\
&\alpha_6[e^{-2i\pi\sigma_2(1+\delta)}-1]+\varepsilon f_6+\ldots\ldots\ldots=0,\\
&\alpha_7[(1+\delta)\,2\pi+\varepsilon f_8+\ldots\ldots\ldots=0.
\end{aligned}\right.$$

Si nous nous reportons aux équations (41) et (43), nous voyons, comme dans le cas des masses alignées, que Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 ne renferment pas de termes en u_1, u_2, u_7, u_8 seuls, mais en renferment en v_k seuls.

Les v_k étant nuls, nous avons

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0,$$

puis

$$u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0.$$

Les quantités $\xi_1 - \xi_2$, $\xi_2 - \xi_3$, ..., $\eta_3 - \eta_1$ seront proportionnelles à $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, ..., $b_3 - b_1$ et les masses resteront toujours en triangle équilatéral. Nous retrouvons les solutions elliptiques de Lagrange, et ce sont les seules solutions de période 2π.

Il nous reste finalement deux relations : une qui détermine α_7, et la première qui (α_1 étant incorporé à K) donne, comme il convient, $\delta = 0$.

Le développement de cette solution est, naturellement :

$$\left\{\begin{aligned} x_k &= \frac{a_k + b_k}{2} x - \frac{b_k - a_k}{2} i y, \\ y_k &= \frac{b_k - a_k}{2} i x + \frac{a_k + b_k}{2} y \end{aligned}\right.$$

avec

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2K\varepsilon\cos t - 2K^2\varepsilon^2(1 - \cos 2t) - 3K^3\varepsilon^3(\cos t - \cos 3t) + \ldots, \\ y &= \quad 4K\varepsilon\sin t + K^2\varepsilon^2\sin t \qquad + \frac{K^3\varepsilon^3}{3}(7\sin 3t - 9\sin t) + \ldots. \end{aligned}$$

Les cas de commensurabilité n'apportent encore, sauf peut-être dans des cas exceptionnels, aucune solution nouvelle.

En résumé, dans le cas de l'équilibre relatif de trois masses finies, en triangle équilatéral, il n'existe, en général, en dehors des solutions elliptiques de Lagrange, que deux classes d'orbites planes du type B, qui correspondent aux deux racines de l'équation en g^2 ; encore faut-il que

$$27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

51. *Cas général.* — Dans le cas de n masses finies non alignées, les résultats généraux précédents subsistent, bien que leur généralisation se fasse de façon beaucoup moins régulière que dans le cas où les masses sont en ligne droite.

Chaque corps, en plus du troisième, introduira une racine $-h_k^2$ qui donnera un couple de solutions en ζ dont les coefficients vérifient les relations

$$\sum m_i \lambda_{ik} = 0, \qquad \sum m_i a_i \lambda_{ik} = 0, \qquad \sum m_i b_i \lambda_{ik} = 0.$$

Il introduira aussi quatre racines en g, qui, ici, peuvent être réelles, imaginaires pures, ou complexes; mais les coefficients de toutes les solutions issues des racines g vérifieront les relations

$$\sum m_i A_i = 0, \qquad \sum m_i b_i A_i = 0,$$
$$\sum m_i B_i = 0, \qquad \sum m_i a_i B_i = 0.$$

Les intégrales premières conservent la forme que nous avons utilisée; il en sera de même des équations (41) et (43) ainsi que des conditions de périodicité.

Chaque racine simple $-h^2$ donnera une orbite du type A, et chaque racine réelle positive g^2 une orbite du type B; ce seront les seules, en dehors des solutions elliptiques de Lagrange, sauf peut-être dans certains cas très spéciaux.

Bibliographie.

BUCHANAN (H. E.). *Periodic Oscillations of three finite masses about the Lagrangian circular solutions* (*American Journal of Mathematics*, vol. XLV).

— *The Construction of certain periodic Orbits of the three body Problem* (*American Journal of Mathematics*, vol. XLVII).

Periodic Orbits of three finite masses about the equilateral triangle points (*American Journ. of Mathematics*, vol. L).

CHAPITRE V.

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES AUX POSITIONS D'ÉQUILIBRE RELATIF.

SOMMAIRE.

52. Problème restreint aligné. Existence des orbites. Construction. Propriétés générales. Premiers termes du développement.
53. Problème restreint non aligné.
54. Cas des trois masses finies alignées
55. Cas des n masses finies alignées.
56. Cas équilatéral des trois corps finis.
57. Cas général.

Nous avons utilisé, pour la construction des solutions périodiques :

— les racines de $\Delta(h^2)=0$, qui sont négatives et donnent des termes de la forme $\zeta=e^{ih\tau}$;

— les racines positives de $\Delta(g^2)=0$ qui donnent des termes de même forme en ξ et η.

Les racines négatives et les racines complexes de $\Delta(g^2)=0$ permettent la construction de solutions asymptotiques (dans le sens de Poincaré) aux positions d'équilibre relatif; c'est-à-dire de solutions développables suivant les puissances de quantités de la forme $e^{\alpha_j t}$, les α_j étant des constantes ayant leurs parties réelles *négatives*. De telles solutions tendent vers la position d'équilibre relatif quand t croît indéfiniment, par valeurs positives.

Si les α_j avaient leurs parties réelles *positives*, nous aurions des solutions analogues, tendant vers la position d'équilibre quand t croît indéfiniment, par valeurs négatives.

Problème restreint : cas des masses alignées.

52. Les racines en g sont ici : $-i\sigma$, $i\sigma$, $-\rho$ et ρ.

Remarquons d'abord que, quel que soit le cas considéré, problème restreint ou général, aligné ou non, les ζ_j ne peuvent tendre vers zéro quand t croît indéfiniment, que s'ils sont identiquement nuls. En effet, les termes ζ_{j0}, indépendants de ε, sont de la forme

$$c_j^0 \sin\sqrt{P}\,t + d_j^0 \cos\sqrt{P}\,t$$

et ne peuvent tendre vers zéro quand t croît à l'infini que si $c_j^0 = d_j^0 = 0$; d'où $\zeta_{j0} = 0$.

Mais à chaque étape du calcul, les équations qui donnent les ζ_{jn} contiennent en facteur, dans leurs seconds membres, les ζ_{jk} $(k < n)$ déjà déterminés; si nous supposons que tous ces ζ_{jk} sont nuls, nous serons amenés à annuler aussi les ζ_{jn}. En définitive $\zeta_j \equiv 0$; et les orbites asymptotiques étudiées, si elles existent, seront planes.

Nous ferons, de plus, dans toute cette étude, $\delta = 0$, ce paramètre n'ayant plus, ici, aucun intérêt.

Revenons au problème restreint (cas des masses alignées); à cause de la symétrie, déjà signalée des équations du mouvement, il nous suffira d'examiner le cas de la racine $-\rho\ (t \to +\infty)$.

Si nous posons $\theta = e^{-\rho t}$, les équations aux u_j [Chap. III, éq. (16)] deviennent :

$$(45)\quad \begin{cases} -\rho\theta\dfrac{du_1}{d\theta} - i\sigma u_1 = U_1, \\ -\rho\theta\dfrac{du_2}{d\theta} + i\sigma u_2 = U_2, \\ -\rho\theta\dfrac{du_3}{d\theta} + \rho u_3 = U_3, \\ -\rho\theta\dfrac{du_4}{d\theta} - \rho u_4 = U_4, \end{cases}$$

les U_j ne renfermant les u_j qu'au second degré au moins. Ces équations permettent de calculer de proche en proche les dérivées des u_j par rapport à θ, la seule dérivée qui reste arbitraire étant $\dfrac{du_3}{d\theta}$; d'ailleurs, le coefficient de $\dfrac{d^p u_1}{d\theta^p}$, dans l'équation qui la détermine, est $-\rho p - i\sigma$; de même celui de $\dfrac{d^p u_2}{d\theta^p}$ est $-\rho p + i\sigma$; celui de $\dfrac{d^p u_3}{d\theta^p}$, $-\rho p + \rho$ et celui de $\dfrac{d^p u_4}{d\theta^p}$, $-\rho p - \rho$. Les trois conditions posées, pour la validité du raisonnement, par M. Picard (*Traité d'Analyse*, Chap. I, § 11 et suivants; Chap. VIII, § 22) sont vérifiées : il existe donc une solution des équations (1), dépendant d'une constante arbitraire c $\left(\text{valeur de } \frac{du_3}{d\theta} \text{ pour } \theta = 0\right)$, s'annulant avec θ et dévoloppable suivant les puissances de $c\theta$; les u_j et par suite ξ et η, x' et y' s'exprimeront sous la forme de série de puissances de $ce^{-\rho t}$ et tendront vers zéro quand t augmentera indéfiniment.

Pour la construction de cette solution, nous pouvons procéder comme dans les Chapitres précédents; nous poserons

$$
\begin{aligned}
x &= a + x' = a + \varepsilon x'_0 + \ldots + \varepsilon^n x'_{n-1} + \ldots, \\
y &= \phantom{a + {}} y' \phantom{{} = a} \quad\; \varepsilon y'_0 + \ldots + \varepsilon^n y'_{n-1} + \ldots, \\
u_j &= \phantom{a + {}} u_{j0} \phantom{{} = a} + \varepsilon u_{j1} + \ldots + \varepsilon^n u_{jn} \phantom{{}_{-1}} + \ldots,
\end{aligned}
$$

et nous calculerons successivement les coefficients des diverses puissances de ε.

Les termes en ε seront :

$$u_{10} = u_{20} = u_{40} = 0, \qquad u_{30} = c\,e^{-\rho t},$$

d'où

$$x'_0 = c\,e^{-\rho t}, \qquad y'_0 = -\,mc\,e^{-\rho t}, \qquad m = \frac{\rho^2 - 1 - 2P}{2\rho}.$$

Les termes en ε^2 sont donnés par

$$
\begin{aligned}
&\frac{du_{11}}{dt} - i\sigma u_{11} = U_{11}, \qquad \frac{du_{21}}{dt} + i\sigma u_{21} = U_{21}, \\
&\frac{du_{31}}{dt} + \rho u_{31} = U_{31}, \qquad \frac{du_{41}}{dt} - \rho u_{41} = U_{41},
\end{aligned}
$$

les U_{j1} étant des polynomes homogènes et du second degré en ξ_0 et η_0, ou en x'_0 et y'_0; donc de la forme $C_{j2}c^2e^{-2\rho t}$. L'intégrale sera

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= K_1\,e^{i\sigma t} - \frac{C_{12}c^2}{2\rho + i\sigma}\,e^{-2\rho t}, \\
u_{21} &= K_2\,e^{-i\sigma t} - \frac{C_{22}c^2}{2\rho - i\sigma}\,e^{-2\rho t}, \\
u_{31} &= K_3\,e^{-\rho t} - \frac{C_{32}c^2}{\rho}\,e^{-2\rho t}. \\
u_{41} &= K_4\,e^{\rho t} - \frac{C_{42}c^2}{3\rho}\,e^{-2\rho t}.
\end{aligned}
$$

Pour que les u_{j1} tendent vers zéro quand $t \to +\infty$, il faut $K_1 = K_2 = K_4 = 0$.

Nous déterminerons ensuite K_3 par la condition $\frac{dx'_1}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire $\frac{du_3}{d\theta} = 0$, pour $\theta = 0$; d'où $K_3 = 0$. Nous aurons finalement

$$x'_1 = - c^2 D_2 e^{-2\rho t}, \qquad y'_1 = - c^2 E_2 e^{-2\rho t}.$$

Supposons alors que nous ayons déterminé les x'_k et y'_k $(k < n)$ et que ces quantités soient de la forme

$$x'_k = - c^{k+1} D_{k+1} e^{-(k+1)\rho t}, \qquad y'_k = - c^{k+1} E_{k+1} e^{-(k+1)\rho t}.$$

Les seconds membres des équations qui donnent les u_{jn} sont des polynomes en ξ_k et $\eta_k (k < n)$, ou en x'_k et y'_k, tels que, pour chacun de leurs termes, la somme du degré et du poids soit $n+1$; si nous augmentons chaque indice de 1, tous les termes sont isobares, de poids $n+1$, il en résulte que, après substitution des valeurs trouvées pour les x'_k et y'_k, les seconds membres des équations aux u_{jn} sont de la forme $c^{n+1} C_{j,n+1} e^{-(n+1)\rho t}$. L'intégration introduira quatre constantes arbitraires : trois seront annulées, si nous imposons aux u_{jn} de tendre vers zéro avec $\theta (t \to +\infty)$, la quatrième sera nulle aussi, si nous imposons la condition

$$\frac{dx'_n}{d\theta} = \frac{du_{3n}}{d\theta} = 0 \qquad \text{pour } \theta = 0.$$

Finalement nous obtenons :

$$x'_n = - c^{n+1} D_{n+1} e^{-(n+1)\rho t}, \qquad y'_n = - c^{n+1} E_{n+1} e^{-(n+1)\rho t},$$

D_{n+1} et E_{n+1} étant des constantes déterminées. Et nous pourrons continuer indéfiniment le calcul, car les diviseurs qu'introduit l'intégration sont justement :

$$(n+1)\rho \pm i\sigma, \quad n\rho \quad \text{et} \quad (n+2)\rho$$

et ne sont jamais nuls. Nous pouvons d'ailleurs remarquer que la constante arbitraire c rentrera finalement dans ε, car elle apparaîtra toujours par la combinaison (εc).

Nous obtiendrons pour les premiers termes les valeurs suivantes :

$$x = a + \varepsilon \quad e^{-\rho t} - \varepsilon^2 D_2 e^{-2\rho t} - \varepsilon^3 D_3 e^{-3\rho t} + \ldots,$$
$$y = \quad + \varepsilon m e^{-\rho t} - \varepsilon^2 E_2 e^{-2\rho t} - \varepsilon^3 E_3 e^{-3\rho t} + \ldots.$$

avec

$$D_2 = \left\{ \frac{3}{2}\,\frac{m^2-2}{m\sigma-n\rho}\left[-\frac{m\sigma}{4\rho^2+\sigma^2}+\frac{n}{3\rho}\right]+\frac{6m}{m\rho+n\sigma}\left[\frac{\rho}{4\rho^2+\sigma^2}-\frac{1}{3\rho}\right]\right\} A,$$

$$E_2 = \left\{ 3\,\frac{(m^2-2)mn}{m\sigma-n\rho}\left[\frac{\rho}{4\rho^2+\sigma^2}-\frac{1}{3\rho}\right]+\frac{3m}{m\rho-n\sigma}\left[\frac{n\sigma}{4\rho^2+\sigma^2}+\frac{m}{3\rho}\right]\right\} A.$$

$$\begin{aligned} D = {} & AD_2\left\{\frac{6}{m\sigma-n\rho}\left[\frac{-m\sigma}{9\rho^2+\sigma^2}+\frac{n}{4\rho}\right]-\frac{9m}{2(m\rho+n\sigma)}\left[\frac{\rho}{4\rho^2+\sigma^2}-\frac{1}{4\rho}\right]\right\} \\ & -AE_2\left\{\frac{3m}{m\sigma-n\rho}\left[\frac{-m\sigma}{9\rho^2+\sigma^2}+\frac{n}{4\rho}\right]+\frac{9}{2(m\rho+n\sigma)}\left[\frac{\rho}{4\rho^2+\sigma^2}-\frac{1}{4\rho}\right]\right\} \\ & C\left\{-\frac{2(3m^2-2)}{m\sigma-n\rho}\left[\frac{-m\sigma}{9\rho^2+\sigma^2}-\frac{n}{4\rho}\right]+\frac{9m(m^2-4)}{4(m\rho+n\sigma)}\left[\frac{\rho}{4\rho^2+\sigma^2}-\frac{1}{4\rho}\right]\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = {} & AD_2\left\{\frac{18mn}{m\sigma-n\rho}\left[\frac{\rho}{9\rho^2-\sigma^2}-\frac{1}{4\rho}\right]-\frac{3m}{m\rho+n\sigma}\left[\frac{n\sigma}{9\rho^2+\sigma^2}+\frac{m}{4\rho}\right]\right\} \\ & +AE_2\left\{\frac{9m^2n}{m\sigma-n\rho}\left[\frac{\rho}{9\rho^2+\sigma^2}-\frac{1}{4\rho}\right]+\frac{3}{m\rho+n\sigma}\left[\frac{n\sigma}{9\rho^2+\sigma^2}+\frac{m}{4\rho}\right]\right\} \\ & +C\left\{-\frac{6mn(3m^2-2)}{m\sigma-n\rho}\left[\frac{\rho}{9\rho^2+\sigma^2}-\frac{1}{4\rho}\right]+\frac{3m(m^2-4)}{2(m\rho+n\sigma)}\left[\frac{n\sigma}{9\rho^2+\sigma^2}-\frac{m}{4\rho}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Nous voyons d'ailleurs qu'un changement de valeur de ε revient à un changement dans l'origine des t; il n'y a de distincts que les orbites $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$, par exemple.

Pour $t = +\infty$ nous avons $\frac{dy}{dx} = -m$; or il est facile, en se rapportant à l'équation aux g^2, de vérifier que m est négatif : la première orbite tend vers la position d'équilibre dans le premier quadrant, la seconde dans le troisième.

D'autre part :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x-a}\right) = 2\rho(E_2 - mD_2)e^{-\rho t} + e^{-2\rho t}(\ldots) \quad \ldots.$$

pour t très grand, l'une des orbites est directe, l'autre rétrograde.

D'ailleurs

$$\frac{D_2}{A} = -\frac{(m^2-2)[4\rho^2-1+P]+8m\rho}{2\rho^2[4\rho^2+\sigma^2]} = -\frac{3m^2[\rho m+2]-6m\rho+4}{2\rho m[4\rho^2+\sigma^2]},$$

$$\frac{E_2}{A} = -\frac{(m^2-2)4\rho-2m[4\rho^2-1-2P]}{2\rho^2[4\rho^2+\sigma^2]} = \frac{4+3m\rho}{\rho[4\rho^2+\sigma^2]}.$$

or, quand P varie de 1 à $+\infty$,

$$m\rho = \frac{\rho^2 - 1 - 2P}{2} = \frac{-(4+3P)+\sqrt{9P^2-8P}}{4}$$

varie de $-\frac{3}{2}$ à $-\frac{4}{3}$; donc $\frac{E_2}{A} < 0$ et $m\frac{D_2}{A} < 0$; par suite $\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x-a}\right)$ a le signe de $-\varepsilon A$. En particulier, les orbites correspondant aux positions d'équilibre extérieures aux masses sont concaves vers l'origine O.

Nous avons étudié le cas de la racine $(-\rho)$; celui de la racine ρ s'en déduit sans difficulté. Le changement de t en $-t$ et de y en $-y$ ne modifie pas les équations du mouvement (z étant identiquement nul) : la solution développable suivant les puissances de $e^{\rho t}$ s'obtiendra, à partir des expressions en $e^{-\rho t}$, en changeant les signes de t et de y. Nous aurons deux nouvelles orbites, symétriques des précédentes par rapport à Ox, et sur lesquelles le mobile de masse nulle tend vers la position d'équilibre quand t tend vers $-\infty$.

Problème restreint (masses non alignées).

53. Ici, plusieurs cas sont possibles :

a. Les deux racines de l'équation aux g^2 sont positives : tous les exposants caractéristiques sont des imaginaires pures; il n'y a pas de solutions asymptotiques, au sens où nous l'entendons [ce cas se présente, en particulier, dans le problème restreint des trois corps quand $\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}$].

b. Les deux racines de l'équation aux g^2 sont, l'une positive et l'autre négative : deux des exposants caractéristiques sont des imaginaires pures opposées, les deux autres sont réels et opposés (ce cas se présente, par exemple, dans l'exemple étudié au paragraphe 27, Chapitre II, trois masses finies égales en triangle équilatéral, pour les positions d'équilibre relatif A et C). La preuve de l'existence des solutions asymptotiques et le développement de ces solutions se font, alors, comme dans le cas des masses alignées. Le mobile infinitésimal tend vers la position d'équilibre sur une trajectoire à tangente limite déterminée.

c. Les deux racines de l'équation aux g^2 sont complexes et conjuguées; les quatre exposants caractéristiques sont deux à deux conjugués, et deux à deux opposés. [Ce cas se présente, dans le problème restreint des trois corps quand $\mu(1-\mu) > \frac{1}{27}$, ou dans l'exemple étudié au paragraphe 27, Chapitre II, quand les trois masses finies égales sont alignées, ou quand elles sont en triangle équilatéral, pour les positions d'équilibre o et B.]

Nous allons examiner ce cas plus en détail. Les racines de l'équation aux g sont

$$\sigma_1 = \alpha + \beta i, \qquad -\sigma_1 = -\alpha - \beta i, \qquad \sigma_2 = \alpha - \beta i, \qquad -\sigma_2 = -\alpha + \beta i.$$

Posons $\theta = e^t$; les équations du mouvement, mises sous forme normale, s'écrivent alors :

$$(46) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \theta \dfrac{du_1}{d\theta} - (\alpha i - \beta) u_1 = \mathrm{U}_1, & \theta \dfrac{du_2}{d\theta} + (\alpha i - \beta) u_2 = \mathrm{U}_2, \\ \theta \dfrac{du_3}{d\theta} - (\alpha i + \beta) u_3 = \mathrm{U}_3, & \theta \dfrac{du_4}{d\theta} + (\alpha i + \beta) u_4 = \mathrm{U}_4. \end{array} \right.$$

Si nous posons encore

$$v_1 = \theta^{\alpha i - \beta}, \qquad v_2 = e^{-\alpha i - \beta},$$

et si nous considérons les u_j comme des fonctions de v_1 et de v_2, nous obtenons :

$$(47) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha i - \beta) v_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial v_1} + (-\alpha i - \beta) v_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial v_2} = (\quad \alpha i - \beta) u_1 + \mathrm{U}_1, \\ (\alpha i - \beta) v_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1} + (-\alpha i - \beta) v_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial v_2} = (-\alpha i + \beta) u_2 + \mathrm{U}_2, \\ (\alpha i - \beta) v_1 \dfrac{\partial u_3}{\partial v_1} + (-\alpha i - \beta) v_2 \dfrac{\partial u_3}{\partial v_2} = (\quad \alpha i + \beta) u_3 + \mathrm{U}_3, \\ (\alpha i - \beta) v_1 \dfrac{\partial u_4}{\partial v_1} + (-\alpha i - \beta) v_2 \dfrac{\partial u_4}{\partial v_2} = (-\alpha i - \beta) u_4 + \mathrm{U}_4; \end{array} \right.$$

ces équations permettent de calculer de proche en proche toutes les dérivées partielles des u_j par rapport à v_1 et v_2 (pour $v_1 = v_2 = 0$); il restera cependant deux arbitraires $\frac{\partial u_1}{\partial v_1}$ et $\frac{\partial u_4}{\partial v_2}$; le coefficient de $\frac{\partial^{m+n} u_j}{\partial v_1^m \partial v_2^n}$ dans l'équation qui la détermine sera :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } u_1, & (m-1)(\alpha i - \beta) + n(-\alpha i - \beta); \\ \text{pour } u_2, & (m+1)(\alpha i - \beta) + n(-\alpha i - \beta); \\ \text{pour } u_3, & m(\alpha i - \beta) + (n+1)(-\alpha i - \beta); \\ \text{pour } u_4, & m(\alpha i - \beta) + (n-1)(-\alpha i - \beta). \end{array}$$

Les trois conditions de M. Picard sont encore vérifiées : il existe des solutions des équations (47), dépendant de deux constantes arbitraires c_1 et c_2 $\left(\text{valeurs de } \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \text{ et } \frac{\partial u_4}{\partial v_2} \text{ pour } v_1 = v_2 = 0\right)$, s'annulant avec v_1 et v_2 et développables suivant les puissances de $c_1 v_1$ et $c_2 v_2$. Les u_j, les ξ et η, les x et y s'exprimeront sous forme de séries de puissances de $c_1 e^{(-\beta+\alpha i)t}$ et $c_2 e^{(-\beta+\alpha i)t}$, ils tendront vers zéro quand t augmentera indéfiniment.

Ces solutions se construiront par la méthode habituelle. Les termes en ε sont :

$$u_{10} = c_1 e^{(-\beta+\alpha i)t}, \qquad u_{40} = c_2 e^{(-\beta-\alpha i)t}, \qquad u_{20} = u_{30} = 0,$$
$$x'_0 = u_{10} + u_{40}, \qquad y'_0 = b_1 u_{10} + b_4 u_{40}$$

(b_1 et b_4 étant les constantes, imaginaires conjuguées définies au paragraphe 29, Chapitre III); pour que les orbites soient réelles, il faut que c_1 et c_2 soient eux-mêmes imaginaires conjuguées.

Les termes en ε^2 sont donnés par :

$$\frac{du_{11}}{dt} - \lambda_1 u_{11} = U_{11}, \qquad \frac{du_{21}}{dt} + \lambda_1 u_{21} = U_{21},$$
$$\frac{du_{31}}{dt} + \lambda_4 u_{31} = U_{31}, \qquad \frac{du_{41}}{dt} - \lambda_4 u_{41} = U_{41}$$
$$(\lambda_1 = i\sigma_1 = -\beta + \alpha i, \ \lambda_4 = -i\sigma_2 = -\beta - \alpha i);$$

les U_{j1} étant des polynomes homogènes et du second degré en ξ_0 et η_0, ou en x'_0 et y'_0, par conséquent en $c_1 v_1$ et $c_2 v_2$; ils seront de la forme

$$C_{j2}^{(0)} c_1^2 v_1^2 + C_{j2}^{(1)} c_1 c_2 v_1 v_2 + C_{j2}^{(2)} c_2^2 v_2^2.$$

L'intégrale générale sera :

$$u_{11} = K_1 e^{(-\beta+\alpha i)t} + \frac{C_{12}^{(0)}}{\lambda_1} c_1^2 v_1^2 + \frac{C_{12}^{(1)}}{\lambda_4} c_1 c_2 v_1 v_2 + \frac{C_{12}^{(2)}}{2\lambda_4 - \lambda_1} c_2^2 v_2^2,$$
$$u_{21} = K_2 e^{(\beta-\alpha i)t} + \frac{C_{22}^{(0)}}{3\lambda_1} c_1^2 v_1^2 + \frac{C_{22}^{(1)}}{2\lambda_1 + \lambda_4} c_1 c_2 v_1 v_2 + \frac{C_{22}^{(2)}}{2\lambda_4 + \lambda_1} c_2^2 v_2^2,$$
$$u_{31} = K_3 e^{(\beta+\alpha i)t} + \frac{C_{32}^{(0)}}{2\lambda_1 + \lambda_4} c_1^2 v_1^2 + \frac{C_{32}^{(1)}}{2\lambda_4 + \lambda_1} c_1 c_2 v_1 v_2 + \frac{C_{32}^{(2)}}{3\lambda_4} c_2^2 v_2^2,$$
$$u_{41} = K_4 e^{(-\beta-\alpha i)t} + \frac{C_{42}^{(0)}}{2\lambda_1 - \lambda_4} c_1^2 v_1^2 + \frac{C_{42}^{(1)}}{\lambda_1} c_1 c_2 v_1 v_2 + \frac{C_{42}^{(2)}}{\lambda_4} c_2^2 v_2^2.$$

Nous imposerons les conditions suivantes :

Les u_{j1} tendent vers zéro quand t augmente indéfiniment ; d'où

$$K_2 = K_3 = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial u_{11}}{\partial v_1}$ et $\frac{\partial u_{41}}{\partial v_2}$, c'est-à-dire $\frac{\partial x'_1}{\partial v_1}$ et $\frac{\partial x'_1}{\partial v_2}$ sont nulles pour $t = +\infty$; d'où $K_1 = K_4 = 0$.

Les u_{j1} sont des polynomes homogènes et du second degré en $c_1 v_1$ et $c_2 v_2$; il en est de même de

$$\begin{aligned} x'_1 &= \quad u_{11} + \quad u_{21} + \quad u_{31} + \quad u_{41}, \\ y'_1 &= b_1 u_{11} + b_2 u_{21} + b_3 u_{31} + b_4 u_{41}, \end{aligned}$$

d'ailleurs dans tout le calcul u_1 et u_4, u_2 et u_3 sont conjugués, ainsi que leurs coefficients; les résultats sont donc réels.

Supposons alors que nous ayons déterminé x'_k et y'_k $(k < n)$ et que ces quantités soient des polynomes homogènes de degré $(k+1)$ en $c_1 v_1$ et $c_2 v_2$, et cherchons à déterminer les u_{jn}; comme au paragraphe précédent, nous verrons que les U_{jn} sont des polynomes homogènes en $c_1 v_1$ et $c_2 v_2$ et de degré $(n+1)$. Nous annulerons deux des constantes arbitraires, introduites par l'intégration, en imposant aux u_{jn} d'être nuls pour $t = +\infty$; les deux autres seront annulées par la condition

$$\frac{\partial u_{1n}}{\partial v_1} = \frac{\partial u_{4n}}{\partial v_2} = 0,$$

pour $t = +\infty$. Les diviseurs qui s'introduisent dans l'intégration sont :

$$\begin{matrix} (n+2)\lambda_1, & (n+1)\lambda_1 + \lambda_4, & n\lambda_1 + 2\lambda_4, & \ldots, & (n+2)\lambda_4, \\ (n+1)\lambda_1 - \lambda_4, & n\lambda_1 & (n-1)\lambda_1 + \lambda_4, & \ldots, & (n+1)\lambda_4 - \lambda_1; \end{matrix}$$

ils ne sont pas nuls. Nous pourrons donc continuer indéfiniment le calcul.

Nous obtiendrons :

$$(48) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= X + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots + \varepsilon^n\varphi_n + \ldots, \\ y &= Y + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \ldots + \varepsilon^n\psi_n + \ldots, \end{aligned} \right.$$

X et Y étant les coordonnées de la position d'équilibre; φ_n et ψ_n des polynomes homogènes en $c_1 v_1$ et $c_2 c_2$, de degré n.

En définitive x et y s'expriment au moyen des variables

$$\varepsilon c_1 e^{(-\beta+\alpha i)t} \quad \text{et} \quad \varepsilon c_2 e^{(-\beta-\alpha i)t},$$

c_1 et c_2 étant conjugués

$$c_1 = p + iq, \qquad c_2 = p - iq.$$

Mais, par un changement de l'origine des temps $t = \tau + t_0$, nous pouvons rendre ces deux constantes réelles et égales; il suffit de prendre t_0 tel que

$$p \sin \alpha t_0 + q \cos \alpha t_0 = 0,$$

la valeur commune des deux constantes, après la transformation, étant

$$c = \sqrt{p^2 + q^2}\, e^{-\beta t_0}.$$

Mais alors la constante c s'associe à ε, dans la combinaison εc; dans la construction de la solution, nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, faire $c_1 = c_2 = 1$.

La solution a finalement la forme (48), les φ_n et ψ_n étant des polynomes homogènes en v_1, et v_2, de degré n, dont les coefficients sont entièrement déterminés. Nous obtenons une infinité d'orbites dépendant d'un paramètre ε.

Pour t très grand

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_1(-\beta + \alpha i)\, e^{\alpha i t} - b_4(\beta + \alpha i)\, e^{-\alpha i t}}{(-\beta + \alpha i)\, e^{\alpha i t} - (\beta + \alpha i)\, e^{-\alpha i t}} + \varepsilon\, e^{-\beta t} + \ldots;$$

les orbites s'enroulent en spirale autour de la position d'équilibre.

De plus

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{\alpha i(b_1 - b_4)}{2\cos^2 \alpha t} + \varepsilon\, e^{-\beta t} \ldots;$$

pour t très grand, cette quantité a le signe de $\alpha i(b_1 - b_4)$; en tenant compte de $\alpha^2 - \beta^2 = 1 - \frac{P}{2}$, elle est égale à

$$-\alpha\left[\frac{8(\alpha + \beta i) + 3(P' - P'')}{8 - 3(P' + P'') + 8\alpha\beta i} - \frac{8(-\alpha + \beta i) + 3(P' - P'')}{8 - 3(P' + P'') - 8\alpha\beta i}\right]$$
$$= -16\alpha^2 \frac{8\beta^2 - 3\beta i(P' - P'') + 8 - 3(P' + P'')}{[8 - 3(P' + P'')]^2 + 64\alpha^2\beta^2}$$

ou à

$$\alpha\left[\frac{8 + 3(P' + P'') + 8\alpha\beta i}{-8(\alpha + \beta i) + 3(P' - P'')} - \frac{8 + 3(P' + P'') - 8\alpha\beta i}{-8(-\alpha + \beta i) + 3(P' - P'')}\right]$$
$$= -16\alpha^2 \frac{8\beta^2 + 3\beta i(P' - P'') + 8 + 3(P' + P'')}{64\alpha^2 - [3(P' - P'') - 8\beta i]^2};$$

les deux quantités

$$8(\beta^2 + 1) \pm [3\beta i(P' - P'') + 3(P' + P'')]$$

ont donc le même signe, celui de leur somme $8(\beta^2 + 1)$; elles sont positives et $\alpha i(b_1 - b_4)$, négatif. Quel que soit ε, les orbites étudiées sont rétrogrades.

On étudierait de même les orbites asymptotiques pour $t = -\infty$ et développable suivant les puissances de $e^{(\beta + \alpha i)t}$ et $e^{(\beta - \alpha i)t}$. Mais nous pouvons remarquer que, si dans les équations (14) du Chapitre III nous changeons t en $-t$ et si en même temps nous intervertissons les a_j et les b_j de même indice, les équations en ξ et en η se trouvent interverties : x' reste donc le même, et y' est changé en $-y'$. Ayant les orbites asymptotiques pour $t=+\infty$, nous aurons les orbites asymptotiques pour $t=-\infty$, de la façon suivante : nous changerons t en $-t$; nous changerons le signe de tous les ψ_n; dans les coefficients des φ_n et ψ_n, nous intervertirons les α_j et b_j, c'est-à-dire les couples (P', P''), (A', A''), (B', B''), etc.

Donnons les résultats pour le problème restreint des trois corps $\left[\text{cas équilatéral, } \mu(1-\mu) > \frac{1}{27}\right]$ au voisinage de

$$X=\frac{1}{2}-\mu, \qquad \nu=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad t\to+\infty;$$

alors

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{27\mu(1-\mu)}+1}, \qquad \beta=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{27\mu(1-\mu)}-1},$$

$$b_j=\frac{8\sigma_j i-3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4\sigma_j^2+9},$$

$$\sigma_1=\alpha+\beta i, \qquad \sigma_2=-\alpha-\beta i, \qquad \sigma_3=\alpha-\beta i, \qquad \sigma_4=-\alpha+\beta i.$$

Nous aurons

$$x=\frac{1}{2}-\mu+\varepsilon e^{-\beta t}2\cos\alpha t+\varepsilon^2 e^{-2\beta t}[c_{10}+c_{12}\cos 2\alpha t+d_{12}\sin 2\alpha t]+\ldots,$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\varepsilon\, e^{-\beta t}[(b_1+b_4)\cos\alpha t+(b_1-b_4)i\sin\alpha t]$$
$$+\varepsilon^2 c^{-2\beta t}[c'_{10}+c'_{12}\cos 2\alpha t+d'_{12}\sin 2\alpha t]+\ldots;$$

$$c_{10}=\frac{[16\beta^2-9]C_{10}-[16\beta-3\sqrt{3}(1-2\mu)]D_{10}}{135\mu(1-\mu)-4-16\beta^2},$$

$$c'_{10}=\frac{[16\beta^2-9]D_{10}+[16\beta+3\sqrt{3}(1-2\mu)]C_{10}}{135\mu(1-\mu)-4-16\beta^2};$$

$$C_{10}=\frac{3}{8}[7(1-2\mu)+\sqrt{3}(b_1+b_4)-11(1-2\mu)b_1b_4],$$

$$D_{10}=-\frac{3}{8}[\sqrt{3}+11(1-2\mu)(b_1+b_4)+3\sqrt{3}\,b_1b_4];$$

$$c_{12} = -\frac{[72\mu(1-\mu)+3]C_{12} - \sqrt{3}[16\beta\sqrt{\mu(1-\mu)}+(1-2\mu)]D_{12} - 12\alpha\beta C'_{12} - 4\sqrt{3}\alpha[4\sqrt{\mu(1-\mu)}-\beta(1-2\mu)]D'_{12}}{108\mu(1-\mu)},$$

$$d_{12} = -\frac{[72\mu(1-\mu)+3]C'_{12} - \sqrt{3}[16\beta\sqrt{\mu(1-\mu)}+(1-2\mu)]D'_{12} + 12\alpha\beta C_{12} + 4\sqrt{3}\alpha[4\sqrt{\mu(1-\mu)}-\beta(1-2\mu)]D_{12}}{108\mu(1-\mu)},$$

$$c'_{12} = -\frac{[72\mu(1-\mu)+1]D_{12} + \sqrt{3}[16\beta\sqrt{\mu(1-\mu)}-(1-2\mu)]C_{12} - 4\alpha\beta D'_{12} + 4\sqrt{3}\alpha[4\sqrt{\mu(1-\mu)}+\beta(1-2\mu)]C'_{12}}{108\mu(1-\mu)},$$

$$d'_{12} = -\frac{[72\mu(1-\mu)+1]D'_{12} + \sqrt{3}[16\beta\sqrt{\mu(1-\mu)}-(1-2\mu)]C'_{12} + 4\alpha\beta D_{12} - 4\sqrt{3}\alpha[4\sqrt{\mu(1-\mu)}+\beta(1-2\mu)]C_{12}}{108\mu(1-\mu)};$$

$$C_{12} = \frac{3}{16}[14(1-2\mu) + 2\sqrt{3}(b_1+b_4) - 11(1-2\mu)(b_1^2+b_4^2)],$$

$$D_{12} = -\frac{3}{16}[2\sqrt{3} + 22(1-2\mu)(b_1+b_4) + 3\sqrt{3}(b_1^2+b_4^2)],$$

$$C'_{12} = \frac{3}{16}i(b_1-b_4)[2\sqrt{3} - 11(1-2\mu)(b_1+b_4)],$$

$$D'_{12} = -\frac{3}{16}i(b_1-b_4)[22(1-2\mu) + 3\sqrt{3}(b_1+b_4)].$$

La solution au voisinage de $X = \frac{1}{2} - \mu$, $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $t = \rightarrow -\infty$ s'obtiendra en changeant t en $-t$ et $\sqrt{3}$ en $-\sqrt{3}$.

Les solutions au voisinage de $X = \frac{1}{2} - \mu$, $Y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ s'obtiennent des précédentes en changeant $\sqrt{3}$ en $-\sqrt{3}$.

d. Les deux racines de l'équation aux g^2 sont négatives; les quatre exposants caractéristiques sont réels, deux à deux opposés (ce cas se présente, par exemple, dans le problème examiné au paragraphe 28, problème restreint des quatre corps avec deux masses finies égales, quand la position O s'approche du point Q où elle disparaît en s'unissant à A).

Les racines de l'équation aux g sont

$$i\rho_1, \quad -i\rho_1, \quad -i\rho_2, \quad i\rho_2.$$

En posant $\theta = e^t$, puis $v_1 = \theta^{-\rho_1}$ et $v_2 = \theta^{-\rho_2}$, les équations du mouvement deviennent :

$$(49) \quad \begin{cases} \rho_1 v_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial v_1} + \rho_2 v_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial v_2} = \rho_1 u_1 + U_1, \\ \rho_1 v_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1} + \rho_2 v_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial v_2} = -\rho_1 u_2 + U_2, \\ \rho_1 v_1 \dfrac{\partial u_3}{\partial v_1} + \rho_2 v_2 \dfrac{\partial u_3}{\partial v_2} = -\rho_2 u_3 + U_3, \\ \rho_1 v_1 \dfrac{\partial u_4}{\partial v_1} + \rho_2 v_2 \dfrac{\partial u_4}{\partial v_2} = \rho_2 u_4 + U_4, \end{cases}$$

Les diviseurs qui s'introduisent dans le calcul des dérivées $\frac{\partial^{m+n} u_j}{\partial v_1^m \partial v_2^n}$ sont

$$(m-1)\rho_1 + n\rho_2, \quad (m+1)\rho_1 + n\rho_2, \quad m\rho_1 + (n+1)\rho_2, \quad m\rho_1 + (n-1)\rho_2.$$

Les trois conditions de M. Picard sont vérifiées : il existe des solutions des équations (49), s'annulant avec v_1 et v_2, dépendant de deux constantes arbitraires c_1 et c_2 $\left(\text{valeurs pour } v_1 = v_2 = 0 \text{ de } \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \text{ et } \frac{\partial u_4}{\partial v_2}\right)$ et développables suivant les puissances de $c_1 v_1$ et $c_2 v_2$. Les u_j, ξ et η, x et y s'exprimeront sous forme de séries des puissances de $c_1 e^{-\rho_1 t}$ et $c_2 e^{-\rho_2 t}$; ils tendront vers zéro quand t augmentera indéfiniment.

Nous n'insisterons pas sur la construction de ces orbites qui se présente comme dans le cas précédent, avec

$$\lambda_1 = -\rho_1, \qquad \lambda_2 = \rho_1, \qquad \lambda_3 = \rho_2, \qquad \lambda_4 = -\rho_2.$$

Nous obtenons finalement :

$$x = X + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n + \ldots,$$
$$y = Y + \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n + \ldots,$$

φ_n et ψ_n étant des polynomes homogènes de degré n, en

$$\varepsilon c_1 e^{-\rho_1 t} \quad \text{et} \quad \varepsilon c_2 e^{-\rho_2 t}.$$

Supposons les notations telles que $\rho_1 < \rho_2$; par un changement de l'origine des temps, nous pourrons faire $\varepsilon c_1 = \pm 1$ et la solution ne contiendra qu'une constante arbitraire εc_2 ; d'ailleurs

$$\varphi_1 = c_1 \quad e^{-\rho_1 t} + c_2 \quad e^{-\rho_2 t},$$
$$\psi_1 = c_1 b_1 e^{-\rho_1} + c_2 b_2 e^{-\rho_2 t},$$

avec

$$b_k = \frac{-8\rho_k + 3i(P' - P'')}{-4\rho_k^2 + 2P + 4 - 3(P' + P'')},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1 b_1 \rho_1 e^{-\rho_1 t} + c_2 b_2 \rho_2 e^{-\rho_2 t} + \ldots}{c_1 \quad \rho_1 e^{-\rho_1 t} + c_2 \quad \rho_2 e^{-\rho_2 t} + \ldots}$$

quand $t \to \infty$, $\frac{dy}{dx} \to b_1$; les orbites tendent vers la position de Lagrange, avec une direction limite; nous avons deux séries d'orbites à un paramètre c_2 ($c_1 = +1$ et $c_1 = -1$) qui approchent de la position d'équilibre relatif dans des directions opposées. Mais ici, dans le numérateur de

$\frac{d}{dt}\left(\frac{y-\mathrm{Y}}{x-\mathrm{X}}\right)$, le terme prépondérant sera ou $e^{-(\rho_1+\rho_2)t}$, ou $e^{-3\rho_1 t}$ suivant que ρ_2 est inférieur ou supérieur à $2\rho_1$ et les deux cas sont possibles (*cf.* § 28).

Les orbites en $e^{\rho_1 t}$ et $e^{+\rho_2 t}$ se déduisent des précédents par le changement de t en $-t$ et de $(y-\mathrm{Y})$ en $-(y-\mathrm{Y})$.

Cas de trois masses finies alignées.

54. Dans ce cas, comme nous l'avons vu, les racines de l'équation aux g^2 qui doivent être prises en considération (après application des intégrales du centre de gravité) sont

$$1, \quad \sigma^2, \quad -\rho^2, \quad 0$$

et les équations du mouvement s'écrivent, en posant $\theta = e^{-\rho t}$:

$$\begin{aligned}
-\rho\theta\frac{du_1}{d\theta} - i\ \ u_1 &= \mathrm{U}_1, & -\rho\theta\frac{du_2}{d\theta} + i\ \ u_2 &= \mathrm{U}_2,\\
-\rho\theta\frac{du_3}{d\theta} - i\sigma u_3 &= \mathrm{U}_3, & -\rho\theta\frac{du_4}{d\theta} + i\sigma u_4 &= \mathrm{U}_4,\\
-\rho\theta\frac{du_5}{d\theta} - \ \rho u_5 &= \mathrm{U}_5, & -\rho\theta\frac{du_6}{d\theta} + \ \rho u_6 &= \mathrm{U}_6,\\
-\rho\theta\frac{du_7}{d\theta} \qquad &= \mathrm{U}_7, & -\rho\theta\frac{du_8}{d\theta} - \ \ u_7 &= \mathrm{U}_8.
\end{aligned}$$

Ces équations permettent de calculer toutes les dérivées des u_j par rapport à θ, sauf $\frac{du_6}{d\theta}$ qui reste arbitraire ; les coefficients de ces dérivées sont :

$$-n\rho \pm i, \quad -n\rho \pm i\sigma, \quad -(n+1)\rho, \quad -(n-1)\rho \quad \text{et} \quad -n\rho.$$

Les trois conditions de M. Picard sont remplies : il existe une solution développable suivant les puissances de θ, s'annulant avec θ et dépendant d'une constante arbitraire c $\left(\text{valeur pour } \theta = 0, \text{ de } \frac{du_6}{d\theta}\right)$; les u_j, les ξ_j et η_j, les x_j et y_j sont développables suivant les puissances de $ce^{-\rho t}$ et tendent vers zéro quand t augmente indéfiniment.

La construction de ces orbites se présente d'une façon tout à fait analogue à celle des orbites du problème restreint, quand les masses sont alignées, car la structure des U_j est la même dans les deux cas. Nous obtiendrons une solution de la forme

$$
(50) \quad \begin{cases}
x_1 = a_1 + \varepsilon m_2 m_3 (a_2 - a_3) e^{-\rho t} - \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n D_{1n} e^{-n\rho t}, \\
x_2 = a_1 + \varepsilon m_3 m_1 (a_3 - a_1) e^{-\rho t} - \sum \varepsilon^n D_{2n} e^{-n\rho t}, \\
x_3 = a_3 + \varepsilon m_1 m_2 (a_1 - a_2) e^{-\rho t} - \sum \varepsilon^n D_{3n} e^{-n\rho t}, \\
y_1 = \quad - \varepsilon m_2 m_3 (a_2 - a_3) l e^{-\rho t} - \sum \varepsilon^n E_{1n} e^{-n\rho t}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Il n'y a, en réalité que deux solutions distinctes ($\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, par exemple). Nous voyons d'ailleurs que, pour t très grand,

$$\frac{dy_1}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dx_2}, \quad \frac{dy_3}{dx_3}$$

sont voisins de $-l$ et tendent vers cette valeur quand t augmente indéfiniment; en se reportant à la définition de l, on vérifie qu'il est négatif; les masses tendent vers la figure d'équilibre, avec une direction limite commune. D'ailleurs

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_1}{x_1 - a_1}\right) = \frac{\varepsilon\rho}{m_2 m_3 (a_2 - a_3)} (E_{12} + l D_{12}) e^{-\rho t} + \ldots;$$

si, en l'un des points, a_1 par exemple, l'une des orbites arrive directe, l'autre arrive rétrograde.

La forme de la solution reconnue, le calcul des coefficients peut être effectué sur les équations en ξ et η. Nous avons les termes en ε :

$$
\begin{gathered}
\xi_{10} = m_2 m_3 (a_2 - a_3)(1 - li) e^{-\rho t}, \\
\eta_{10} = m_2 m_3 (a_2 - a_3)(1 + li) e^{-\rho t}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}
$$

puis, pour déterminer les coefficients des termes en ε^2,

$$\xi_{j1} = A_j e^{-2\rho t}, \qquad \eta_{j1} = B_j e^{-2\rho t},$$

les équations

$$
(51) \quad \begin{cases}
A_j [2i\rho + 1]^2 + \frac{1}{2} \sum_k A_k P_{jk} + \frac{3}{2} \sum B_k P_{jk} = \frac{3}{2} (l^2 - 2 - 2li) R_j, \\
B_j [2i\rho - 1]^2 + \frac{3}{2} \sum A_k P_{jk} + \frac{1}{2} \sum B_k P_{jk} = \frac{3}{2} (l^2 - 2 + 2li) R_j;
\end{cases}
$$

analogues aux équations (13) du Chapitre II, sauf remplacement de g par $2i\rho$, et existence de seconds membres :

$$R_1 = m_2 m_3 \left[m_3 a_3^2 \frac{p_{12}}{a_1 - a_2} + m_2 a_2^2 \frac{p_{13}}{a_1 - a_3} \right],$$

. . . .

Nous pouvons utiliser de même les racines $-h_j$ de l'équation $\Delta(h^2) = 0$ et leurs multiplicateurs λ_j; en multipliant les trois premières équations (51) par $m_j \lambda_j$, et en faisant la somme, et en traitant de même les trois dernières, nous obtenons :

$$(2i\rho + 1)^2 \sum m_1 A_1 = 0,$$

$$(2i\rho - 1)^2 \sum m_1 B_1 = 0;$$

$$\left[(2i\rho + 1)^2 + \frac{1}{2}\right] \sum m_1 a_1 A_1 + \frac{3}{2} \sum m_1 a_1 B_1 = \frac{3}{2}[l^2 - 2 - 2li] m_1 m_2 m_3 \sum m_3 a_3^2 p_{12},$$

$$\frac{3}{2} \sum m_1 a_1 A_1 + \left[(2i\rho - 1)^2 + \frac{1}{2}\right] \sum m_1 a_1 B_1 = \frac{3}{2}[l^2 - 2 + 2li] m_1 m_2 m_3 \sum m_3 a_3^2 p_{12},$$

$$\left[(2i\rho + 1)^2 + \frac{h^2}{2}\right] \sum (a_2 - a_3) A_1 + \frac{3}{2} h^2 \sum (a_2 - a_3) B_1$$
$$= -\frac{3}{2}[l^2 - 2 - 2li] \sum m_3^2 a_3^3 \frac{p_{12}}{a_1 - a_2},$$

$$\frac{3}{2} h^2 \sum (a_2 - a_3) A_1 + \left[(2i\rho - 1)^2 + \frac{h^2}{2}\right] \sum (a_2 - a_3) B_1$$
$$= -\frac{3}{2}[l^2 - 2 + 2li] \sum m_3^2 a_3^3 \frac{p_{12}}{a_1 - a_2}.$$

nous en tirons :

$$\sum m_1 A_1 = 0, \qquad \sum m_1 B_1 = 0;$$

$$\sum m_1 a_1 A_1 = \frac{-\rho[\rho(l^2 - 2) + 2l] - i[2\rho(l^2 - 2) + l(3 - 4\rho^2)]}{4\rho^2(4\rho^2 + 1)} 3 m_1 m_2 m_3 \sum m_3 a_3^2 p_{12} = S,$$

$$\sum m_1 a_1 B_1 = \frac{-\rho[\rho(l^2 - 2) + 2l] + i[2\rho(l^2 - 2) + l(3 - 4\rho^2)]}{4\rho^2(3\rho^2 + 1)} 3 m_1 m_2 m_3 \sum m_3 a_3^2 p_{12} = S';$$

$$\sum (a_2 - a_3) A_1$$
$$= \frac{[(l^2 - 2)(4\rho^2 - 1 + h^2) + 8l\rho] + i[4\rho(l^2 - 2) - 2l(4\rho^2 - 1 - 2h^2)]}{2\rho^2(4\rho^2 + \sigma^2)} \sum m_3^2 a_3^3 \frac{p_{12}}{a_1 - a_2} = T,$$

$$\sum (a_2 - a_3) B_1$$
$$= \frac{[(l^2 - 2)(4\rho^2 - 1 + h^2) + 8l\rho] - i[4\rho(l^2 - 2) - 2l(4\rho^2 - 1 - 2h^2)]}{2\rho^2(4\rho^2 + \sigma^2)} \sum m_3^2 a_3^2 \frac{p_{12}}{a_1 - a_2} = T',$$

puis

$$\sum m_1 a_1^2 . A_1 = a_1 S + m_2 m_3 (a_2 - a_2) T,$$

$$\sum m_1 a_1^2 . A_2 = a_2 S + m_3 m_1 (a_3 - a_1) T,$$

$$\sum m_1 a_1^2 . A_3 = a_3 S + m_1 m_2 (a_1 - a_2) T,$$

$$\sum m_1 a_1^2 . B_1 = a_1 S' + m_2 m_3 (a_2 - a_3) T'.$$

....

Les termes suivants se calculeraient de même.

La solution en $e^{-\rho t}$ ayant été calculée, nous pouvons en déduire la solution en $e^{\rho t}$: il suffira de changer t en $-t$ et y_j en $-y_j$ dans les expressions (50)

Cas de n masses finies alignées.

55. Les racines utiles de l'équation aux g^2 sont : 1, 0 et les $(n-2)$ couples σ_3^2 et $-\rho_3^2$, ..., σ_n^2 et $-\rho_n^2$.

Nous aurons des solutions développables suivant les puissances de

$$c_3 e^{-\rho_3 t}, \quad c_4 e^{-\rho_4 t}, \quad \ldots, \quad c_n e^{-\rho_n t},$$

car les diviseurs qui s'introduisent dans le calcul des dérivées successives des u_j par rapport aux variables $v_k = e^{-\rho_k t}$ ont les formes suivantes :

$$-\sum_{\nu=3}^{n} n_\nu \rho_\nu \pm i, \quad -\sum_{\nu=3}^{n} n_\nu \rho_\nu \pm i\sigma_j, \quad -\sum_{\nu=3}^{n} n_\nu \rho_\nu \quad \text{et} \quad -\sum_{\nu=3}^{n} n \ \rho_\nu \pm \rho_j,$$

et les conditions de M. Picard sont remplies. Il restera, comme arbitraires, les $(n-2)$ constantes c_n qui sont les valeurs pour les $v_k = 0$ des dérivées $\frac{du_j}{d\theta_k}$ provenant des équations en $-\rho_k$.

La construction habituelle, au moyen des équations aux u_j, conduira à la forme

$$(52) \qquad \begin{cases} x_j = a_j + \varepsilon\, \Phi_{j1} + \varepsilon^2\, \Phi_{jn} + \ldots, \\ y_j = \qquad \varepsilon \Psi_{j1} + \varepsilon^2 \Psi_{j2} + \ldots, \end{cases}$$

les Φ_{jn} et Ψ_{jn} étant des polynomes homogènes et de degré n par rapport aux quantités $c_k v_k = c_k e^{-\rho_k t}$; nous pouvons faire rentrer ε dans les c_k; alors, une de ces constantes fixe l'origine des temps, les $(n-3)$ autres déterminent géométriquement l'orbite.

Explicitons les Φ_{j1} et Ψ_{j1} :

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \Delta_{13}c_3\, e^{-\rho_3 t} + \Delta_{14}c_4\, e^{-\rho_4 t} + \ldots + \Delta_{1n}c_n\, e^{-\rho_n t},\\
\Phi_{21} &= \Delta_{23}c_3\, e^{-\rho_3 t} + \Delta_{24}c_4\, e^{-\rho_4 t} + \ldots + \Delta_{2n}c_n\, e^{-\rho_n t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Psi_{11} &= -\Delta_{13}c_3 l_3 e^{-\rho_3 t} - \Delta_{14}c_4 l_4 e^{-\rho_4 t} - \ldots - \Delta_{1n}c_n l_n e^{-\rho_n t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les Δ_{ij} étant les mineurs du déterminant du Chapitre IV et

$$\rho_k = \frac{\rho_k^2 - 1 - 2h_k^2}{2\rho_k}.$$

Nous avons

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\Delta_{13}c_3 l_1 e^{-\rho_3 t} + \Delta_{14}c_4\rho_4 l_1 e^{-\rho_4 t} + \ldots}{\Delta_{13}c_3\, e^{-\rho_3 t} + \Delta_{14}c_4\rho_4\, e^{-\rho_4 t} + \ldots}.$$

Supposons les notations telles que

$$\rho_3^2 < \rho_4^2 < \ldots < \rho_n^2;$$

alors quand $t \to +\infty$, $\frac{dy_1}{dx_1} \to -l_3$ et il en est de même de $\frac{dy_2}{dx_2}$ et $\frac{dy_3}{dx_3}$. Les masses tendent vers les positions de Lagrange avec des directions limites parallèles et indépendantes des c_k; d'ailleurs, pour t très grand, les termes prépondérants dans la solution (7) sont les termes en $e^{-\rho_3 t}$; d'après ce que nous avons vu ci-dessus, il suffit, pour avoir toutes les orbites de faire $\varepsilon c_3 = 1$ ou $\varepsilon c_3 = -1$, en laissant arbitraires les $\varepsilon c_k (k > 3)$; nous avons donc deux séries d'orbites, tendant vers les positions de Lagrange, des directions limites, fixes et opposées.

Mais ici, dans le numérateur de $\frac{d}{dt}\left(\frac{y_i}{x_i - a_i}\right)$, le terme prépondérant sera ou $e^{-(\rho_3+\rho_4)t}$ ou $e^{-3\rho_3 t}$ suivant que ρ_4 sera inférieur ou supérieur à $2\rho_3$. Or les deux cas sont possibles : il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à l'exemple du paragraphe 27 (Chap. II); la masse M_1 est nulle, et les valeurs de $-h^2$ sont : celle qui correspond aux trois masses finies égales, 2,4 et la valeur de P : 2,025 ou 13,048 suivant que l'on est en (a) ou en (b); les valeurs correspondantes de ρ^2 sont 2,919 et, suivant la position de M_1, 2,287 [en (a)] ou 24,387 [en (b)]. Pour les valeurs finies mais petites de m_1, le rapport des deux ρ^2 sera voisin de $\frac{2,919}{2,287}$ ou de $\frac{24,387}{2,919}$.

Si $\rho_4 > 2\rho_3$, les constantes $\varepsilon c_k (k > 3)$ n'influeront pas sur le sens de la courbure finale, qui sera le même pour toutes les orbites. Il n'en sera plus de même si $\rho_4 < 2\rho_3$, le sens de la courbure finale dépendra du signe de $\frac{c_4}{c_3}$.

Le calcul direct des coefficients des divers termes peut, ici aussi, se faire directement sur les équations en ξ et η, par la méthode indiquée au paragraphe précédent; les racines de l'équation aux g se groupent, en effet, en quadruplets analogues à celui qui apparaît dans le cas des trois masses alignées, et correspondant à chacune des racines de $\Delta(h^2) = 0$, autres que o et — 1.

Les orbites en $e^{\rho_k t}$ se déduisent encore des orbites en $e^{-\rho_k t}$ par le changement de t en $-t$ et de y_j en $-y_j$.

Cas équilatéral pour trois masses finies.

56. Pour qu'il puisse y avoir orbite asymptotique, il faut que

$$m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 > \frac{1}{27}$$

[ou, d'une façon plus générale, l'unité de masse n'étant plus telle que $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, il faut que

$$27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) > (m_1 + m_2 + m_3)^2.]$$

Les racines de l'équation aux g, qui doivent être considérées, sont

$$1, \quad -1, \quad \alpha + \beta i, \quad -\alpha - \beta i, \quad \alpha - \beta i, \quad -\alpha + \beta i, \quad 0 \quad \text{et} \quad 0.$$

Les diviseurs qui s'introduisent dans le calcul des dérivées successives des u_j par rapport aux variables $v_1 = e^{(-\beta+\alpha i)t}$ et $v_2 = e^{(-\beta-\alpha i)t}$ sont de la forme

$$\begin{array}{ll} m(\alpha i - \beta) + n(-\alpha i - \beta) \pm i, & m(\alpha i - \beta) + n(-\alpha i - \beta), \\ (m-1)(\alpha i - \beta) + n(-\alpha i - \beta), & (m+1)(\alpha i - \beta) + n(-\alpha i - \beta), \\ m(\alpha i - \beta) + (n+1)(-\alpha i - \beta), & m(\alpha i - \beta) + (n-1)(-\alpha i - \beta). \end{array}$$

Les trois conditions de M. Picard sont remplies, et nous aurons des solutions développables suivant les puissances de v_1 et v_2, s'annulant avec ces variables, et renfermant deux arbitraires c_1 et c_2, valeurs de $\frac{du_3}{dv_1}$ et $\frac{du_6}{dv_2}$ pour $v_1 = v_2 = 0$.

La construction, en partant des équations aux u_j, se poursuit comme dans le cas du problème restreint que nous avons étudié. Pour avoir une solution réelle, il faut prendre c_1 et c_2, conjugués ; par un changement de l'origine des temps, nous serons ramenés à une seule constante réelle, que nous incorporerons à ε ; la solution ne dépendra finalement que de la seule constante ε, et sera de la forme

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1 + \varepsilon m_2 m_3 j^2 [(1 + n_1 i) e^{(-\beta+\alpha i)t} + (1 + n_4 i) e^{(-\beta-\alpha i)t}] + \varepsilon^2 \Phi_{12} + \ldots, \\
\eta_1 &= b_1 + \varepsilon m_2 m_3 j \, [(1 - n_1 i) e^{(-\beta+\alpha i)t} + (1 - n_4 i) e^{(-\beta-\alpha i)t}] + \varepsilon^2 \Psi_{12} + \ldots, \\
\xi_2 &= a_2 + \varepsilon m_3 m_1 j \, [(1 + n_1 i) e^{(-\beta+\alpha i)t} + (1 + n_4 i) e^{(-\beta-\alpha i)t}] + \varepsilon^2 \Phi_{22} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les Φ_{jn} et Ψ_{jn} étant des polynomes homogènes en $e^{(-\beta+\alpha i)t}$, et $e^{(-\beta-\alpha i)t}$, de degré n.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx_1} &= i \frac{j\lambda - j^2\mu}{j\lambda + j^2\mu} + \ldots, \\
\frac{dy_2}{dx_2} &= i \frac{j^2\lambda - j\mu}{j^2\lambda + j\mu} + \ldots, \\
\frac{dy_3}{dx_3} &= i \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} + \ldots,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\lambda &= (1 - n_1 i)(-\beta + \alpha i) e^{\alpha i t} + (1 - n_4 i)(-\beta - \alpha i) e^{-\alpha i t}, \\
\mu &= (1 + n_1 i)(-\beta + \alpha i) e^{\alpha i t} + (1 + n_4 i)(-\beta - \alpha i) e^{-\alpha i t}.
\end{aligned}$$

Ces trois quantités ne tendent vers aucune limite : les masses tendent vers les positions de Lagrange, en tournant en spirale autour de chacune d'elles, les directions des vitesses faisant entre elles des angles qui tendent vers $\frac{2\pi}{3}$.

De plus,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_1 - b_1}{x_1 - a_1}\right) = \frac{8\alpha i (n_1 - n_4)}{[\sqrt{3}(n_1 e^{\alpha i t} + n_4 e^{-\alpha i t}) - (e^{\alpha i t} + e^{-\alpha i t})]^2} + \varepsilon e^{-\beta t} \ldots;$$

les deux autres quantités analogues ne diffèrent que par le dénominateur

$$[\sqrt{3}(n_1 e^{\alpha i t} + n_4 e^{-\alpha i t}) + (e^{\alpha i t} + e^{-\alpha i t})]^2$$

ou

$$4[e^{\alpha i t} + e^{-\alpha i t}]^2.$$

Les trois dénominateurs sont positifs ; il suffit d'avoir le signe de

$$i(n_1 - n_4)$$

qui est égal à

$$-16\alpha^2\frac{8\beta^2+3\sqrt{3}(m_1-m_2)\beta+9(m_1+m_2)-2}{[9(m_1+m_2)-2]^2+64\alpha^2\beta^2}$$
$$=-16\alpha^2\frac{8\beta^2-3\sqrt{3}(m_1-m_2)\beta+10-9(m_1+m_2)}{[3\sqrt{3}(m_1-m_2)-8\beta]^2+64\alpha^2};$$

les deux numérateurs ont le même signe, celui de leur somme $16\beta^2+8$; ils sont positifs et toutes les orbites sont rétrogrades.

La solution peut d'ailleurs être construite sur les équations aux ξ et η. Les termes en ε sont :

$$\xi_{10}=m_2m_3j^2\mathrm{X},\qquad \xi_{20}=m_3m_1j\ \mathrm{X},\qquad \xi_{30}=m_1m_2\mathrm{X},$$
$$\eta_{10}=m_2m_3j\ \mathrm{Y},\qquad \eta_{20}=m_3m_1j^2\mathrm{Y},\qquad \eta_{30}=m_1m_2\mathrm{Y},$$
$$\mathrm{X}=(1+n_1i)\,e^{(-\beta+\alpha i)t}+(1+n_4i)\,e^{-\beta-\alpha i)t},$$
$$\mathrm{Y}=(1-n_1i)\,e^{(-\beta+\alpha i)t}+(1-n_4i)\,e^{(-\beta+\alpha i)t}.$$

En ε^2, nous aurons des termes en $e^{(-2\beta+2\alpha i)t}$, en $e^{-2\beta t}$ et en $e^{(-2\beta-2\alpha i)t}$. Leurs coefficients seront donnés par les équations :

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}_k[2\sigma+1]^2+\frac{1}{2}\sum_l\mathrm{A}_l\mathrm{P}_{kl}+\frac{3}{2}\sum\mathrm{B}_l\mathrm{P}'_{kl}=\mathrm{X}_{k2},\\ &\mathrm{B}_k[2\sigma-1]^2+\frac{3}{2}\sum\mathrm{A}_l\mathrm{P}''_{kl}+\frac{1}{2}\sum\mathrm{B}_l\mathrm{P}_{kl}=\mathrm{Y}_{k2}.\end{aligned}\right.$$

Pour avoir les coefficients de $e^{(-2\beta+2\alpha i)t}$ nous ferons : $\sigma=\alpha+\beta i$, et, dans le second membre, nous réduirons : X^2 à $(1+n_1i)^2e^{(-2\beta+2\alpha i)t}$, XY à $(1+n_1^2)e^{(-2\beta+2\alpha i)t}$ et Y^2 à $(1-n_1i)^2e^{(-2\beta+2\alpha i)t'}$. De même pour les coefficients de $e^{(-2\beta-2\alpha i)t}$:

$$\sigma=-\alpha+\beta i,\qquad \mathrm{X}^2=(1+n_4i)^2\,e^{(-2\beta-2\alpha i)t},$$
$$\mathrm{XY}=(1+n_4^2)\,e^{(-2\beta-2\alpha i)t}\qquad\text{et}\qquad \mathrm{Y}^2=(1-n_4i)^2\,e^{(-2\beta-2\alpha i)t}$$

et pour celui de $e^{-2\beta t}$:

$$\sigma=\beta i,\qquad \mathrm{X}^2=2(1+n_1i)(1+n_4i)\,e^{-2\beta t},$$
$$\mathrm{XY}=[(1+n_1i)(1-n_4i)+(1-n_1i)(1+n_4i)]\,e^{-2\beta t},$$
$$\mathrm{Y}^2=2(1-n_1i)(1-n_4i)\,e^{-2\beta t}.$$

En multipliant les trois premières équations (53) par m_1, m_2, m_3 et en les ajoutant; et en traitant de même les trois dernières, nous obtenons :

$$\sum m_1\mathrm{A}_1=0,\qquad \sum m_1\mathrm{B}_1=0.$$

En multipliant les trois premières équations (53) par m_1b_1, m_2b_2, m_3b_3;

et les trois dernières par $m_1 a_1$, $m_2 a_2$, $m_3 a_3$, nous obtenons :

$$\left[(2\sigma+1)^2+\frac{1}{2}\right]\sum m_1 b_1 A_1+\frac{3}{2}\sum m_1 a_1 B_1=R_1,$$
$$\frac{3}{2}\sum m_1 b_1 A_1+\left[(2\sigma-1)^2+\frac{1}{2}\right]\sum m_1 a_1 B_1=R_2,$$

avec

$$R_1=-\sum m_1 m_2\left[\frac{3}{8}X^2(m_1 j^2+m_2 j+m_3)+\frac{15}{8}Y^2(m_1 j+m_2 j^2+m_3)\right],$$
$$R_2=-\sum m_1 m_2\left[\frac{15}{8}X^2(m_1 j^2+m_2 j+m_3)+\frac{3}{8}Y^2(m_1 j+m_2 j^2+m_3)\right],$$

d'où

$$\sum m_1 b_1 A_1=\frac{\left[(2\sigma-1)^2+\frac{1}{2}\right]R_1-\frac{3}{2}R_2}{4\sigma^2(4\sigma^2-1)}=\mathcal{A}_1,$$
$$\sum m_1 a_1 B_1=\frac{\left[(2\sigma+1)^2+\frac{1}{2}\right]R_1-\frac{3}{2}R_1}{4\sigma^2[4\sigma^2-1]}=\mathcal{B}_1.$$

Enfin, en multipliant les trois premières équations (53) par j, j^2 et 1, et les trois dernières par j^2, j et 1, nous obtenons :

$$\left[(2\sigma+1)^2+\frac{1}{2}\right][A_1 j+A_2 j^2+A_3]+\frac{3}{2}[m_1 j+m_2 j^2+m_3][B_1 j^2+B_2 j+B_3]=S_1,$$
$$\frac{3}{2}[m_1 j^2+m_2 j+m_3][A_1 j+A_2 j^2+A_3]+\left[(2\sigma-1)^2+\frac{1}{2}\right][B_1 j^2+B_2 j+B_3]=S_2,$$

avec

$$\begin{aligned}S_1=-\sum m_1 m_2\Big\{&\frac{3}{8}X^2[m_1^2 j\,(m_3-m_2)+m_2^2 j^2(m_1-m_3)+m_3^2(m_2-m_1)]\\&+\frac{3}{4}XY[m_1^2 j^2(m_3-m_2)+m_2^2 j\,(m_1-m_3)+m_3^2(m_2-m_1)]\\&+\frac{15}{8}Y^2[m_1^2\,(m_3-m_2)+m_2^2\,(m_1-m_3)+m_3^2(m_2-m_1)\\&\qquad+3m_1m_2m_3(j-j^2)]\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2=-\sum m_1 m_2\Big\{&\frac{15}{8}X^2[m_1^2\,(m_3-m_2)+m_2^2\,(m_1-m_3)+m_3^2(m_2-m_1))\\&\qquad+3m_1m_2m_3(j^2-j)]\\&+\frac{3}{4}XY[m_1^2 j\,(m_3-m_2)+m_2^2 j^2(m_1-m_3)+m_3^2(m_2-m_1)]\\&+\frac{3}{8}Y^2[m_1^2 j^2(m_3-m_2)+m_2^2 j\,(m_1-m_3)+m_3^2(m_2-m_1)]\Big\};\end{aligned}$$

d'où

$$A_1 j + A_2 j^2 + A_3 = \frac{\left[(2\sigma - 1)^2 + \frac{1}{2}\right] S_1 - \frac{3}{2}(m_1 j + m_2 j^2 + m_3) S_2}{D} = \mathcal{A}_2,$$

$$B_1 j^2 + B_2 j + B_3 = \frac{\left[(2\sigma + 1)^2 + \frac{1}{2}\right] S_2 - \frac{3}{2}(m_1 j^2 + m_2 j + m_3) S_1}{D} = \mathcal{B}_2,$$

$$D = 16\sigma_4 - 4\sigma^2 + \frac{27}{4} \sum m_1 m_2.$$

Si σ est une racine de l'équation aux g, $\alpha + \beta i$ ou $-\alpha + \beta i$,

$$D = 3\sigma^2(5\sigma^2 - 1);$$

si $\sigma = \beta i$,

$$D = \frac{1}{4}\left[135 \sum m_1 m_2 - 4 - 16\beta^2\right].$$

Finalement :

$$\sum m_1 m_2 . A_1 = a_1 \mathcal{A}_1 + m_2 m_3 j^2 \mathcal{A}_2,$$

$$\sum m_1 m_2 . A_2 = a_2 \mathcal{A}_1 + m_2 m_1 j \ \mathcal{A}_2,$$

$$\sum m_1 m_2 . A_3 = a_3 \mathcal{A}_1 + m_1 m_2 \ \mathcal{A}_2,$$

$$\sum m_1 m_2 . B_1 = b_1 \mathcal{B}_1 + m_2 m_3 j \ \mathcal{B}_2,$$

$$\sum m_1 m_2 . B_2 = b_2 \mathcal{B}_1 + m_3 m_1 j^2 \mathcal{B}_2,$$

$$\sum m_1 m_2 . B_3 = b_3 \mathcal{B}_1 + m_1 m_2 \ \mathcal{B}_2.$$

Les coefficients des termes suivants se calculeraient par la même méthode.

Quand nous aurons calculé la solution en $e^{(-\beta+\alpha i)t}$ et $e^{(-\beta-\alpha i)t}$ pour la configuration correspondant à

$$(I) \qquad y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_3, \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_3, \qquad y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 + m_2),$$

nous aurons évidemment la solution, développée suivant les mêmes variables pour la configuration :

$$\text{(II)} \qquad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} m_3, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} m_3, \qquad y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 + m_2),$$

en changeant dans les expressions trouvées $\sqrt{3}$ en $-\sqrt{3}$.

Nous pourrons encore obtenir la solution correspondant à (I) et développable en $e^{(\beta+\alpha i)t}$ et $e^{(\beta-\alpha i)t}$: nous changerons t en $-t$, nous changerons le signe de tous les Ψ_{kn}; et dans les coefficients de Φ_{kn} et Ψ_{kn}, nous intervertirons les a_k et les b_k de même indice, ce qui revient ici à changer $\sqrt{3}$ en $-\sqrt{3}$.

La solution asymptotique à II, pour $t = -\infty$, s'obtiendra de même.

Cas général : n masses finies non alignées.

57. La généralisation est ici beaucoup moins régulière que dans le cas où les masses sont alignées : de nombreux cas peuvent se présenter; cependant la structure générale des équations restant la même, nous pouvons affirmer que l'ensemble des racines de l'équation en g^2 qui sont négatives ou complexes conduira à des solutions asymptotiques, développables suivant les puissances de quantités de la forme $e^{-\sigma_k t}$ et $e^{(-\beta_l+\alpha_l i)t}$. Si le plus petit des nombres σ_k et β_l est un σ_k (réel), les orbites tendront vers la position de Lagrange avec une direction limite; si au contraire c'est un β_l, l'orbite tournera en spirale autour de cette même position.

Bibliographie.

WARREN (L. A. H.), *A class of asymptotic orbits in the problem of three Bodies* (*American Journal of Mathematics*, vol. XXXVIII).

BUCHANAN (Daniel), *Asymptotic satellites near the equilateral-triangle equilibrium points in the problem of three bodies* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XXII, n° 15).

— *Orbits asymptotic to the straight line equilibrium points in the problem of three finite bodies* (*Rendiconti del Circolo Matématico di Palermo*, t. XLV).

— *Asymptotic planetoïds* (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. XXIII).

STRÖMGREN (E.), *Ein asymptotischer Fall im der Dreikörper problem* (*A. N.*, 168).

Vu et approuvé :

Paris, le 23 avril 1932.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 23 avril 1932.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.