JEAN DIEUDONNÉ

Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1931

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1931__125__1_0>

N° D'ORDRE :
2186
Série A.
N° de Série 1317.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR JEAN **DIEUDONNÉ**

1re THÈSE. — RECHERCHES SUR QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS AUX POLYNOMES ET AUX FONCTIONS BORNÉES D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

2e THÈSE. — LES ÉQUATIONS DE DÉFINITION DES GROUPES CONTINUS (INFINIS) DE TRANSFORMATION.

Soutenues le devant la Commission d'examen.

MM. ÉMILE PICARD, *Président.*
VESSIOT, MONTEL *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1931

91806-31 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

A MES PARENTS

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES SUR QUELQUES PROBLEMES

RELATIFS

AUX POLYNOMES ET AUX FONCTIONS BORNÉES

D'UNE VARIABLE COMPLEXE

INTRODUCTION.

On sait que la théorie générale des fonctions analytiques d'une variable complexe s'est longtemps occupée presque exclusivement de la détermination des points singuliers d'une fonction et de l'étude de la fonction au voisinage d'un tel point. C'est seulement au début du siècle, sous l'influence des théorèmes de MM. Landau et Schottky, eux-mêmes issus de la théorie des fonctions entières, d'une part, de l'étude de la représentation conforme, d'autre part, que s'est développée la branche de la théorie qui s'occupe de rechercher les propriétés d'une fonction analytique dans les domaines où cette fonction est holomorphe ou méromorphe.

Les questions qui se présentent dans cette théorie peuvent se ranger en deux catégories, découlant respectivement des deux sources que nous venons de rappeler : d'une part, on étudie la répartition des points où la fonction prend une valeur déterminée; de l'autre, on recherche la nature des domaines engendrés par les valeurs de la fonction, en s'attachant en particulier à préciser les conditions auxquelles ces domaines ne se recouvrent pas eux-mêmes, ou recouvrent toute portion du plan au plus un nombre déterminé de fois. Quant aux hypothèses faites sur les fonctions étudiées, elles ont trait, en général, soit aux coefficients de leur développement autour d'un point du domaine considéré, soit à des limitations globales imposées aux fonctions dans ce domaine.

Ce travail est consacré à l'étude d'un certain nombre de questions, appartenant aux deux catégories précédentes, et relatives à deux familles particulières de fonctions, à savoir les polynomes et les fonctions bornées dans un domaine; dans toutes les questions traitées, je me suis attaché à donner des résultats quantitatifs aussi précis que possible.

Dans le premier Chapitre, je poursuis l'étude, commencée par M. P. Montel et poursuivie par M. M. Biernacki, de la détermination des limites supérieures des modules d'un certain nombre de zéros d'un polynome, lorsqu'on fixe le nombre des termes et certains coefficients. Ce Chapitre est divisé en deux parties : dans la première, j'indique un procédé général pour le calcul de ces limites, et j'applique ce procédé à la détermination exacte du plus petit cercle de centre origine contenant toujours un zéro, pour quelques types particuliers de polynomes. Dans d'autres cas, je donne simplement *l'ordre de croissance* de ces limites par rapport au degré du polynome; en particulier, pour le polynome le plus général

$$P(x) \equiv 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n,$$

où les p coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ont des valeurs *fixes*, les autres étant arbitraires, je détermine, dans tous les cas, l'ordre de croissance exact par rapport à n de la limite supérieure de la racine de plus petit module.

Dans la seconde partie de ce Chapitre, j'étudie en détail un cas particulier du même problème, à savoir, *la détermination du nombre minimum de racines de l'équation quadrinome*

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$$

situées dans le cercle unité lorsque, p, n_1 et n_2 étant fixés, a_1 et a_2 varient arbitrairement. J'emploie à cet effet une méthode déduite du « principe de l'argument » de Cauchy, qui me permet d'obtenir une limite inférieure du nombre cherché. Les propriétés arithmétiques des degrés p, n_1 et n_2 jouent dans cette question un rôle prépondérant.

Le second Chapitre est consacré à l'étude des polynomes univalents.

Je démontre d'abord la proposition suivante : *Le rayon d'univalence d'un polynome*

$$z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n$$

est égal au rayon du plus grand cercle de centre origine, où ne pénètre aucune racine de l'équation

$$1 + a_2 z \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} + a_3 z^2 \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + \ldots + a_n z^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 0$$

lorsque l'angle θ *varie de* o *à* π. Comme applications, je montre d'abord comment un certain nombre de résultats obtenus antérieurement par des procédés divers sont des conséquences immédiates de cette proposition; je considère ensuite les polynomes à coefficients réels, et j'obtiens dans ce cas de nouvelles propriétés du rayon d'univalence. Enfin, j'étudie complètement le problème suivant : *Déterminer le maximum du rayon d'univalence* $R(a)$ *du polynome*

$$z + z^p + a z^n \qquad (p < n)$$

lorsque a varie arbitrairement. Lorsque $p = 2$, je donne les valeurs numériques de ce maximum pour toutes les valeurs de n.

Dans le troisième Chapitre, j'examine un certain nombre de problèmes relatifs aux fonctions bornées. Je résous d'abord la question suivante : *Déterminer le minimum* ρ_p *du rayon du plus grand cercle de centre origine, dans lequel toute fonction de la forme*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

et telle que $|f(z)| \leqq M$ *dans le cercle unité, prenne p fois au plus la même valeur.* Pour $p = 1$, je montre de plus que toute fonction de la famille considérée représente le cercle $|z| \leqq \rho_1$ sur un domaine *étoilé* par rapport à l'origine.

Je démontre ensuite quelques inégalités auxquelles satisfait la dérivée d'une fonction bornée, et j'en déduis une relation entre les domaines (D), (D′) que font correspondre à des cercles concentriques $|z| \leqq r$, $|z| \leqq r' < r$, les fonctions $\frac{f(z) - f(0)}{z}$ et $f'(z)$, $f(z)$ étant une fonction holomorphe, *bornée ou non*, dans le cercle unité. Enfin, j'utilise aussi ces inégalités pour préciser un résultat récent de M. P. Montel, qui constitue un complément au théorème de Rolle pour une fonction analytique, réelle sur un segment de l'axe réel, et bornée au voisinage (¹).

Dans les démonstrations de beaucoup de propositions de ce travail, je n'ai pas craint de faire un large appel à l'intuition géométrique; j'estime qu'il n'y a pas lieu de se priver d'un aussi précieux auxiliaire, d'autant qu'il ne s'agit, dans la théorie qui nous occupe, que de courbes analytiques, et même le plus souvent algébriques; il n'y a donc pas à redouter que l'emploi de la géométrie puisse être une cause d'erreurs, puisqu'il est toujours possible de présenter le raisonnement sous forme algébrique.

Je suis heureux, en terminant, d'exprimer toute ma gratitude à M. P. Montel, pour le bienveillant intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à mes recherches, et les précieux conseils que je lui dois.

CHAPITRE I.

LES ZÉROS DES POLYNOMES.

Bibliographie.

Dans le cours de ce travail nous désignerons les Ouvrages ci-dessous, par les caractères gras qui les précèdent :

[1] E. Landau. — *a. Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, t. **51**, 1906, p. 252-318).

b. Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. **24**, 1907, p. 179-201).

[2] R. E. Allardice. — *On a limit of the roots of an equation that is independent of all but two of the coefficients* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, t. **13**, 1906-1907, p. 443-447).

[3] L. Fejér. — *Ueber die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung* (*Mathematische Annalen*, t. **65**, 1908, p. 413-423).

(¹) Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans cinq Notes aux *Comptes rendus* des 24 mars, 7 avril, 12 mai 1930, 12 janvier et 11 mai 1931.

[4] P. BOHL. — *Zur Theorie der trinomischen Gleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. 65, 1908, p. 556-566).

[5] G. HERGLOTZ. — *Ueber die Wurzeln trinomischer Gleichungen* (*Leipziger Berichte*, *Math.-Phys. Classe*, t. 74, 1922, p. 1-8).

[6] P. MONTEL. — *Sur les modules des zéros des polynomes* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 40, 1923, p. 1-34).

[7] A. PELLET. — *Sur la racine de plus petit module des équations* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 48, 1924, p. 265-268).

[8] E. B. VAN VLECK. — *On Limits to the absolute values of the roots of a polynomial* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 53, 1925, p. 105-125).

[9] M. BIERNACKI. — *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires* (Thèse) (*Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres*, 1927, p. 541-685).

[10] I. SCHUR. — *a. Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind* (*Journal de Crelle*, t. 147, 1917, p. 205-232).

b. Idem (*Journal de Crelle*, t. 148, 1918, p. 122-145).

[11] A. COHN. — *Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise* (*Mathematische Zeistchrift*, t. 14, 1922, p. 110-148).

[12] J. DIEUDONNÉ. — *Sur une généralisation du théorème de Rolle aux fonctions d'une variable complexe* (*Annals of Mathematics*, t. 31, 1930, p. 79-116).

Les travaux numérotés de 1 à 9 contiennent l'essentiel de ce qui a été publié jusqu'en 1929 sur le sujet de ce Chapitre. On trouvera une bibliographie très complète des travaux publiés de 1900 à 1928 sur tout ce qui concerne les zéros des polynomes à la fin d'un article de M. VAN VLECK, *On the location of the roots of polynomials and entire functions* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 35, 1929, p. 672-683).

I.

1. Nous nous occuperons, dans ce Chapitre, du problème suivant : *Déterminer des régions du plan complexe contenant toujours des racines de l'équation algébrique*

$$(1) \qquad 1 + a_{n_1}x^{n_1} + a_{n_2}x^{n_2} + \ldots + a_{n_k}x^{n_k} = 0 \qquad (n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$$

lorsque, certains des coefficients restant fixes, on fait varier arbitrairement les autres. Les seules régions du plan que nous considérerons sont les cercles de centre origine; autrement dit, nous chercherons des limites supérieures des modules d'un certain nombre de racines de l'équation (1).

Ce problème, considéré pour la première fois par M. Landau [1*a* et 1*b*] à la suite de ses recherches sur le théorème de M. Picard, a été récemment repris et étudié d'une manière approfondie dans les travaux de MM. P. Montel [6], Van Vleck [8] et Biernacki [9].

La position du problème a été déterminée par M. P. Montel, qui a montré ([6], p. 21) que si l'on met l'équation sous la forme

$$(2)\qquad 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k} x^{n_{p+k}} = 0,$$

et si l'on se donne $a_1, a_2, \ldots, a_p (a_p \neq 0)$, *il y a toujours p racines de l'équation inférieures en module à un nombre fixe* $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p, k)$ *ne dépendant que des coefficients donnés et du nombre de termes du polynome.*

M. Van Vleck [8] a apporté un complément important à cette proposition, en montrant qu'elle subsiste si l'on se donne les p coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_{p+m}$ $(a_{p+m} \neq 0)$, et de plus que, *dans aucun autre cas, la donnée de p coefficients de l'équation ne limite supérieurement les modules de p racines.*

Ces théorèmes ne font pas intervenir les degrés des termes qui suivent x^p; la *limite exacte* de p racines peut cependant en dépendre *a priori*. J'entends par « limite exacte » la valeur $|x| = \rho$ telle que toute équation de la famille considérée ait p racines de modules inférieurs à ρ, et qu'on puisse trouver une telle équation ayant moins de p racines inférieures ou égales en module à $\rho - \varepsilon$, ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Pour l'équation

$$(3)\qquad 1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0,$$

M. Biernacki a donné ([9], p. 547), comme borne supérieure de ρ, la valeur

$$R = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p}} \leqq \sqrt[p]{C_{p+k}^{k}},$$

déjà obtenue par M. Fejér [3] comme limite supérieure du module d'*une* racine. Si l'on ne fixe pas $n_1, n_2, \ldots, n_k$ cette borne est la meilleure possible, car elle est atteinte pour $n_1 = p + 1, n_2 = p + 2, \ldots,$

$n_k = p + k$. Mais si l'on fixe les n_i, R n'est la limite exacte dans tous les cas que pour $k = 1$.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'indiquer la marche à suivre pour obtenir la limite exacte des modules de 1, 2, ..., $(p-1)$ ou p racines, et de faire effectivement le calcul pour un certain nombre de types de polynomes.

2. Nous partirons du théorème fondamental suivant, démontré par M. Biernacki ([9], p. 555) : *Si ρ est la limite exacte des modules de* 1, 2, ..., $(p-1)$ *ou p racines de l'équation* (3), *lorsque les a_i sont arbitraires et les degrés n_i fixes, il existe toujours une équation de cette forme pour laquelle la limite est atteinte, et qui a au moins* $(k+1)$ *racines, distinctes ou confondues, de module ρ, à moins que, pour une telle équation, on n'ait* $a_k = 0$. On constate d'ailleurs immédiatement que la démonstration est encore valable pour l'équation plus générale (2). M. Biernacki a indiqué qu'on pourra probablement supprimer l'alternative $a_k = 0$ ou $a_k \neq 0$ qui figure dans ce théorème, et a montré qu'elle disparaît effectivement pour l'équation quadrinome; nous verrons qu'il en est bien ainsi également dans les exemples que nous traiterons.

De ce théorème, et de la remarque évidente que, si la limite exacte ρ de h racines $(1 \leq h \leq p)$ est atteinte pour une équation des types (2) ou (3), cette équation a au plus $(h-1)$ racines de modules inférieurs à ρ, il est aisé de déduire une méthode pour le calcul de ρ.

Posons pour simplifier $n_k = n$. Par la transformation $x = \frac{\xi}{y}$, où $|\xi| = \rho$, l'équation (3) devient

$$y^n + \xi^p y^{n-p} + b_1 y^{n-n_1} + b_1 y^{n-n_2} + \ldots + b_k = 0, \tag{4}$$

les b_i étant arbitraires. Il s'agit de trouver la plus grande valeur de $|\xi|$ telle qu'il existe une équation de cette forme ayant $(h-1)$ racines au plus extérieures au cercle unité.

D'après le théorème de M. Biernacki, considérons en premier lieu le cas où il y a au moins $(k+1)$ racines de (4) de module unité lorsque la limite est atteinte, et supposons d'abord qu'il y ait *exactement* $(k+1)$ racines de cette nature, soient $y_\lambda = e^{i\theta_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, k+1)$. Nous désignerons par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k+1}$ les fonctions symétriques élémentaires de ces racines, et par (D) le domaine de l'espace $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k+1})$ à $(k+1)$ dimensions, défini par les inégalités

$$0 \leqq \theta_1 < 2\pi, \qquad 0 \leqq \theta_2 < 2\pi, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq \theta_{k+1} < 2\pi.$$

Soient alors $y_{k+\mu+1}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n-k-1)$ les racines restantes de l'équation (4), $u_1, u_2, \ldots, u_{n-k-1}$ leurs fonctions symétriques élémentaires. Par hypothèse $(h-1)$ au plus de ces racines sont extérieures au cercle unité, les autres sont intérieures, *aucune ne pouvant être sur la circonférence*. Ces conditions s'expriment par un nombre fini m d'inégalités où figurent algébriquement les u_i et leurs quantités conjuguées ([11], p. 135), soient

$$(5) \qquad \psi_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Lorsqu'une ou plusieurs de ces fonctions ψ_ν s'annulent simultanément, les autres restant positives, une au moins des racines $y_{k-\mu}$ devient en module égale à *un*, et réciproquement.

Ceci posé, écrivons les relations entre les coefficients et les racines de l'équation (4), et considérons en particulier celles qui correspondent aux coefficients nuls. On obtient un système de $(n-k-1)$ équations linéaires en $u_1, u_2, \ldots, u_{n-k-1}$:

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} u_1 + \sigma_1 = 0, \\ u_2 + u_1\sigma_1 + \sigma_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-k-1}\sigma_k + u_{n-k-2}\sigma_{k+1} = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est une fonction des θ_i qui ne peut être identiquement nulle au voisinage d'un point quelconque du domaine (D). En effet, c'est un polynome en $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$; en fixant toutes ces variables, sauf y_1 par exemple, on aurait un polynome en y_1 qui s'annulerait en tous les points d'un arc du cercle unité, donc serait identiquement nul. En répétant le raisonnement, on voit que le déterminant serait identiquement nul, *en considérant* $y_1, y_2, \ldots,$ y_{k+1} *comme des variables arbitraires* : on en déduirait que l'équation (4) a toujours une racine infinie quels que soient ses coefficients, ou que l'on peut se donner arbitrairement $(k+2)$ de ses racines au moins, ce qui est absurde. On peut donc résoudre le système (Σ) en tous les points de (D), à l'exception d'un continuum (Γ) à k dimensions au plus.

Ayant ainsi les u_i en fonction des θ_i, portons-les dans les inégalités (5); on obtient un système d'inégalités en $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k+1}$

$$\varphi_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Si ce système est compatible, il définit une portion (Δ) à $(k+1)$ dimensions du domaine (D). Soit (F) la frontière du domaine ouvert (Δ); le domaine fermé ($\Delta + F$) sera défini par les inégalités

$$\varphi_\nu \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m). \tag{6'}$$

On déduit alors de la relation

$$(-1)^p \xi^p = u_p + u_{p-1}\sigma_1 + \ldots$$

l'expression de $|\xi|$ en fonction des θ_i, en tout point non situé sur (Γ). Cette fonction reste bornée dans ($\Delta + F - \Gamma$) d'après le théorème de M. Montel; soit M_1 son maximum. D'autre part, sur (Γ), le système (Σ) ne peut avoir de solutions où certains des u_i seraient infinis, *les conditions* (5) *restant vérifiées;* car, si l'équation (4) a une racine infinie, elle en a p au moins, et les conditions (5) expriment que $h - 1 < p$ racines au plus sont de modules supérieurs à *un*. Nous devons donc supposer que le système (Σ) est indéterminé, ce qui donnera pour $|\xi|$ une fonction des θ_i et d'un certain nombre des u_i qui restent arbitraires, l'ensemble de ces variables devant naturellement toujours vérifier les inégalités (ou, à la limite, égalités) qu'on déduit de (5). Soit M_2 le maximum de $|\xi|$ sur (Γ) dans ces conditions [1]; si M est le plus grand des deux nombres M_1, M_2, ce sera la limite exacte cherchée, d'après le théorème de M. Biernacki, pourvu que cette limite soit atteinte lorsqu'il y a au moins $(k+1)$ racines de même module.

Pour achever le raisonnement, il faudra donc faire les calculs ana-

---

[1] Si dans l'expression de ξ^p sur (Γ), on laisse fixes les θ_i, on obtient une *fonction holomorphe* des u_i qui restent arbitraires; le maximum du module de cette fonction ne peut donc être atteint que lorsque ces quantités atteignent la frontière de leur domaine de variation; par conséquent, lorsque M_2 est atteint, il y a au moins $(k+2)$ racines de (3) ayant même module.

logues pour les équations obtenues en annulant successivement a_k, a_{k-1}, ... dans (3) jusqu'à l'équation quadrinome

$$1+x^p+a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}=0$$

incluse. On obtient ainsi une suite de nombres M, M′, M″, ... dont le plus grand donne la limite cherchée.

3. Nous avons supposé les inégalités (6) compatibles; *il se peut qu'il n'en soit pas ainsi*, autrement dit, que l'un au moins des ψ_ν doive nécessairement s'annuler comme conséquence du système (Σ). Dans ces conditions, la valeur exacte de ρ ne pourra être atteinte si $a_k \neq 0$, que pour une équation ayant au moins $(k+2)$ racines de module ρ ; il est alors plus commode, pour calculer cette valeur, de reprendre la méthode précédente, en supposant qu'il y a *exactement* $(k+2)$ racines de module ρ, puis, si les nouvelles inégalités sont encore incompatibles, en supposant qu'il y en a $(k+3)$, et ainsi de suite, jusqu'au moment où l'on arrive à un système d'inégalités compatibles.

D'ailleurs, en pratique, même si le système (6) est compatible, il arrivera que les calculs seront trop pénibles pour être poussés jusqu'au bout, on pourra simplement obtenir une *borne supérieure* de ρ; au contraire, il se peut que les calculs soient plus simples en supposant qu'il y a plus de $(k+1)$ racines de module ρ, si cela est possible, naturellement. Les valeurs ainsi obtenues donneront des *bornes inférieures* de ρ.

Il importe donc de connaître *a priori*, d'après la forme de l'équation (4), les valeurs possibles du nombre des racines de cette équation, de module égal à *un*, pour lesquelles les inégalités (6) sont compatibles. Sans pouvoir donner de critère général résolvant la question, je vais toutefois indiquer quelques propositions sur ce sujet, dans le cas simple où $h=1$.

4. Supposons donc que l'équation (4) ait exactement $(n-l)$ racines de module *un*, les l autres racines étant intérieures au cercle unité, et différentes de zéro [1]. Les conditions (5) prennent ici la forme sui-

[1] On peut toujours faire cette supposition, puisque l'hypothèse contraire sera certainement examinée lorsqu'on fera $a_k=0$.

vante ([10*b*], p. 134) : *il est nécessaire et suffisant que les l déterminants*

$$\delta_{\nu+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_l & u_{l-1} & u_{l-2} & \ldots & u_{l-\nu} \\ u_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_l & u_{l-1} & \ldots & u_{l-\nu+1} \\ u_2 & u_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & u_l & \ldots & u_{l-\nu+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_\nu & u_{\nu-1} & u_{\nu-2} & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & u_l \\ \overline{u}_l & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \ldots & \overline{u}_\nu \\ \overline{u}_{l-1} & \overline{u}_l & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \overline{u}_1 & \ldots & \overline{u}_{\nu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{u}_{l-\nu} & \overline{u}_{l-\nu+1} & \ldots & \ldots & \overline{u}_l & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, l-1; \quad u_0 = 1)$$

soient tous positifs (¹). Remarquons que δ_l n'est autre, au signe près, que le résultant des polynomes

$$f(x) = x^l + u_1 x^{l-1} + \ldots + u_l$$

et

$$f^*(x) = \overline{u}_l x^l + \overline{u}_{l-1} x^{l-1} + \ldots + \overline{u}_1 x + 1 = x^l f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous utiliserons les relations

$$(7) \qquad \sigma_\mu = \overline{\sigma}_{n-l-\mu}\sigma_{n-l} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-l, \text{ avec } \sigma_0 = 1),$$

qui résultent immédiatement de la définition des σ_i. Tirons-en tout de suite une conséquence évidente : *on ne peut avoir $l = 0$ que si le terme de degré p figure effectivement dans l'équation* (4), puisque $\xi \neq 0$.

La forme même des relations (7) nous amène à porter notre attention sur l'existence de *lacunes symétriques* dans l'équation (4); nous entendons par là deux lacunes équidistantes des termes extrêmes, autrement dit, telles que les termes de degrés

$$n-r, \quad n-r-1, \quad \ldots, \quad n-r-s+1$$

et

$$r, \quad r+1, \quad \ldots, \quad r+s-1 \qquad \left(r < \frac{n}{2}\right)$$

manquent simultanément dans (4) (²).

(¹) $\overline{x}$ désigne, comme d'habitude, le nombre conjugué de x.

(²) D'après cette définition, ou bien deux lacunes symétriques n'ont aucun

Supposons qu'il existe deux lacunes symétriques. Nous distinguerons plusieurs cas :

1° $r \leqq s$. Supposons d'abord $l = s$, et écrivons les équations du système (Σ) correspondant aux termes des lacunes, soient

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sigma_r + \sigma_{r-1} u_1 + \sigma_{r-2} u_2 + \ldots + \sigma_1 u_{r-1} + u_r = 0, \\ \sigma_{r+1} + \sigma_r u_1 + \ldots + \sigma_1 u_r + u_{r+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_s + \sigma_{s-1} u_1 + \ldots + \sigma_1 u_{s-1} + u_s = 0, \\ \sigma_{s+1} + \sigma_s u_1 + \ldots + \sigma_2 u_{s-1} + \sigma_1 u_s = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_{r+s-1} + \sigma_{r+s-2} u_1 + \ldots + \sigma_r u_{s-1} + \sigma_{r-1} u_s = 0; \end{array}\right.$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sigma_{n-s} u_{s-r} + \sigma_{n-s-1} u_{s-r+1} + \ldots + \sigma_{n-r-s} u_s = 0, \\ \sigma_{n-s} u_{s-r-1} + \sigma_{n-s-1} u_{s-r} + \ldots + \sigma_{n-r-s-1} u_s = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_{n-s} + \sigma_{n-s-1} u_1 + \ldots + \sigma_{n-2s} u_s = 0, \\ \sigma_{n-s-1} + \sigma_{n-s-2} u_1 + \ldots + \sigma_{n-2s-1} u_s = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{n-r-s+1} + \sigma_{n-r-s} u_1 + \ldots + \sigma_{n-r-2s+1} u_s = 0. \end{array}\right.$$

Prenons les conjuguées des équations (9), et appliquons les relations (7) ; il vient, après multiplication par $\sigma_{n-s} \neq 0$,

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sigma_r \bar{u}_s + \sigma_{r-1} \bar{u}_{s-1} + \ldots + \sigma_1 \bar{u}_{s-r+1} + \bar{u}_{s-r} = 0, \\ \sigma_{r+1} \bar{u}_s + \sigma_r \bar{u}_{s-1} + \ldots + \sigma_1 \bar{u}_{s-r} + \bar{u}_{s-r-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_s \bar{u}_s + \ldots + \sigma_1 \bar{u}_1 + 1 = 0, \\ \sigma_{s+1} \bar{u}_s + \ldots + \sigma_2 \bar{u}_1 + \sigma_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_{r+s-1} \bar{u}_s + \ldots + \sigma_r \bar{u}_1 + \sigma_{r-1} = 0. \end{array}\right.$$

(8) et (10) forment un système de $2s$ équations linéaires homogènes, satisfaites par les $(r+s)$ quantités $1, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r+s-1}$. Tout déterminant d'ordre $(r+s)$ extrait du tableau des coefficients est donc nul.

---

terme commun, ou bien elles sont confondues, et $r = n - r - s + 1$; nous dirons dans ce dernier cas que la lacune est *autosymétrique*.

Or, ce tableau

$$
\begin{vmatrix}
u_r & u_{r-1} & \cdots & u_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
u_{r+1} & u_r & \cdots & u_2 & u_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
u_s & u_{s-1} & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & u_s & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & u_1 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & 1 \\
0 & 0 & \cdots & u_s & u_{s-1} & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & 1 \\
\overline{u}_{s-r} & \overline{u}_{s-r+1} & \cdots & \overline{u}_{s-1} & \overline{u}_s & 0 & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
\overline{u}_{s-r-1} & \overline{u}_{s-r} & \cdots & \overline{u}_{s-2} & \overline{u}_{s-1} & \overline{u}_s & 0 & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
1 & \overline{u}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \overline{u}_s & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \overline{u}_{s-1} & \overline{u}_s & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{u}_1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \overline{u}_s
\end{vmatrix}
$$

n'est autre que le résultant de $f(x)$ et $f^\star(x)$ dont on a enlevé les $(s-r)$ premières colonnes. En développant le résultant suivant ces $(s-r)$ colonnes, on voit qu'il est nul; *les conditions* (5) *ne peuvent donc être toutes vérifiées.*

Il en est de même si $r \leqq l < s$; on considérera seulement les l premières équations des systèmes (8) et (10).

On a donc certainement, dans ce cas, $l < r$ *ou* $l > s$.

2° $s < r$. Supposons encore $l = s$ et procédons comme ci-dessus; on obtient un système

$$
(11)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\sigma_r + \sigma_{r-1} u_1 + \ldots + \sigma_{r-s} u_s = 0, \\
&\sigma_{r+1} + \sigma_r u_1 + \ldots + \sigma_{r-s+1} u_s = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\sigma_{r+s-1} + \sigma_{r+s-2} u_1 + \ldots + \sigma_{r-1} u_s = 0, \\
&\sigma_r \overline{u}_s + \sigma_{r-1} \overline{u}_{s-1} + \ldots + \sigma_{r-s} = 0, \\
&\sigma_{r+1} \overline{u}_s + \sigma_r \overline{u}_{s-1} + \ldots + \sigma_{r-s+1} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\sigma_{r+s-1} \overline{u}_s + \sigma_{r+s-2} \overline{u}_{s-1} + \ldots + \sigma_{r-1} = 0
\end{aligned}
\right.
$$

de $2s$ équations linéaires et homogènes à $2s$ inconnues σ_{r-s}, $\sigma_{r-s+1}, \ldots,$

σ_{r+s-1}. Le déterminant de ce système est le résultant de $f(x)$ et $f^\star(x)$. Donc, *ou bien les conditions* (5) *ne sont pas vérifiées, ou bien on a*

$$\sigma_{r-s} = \sigma_{r-s+1} = \ldots = \sigma_{r+s-1} = 0.$$

Si $l < s$, on raisonnera de même en ne prenant que $2l$ équations; on arrive également aux mêmes conclusions lorsque, dans le premier cas, on suppose $l < r$.

En définitive, on voit que *lorsque l'équation a deux lacunes symétriques, les conditions* (5) *ne peuvent être vérifiées que si $l > s$, ou si l est inférieur au plus petit des deux nombres r et s, et que l'on a*

$$(12) \qquad \sigma_{r-l} = \sigma_{r-l+1} = \ldots = \sigma_r = \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_{r+s-1} = 0.$$

5. Il est parfois possible de lever l'alternative qui subsiste dans ce résultat. Par hypothèse, l'un au moins des termes de degrés $(r-1)$ et $(n-r+1)$ figure dans l'équation (4); *supposons qu'un seul d'entre eux y figure effectivement*, soit par exemple le terme de degré $(r-1)$. Alors, le terme de degré $(n-r+1)$ ayant son coefficient nul, on a

$$(13) \qquad \sigma_{r-1} + \sigma_{r-2}u_1 + \ldots + \sigma_{r-l}u_{l-1} + \sigma_{r-l-1}u_l = 0.$$

Si les conditions (12) sont vérifiées, comme, par hypothèse, $u_l \neq 0$, on a $\sigma_{r-l-1} = 0$. Donc, le coefficient du terme de degré $(r-1)$ doit être aussi nul, en vertu de la relation conjuguée de (13). On raisonne de même lorsque c'est le terme de degré $(r-1)$ qui ne figure pas dans (4).

Par suite, *si $r = p + 1$, et si le terme de degré p ne figure pas dans l'équation* (4), *on a certainement $l > s$*, puisque $\xi \neq 0$; il en est de même si, dans cet énoncé, on remplace l'hypothèse $r = p + 1$ par $r + s = p$.

En général, on peut continuer à appliquer le procédé qui vient d'être indiqué jusqu'au moment où l'on rencontre deux termes symétriques figurant dans (4). *Par suite, si l'équation* (4) *n'a pas de termes symétriques, on a nécessairement $l > s$.* Il en est ainsi, en particulier, si l'équation (3) a la forme

$$1 + x^p + a_1 x^{p+q} + a_2 x^{p+2q} + \ldots + a_k x^{p+kq} = 0,$$

lorsque p n'est pas un multiple de q. On voit alors que si $q < p$, on a

$l \geqq q$; si $q > p$, l est au moins égal au plus grand des deux nombres p et $(q-p)$.

Si l'équation (4) a des termes symétriques, soient λ et $(n-\lambda)$ les degrés des premiers que l'on rencontre; si $\lambda \geqq l$, on déduit donc de (12) que l'on a aussi

$$(14) \qquad \sigma_{\lambda-l+1} = \sigma_{\lambda-l+2} = \ldots = \sigma_{r-l-1} = 0.$$

Mais si $\lambda < l$, on a rencontré, dans l'application de la méthode, l'équation

$$\sigma_l + \sigma_{l-1} u_1 + \ldots + \sigma_1 u_{l-1} + u_l = 0,$$

où tous les σ sont nuls, d'où $u_l = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, *si* $l < r$ *et* s, *on a nécessairement* $l \leqq \lambda$, *et, dans ce cas, il faut ajouter aux relations* (12) *les équations* (14), qui en sont une conséquence. D'ailleurs, en opérant de même à partir du terme de degré $(r+s-1)$, on déduit encore de (12) que l'on a

$$(15) \qquad \sigma_{r+s} = \sigma_{r+s-1} = \ldots = \sigma_{\mu-1} = 0,$$

si les degrés des premiers termes symétriques qu'on rencontre de cette manière sont μ et $(n-\mu)$.

Parmi les inégalités (5), nous n'avons utilisé, dans les raisonnements qui précèdent, que la dernière, $\delta_n > 0$; on peut se demander s'il est possible d'aller plus loin en utilisant les autres inégalités. Il en sera bien ainsi dans le premier exemple que nous allons traiter; toutefois, il est assez douteux qu'en général l'utilisation de toutes les inégalités donne de nouvelles conditions pour l, car dans le cas simple où $r = s = 2$, le calcul montre qu'on peut prendre $l = 3$ et choisir u_1, u_2, u_3, de façon à rendre les inégalités (5) compatibles avec le système (Σ).

6. Nous allons maintenant appliquer les considérations générales qui précèdent à quelques types de polynomes.

$$(\mathrm{I}) \qquad 1 + x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + a_n x^n = 0.$$

1° Cherchons d'abord la limite des modules de deux racines. L'équation (4) correspondante a au plus deux racines de modules différents de *un*. Le système (Σ) devient ici

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{r} \sigma_1 + u_1 = 0, \\ u_2 \sigma_{n-3} + u_1 \sigma_{n-2} = 0. \end{array} \right.$$

Le déterminant est $\sigma_{n-3} = \overline{\sigma}_1 \, \sigma_{n-2}$; il s'annule donc avec σ_1. Supposons d'abord $\sigma_1 \neq 0$; en prenant la conjuguée de la deuxième équation (16), on a

$$\overline{u}_2 \sigma_1 + \overline{u}_1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad u_2 = \frac{u_1}{\overline{u}_1},$$

et comme

$$u_1 \neq 0, \qquad |u_2| = 1.$$

Il y a donc toujours une racine de (4) au plus extérieure au cercle unité, les conditions (6) disparaissent, on peut faire varier les θ_i arbitrairement.

On a

$$\xi^2 = \sigma_2 + \sigma_1 u_1 + u_2 = \sigma_2 - \sigma_1^2 + \frac{\overline{\sigma}_1}{\sigma_1}.$$

Il serait aisé de trouver les conditions dans lesquelles cette quantité atteint son module maximum, mais on peut se dispenser de tout calcul, en remarquant qu'en prenant tous les θ_i nuls, il vient

$$\xi^2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2} - (n-2)^2 + 1 = -\frac{n(n-3)}{2}.$$

Or la quantité $\sqrt{\dfrac{n(n-3)}{2}}$ *n'est autre que la limite de M. Biernacki;* c'est donc la valeur exacte cherchée, et il est inutile d'examiner les cas $\sigma_1 = 0$ et $a_n = 0$.

2° Passons à la recherche de la limite du module d'une racine. Il y a deux lacunes symétriques, et l'on a $r = s = 1$; donc $l = 0$ ou $l = 2$.

Si $l = 2$, (Σ) se réduit au système (16). Lorsque $\sigma_1 \neq 0$ on voit, comme ci-dessus, que $|u_2| = 1$. Les conditions (5) ne peuvent être remplies (¹); on a donc nécessairement

$$l = 2 \text{ avec } \sigma_1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad l = 0.$$

Supposons d'abord $l = 0$. On a

$$\xi^2 = \sigma_2 \qquad \text{avec} \qquad \sigma_1 = 0.$$

(¹) C'est le cas auquel nous avons fait allusion plus haut; ici

$$\delta_1 = 1 - |u_2|^2, \qquad \delta_2 = (1 - |u_2|^2) - |u_2 \overline{u}_1 - u_1|^2$$

En général, posons

$$s_m = \sum_{\lambda=1}^{n} e^{mi\theta_\lambda}.$$

D'après les formules de Newton,

$$\xi^2 = \frac{s_2}{2} \qquad \text{avec} \qquad s_1 = 0.$$

Le problème revient à chercher le maximum de $|s_2|$ lorsque $s_1 = 0$. On a évidemment dans tous les cas $|s_2| \leqq n$. Si n est pair, cette valeur maxima est atteinte ; il suffit de prendre

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{\frac{n}{2}} = 0,$$
$$\theta_{\frac{n}{2}+1} = \theta_{\frac{n}{2}+2} = \ldots = \theta_n = \pi.$$

Le problème est plus délicat lorsque n est impair. On peut évidemment supposer s_2 réel et positif, en ajoutant au besoin un même angle à tous les θ_i. Il s'agit donc de trouver le maximum de

$$s_2 = \sum_{\lambda=1}^{n} \cos 2\theta_\lambda$$

avec les conditions

$$(17) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \cos\theta_\lambda = 0, \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \sin\theta_\lambda = 0, \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \sin 2\theta_\lambda = 0.$$

Appliquons la méthode des multiplicateurs de Lagrange : μ_1, μ_2, μ_3 étant des constantes, nous annulerons les dérivées par rapport aux θ_λ de

$$z = s_2 + \mu_1 \sum_{\lambda=1}^{n} \cos\theta_\lambda + \mu_2 \sum_{\lambda=1}^{n} \sin\theta_\lambda + \mu_3 \sum_{\lambda=1}^{n} \sin 2\theta_\lambda,$$

ce qui donne pour tous les θ_λ la même équation

$$(18) \qquad \varphi(\theta) \equiv -2\sin 2\theta - \mu_1 \sin\theta + \mu_2 \cos\theta + 2\mu_3 \cos 2\theta = 0.$$

D'ailleurs, si l'on forme

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \varphi(\theta_\lambda) = 0,$$

on obtient $2\mu_3 s_2 = 0$, et comme $s_2 \neq 0$, $\mu_3 = 0$.

Ceci posé, l'équation (18) a au plus quatre racines distinctes en θ; donc, *lorsque le maximum est atteint, les θ prennent quatre valeurs distinctes au plus* (d'ailleurs, comme n est impair, il y a au moins trois valeurs distinctes). Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ les solutions de (18), n_1, n_2, n_3, n_4 les nombres des θ_λ qui sont respectivement égaux à ces valeurs, avec

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n. \tag{19}$$

Comme trois des n_i au moins sont différents de zéro, il y en a deux au moins qui ont la même parité, soient n_1 et n_2 pour fixer les idées. Laissons fixes n_3 et n_4, et donnons à n_1 et n_2 toutes les valeurs entières non négatives, satisfaisant à (19). On peut considérer s_2 comme une fonction de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 et des variables n_1, n_2, liées par (19); cherchons les conditions pour que cette fonction admette un maximum lorsqu'on généralise le problème en supposant que n_1 et n_2 puissent prendre des valeurs quelconques (¹). Il faut alors ajouter à (18) l'équation $\frac{\partial z}{\partial n_1} = \frac{\partial z}{\partial n_2}$, ce qui donne

$$f(\theta_1) = f(\theta_2),$$

où

$$f(\theta) \equiv \cos 2\theta + \mu_1 \cos\theta + \mu_2 \sin\theta.$$

Comme $\psi(\theta) \equiv f'(\theta)$ on voit que, dans notre problème généralisé, lorsque le maximum est atteint, il existe une valeur a telle que l'équation $f(\theta) - a = 0$ ait *deux racines doubles*.

S'il en est ainsi, on peut, en posant $t = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, écrire identiquement

$$f(\theta) - a \equiv A \frac{(t-t_1)^2(t-t_2)^2}{(1+t^2)^2},$$

(¹) Nous nous inspirons ici d'un procédé employé par M. Biernacki ([9], p. 641) dans l'étude d'une question analogue.

A étant une constante. Un calcul élémentaire montre alors qu'en dehors de t_1 et t_2, les autres racines de la dérivée sont

$$t_3 = \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{4}, \qquad t_4 = -\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{4}.$$

On a donc nécessairement

$$\theta_3 = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \qquad \theta_4 = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \pi = \theta_3 + \pi.$$

Mais comme $\mu_3 = 0$, l'équation (18) ne peut admettre les racines θ_3 et $\theta_3 + \pi$ que si

$$\sin 2\theta_3 = 0,$$

d'où $\theta_3 = 0$ ou $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$ (en supposant que θ_3 est celui des deux angles θ_3 et θ_4, compris entre 0 et π). On en tire, d'après (17), $n_1 = n_2$.

Revenons alors au problème proposé; pour chaque système de valeurs entières de n_1 et n_2, lorsque n_3 et n_4 sont fixés, s_2 a un maximum $\Phi(n_1)$, lorsqu'on fait varier les θ; lorsque n_1 prend toutes les valeurs entières de 0 à $n-(n_3+n_4)$, $\Phi(n_1)$ a, d'après ce qui précède, un seul extremum à l'intérieur de cet intervalle, pour

$$n_1 = n_2 = \frac{n-(n_3+n_4)}{2}$$

(nombre entier d'après l'hypothèse du début). Rien ne prouve d'ailleurs *a priori* que ce soit un véritable maximum, mais on en déduit qu'on peut se borner, pour la recherche du maximum, à ne considérer que ce cas, et celui où l'un des n_i est nul. D'ailleurs, comme, dans ce dernier cas, les trois autres n_i sont différents de zéro, il y en a deux de même parité, soient encore n_1 et n_2; on peut recommencer le raisonnement, et l'on retombera sur le cas précédent (avec $n_3 = 0$ ou $n_4 = 0$), ou sur le cas où l'un des trois n_i est égal à *un* (puisque c'est la plus petite valeur qu'ils puissent prendre); et, si l'on se trouve dans ce dernier cas, les deux autres n_i sont nécessairement égaux, puisqu'il existe, d'après (17), un triangle ayant pour côtés n_1, n_2, 1, d'où $n_1 \geqq n_2 - 1$, $n_2 \geqq n_1 - 1$, ce qui n'est possible que si $n_1 = n_2$, ces deux nombres ayant même parité.

Une fois ramenée ainsi à l'étude d'un seul cas, la recherche du maximum se réduit à un problème d'algèbre élémentaire. Comme on passe du cas $\theta_3 = 0$ au cas $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$ en ajoutant $\frac{\pi}{2}$ à tous les θ, donc en changeant s_2 de signe, on peut se borner, par exemple, à étudier le cas $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, en cherchant alors le maximum de $|s_2|$. On a donc $\theta_2 = \pi - \theta_1$ et, d'après (17),

$$\sin\theta_1 = \frac{n_4 - n_3}{2n_1},$$

d'où

$$s_1 = 2n_1 - \frac{(n_4 - n_3)^2}{n_1} - (n_3 + n_4) = 4n_1 - \frac{(n_4 - n_3)^2}{n_1} - n.$$

n_1 étant fixé, cette quantité est maximum pour $n_4 - n_3 = 1$, minimum pour $n_3 = 0$, $n_4 = n - 2n_1$. Dans le premier cas,

$$s_2 = 4n_1 - \frac{1}{n_1} - n$$

est maximum avec n_1, donc pour $n_1 = \frac{n-1}{2}$, ce qui donne

$$s_2 = \frac{n(n-3)}{n-1}.$$

Dans le second

$$s_2 = 4n_1 - \frac{(n - 2n_1)^2}{n_1} - n = 3n - \frac{n^2}{n_1},$$

minimum avec n_1; d'ailleurs, on doit avoir (relation entre les côtés d'un triangle)

$$n_4 = n - 2n_1 \leqq 2n_1 \qquad \text{ou} \qquad n_1 \geqq \frac{n}{4},$$

d'où, si $n = 4p + 1$, $n_1 = p + 1$,

$$s_2 = n\left[3 - \frac{4p+1}{p+1}\right] = -\frac{n(p-2)}{p+1},$$

$$|s_2| = \frac{n(n-9)}{n+3},$$

et si $n = 4p + 3$, $n_1 = p + 1$,

$$s_2 = n\left[3 - \frac{4p+3}{p+1}\right] = -\frac{np}{p+1}, \qquad |s_2| = \frac{n(n-3)}{n+1}.$$

La comparaison entre ces expressions montre que, finalement, *le maximum de* $|s_2|$ *a pour valeur* $\frac{n(n-3)}{n-1}$ *lorsque* $s_1 = 0$.

En revenant à la recherche de la limite du module d'une racine de (I), on voit qu'on obtient les valeurs

$$(20) \qquad \rho = \sqrt{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ est pair}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{n(n-3)}{2(n-1)}} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Pour être assuré que ces valeurs sont bien les limites exactes, il reste à étudier les cas $l = 2$ [le déterminant de (16) étant alors nul] et $a_n = 0$.

Si $l = 2$ avec $\sigma_1 = 0$, on en déduit $u_1 = 0$, d'où $y_{n-1} = -y_n$, la valeur absolue de ces deux racines restant arbitraire et égale à $\sqrt{|u_2|}$; donc, pour satisfaire aux conditions (5), il faut $|u_2| \leqq 1$. On a dans ce cas

$$\xi^2 = \sigma_2 + u_2,$$

σ_2 et u_2 étant des variables indépendantes; le maximum est atteint lorsque $|u_2| = 1$, donc, lorsque toutes les racines ont même module; on retombe ainsi sur le cas précédent.

Il reste à examiner l'hypothèse $a_n = 0$; on est ramené au type de polynome que nous allons étudier comme deuxième exemple.

7. (II) $$1 + x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = 0.$$

Pour la limite de deux racines, on est dans le cas étudié par M. Van Vleck et M. Biernacki; la valeur exacte est $\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Cherchons la limite du module d'une racine. Le système (Σ) se réduit ici à la seule équation

$$\sigma_1 + u_1 = 0$$

et les conditions (6′) à

$$|\sigma_1| \leqq 1.$$

On a ensuite

$$\xi^2 = \sigma_2 + \sigma_1 u_1 = \sigma_2 - \sigma_1^2 = -\frac{s_1^2 + s_2}{2}.$$

Pour obtenir le maximum de $|\xi|$, donnons à s_1 une valeur fixe α, de module compris entre 0 et 1, et qu'on peut toujours supposer réelle et positive; $|\alpha^2 + s_2|$ a dans ces conditions un maximum, fonction de α, dont la plus grande valeur, lorsque α variera de 0 à 1, donnera la valeur maxima de $|2\xi^2|$.

Remarquons d'abord que, puisque $|s_1| = |\sigma_1| \leqq 1$ et $|s_2| \leqq n-1$, on a toujours $|\xi| \leqq \sqrt{\frac{n}{2}}$. Si n est pair, cette valeur est la limite exacte, étant atteinte pour

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{\frac{n}{2}} = 0,$$
$$\theta_{\frac{n}{2}+1} = \theta_{\frac{n}{2}+2} = \ldots = \theta_{n-1} = \pi.$$

Pour n impair, il faut refaire un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, en considérant ici la fonction

$$z = |\alpha^2 + s_2|^2 = \left(\alpha^2 + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \cos 2\theta_\lambda\right)^2 + \left(\sum_{\lambda=1}^{n-1} \sin 2\theta_\lambda\right)^2.$$

On trouve comme précédemment que les θ prennent quatre valeurs distinctes au plus lorsqu'il y a maximum. On aura ici

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n - 1$$

et comme n est impair, il y a toujours deux n_i de même parité (même si les deux autres sont nuls). On trouve alors, comme ci-dessus,

$$\theta_3 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \qquad \theta_4 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi.$$

Mais il n'en résulte plus aussi immédiatement que θ_3 est nul : cet angle satisfait seulement aux relations

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{n-1} \sin 2\theta_\lambda\right)\cos 2\theta_3 - \left(\alpha^2 + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \cos 2\theta_\lambda\right)\sin 2\theta_3 = 0, \tag{21}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} \cos\theta_\lambda = \alpha, \tag{22}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} \sin\theta_\lambda = 0. \tag{23}$$

On a ainsi trois équations par rapport aux deux inconnues $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

et $\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$. *Quel que soit* α, elles admettent la solution $\theta_3=0$, ce qui entraîne $n_1=n_2$; mais, pour qu'elles aient d'autres solutions communes, il faut que α vérifie une relation algébrique, non identiquement nulle, à coefficients *entiers* [on formerait aisément cette relation à l'aide d'un raisonnement géométrique simple, en remarquant que l'équation (21) s'écrit $\arg(\alpha^2+s_2)=2\theta_3$, à π près]. Cette relation n'est donc satisfaite que par des valeurs isolées de α; or, il est bien évident que le maximum de z est *une fonction continue de* α; ces valeurs ne sauraient donc convenir. Comme dans l'exemple précédent, on est ramené à chercher le maximum de z dans le cas où $\theta_3=0$, $\theta_4=\pi$, $n_1=n_2$, ou dans le cas où $n_3=n_4=0$ et où n_1 (ou n_2) prend la plus petite valeur compatible avec les relations (22) et (23); mais ici, *comme* $\alpha\leqq 1$, on ne peut avoir $n_1+n_2=n-1$ que si $n_1=n_2=\frac{n-1}{2}$, en vertu des relations entre les côtés d'un triangle; on retombe alors sur une particularisation du premier cas. Il reste donc à chercher le maximum du module de

$$\alpha^2+s_2=\alpha^2-4n_1+\frac{(\alpha+n_4-n_3)^2}{n_1}+n-1.$$

En procédant comme dans le premier exemple, on trouve sans difficulté que ce maximum est égal à $(n-1)$ et est atteint pour $\alpha=0$, $n_3=n_4=0$; d'où la valeur $\sqrt{\frac{n-1}{2}}$ pour le maximum de $|\xi|$. Cette valeur étant atteinte pour $a_n=0$, il faut vérifier que c'est aussi la limite du module d'une racine de l'équation

$$1+x^2+a_3x^3+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}=0.$$

Mais comme $(n-1)$ est pair, ceci résulte du début du paragraphe.

Il reste encore à voir si les limites relatives aux équations obtenues en annulant successivement a_{n-1}, a_{n-2}, ... ne seraient pas supérieures à celles qu'on vient de déterminer; il n'en est rien, d'après la forme même de ces limites en fonction du degré de l'équation.

Ainsi, *la limite supérieure du module d'une racine de l'équation* (II) *est égale à* $\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}$ (¹); *si n est impair, elle est atteinte pour* $a_n=0$.

(¹) Nous désignons par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du nombre positif x.

La comparaison de cette limite avec les valeurs (20) montre que ces valeurs *sont bien les limites exactes d'une racine de l'équation* (1).

8. (III) $$1 + x^2 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots + a_n x^n = 0.$$

Cherchons d'abord la limite de deux racines. Les calculs exacts étant trop compliqués, nous nous bornerons à calculer la *valeur asymptotique* de cette limite lorsque n croît indéfiniment.

On a ici $k+1 = n-2$, ce qui donne, pour le système (Σ)

$$(24) \qquad \begin{cases} \sigma_1 + u_1 = 0, \\ \sigma_3 + \sigma_2 u_1 + \sigma_1 u_2 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant est égal à σ_1; supposons-le d'abord différent de zéro. Les conditions (5) doivent exprimer qu'une au plus des deux quantités y_{n-1}, y_n est extérieure au cercle unité. D'après les formules données par M. Cohn ([11], p. 135), ceci s'exprime par l'unique condition

$$|u_2|^2 - 1 \leqq |u_1 \bar{u}_2 - \bar{u}_1|.$$

On en déduit tout de suite une limite de $|u_2|$ en fonction de $|u_1|$, car

$$|u_2|^2 - 1 \leqq |u_1|(1 + |u_2|),$$

d'où

$$(25) \qquad |u_2| \leqq 1 + |u_1| \quad (^1).$$

D'autre part, d'après les formules de Newton, on tire de (24)

$$u_1 = -s_1, \qquad s_3 = s_1^3 - 6u_2 s_1,$$

d'où

$$|s_1|^3\left(1 - \frac{6}{|s_1|} - \frac{6}{|s_1|^2}\right) \leqq |s_3| \leqq n-2,$$

et par suite

$$|s_1| \leqq (1+\varepsilon)\sqrt[3]{n} \qquad \text{et aussi} \qquad |u_2| \leqq (1+\varepsilon)\sqrt[3]{n}$$

$\left(\text{nous désignons par } \varepsilon \text{ une quantité tendant vers zéro avec } \frac{1}{n}\right)$.

---

(1) Il est d'ailleurs aisé d'obtenir directement cette inégalité; car si $|y_n| \leqq 1$, on a

$$|y_{n-1}| = |u_1 - y_n| \leqq 1 + |u_1|, \qquad \text{d'où} \qquad |u_2| = |y_{n-1} y_n| \leqq 1 + |u_1|.$$

Comme

$$\xi^2 = \sigma_2 + u_1\sigma_1 + u_2 = -\frac{s_2}{2} - \frac{s_1^2}{2} + u_2,$$

on a, en vertu des inégalités précédentes, jointes à $|s_2| \leqq n - 2$,

$$|\xi| \leqq (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{2}}. \tag{26}$$

Si l'on suppose $\sigma_1 = 0$, il faut, pour que (24) soit indéterminé, que $\sigma_3 = 0$. On a alors $u_1 = 0$, et u_2 est arbitraire sous la condition $|u_2| \leqq 1$. D'où

$$\xi^2 = -\frac{s_2}{2} + u_2$$

et l'inégalité (26) est encore valable.

Nous allons voir que $\sqrt{\frac{n}{2}}$ est la valeur asymptotique cherchée. Cela résulte du calcul de la limite d'une racine. Comme l'équation (III) est un cas particulier de l'équation (II), cette limite est inférieure ou égale à $\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}$; d'autre part, l'équation particulière (II), dont toutes les racines sont, en modules, supérieures ou égales à $\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}$, *a tous ses termes de degrés impairs nuls;* c'est donc une équation (III) particulière. On voit donc, sans autre calcul, que *la limite exacte d'une racine de* (III) *est égale à* $\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}$. Comme cette valeur est une borne inférieure pour la limite de deux racines, *la limite de deux racines de* (III) *est asymptotiquement égale à la limite d'une racine*. D'ailleurs, un calcul exact montre que pour $n = 4$, 5 et 6, ces deux limites sont rigoureusement égales.

Les résultats précédents subsistent intégralement lorsque, dans l'équation (III), *on assujettit à s'annuler un nombre quelconque de termes de degrés impairs*. Il est assez remarquable que l'annulation du terme de degré trois dans (II) suffise seule à ramener la limite de deux racines, de la valeur de M. Biernacki, à la racine carrée de cette valeur (au facteur indépendant de n près), et que l'annulation d'un nombre quelconque d'autres termes de degrés impairs n'amène plus de modifications sensibles.

On a des résultats moins précis lorsque, dans (II), au lieu d'annuler le terme en x^3, on annule un terme quelconque de degré impair $(2p+1)$ indépendant de n. La seconde équation (24) est alors remplacée par

$$\sigma_{2p+1} + \sigma_{2p} u_1 + \sigma_{2p-1} u_2 = 0.$$

Mais si l'on tient compte des formules de Newton ([1]), et de l'inégalité (25) toujours valable, on déduit de l'équation précédente l'inégalité

$$|s_1|^{2p+1} \leqq \Phi(|s_1|, |s_2|, \ldots, |s_{2p}|),$$

Φ étant un polynome de degré au plus égal à $2p$, par rapport à l'ensemble des variables $|s_1|, |s_2|, \ldots, |s_{2p}|$; comme $|s_m| \leqq n-2$ quel que soit m,

$$|s_1| \leqq K n^{\frac{2p}{2p+1}},$$

K étant une constante ne dépendant que de p; on arrive d'ailleurs à une inégalité de même forme quand on suppose le déterminant de (Σ) nul. On a donc, au lieu de (26), l'inégalité

$$|\xi| \leqq \sqrt{\frac{K}{2}}\, n^{\frac{2p}{2p+1}}$$

pour la limite de deux racines. La limite d'une racine est toujours égale à $\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}$. Si l'on annule de même dans (II) un terme de degré pair $2p$ indépendant de n, on a encore pour la limite de deux racines, l'inégalité

$$|\xi| \leqq K' n^{\frac{2p-1}{2p}},$$

mais ici la limite d'une racine est seulement inférieure ou égale à $\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Il est d'ailleurs aisé d'en donner une meilleure borne supérieure.

([1]) Cet usage des formules de Newton dans ce numéro et dans le suivant s'apparente à un procédé de M. Van Vleck ([8], p. 108), déjà employé auparavant, d'ailleurs, par MM. Carmichael et Mason, dans un article du *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 21, 1914, p. 14-22.

On doit en effet, supposer ici $|u_1| \leqq 2$, $|u_2| \leqq 1$ dans la discussion du système (Σ). D'où $|s_1| \leqq 2$. D'autre part, dans l'équation

$$\sigma_{2p} + \sigma_{2p-1} u_1 + \sigma_{2p-2} u_2 = 0,$$

où l'on exprime les σ en fonction des s, le premier terme seul contient un terme de degré *p par rapport aux variables autres que* s_1, à savoir le terme en s_2^p. On en déduit donc, comme ci-dessus,

$$|s_2| \leqq K'' n^{\frac{p-1}{p}},$$

d'où, pour la limite d'une racine, l'inégalité

$$|\xi| \leqq \sqrt{\frac{K''}{2}} n^{\frac{p-1}{2p}}.$$

Par contre, on n'obtient plus de bornes supérieures meilleures que pour l'équation (II) générale, lorsqu'on annule un terme de cette équation, dont le degré croît indéfiniment avec n, comme le montre l'équation (I).

9. Pour terminer la première partie de ce Chapitre, nous allons chercher *l'ordre de croissance* par rapport à n de la limite ρ du module d'une racine de l'équation la plus générale

$$\text{(IV)} \quad P(x) \equiv 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n = 0,$$

où l'on a fixé les p coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Nous supposerons d'abord $a_1 \neq 0$; on peut alors prendre $a_1 = 1$ par une transformation linéaire sur x. Considérons la transformée de l'équation en $y = \frac{\xi}{x}$, avec $|\xi| = \rho$, et désignons par $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ les sommes des puissances semblables des racines de l'équation en y; on a, quel que soit m,

$$(27) \qquad |S_m| \leqq n.$$

Écrivons les p premières formules de Newton pour l'équation en y, sous la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{S_1}{\xi} + 1 = 0,\\
&\frac{S_2}{\xi^2} + \frac{S_1}{\xi} + 2a_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{S_p}{\xi^p} + \frac{S_{p-1}}{\xi^{p-1}} + a_2\frac{S_{p-2}}{\xi^{p-2}} + \dots + a_{p-1}\frac{S_1}{\xi} + pa_p = 0.
\end{aligned}$$

En éliminant $\frac{S_1}{\xi}, \frac{S_2}{\xi^2}, \dots, \frac{S_{m-1}}{\xi^{m-1}}$ entre les m premières équations précédentes, il vient, pour $m = 1, 2, \dots, p$,

$$\text{(E)}\qquad \left\{\begin{aligned}
&\xi = -S_1,\\
&S_2 = \Phi_2(a_2)S_1^2,\\
&\dots\dots\dots\dots;\\
&S_m = \Phi_m(a_2, a_3, \dots, a_m)S_1^m,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
&S_p = \Phi_p(a_2, a_3, \dots, a_p)S_1^p,
\end{aligned}\right.$$

où

$$\Phi_m(a_2, a_3, \dots, a_m) = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
2a_2 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
3a_3 & a_2 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & . & . & \dots & \dots & .\\
ma_m & a_{m-1} & a_{m-2} & . & \dots & a_2 & 1
\end{vmatrix} \quad (^1).$$

Ces déterminants sont d'ailleurs liés par la formule de récurrence

$$(28)\quad \Phi_m = \Phi_{m-1} - a_2\Phi_{m-2} + a_3\Phi_{m-3} + \dots + (-1)^{m-2}a_{m-1} + (-1)^{m-1}ma_m.$$

Soit alors Φ_k le déterminant de plus grand indice qui soit différent de zéro. On a, d'après (27),

$$(29)\qquad \rho = |S_1| \leqq \left(\frac{n}{\Phi_k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

---

(1) Cette expression n'est autre que le coefficient de x^{k-1} dans le développement de $\frac{P'(x)}{P(x)}$, au signe près, comme il résulte immédiatement de la démonstration des formules de Newton.

et, si tous les Φ sont nuls,

$$\rho \leqq n. \tag{30}$$

Nous allons montrer que *ces inégalités sont les meilleures possibles,* à un facteur constant près. Il suffit évidemment pour cela, de trouver une famille d'équations pour lesquelles $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ont les valeurs fixées, dont le degré n croît indéfiniment, et telles que le module de racine du plus petit module de chacune de ces équations croisse avec n au moins comme la puissance de n qui figure dans l'inégalité (29) ou l'inégalité (30) correspondantes.

Examinons d'abord le cas général où $\Phi_p \neq 0$. Considérons la famille des polynomes

$$\Pi_{n,p}(x) = \left[1 + \frac{Q_{n,p}(x)}{n}\right]^n,$$

$Q_{n,p}(x)$ étant un polynome de degré p

$$Q_{n,p}(x) \equiv \alpha_1^{(n)} x + \alpha_2^{(n)} x^2 + \ldots + \alpha_p^{(n)} x^p$$

choisi de sorte que les p premiers coefficients de $\Pi_{n,p}(x)$ soient égaux à $a_1, a_2, \ldots, a_p$. On voit immédiatement que les coefficients $\alpha_i^{(n)}$ sont bien déterminés, en fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et que, à partir d'une certaine valeur de n, ils sont aussi voisins que l'on veut des coefficients du polynome $Q_p(x)$ de degré p, tel que $e^{Q_p(x)}$ ait ses p premiers coefficients égaux à $a_1, a_2, \ldots, a_p$. En particulier, les modules de ses coefficients ont une borne supérieure K *indépendante de n.*

Or, pour toute racine de $\Pi_{n,p}(x)$,

$$|Q_{n,p}(x)| = n$$

et, d'autre part,

$$|Q_{n,p}(x)| \leqq \mathrm{K}p\,|x|^p \qquad \text{dès que} \qquad |x| \geqq 1,$$

d'où

$$|x| \geqq \left(\frac{n}{\mathrm{K}p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui démontre dans ce cas la proposition.

Passons maintenant au cas extrême où

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \ldots = \Phi_p = 0.$$

Remarquons d'abord que si

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \ldots = \Phi_{m-1} = 0,$$

la formule (28) donne

$$\Phi_m = (-1)^{m-2} a_{m-1} + (-1)^{m-1} m a_m.$$

Le cas que nous envisageons n'est donc possible que si $m a_m = a_{m-1}$ pour $m = 2, 3, \ldots, p$, d'où

$$a_2 = \frac{1}{2!}, \qquad a_3 = \frac{1}{3!}, \qquad \ldots, \qquad a_p = \frac{1}{p!},$$

Nous allons nous restreindre ici aux équations dont le degré est un multiple de 2^{p-1}. Soient alors

$$\omega_2 = e^{\frac{i\pi}{2}}, \qquad \omega_3 = e^{\frac{i\pi}{3}}, \qquad \ldots, \qquad \omega_p = e^{\frac{i\pi}{p}}.$$

Considérons le produit

$$\varpi_1 = (1 + \omega_2)(1 + \omega_3) \ldots (1 + \omega_p).$$

En le développant, on trouve 2^{p-1} termes de module *un*, distincts ou non. Choisissons notre équation en y qui correspond à (IV), de sorte qu'elle ait $\frac{n}{2^{p-1}}$ racines égales à chacun de ces termes. On a alors

$$S_k = \frac{n}{2^{p-1}}(1 + \omega_2^k)(1 + \omega_3^k) \ldots (1 + \omega_p^k) = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, p)$$

et

$$\rho = |S_1| = \frac{n}{2^{p-1}} |\varpi_1| = n \cos\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{6} \ldots \cos\frac{\pi}{2p},$$

ce qui démontre encore que, dans ce cas, l'inégalité (30) est la meilleure, à un facteur constant près.

Nous allons combiner les deux méthodes précédentes pour étudier le cas plus compliqué où $\Phi_k \neq 0$,

$$\Phi_{k+1} = \Phi_{k+2} = \ldots = \Phi_p = 0.$$

Nous considérerons ici des équations de degré $n = 2^{p-k}km$, m pouvant croître indéfiniment.

Pour former ces équations, prenons $(k-1)$ nombres $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$, *fixes*, mais quelconques, et soit $\Pi_{mk,k}(x)$ le polynome de degré km formé comme il a été dit plus haut, dont les $(k+1)$ premiers termes sont

$$1 + x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$$

et dont toutes les racines sont supérieures en module à $\rho = \left(\frac{m}{K}\right)^{\frac{1}{k}}$, K ne dépendant que des α. Multiplions chacune de ces racines par les 2^{p-k} termes (de module *un*) du développement de

$$\overline{\varpi}_k = (1 + \overline{\omega}_{k+1})(1 + \overline{\omega}_{k+2}) \ldots (1 + \overline{\omega}_p),$$

les ω ayant la même signification que ci-dessus; soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les nombres obtenus. Nous allons considérer l'équation (e) de degré n ayant pour racines les nombres $\frac{x_1}{\overline{\varpi}_k}, \frac{x_2}{\overline{\varpi}_k}, \ldots, \frac{x_n}{\overline{\varpi}_k}$; elle est bien de la forme

$$1 + x + \ldots = 0.$$

Montrons qu'en choisissant convenablement les α, on peut amener cette équation à être du type (IV), $a_2, \ldots, a_p$ étant donnés et satisfaisant aux conditions

$$\Phi_{k+1} = \Phi_{k+2} = \ldots = \Phi_p = 0.$$

Ceci va résulter de ce qu'en vertu de (28), *si l'on se donne arbitrairement les valeurs de* $\Phi_2(a_2)$, $\Phi_3(a_2, a_3)$, $\ldots$, $\Phi_i(a_2, \ldots, a_i)$, *les valeurs* de $a_2, a_3, \ldots, a_i$ sont bien déterminées. Il suffit donc que les valeurs de $\Phi_2, \ldots, \Phi_p$ relatives à deux équations de la forme (31) soient égales pour que les valeurs des p premiers coefficients de ces équations soient égales.

Or, pour l'équation (e), le relations (E) s'écrivent (avec les mêmes notations que précédemment, sauf que ξ a ici une valeur arbitraire, sans rapport avec la limite des racines) :

$$\xi = - S_1,$$

$$S_2 = \frac{(1+\omega_{k+1}^2)(1+\omega_{k+2}^2)\dots(1+\omega_p^2)}{\varpi_k^2}\Phi_2(\alpha_2)S_1^2,$$

$$S_3 = \frac{(1+\omega_{k+1}^3)\dots(1+\omega_p^3)}{\varpi_k^3}\Phi_3(\alpha_2, \alpha_3)S_1^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$S_k = \frac{(1+\omega_{k+1}^k)\dots(1+\omega_p^k)}{\varpi_k^k}\Phi_k(\alpha_2, \dots, \alpha_k)S_1^k,$$

$$S_{k+1} = 0,$$

$$\dots\dots;$$

$$S_p = 0.$$

Choisissons maintenant les α de sorte que

$$\Phi_i(a_2, a_3, \dots, a_i) = \frac{(1+\omega_{k+1}^i)\dots(1+\omega_p^i)}{\varpi_k^i}\Phi_i(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i)$$
$$(i = 2, 3, \dots, k).$$

Ce choix est possible et donne pour les α des valeurs finies, puisque le coefficient de $\Phi_i(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i)$ est différent de zéro; de plus *il est indépendant des raisonnements précédents*. On obtient bien ainsi une équation du type désiré, dont toutes les racines sont supérieures en module à

$$\frac{\rho}{|\varpi_k|} = \left(\frac{n}{M}\right)^{\frac{1}{k}},$$

M étant un nombre fini ne dépendant que des valeurs $a_2, a_3, \dots, a_p$. La proposition est complètement démontrée.

On voit donc que *l'ordre de croissance du maximum du module de la plus petite racine de* (IV) *est égal à* $\frac{1}{k}$, *k étant l'indice maximum pour lequel* $\Phi_k \neq 0$ (en prenant $\Phi_1 = 1$). On peut considérer cette famille de polynomes comme *d'autant plus exceptionnelle* que k est plus petit, et, à ce point de vue, la famille *la plus exceptionnelle* est la famille des polynomes

$$P_p(x) \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^p}{p!} + a_{p+1}x^{p+1} + \dots + a_n x^n.$$

Par une transformation linéaire, on peut encore exprimer les résultats qui précèdent sous la forme du théorème suivant : *Un polynome*

$$P(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n,$$

où les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ *ont des valeurs fixes* ($a_1 \neq 0$), *les autres coefficients étant arbitraires, prend toute valeur c au moins une fois, dans un cercle de rayon* $K(a_0, a_1, \ldots, a_p, c) n^{\frac{1}{p}}$, *à l'exception de* $(p-1)$ *valeurs distinctes au plus, racines de l'équation*

$$F_p(a_0, a_1, \ldots, a_p, c) \equiv \Phi_p\left[\frac{(a_0-c)a_2}{a_1^2}, \frac{(a_0-c)^2 a_3}{a_1^3}, \ldots, \frac{(a_0-c)^{p-1}a_p}{a_1^p}\right] = 0.$$

Ces valeurs sont prises au moins une fois dans un cercle de rayon $K_1(a_0, a_1, \ldots, a_p) n^{\frac{1}{p-1}}$, *si le polynome n'a pas une forme particulière ; mais si les coefficients sont choisis de sorte que les équations*

$$F_p = 0, \qquad F_{p-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad F_k = 0$$

aient h racines communes distinctes ($h \leqq k - 1$) *qui ne soient pas racines de* $F_{k-1} = 0$, *le polynome prend au moins une fois chacune de ces valeurs dans un cercle de rayon* $K_{p-k}(a_0, a_1, \ldots, a_p) n^{\frac{1}{k-1}}$. *L'ordre de croissance de ces limites par rapport à n ne peut être amélioré.*

Nous avons supposé jusqu'ici $a_1 \neq 0$. Si l'on prend au contraire $a_1 = a_2 = \ldots = a_{q-1} = 0$, $a_q = 1$, il est aisé de voir que la seule modification sensible qui soit apportée aux résultats précédents est que l'inégalité (30) est remplacée par

$$\rho \leqq \left(\frac{n}{q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{32}$$

Les inégalités (29) où $k > q$ restent inaltérées, et les mêmes méthodes que ci-dessus montrent que ces inégalités donnent encore la meilleure limite possible, à un facteur constant près.

II.

10. Revenons maintenant à l'équation (3); nous allons nous arrêter sur un aspect particulier du problème posé au début de ce Chapitre.

Il est bien évident que la plus petite valeur possible pour la limite du module d'une ou plusieurs racines de (3) est l'unité; on est donc conduit à *rechercher dans quel cas l'équation* (3) *a effectivement toujours une racine au moins dans le cercle unité*, *et*, *si cela est possible*, *quel est le nombre minimum de ces racines.* Ce problème a été résolu par M. Herglotz [5], puis repris à l'aide d'une méthode différente par M. Biernacki ([9], p. 573), *dans le cas de l'équation trinome,*

$$1 + x^p + ax^n = 0. \tag{33}$$

Si n n'est pas multiple de p, il y a au moins $E\left(\frac{p}{2}\right)$ racines dans le cercle unité, et cette limite est la meilleure possible; si n est multiple de p, il existe des équations de la forme (33) n'ayant aucune racine dans le cercle unité. Remarquons d'ailleurs que ce résultat peut se déduire très aisément d'une règle générale donnée antérieurement par M. Bohl [4] pour calculer, en fonction de a, le *nombre exact* des racines de l'équation (33) situées à l'intérieur d'un cercle *quelconque* de centre l'origine.

M. Biernacki a, de plus, montré ([9], p. 583) que, dans le cas particulier où $p < n_1 < n_2 < 2p$, l'équation quadrinome

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$$

a toujours une racine au moins dans le cercle unité.

Nous allons indiquer quelques cas relatifs à ce problème, en considérant plus spécialement le cas de l'équation quadrinome.

11. Remarquons d'abord que, en vertu de ce qui précède, on a une *condition nécessaire* pour que l'équation (3) ait toujours une racine au moins dans le cercle unité; à savoir, qu'aucun des degrés n_i ne soit multiple de p (ce qui entraîne $p > 1$). Nous allons montrer de plus qu'*il faut qu'aucune des différences* $(n_i - n_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ *ne soit égale à* p. Il suffit pour cela d'établir que l'équation quadrinome

$$1 + x^p + a_1 x^{n-p} + a_2 x^n = 0 \tag{34}$$

peut avoir toutes ses racines extérieures au cercle unité.

Ceci va résulter de ce que l'équation (34) peut avoir toutes ses racines égales en module à un nombre ρ supérieur à 1. La transformée en

$y = \frac{\xi}{x}$, avec $|\xi| = \rho$,

(35) $$y^n + \xi^p y^{n-p} + b_1 y^p + b_2 = 0,$$

a dans ce cas toutes ses racines de module *un*; il suffit de voir que cela est possible pour une valeur de $|\xi|$ supérieure à *un*.

Or, M. I. Schur a montré ([10 *b*], p. 136) que *pour que l'équation*

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

ait toutes ses racines distinctes et de module un, il est nécessaire et suffisant que

$$a_0 \bar{a}_{n-\nu} = \bar{a}_n a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et que les racines de $f'(x) = 0$ *soient toutes intérieures au cercle unité.*

Ces conditions, appliquées à (35), s'écrivent

$$b_2 = \varepsilon \quad \text{avec} \quad |\varepsilon| = 1 \qquad \text{et} \qquad b_1 = \varepsilon \bar{\xi}^p;$$

de plus, l'équation dérivée, débarrassée de ses $(p - 1)$ racines nulles,

(36) $$ny^{n-p} + (n-p)\xi^p y^{n-2p} + p\varepsilon\bar{\xi}^p = 0.$$

doit avoir toutes ses racines intérieures au cercle unité. Par une rotation convenable sur y, on peut supposer que $\varepsilon\bar{\xi}^p = \xi^p$; l'équation (39) peut donc s'écrire

$$\frac{1}{\xi^p} = -\frac{(n-p)y^{n-2p} + p}{ny^{n-p}} \equiv \varphi(y).$$

Or, lorsque y décrit la circonférence $|y| = 1$, le point $z = \varphi(y)$ décrit une courbe (Γ) qui possède, ainsi qu'on s'en assure aisément, les propriétés suivantes [1] : lorsque y décrit la circonférence dans le sens positif, z tourne constamment dans le sens négatif autour de l'origine et $|z|$ varie entre les bornes $m = \frac{n-2p}{n}$ et $M = 1$ $(m < M)$. Donc, pour que (36) ait toutes ses racines intérieures au cercle unité, il faut et il suffit que le point $\frac{1}{\xi^p}$ soit extérieur au *contour apparent* de (Γ) [j'appelle ainsi le lieu du point de (Γ) le plus éloigné de l'origine sur chaque rayon vecteur]; c'est en effet le seul cas où $\arg\left[\frac{1}{\xi^p} - z\right]$ ne varie pas

[1] Ces propriétés seront établies, dans un cas plus général aux nos 15 et 19.

lorsque y décrit la circonférence $|y| = 1$. Mais il existe certainement des points de ce contour apparent intérieurs au cercle $|z| = 1$, puisque le maximum de $|z|$ ne peut être atteint que pour $y^{n-2p} = 1$, donc en $(n - 2p)$ points. Il y a donc des valeurs de ξ, de module supérieur à *un*, pour lesquelles (36) a toutes ses racines intérieures au cercle unité, ce qui démontre la proposition.

Remarquons en passant que si $p = 1$, la courbe (Γ) coïncide avec son contour apparent; la plus grande valeur possible de $|\xi|$ est alors $\frac{n}{n-2}$; cette valeur est d'ailleurs ici la limite exacte d'une racine puisqu'elle coïncide avec la limite de M. Biernacki. On pourrait d'ailleurs le voir autrement; l'équation (34) a dans ce cas une lacune autosymétrique pour laquelle $r = 2$, $s = n - 3$; comme, d'après le théorème de M. Biernacki, on ne peut avoir $l > n - 3$ lorsque la limite est atteinte, il faut nécessairement que $l = 0$ ou $l = 1$. D'ailleurs, si $l = 1$, on a, d'après (12), $\sigma_1 = 0$, d'où $|\xi| = |y_n| \leq 1$; la limite est donc bien atteinte pour $l = 0$.

12. Revenons au problème posé au n° 10; remarquons qu'on peut le considérer comme complémentaire de celui que nous avons étudié dans la première partie; il s'agissait alors, étant donné un entier h, de trouver un cercle qui contienne toujours un nombre de racines au moins égal à h; ici, au contraire, c'est le cercle qui est donné, et le nombre minimum de racines intérieures qui est inconnu. Il semble donc naturel de s'adresser, pour attaquer ce problème, à des formules analogues à celle de Cauchy donnant le nombre des racines d'une équation dans un contour; et de fait, c'est au fond une transformation de la formule de Cauchy qui va nous fournir notre méthode d'investigation.

Nous avons exposé cette méthode, en vue d'autres applications, dans un travail antérieur [12] auquel nous renverrons pour les démonstrations. A quelques modifications de détail près, la règle fondamentale à laquelle nous sommes parvenus, et qui va nous servir de base, peut s'énoncer de la manière suivante :

Considérons l'équation

$$1 + z^2 - 2z\varphi(z) = 0, \tag{37}$$

que nous supposerons n'avoir aucune racine sur la circonférence du cercle unité. Par hypothèse, $\varphi(z)$ est une fonction méromorphe dans le cercle unité (C) *et sur sa circonférence. Elle fait correspondre à* (C) *un domaine* (Δ) *étalé sur une certaine surface de Riemann* (Σ) *à un nombre fini de feuillets; nous supposerons que les points* ± 1 *ne sont pas des points de ramification de cette surface* ([1]).

Dans chaque feuillet, traçons le segment L, *joignant les points* ± 1, *et divisons la partie de* (Δ) *qui se trouve dans ce feuillet en un nombre fini de domaines, à l'aide de lignes auxiliaires* l, *ne coupant pas* L, *de sorte que chaque domaine partiel rentre dans l'une des quatre catégories suivantes :*

1° *Ou bien le segment* L *est complètement extérieur au domaine ;*

2° *Ou bien le segment* L *est complètement intérieur au domaine ;*

3° *Ou bien la partie* (γ) *de la frontière du domaine qui fait aussi partie de la frontière de* (Δ) *coupe* L *en un seul point* N, *la portion du segment* L *allant de* N *au point* $+1$ *étant intérieure au domaine partiel* [*ou, d'une manière analogue,* (γ) *coupe* L *en un seul point* M, *la portion de* L *qui va de* M *à* -1 *étant intérieure au domaine*];

4° *Ou bien* (γ) *coupe* L *en deux points* M, N $[\mathcal{R}(\mathrm{N}) < \mathcal{R}(\mathrm{M})]$ ([2]) *tels que le segment* MN *soit intérieur au domaine.*

Attachons alors à chaque domaine partiel un indice δ *égal à zéro pour les domaines de première catégorie, à un pour les domaines de deuxième catégorie. Pour les domaines de troisième et quatrième catégorie, désignons par* P *et* Q *les points de la circonférence de* (C) *auxquels la fonction* $\varphi(z)$

([1]) Dans les applications, la fonction $\varphi(z)$ dépendra en général d'un certain nombre de paramètres arbitraires, et les deux restrictions que nous faisons sur cette fonction sont en général vérifiées sauf pour un nombre fini de valeurs de ces paramètres : on étudiera donc simplement ce qui se passe pour ces valeurs en s'appuyant sur la continuité des racines en fonction des paramètres. Au besoin, si $\varphi(z)$ ne contient pas de paramètres arbitraires, il est toujours possible d'en introduire un, comme nous le verrons plus loin (n° 13).

([2]) $\mathcal{R}(z)$ ou $\mathcal{R}(\mathrm{M})$ désignera, dans tout ce qui suit, la partie réelle de la variable z ou de l'affixe du point M.

fait correspondre les points désignés par M *et* N, *et posons*

$$I_P = \frac{\mathcal{R}(P) - \mathcal{R}(M)}{|\mathcal{R}(P) - \mathcal{R}(M)|}, \qquad I_Q = \frac{\mathcal{R}(Q) - \mathcal{R}(N)}{|\mathcal{R}(Q) - \mathcal{R}(N)|} \quad (^1).$$

Nous ferons alors correspondre aux domaines de troisième catégorie l'indice

$$\delta = \frac{1 + I_Q}{2}$$

ou

$$\delta = \frac{1 - I_P}{2},$$

suivant qu'on est dans l'un ou l'autre des cas définis ci-dessus. Enfin, pour les domaines de quatrième catégorie, nous prendrons

$$\delta = \frac{I_Q - I_P}{2}.$$

Ceci posé, le nombre des racines de l'équation (37) *intérieures au cercle unité est égal à*

$$\mathcal{N} = 1 + \Sigma\,\delta, \tag{38}$$

la somme étant étendue à tous les domaines partiels.

Il est facile de généraliser cette règle lorsque, au lieu de prendre $\varphi(z)$ holomorphe dans (C), on suppose que cette fonction admet, dans (C), p déterminations se permutant entre elles, et n'a d'ailleurs dans (C) d'autres singularités que des points critiques algébriques ou des pôles. Il faut alors remplacer le cercle (C) par p cercles superposés situés sur p feuillets de la surface de Riemann (S) sur laquelle $\varphi(z)$ est uniforme. On raisonnera comme ci-dessus sur chacun de ces cercles, entaillé par des coupures le long des lignes de croisement de (S); on constate aisément que ces coupures n'interviennent pas dans l'évaluation finale de $\mathcal{N}$. Si (Δ) est encore le domaine que $\varphi(z)$ fait corres-

---

(1) Ces formules n'ont plus de sens lorsque $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(M)$ ou $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(N)$; une racine au moins (et une seule en général) vient alors sur la circonférence, au point P ou Q suivant le cas.

pondre aux p cercles situés sur (S), on a, au lieu de (38), la formule

$$\mathfrak{N} = p + \Sigma\,\delta, \tag{39}$$

la sommation étant étendue aux domaines partiels de (Δ).

C'est de cette formule que nous allons faire usage dans l'étude des équations de la forme

$$1 + z^{2p} - 2z^p\varphi(z) = 0, \tag{40}$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans le cercle (C); en posant $z^p = t$, on obtient bien en effet une équation du type (37), et $\varphi\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ est une fonction à p déterminations se permutant autour du seul point critique $t = 0$.

13. Considérons d'abord le cas où, dans l'équation (40), on a $\varphi(0) = 0$ et où, de plus, le domaine (Δ) est *étoilé* par rapport à l'origine. Nous entendons par là que, lorsque le point z décrit la circonférence (C) dans le sens positif, le rayon vecteur joignant le point $Z = 0$ au point $Z = \varphi(z)$ tourne toujours dans le sens positif. En choisissant comme lignes de croisement de la surface (Σ) des demi-droites issues de $Z = 0$, ou dont le prolongement passe par ce point, on voit, d'après cette définition, que la partie du domaine (Δ), située dans un feuillet quelconque, forme un domaine *étoilé*, au sens ordinaire [1].

Nous allons chercher, dans ce cas, à obtenir un *minimum* pour $\mathfrak{N}$. Considérons, au lieu de (40), l'équation plus générale

$$1 + z^{2p} - 2\lambda z^p\varphi(z) = 0, \tag{41}$$

où nous supposerons d'abord que λ est un paramètre *réel* pouvant varier de 0 à $+\infty$. Il est alors évident, en vertu de notre règle et du fait que (Δ) est étoilé, que, lorsque λ croît à partir d'une valeur λ_0 telle que $|\lambda_0\varphi(z)| < 1$ dans le cercle unité, *le nombre des racines de* (41) *intérieures au cercle unité ne peut décroître;* en effet, pour $\lambda = \lambda_0$, tous les domaines partiels sont de quatrième catégorie; lorsque λ croît, les points Q et P *ne dépendent pas de* λ, $\mathcal{R}(M)$ croît et $\mathcal{R}(N)$ décroît, donc I_Q ne peut que croître et I_P que décroître; d'autre part, le passage

---

[1] C'est-à-dire que si M est un point intérieur au domaine ou sur sa frontière, il n'y a aucun point du segment OM extérieur au domaine.

d'un domaine de quatrième catégorie à un domaine de troisième catégorie se marque en faisant $I_Q = +1$ ou $I_P = -1$, et le passage à un domaine de seconde catégorie en donnant simultanément à I_Q et I_P ces deux valeurs. Pour avoir le minimum de $\mathfrak{N}$, nous pouvons donc prendre λ suffisamment petit pour que la plus grande de toutes les quantités $|\mathcal{R}(M)|$, $|\mathcal{R}(N)|$ soit inférieure à la plus petite de toutes les quantités $|\mathcal{R}(P)|$, $|\mathcal{R}(Q)|$ différentes de zéro.

Remarquons d'autre part que, comme (39) s'écrit

$$\mathfrak{N} = p + \frac{1}{2}\Sigma(I_Q - I_P) = p + \frac{1}{2}\Sigma I_Q - \frac{1}{2}\Sigma I_P$$

et qu'ici les points M et N sont bien définis, indépendamment de la décomposition de (Δ) en domaines partiels [puisque les points N sont ceux situés sur le segment $(0, -1)$ et les points M ceux situés sur le segment $(0, +1)$], on peut associer ces points d'une manière arbitraire, sans tenir compte de cette décomposition. Nous associerons alors à chaque point N le premier point M que l'on rencontre lorsque t parcourt (C) dans le sens positif, en partant du point Q. Les indices que nous évaluerons sont ceux que donne la formule

$$\delta = \frac{I_Q - I_P}{2},$$

lorsqu'on l'applique à deux points associés.

Prenons alors pour un arc $\widehat{QP}$ correspondant à deux points associés la détermination comprise entre 0 et 2π, et désignons par ω_1 et ω_2 les points d'affixes $t_1 = +i$, $t_2 = -i$ sur la circonférence (C). En tenant compte du choix de λ, on voit que :

$\delta = +1$ si $\widehat{QP}$ contient ω_1 au sens large, et ne contient pas ω_2 au sens strict (¹);

$\delta = 0$ si $\widehat{QP}$ contient ω_1 au sens large et ω_2 au sens strict;

$\delta = -1$ si $\widehat{QP}$ ne contient pas ω_1 au sens large, et contient ω_2 au sens strict.

(¹) Nous dirons qu'un arc contient un point *au sens strict* si ce point est intérieur à l'arc, *au sens large* si le point est intérieur à l'arc ou confondu avec une de ses extrémités.

On a donc, quel que soit λ réel et positif,

$$\mathfrak{N} \geqq p + l_1 - l_2, \tag{42}$$

l_1 étant *le nombre des arcs* $\widehat{QP}$ *contenant* ω_1 *au sens large,* l_2 *celui des arcs* $\widehat{QP}$ *contenant* ω_2 *au sens strict*. Il est d'ailleurs évident que ce résultat est encore exact si l'on prend une détermination quelconque pour $\widehat{QP}$ (étant entendu que si un arc contient un point k fois, il est compté k fois dans l'évaluation de l_1 ou l_2).

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par θ l'argument de z, par $\vartheta = p\theta$ l'argument de $t = z^p$, et nous poserons

$$Z_k(\vartheta) = \varphi\left[e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{p}}\right].$$

Prenons alors pour chaque arc $\widehat{QP}$ sa détermination *naturelle* : nous entendons par là la variation de ϑ lorsque le point $\varphi(e^{i\theta})$ va de N en M le long de la frontière de (Δ), en tournant dans le sens positif et sans passer deux fois par la même position. Dans ces conditions, on peut encore dire que l_1 *est égal au nombre des points* $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *situés dans le demi-plan inférieur ou sur l'axe réel du plan des* Z ; de même, l_2 *est égal au nombre des points* $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *situés dans le demi-plan inférieur du plan des* Z (*à l'exclusion de l'axe réel*).

Si maintenant on donne au paramètre λ des valeurs complexes, cela revient à faire tourner le domaine (Δ) autour de l'origine; il faut donc remplacer l'inégalité (42) par

$$\mathfrak{N} \geqq p + l, \tag{43}$$

l étant le minimum de $(l_1 - l_2)$, lorsqu'on remplace, dans la définition de ces nombres, le demi-plan inférieur du plan des Z *par un demi-plan limité par une droite arbitraire pivotant autour de l'origine.*

Il résulte d'ailleurs de la démonstration que l'inégalité (43) est la meilleure possible, car elle se transforme en égalité pour une valeur convenable de λ.

14. On peut encore donner l'énoncé suivant, plus simple d'aspect,

mais moins précis : *Si, parmi les p points* $Z_k(\vartheta)$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$, *il y en a toujours* l_0 *au moins situés d'un même côté d'une droite issue de l'origine (y compris les points situés sur la droite) lorsque* ϑ *et cette droite varient arbitrairement, le nombre des racines de l'équation* (41) *intérieures au cercle unité, est au moins égal à* $2l_0$, *quel que soit le paramètre* λ. En effet, on a $l_1 \geqq l_0$ et $l_2 \leqq p - l_0$. Mais le fait que la limite obtenue est un nombre pair montre que certainement cette limite n'est pas toujours atteinte.

En faisant des hypothèses supplémentaires sur $\varphi(z)$, on peut arriver à de meilleures limites. Supposons par exemple que p soit *impair*, et $\varphi(z)$ une fonction *paire*, alors tout point d'affixe $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est confondu avec un point d'affixe $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; on a donc

$$l_1 \geqq l_2, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{N} \geqq p.$$

Supposons maintenant que p soit *pair* et $\varphi(z)$ *impaire* ; on a dans ce cas $l_1 \geqq \frac{p}{2}$ et $l_2 \leqq \frac{p}{2}$ puisque les points d'affixe $Z_k(\vartheta)$ sont symétriques deux à deux par rapport à l'origine ; donc ici encore $\mathfrak{N} \geqq p$. On peut résumer ces deux propriétés en disant que *si* $z^p\varphi(z)$ *est une fonction impaire, on a toujours*

$$\mathfrak{N} \geqq p. \tag{44}$$

15. L'application de ces propriétés à l'équation trinome donnerait immédiatement le résultat de MM. Herglotz et Biernacki. Nous allons les utiliser dans l'étude de l'équation quadrinome. Nous supposerons l'équation ramenée à la forme

$$1 + z^{2p} + a_1 z^{n_1} + a_2 z^{n_2} = 0 \qquad (2p < n_1 < n_2), \tag{45}$$

p, n_1 et n_2 étant premiers dans leur ensemble, n_1 et n_2 pouvant être tous deux pairs (ce dernier cas se produit lorsqu'on pose $x = z^2$ dans l'équation

$$1 + x^p + a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} = 0, \tag{46}$$

où p est impair, p, m_1 et m_2 premiers dans leur ensemble; pour revenir à l'équation en x, il faudra diviser par 2 le nombre de racines trouvé).

L'équation (45) est bien du type (40) avec

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}[a_1 z^{n_1-p} + a_2 z^{n_2-p}].$$

Nous poserons

$$-\frac{a_1}{2} = \rho_1 e^{i\alpha_1}, \qquad -\frac{a_2}{2} = \rho_2 e^{i\alpha_2}, \qquad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \qquad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

La frontière du domaine (Δ) est comprise entre les cercles

$$|Z| = \rho_1 + \rho_2 \qquad \text{et} \qquad |Z| = |\rho_2 - \rho_1|.$$

Il s'ensuit que si $|\rho_2 - \rho_1| > 1$, tous les domaines partiels de (Δ) sont de première ou de seconde catégorie, suivant qu'ils ne contiennent pas ou contiennent l'origine. Donc, pour $\rho_2 - \rho_1 > 1$, on a $\mathfrak{N} = n_2$, et pour $\rho_1 - \rho_2 > 1$, $\mathfrak{N} = n_1$.

16. Pour appliquer les résultats obtenus ci-dessus, nous pouvons considérer $\frac{a_2}{a_1}$ comme fixe, a_1 comme un paramètre variable. Il nous faut d'abord déterminer pour quelles valeurs de $\frac{a_2}{a_1}$ le domaine (Δ_1) que fait correspondre au cercle unité la fonction

$$\varphi_1(z) = z^{n_1-p} + \rho e^{i\alpha} z^{n_2-p}$$

est étoilé. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$\mathcal{R}\left[\frac{e^{i\theta}\varphi_1'(e^{i\theta})}{\varphi_1(e^{i\theta})}\right] \geqq 0, \tag{47}$$

lorsque θ varie de 0 à 2π. On trouve, par un calcul facile, que cette condition est équivalente à

$$[(n_1 - p) - (n_2 - p)\rho][1 - \rho] \geqq 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho \geqq 1 \qquad \text{ou} \qquad \rho \leqq \frac{n_1 - p}{n_2 - p}. \tag{48}$$

Nous commencerons par supposer que l'une ou l'autre de ces conditions est vérifiée.

Il résulte alors des nos 13 et 14 que, tout d'abord, *si* n_1 *et* n_2 *sont* *tous deux impairs, on a*

$$\mathfrak{N} \geqq p.$$

S'il n'en est pas ainsi, il faut étudier la distribution, par rapport à une droite (D) issue de l'origine des p points

$$Z_k(\vartheta) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

lorsque ϑ et (D) varient arbitrairement. Dans l'expression de $Z_k(\vartheta)$, nous supposons α fixe; mais il est clair qu'il revient au même, pour la recherche du nombre l_0, de laisser α fixe et faire varier la droite (D), ou de laisser (D) fixe et faire varier α. Supposons donc que (D) soit l'axe réel; il nous faut évaluer le nombre minimum des quantités

$$\xi_k = \sin(n_1 - p)\frac{\vartheta + 2k\pi}{p} + \rho \sin\left[(n_2 - p)\frac{\vartheta + 2k\pi}{p} + \alpha\right]$$
$$(k = 0, 1, \ldots, p-1),$$

qui sont de même signe, lorsque ϑ et α varient arbitrairement, ρ ayant une valeur quelconque satisfaisant à (48).

Voici un procédé donnant une borne inférieure de ce nombre ne dépendant que de p, n_1 et n_2 : formons l'équation (E) de degré p ayant les ξ_k comme racines; si l'on pose

$$S_m = \sum_{k=0}^{p-1} \xi_k^m,$$

un calcul simple montre que l'on a

$$S_{2h+1} = 0,$$

sauf s'il existe deux nombres entiers μ_1 et μ_2, positifs ou négatifs, de parités différentes, et tels que

(49) $$\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$|\mu_1| + |\mu_2| \leqq 2h + 1.$$

Supposons d'abord que

$$n_1 \not\equiv 0 \pmod{p}, \qquad n_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

et soit $2q + 1$ le plus petit nombre impair tel qu'il existe deux entiers μ_1 et μ_2, solutions de (49), avec $|\mu_1| + |\mu_2| = 2q + 1$ (on a $q > 0$, d'après l'hypothèse sur n_1 et n_2). On a donc

$$S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = S_{2q-1} = 0$$

et, par suite, d'après les formules de Newton,

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2q-1} = 0,$$

a_i étant le coefficient de ξ^{p-i} dans l'équation (E). D'après le théorème de Descartes, l'équation (E) a donc au plus $p-q$ racines d'un signe déterminé, et comme toutes les racines sont réelles, *au moins q racines d'un signe déterminé*. D'après le théorème du n° 14, on a, par suite,

$$\mathfrak{N} \geqq 2q. \tag{50}$$

17. Il est parfois possible d'améliorer cette limite en utilisant la proposition plus précise du n° 13. Rangeons les solutions de la congruence (49) suivant les valeurs croissantes de $|\mu_1| + |\mu_2|$, et supposons qu'il n'existe aucun couple de solutions tel que $|\mu_1| + |\mu_2|$ soit un nombre *pair* inférieur à $2q+1$. Soient alors μ_1^0, μ_2^0 les premières solutions que l'on rencontre pour lesquelles, ou bien

$$h = |\mu_1^0| + |\mu_2^0|,$$

est un nombre *pair* ($h \geqq 2q+1$), ou bien $\mu_1^0 n_1 + \mu_2^0 n_2$ est *un multiple pair* de p.

On voit alors aisément que les sommes S_m d'indice impair inférieur à h ne changent pas lorsqu'on augmente ϑ de π, et que les sommes d'indice pair inférieur à h ne dépendent pas de ϑ.

Pour appliquer le résultat du n° 13, donnons à ϑ successivement les valeurs $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, et soient (E_1) et (E_2) les équations ayant pour racines les ξ_k correspondants. Il résulte de la remarque précédente que ces équations ont les mêmes coefficients jusqu'au terme en ξ^{p-h+1} inclus. Si v est le nombre de variations de la suite

$$a_{2q}, \quad a_{2q+1}, \quad a_{2q+2}, \quad \ldots, \quad a_{h-1},$$

il résulte immédiatement du théorème de Descartes que l'une des équations admet au plus $p - h + q + v + 1$ racines positives, et l'autre en admet au moins $q+v$; donc,

$$l_2 \leqq p-h+q+v+1, \qquad l_1 \geqq q+v$$

et

$$\mathfrak{N} \geqq h-1. \tag{51}$$

Considérons encore le cas où

$$n_2-n_1 \equiv 0 \qquad (\bmod p).$$

L'expression des points $Z_k(\vartheta)$ montre que ces points sont les sommets d'un polygone régulier de p côtés centré à l'origine. On en déduit que, si p est pair, $l_1 \geqq \frac{p}{2}$, $l_2 \leqq \frac{p}{2}$, d'où

$$\mathfrak{N} \geqq p.$$

Si p est impair, $l_1 \geqq \frac{p-1}{2}$, $l_2 \leqq \frac{p+1}{2}$, d'où

$$\mathfrak{N} \geqq p-1.$$

sauf lorsque n_1 et n_2 sont tous deux impairs, puisqu'on a vu qu'alors $\mathfrak{N} \geqq p$.

Ces dernières limites, résultant de la considération directe des points $Z_k(\vartheta)$, sont les meilleures possibles, d'après le n° 13.

Au contraire, il est aisé de donner des exemples où les limites (50) et (51) sont inférieures aux limites exactes. C'est ainsi que si

$$n_1 = 2p+1, \qquad n_2 = 2p+2,$$

la formule (50), seule applicable ici, donne $\mathfrak{N} \geqq 2$. Or, en posant

$$\zeta_k = \frac{p+1}{p}\vartheta + \frac{2k\pi}{p},$$

on a

$$\xi_k = \sin\zeta_k + \rho\sin(2\zeta_k+\psi),$$

ψ ne dépendant que de ϑ et α. La fonction

$$f(t) = \sin t + \rho \sin(2t+\psi)$$

est évidemment positive lorsque $\sin t$ et $\sin(2t+\psi)$ le sont, donc, soit dans un intervalle de la forme $\left(t_0, t_0+\frac{\pi}{2}\right)$, soit dans les deux intervalles $(0, t_0)$ et $\left(t_0 + \frac{\pi}{2}, \pi\right)$; en tout cas, il y a au moins $E\left(\frac{p}{4}\right) - 1$ valeurs de ζ_k pour lesquelles $\zeta_k > 0$, quels que soient ϑ et α; d'où

$$\mathfrak{N} \geqq 2E\left(\frac{p}{4}\right) - 2,$$

limite meilleure que la précédente dès que $p \geqq 12$.

18. Nous avons jusqu'ici laissé de côté le cas où n_1 ou n_2 est multiple de p. Si n_1, par exemple, est *un multiple impair* de p, la considération des points $Z_k(\vartheta)$ montre que

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{N} \geqq p & \text{si } n_2 - p \text{ est } \textit{pair}, \\ \mathfrak{N} \geqq p - 1 & \text{si } n_2 - p \text{ est } \textit{impair}. \end{array}$$

Ces limites sont les meilleures possibles; on en a d'analogues lorsqu'on intervertit n_1 et n_2 dans les énoncés.

Lorsque n_1 ou n_2 est multiple de $2p$, on sait que l'équation (45) peut n'avoir aucune racine intérieure au cercle unité.

Il est seulement possible ici de donner une limite inférieure de $\mathfrak{N}$ en fonction de ρ. C'est ainsi que lorsque n_1 est multiple de $2p$, on trouve aisément que pour $\rho > 1$, on a

$$\mathfrak{N} \geqq 2E\left(\frac{p\varphi_0}{2\pi}\right),$$

où

$$\varphi_0 = 2 \arc\cos \frac{1}{\rho}.$$

De même, si n_2 est multiple de $2p$ et $\rho < 1$, on a

$$\mathfrak{N} \geqq 2E\left(\frac{p\psi_0}{2\pi}\right),$$

avec

$$\psi_0 = 2 \arc\cos \rho.$$

En résumé, on peut dire que l'*équation quadrinome* (45) *a toujours une racine au moins dans le cercle unité lorsqu'on suppose vérifiée l'une des conditions* (48), *sauf lorsque* n_1 *ou* n_2 *est multiple de* $2p$.

19. Passons maintenant au cas où le domaine (Δ_1) n'est plus étoilé, ce qui correspond aux valeurs de ρ telles que

$$\frac{n_1 - p}{n_2 - p} < \rho < 1.$$

Il nous faut d'abord étudier de plus près la forme de la courbe (Γ_1), frontière de (Δ_1), définie par l'équation

$$Z = Re^{i\Theta} = e^{i(n_1 - p)\theta} + \rho e^{i[(n_2 - p)\theta + \alpha]}.$$

Posons, pour simplifier,

$$m_1 = n_1 - p, \qquad m_2 = n_2 - p.$$

Il est immédiat que, lorsque θ augmente de $\frac{2\pi}{m_2 - m_1}$, R reprend la même valeur et Θ augmente de $\frac{2m_1\pi}{m_2 - m_1}$; on peut donc se borner à étudier la portion de la courbe décrite par Z lorsque θ varie dans un intervalle d'amplitude $\frac{2\pi}{m_1 - m_2}$. On a

$$R^2 = 1 + \rho^2 + 2\rho\cos\psi,$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = m_1 + (m_2 - m_1)\frac{\rho(\rho + \cos\psi)}{R^2},$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \frac{(m_2 - m_1)^2\rho(\rho^2 - 1)\sin\psi}{R^2},$$

où

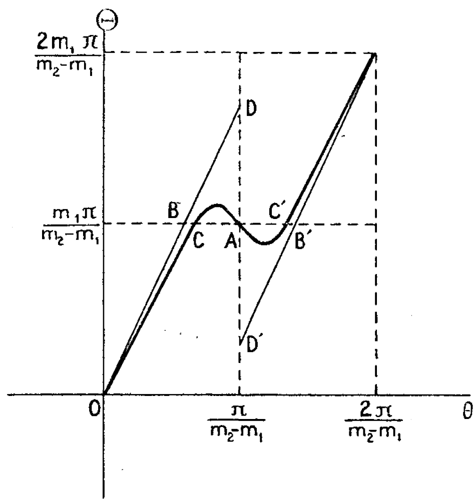
$$\psi = (m_2 - m_1)\theta + \alpha.$$

Traçons la courbe de variation de Θ en fonction de θ; on peut supposer, pour simplifier, $\alpha = 0$ et θ variant de o à $\frac{2\pi}{m_2 - m_1}$; ψ varie alors de o à 2π. Lorsqu'on change ψ en $2\pi - \psi$, $\frac{d\Theta}{d\theta}$ ne change pas; la courbe de variation de Θ est donc symétrique par rapport au point

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{m_2 - m_1}, \\ \Theta = \dfrac{m_2\pi}{m_2 - m_1}. \end{cases}$$

Comme $\frac{d\Theta}{d\theta}$ s'annule pour une seule valeur de $\cos\psi$, et que $\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$ est négatif pour $0 < \psi < \pi$, on construit aisément la courbe (*fig.* 1).

Fig. 1.



D'autre part, R^2 ne change pas lorsqu'on change ψ en $2\pi - \psi$, et décroît constamment de $(1+\rho)^2$ à $(1-\rho)^2$ lorsque ψ croît de 0 à π. La portion de la courbe (Γ_1) que nous considérons est donc symétrique par rapport à la droite $\Theta = \frac{m_1\pi}{m_2 - m_1}$; pour les valeurs de θ comprises entre les abscisses des points C et C′, elle présente une *boucle*, vue de l'origine sous un angle inférieur à π [1], et coupée en deux points au plus par tout rayon vecteur. Il est d'ailleurs aisé d'avoir une limite supérieure pour l'intervalle de variation de θ qui correspond à une demi-boucle; on a, en effet, sur la figure 1, $AC \leqq AB$, OB étant la tangente à l'origine, de coefficient angulaire

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)_0 = \frac{m_1 + m_2\rho}{1+\rho} \leqq \frac{m_1 + m_2}{2}.$$

[1] En effet, cet angle est égal à la différence du maximum et du minimum de Θ, donc inférieur à la différence des ordonnées des points D et D′ (*fig.* 3), soit

$$2\,AD = 2\left[\frac{\pi}{m_2 - m_1}\cdot\frac{m_1 + m_2\rho}{1+\rho} - \frac{m_1\pi}{m_2 - m_1}\right] = \frac{2\rho\pi}{1+\rho} < \pi.$$

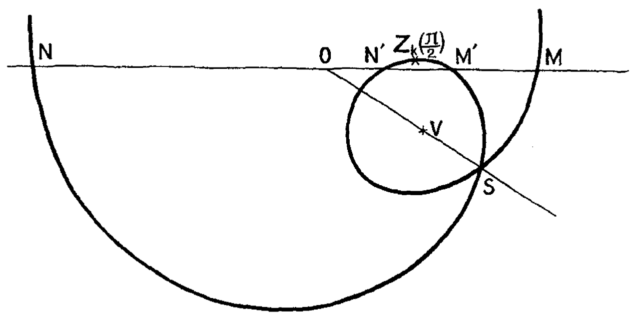
Il vient donc, par un calcul facile,

$$AC \leqq AB \leqq \frac{\pi}{m_1 + m_2}.$$

On constate aisément (¹) que la boucle contient, sur son axe de symétrie, un point de ramification V de (Σ), correspondant à une racine de $\varphi'_1(z) = 0$, différente de $z = 0$.

Le domaine (Δ_1) présente donc $(m_2 - m_1)$ boucles de cette nature, distinctes ou confondues en projection sur le plan simple, chacune d'elles se trouvant sur un seul feuillet de la surface de Riemann (Σ), si l'*on prend pour ligne de croisement issue du point* V la demi-droite VS qui joint ce point au point double de la boucle (*fig.* 2). On peut alors prendre comme domaines partiels de (Δ_1), les $(m_2 - m_1)$

Fig. 2.



boucles entaillées par les coupures à deux bords VS; d'après ce qui

---

(¹) Il suffit de calculer le rayon vecteur R_1 du point double S; on trouve sans difficulté

$$R_1 = \frac{\sin(m_2 - m_1)\varphi}{\sin m_2 \varphi},$$

φ étant le plus petit angle positif solution de l'équation

$$\sin m_1 \varphi - \rho \sin m_2 \varphi = 0.$$

Comme $\rho > \dfrac{m_1}{m_2}$, on voit que φ est inférieur à $\dfrac{\pi}{m_2}$, et, par suite, $R_1 \geqq \dfrac{m_2 - m_1}{m_2}$. Or, le rayon vecteur du point V est au plus égal à $\dfrac{m_2 - m_1}{m_2}$.

précède, il reste un domaine étoilé (Δ'_1), ramifié m_1 fois à l'origine, et qu'on décomposera en domaines partiels comme il a été expliqué antérieurement.

On peut raisonner sur (Δ'_1) comme nous l'avons fait au n° 13; la somme des indices des domaines partiels de (Δ'_1) sera encore supérieure à $l_1 - l_2$, *avec la première définition de ces nombres;* mais on ne peut plus en déduire une limite ne dépendant que de la répartition des points $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ par rapport à l'axe réel. Il se peut, en effet (*fig.* 2), qu'entre les points associés N et M se trouve une coupure VS, que la boucle correspondante coupe l'axe réel et qu'un point $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ se trouve sur la portion M'N' de cette boucle située au-dessus de l'axe réel. Cependant, l'arc $\widehat{QP}$ correspondant contient évidemment le point ω_1 au sens large, donc doit être compté dans l_1. Il faut, par conséquent, modifier le résultat du n° 13 de la manière suivante :

Soient λ_1 *le nombre des points* $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *situés dans le demi-plan inférieur ou sur l'axe réel;* σ_1 *le nombre de ces points qui se trouvent sur des boucles dont le point double est dans le demi-plan supérieur;* τ_1 *le nombre des points* $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *situés dans le demi-plan supérieur (axe réel exclu) sur des boucles dont le point double est dans le demi-plan inférieur; on a*

$$l_1 = \lambda_1 - \sigma_1 + \tau_1.$$

Il vient de même

$$l_2 = \lambda_2 - \sigma_2 + \tau_2$$

avec des définitions analogues pour λ_2, σ_2 et τ_2 relativement aux points $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Si, d'autre part, on désigne par ν_-, ν_0, ν_+ le nombre des boucles dont l'indice est respectivement $-1, 0, +1$, il vient finalement, d'après (44),

$$\mathfrak{N} \geqq p + \lambda_1 - \lambda_2 - (\sigma_1 + \tau_2) + (\sigma_2 + \tau_1) + \nu_+ - \nu_-. \tag{52}$$

20. Pour utiliser cette inégalité, on cherchera une borne inférieure pour $(\lambda_1 - \lambda_2)$ par les mêmes procédés que dans le cas où (Δ_1) était étoilé; on pourra appliquer, en particulier, les formules (50) et (51)

[où il faut remplacer $\mathfrak{N}$ par $(p+\lambda_1-\lambda_2)$]. Avant de limiter de même les autres termes de (52), indiquons quelques cas où cette formule se simplifie.

Supposons d'abord n_1 et n_2 impairs; si p est *impair*, les points $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ sont confondus, d'où $\lambda_1-\sigma_1 \geqq \lambda_2-\sigma_2$, $\tau_1=\tau_2$, et, par suite,

$$\mathfrak{N} \geqq p+\nu_+-\nu_-. \tag{53}$$

Si p est *pair*, les points $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sont deux à deux symétriques par rapport à l'origine, *ainsi que les boucles;* donc $\lambda_1-\sigma_1+\tau_1 \geqq \frac{p}{2}$, et, de même, $\lambda_2-\sigma_2+\tau_2 \leqq \frac{p}{2}$. La formule (53) est encore valable.

On peut, d'ailleurs, dans ces deux cas, donner pour ν_- une limite supérieure plus avantageuse que (n_2-n_1). Considérons, par exemple, une boucle dont le point double est dans le quatrième quadrant (nous dirons, pour abréger, « une boucle du quatrième quadrant ») et dont l'indice est égal à -1 (*fig.* 2); on a donc

$$\mathcal{R}(P') > \mathcal{R}(M') > 0.$$

Si p est *impair*, il existe une autre boucle confondue en projection avec la première, et pour laquelle les points P'_1 et Q'_1, correspondant à M' et N', sont respectivement symétriques de P' et Q' par rapport à l'origine; donc,

$$\mathcal{R}(P'_1) = -\mathcal{R}(P') < 0 < \mathcal{R}(M'),$$
$$I_{P_1} = -1.$$

L'indice de cette seconde boucle ne peut être que 0 ou 1. Si p est *pair*, il existe une boucle symétrique de la première par rapport à l'origine, coupant l'axe réel en M'_1 et N'_1, respectivement symétriques de N' et M'; les points P'_1 et Q'_1 qui correspondent à M'_1 et N'_1 sont respectivement confondus avec Q' et P'; donc,

$$\mathcal{R}(Q'_1) = \mathcal{R}(P') > 0 > \mathcal{R}(N'_1),$$
$$I_{Q'_1} = +1.$$

Cette nouvelle boucle est encore d'indice 0 ou 1. Ainsi, lorsque n_1

et n_2 sont impairs, à toute boucle d'indice -1 correspond une boucle d'indice o ou 1, donc

$$\nu_- \leqq \nu_0 + \nu_+,$$

et comme

$$\nu_- + \nu_0 + \nu_+ = n_2 - n_1,$$

$$\nu_- \leqq \frac{n_2 - n_1}{2}.$$

Finalement, *si n_1 et n_2 sont impairs et si $2p > n_2 - n_1$, on a*

$$\mathfrak{N} \geqq p - \frac{n_2 - n_1}{2}.$$

Sans faire d'hypothèse sur la parité de n_1 et n_2, nous allons montrer que *si l'on désigne par h le minimum de $(p + \lambda_1 - \lambda_2)$ et si $h \geqq n_2 - n_1$, on a*

$$\mathfrak{N} \geqq h - (n_2 - n_1). \tag{54}$$

Remarquons, en effet, que les points M', N' où une boucle coupe l'axe réel sont toujours sur la même demi-boucle; d'après ce qu'on a vu plus haut, on a donc, pour l'arc $\widehat{Q'P'}$ correspondant,

$$\widehat{Q'P'} < \frac{p\pi}{m_1 + m_2} < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{puisque } m_2 > m_1 > p.$$

Considérons alors une boucle du quatrième quadrant (*fig.* 2), contenant sur l'arc M'N' un point $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\right.$d'après l'inégalité précédente, elle ne peut en contenir plus d'un et ne contient pas non plus de points $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)\left.\right]$. L'arc $\widehat{P'Q'}$ correspondant contient le point ω_2, donc $\mathcal{R}(P') < 0$, $I_{P'} = -1$. La boucle ne peut être que d'indice o ou 1. Il en est de même pour toutes les boucles des troisième et quatrième quadrants contenant les τ_2 points $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ situés dans le demi-plan supérieur. On voit également que les boucles des premier et second quadrants, contenant les σ_1 points $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ du demi-plan inférieur, ont aussi comme indice o ou 1. Donc, *comme toutes ces boucles sont distinctes,*

$$\sigma_1 + \tau_2 \leqq \nu_0 + \nu_+,$$

d'où

$$\sigma_1 + \tau_2 + \nu_- \leqq n_2 - n_1$$

et, en portant dans (52), on en déduit l'inégalité (54).

21. Revenons maintenant au cas général où nous ne faisons aucune hypothèse *a priori* sur p, n_1 et n_2; pour utiliser la formule (52), nous allons chercher un maximum pour l'expression $(\sigma_1 + \tau_2 + \nu_-)$; on aura ensuite

$$\mathfrak{N} \geqq \text{Min}(p + \lambda_1 - \lambda_2) - \text{Max}(\sigma_1 + \tau_2 + \nu_-),$$

ce qui donnera une limite pour $\mathfrak{N}$ si le second membre est positif.

Pour rechercher ce maximum, nous nous placerons dans le cas le plus défavorable, celui où *toutes les boucles coupent l'axe réel en des points de module inférieur à un.* On constate aisément que ce cas peut effectivement se produire lorsque ρ est assez voisin de 1. Dans ces conditions, σ_1 est inférieur au nombre maximum des points $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ situés *sur les moitiés droites des boucles du premier quadrant,* augmenté du nombre maximum des points $Z_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ situés *sur les moitiés gauches des boucles du second quadrant;* de même, τ_2 est inférieur à la somme du nombre maximum des points $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ situés *sur les moitiés droites des boucles du troisième quadrant,* et du nombre maximum des points $Z_k\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ situés *sur les moitiés gauches des boucles du quatrième quadrant.*

Pour avoir le maximum de ν_-, remarquons que si l'on désigne par R_0 la longueur de la tangente à une boucle issue de l'origine $\left(\text{valeur de R correspondant à la racine de } \frac{d\Theta}{d\theta} = 0\right)$, les segments M'N' découpés sur l'axe réel par les boucles des premier et quatrième quadrants contiennent tous le point B d'affixe R_0; de même, les segments découpés sur l'axe réel par les boucles des second et troisième quadrants contiennent tous le point B', d'affixe $-R_0$. Soient β_1 et β_4 les points de la circonférence (C), situés respectivement dans le premier et le quatrième quadrant et qui se projettent au point B; soient, de même, β_2 et β_3 les points de (C) qui se projettent en B'.

Ceci posé, pour qu'une boucle du premier quadrant ait pour indice -1, *il est nécessaire que l'arc* $\widehat{QP'}$ *correspondant contienne le point* β_4; donc, le nombre des boucles du premier quadrant d'indice -1 est au plus égal au nombre des points $Z_k[\arg\beta_4]$ situés *sur les moitiés droites des boucles du premier quadrant.* On raisonne de même sur les boucles des trois autres quadrants; on voit donc finalement que nous pourrons obtenir un maximum pour $(\sigma_1 + \tau_2 + \nu_-)$, une fois que nous aurons résolu le problème suivant : *Déterminer le nombre maximum* ν *des points* $Z_k(\vartheta)$ *situés sur les moitiés droites (ou gauches) des boucles d'un quadrant donné;* pour fixer les idées, nous supposerons qu'il s'agit des moitiés droites des boucles du premier quadrant.

Pour résoudre ce problème, nous procéderons de la manière suivante : soit θ_0 la valeur de l'argument de z à laquelle correspond, sur (Γ_1), le sommet d'une boucle; les sommets de toutes les autres boucles correspondent aux valeurs $\theta_0 + \frac{2k\pi}{m_2 - m_1}$, k prenant $(m_2 - m)$ valeurs entières, deux à deux incongrues $[\bmod(m_2 - m_1)]$; nous déterminerons successivement :

1° Les valeurs de k pour lesquelles la boucle est dans le premier quadrant;

2° Les valeurs de k pour lesquelles la moitié droite de la boucle contient un point $Z_k(\vartheta)$.

Le nombre maximum des valeurs de la première suite congrues $[\bmod(m_2 - m_1)]$ *à des valeurs de la seconde sera le nombre* ν *cherché.*

1° Lorsque θ augmente de $\frac{2\pi}{m_2 - m_1}$, Θ augmente de $\frac{2m_1\pi}{m_2 - m_1}$. Si m_2 et m_1 sont premiers entre eux, les $(m_2 - m_1)$ boucles sont distinctes sur le plan simple; s'il n'en est pas ainsi, en désignant par d le plus grand commun diviseur de m_1 et m_2, et en posant

$$m_1 = d\mu_1, \qquad m_2 = d\mu_2,$$

il y a $(\mu_2 - \mu_1)$ boucles distinctes sur le plan simple, chacune d'elles étant la projection de d boucles sur la surface de Riemann. Si, à un nombre entier k, correspond à une certaine boucle, les nombres correspondant aux boucles confondues avec elle en projection sont de la forme $k+(\mu_2-\mu_1)x_1$, x_1 prenant les valeurs o, 1, ..., $(d-1)$; ces nombres étant évidemment deux à deux incongrus $[\mathrm{mod}(m_2-m_1)]$, on obtient bien ainsi toutes les boucles considérées.

Ceci posé, il y a $r=\mathrm{E}\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{4}\right)+\varepsilon$ boucles, distinctes en projection, situées dans le premier quadrant; ε peut prendre l'une des valeurs o et 1. Supposons qu'à la valeur θ_0 de θ corresponde le sommet pour lequel Θ a la plus petite valeur positive; cherchons le plus petit angle positif qu'il faut ajouter à θ pour passer de ce sommet à celui dont l'argument est immédiatement supérieur, c'est-à-dire pour augmenter Θ de $\frac{2\pi}{\mu_2-\mu_1}$. Pour cela, désignons par A le plus petit entier positif tel que

$$A\mu = A'(\mu_2-\mu_1)+1 \qquad (A' \text{ étant entier}).$$

L'angle cherché est égal à $\frac{2A\pi}{m_2-m_1}$, car la valeur correspondante dont augmente Θ est

$$\frac{2Am_1\pi}{m_2-m_1}=\frac{2A\mu_1\pi}{\mu_2-\mu_1}=2A'\pi+\frac{2\pi}{\mu_2-\mu_1}.$$

Il en résulte que *les valeurs de k correspondant aux boucles du premier quadrant sont de la forme*

$$(\mu_2-\mu_1)x_1+Ax_2, \tag{55}$$

x_1 *prenant toutes les valeurs entières comprises entre* o *et* $(d-1)$, x_2 *toutes les valeurs entières comprises entre* o *et* $(r-1)$. En effet, A est premier avec $(\mu_2-\mu_1)$ et $r<\mu_2-\mu_1$; ces valeurs sont donc bien deux à deux non congrues $[\mathrm{mod}(m_2-m_1)]$.

2° Les moitiés droites de toutes les boucles correspondent à des intervalles de variation de θ contenus, d'après ce qu'on a vu plus haut, dans les (m_2-m_1) intervalles :

$$\left(\varphi_0+\frac{2k\pi}{m_2-m_1}-\frac{\pi}{m_2+m_1},\ \varphi_0+\frac{2k\pi}{m_2-m_1}\right),$$

intervalles que nous désignerons par $\mathcal{J}$ (¹). D'autre part, les points $Z_k(\mathfrak{S})$ correspondent aux p valeurs $\theta_h = \frac{\mathfrak{S}}{p} + \frac{2h\pi}{p}$ de θ, h prenant p valeurs entières deux à deux incongrues (mod p). Il s'agit de déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'intervalle $\mathcal{J}$ correspondant contient un de ces points (on sait d'ailleurs qu'il peut y avoir un seul point au plus dans chaque intervalle). Pour cela, remarquons que si θ_h se trouve dans un intervalle $\mathcal{J}$, toutes les valeurs $\theta_h + \frac{2q\pi}{p}$ seront également dans des intervalles $\mathcal{J}$ pourvu que

$$\frac{2q\pi}{p} = \frac{2q'\pi}{m_2 - m_1} \qquad (q \text{ et } q' \text{ entiers}).$$

Désignons donc par d' le plus grand commun diviseur de p et $(m_2 - m_1)$, et posons.

$$p = d'\varpi, \qquad m_2 - m_1 = d'\gamma.$$

Si l'intervalle $\mathcal{J}$ correspondant au nombre entier k contient un point θ_h, il en sera donc de même des intervalles correspondant aux nombres $k + \gamma x_3$, x_3 prenant les valeurs $0, 1 \ldots (d' - 1)$; ces intervalles sont évidemment tous distincts, puisque les entiers k correspondants sont deux à deux incongrus [mod $(m_2 - m_1)$]. Les points θ_h qu'ils contiennent sont tous situés dans la même position vis-à-vis de leurs extrémités; nous dirons, pour abréger, que ces intervalles sont *équivalents* entre eux; il est clair qu'il n'y a pas d'intervalles $\mathcal{J}$ correspondant à d'autres valeurs de k, qui leur soient équivalents.

Soit, d'autre part, B le plus petit entier positif tel que

$$B\varpi = B'\gamma - 1 \qquad (B' \text{ entier}),$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{B'}{\varpi} = \frac{B}{\gamma} + \frac{1}{\varpi\gamma}$$

ou

$$\frac{B'}{p} = \frac{B}{m_2 - m_1} + \frac{1}{\varpi(m_2 - m_1)}.$$

(¹) Lorsque ρ tend vers 1, on constate d'ailleurs que les intervalles de variation de θ tendent vers les intervalles $\mathcal{J}$; si l'on ne tient pas compte des valeurs de ρ, il est donc impossible d'obtenir une meilleure valeur du nombre ν.

Comme B′ est premier avec ϖ, nous pouvons prendre comme nombre h les p entiers de la forme $\varpi x_3 + B' x_4, x_3$ variant de o à $(d' - 1)$, x_4 de o à $\varpi - 1$. D'après la relation précédente, on voit que la différence entre deux valeurs θ_h est, *à un multiple de* $\frac{2\pi}{m_2 - m_1}$ *près*, multiple de $\frac{2\pi}{\varpi(m_2 - m_1)}$. Il y a donc autant de systèmes d'intervalles $\mathcal{J}$ équivalents qu'un intervalle de largeur $\frac{\pi}{m_1 + m_2}$ peut contenir de points dont les distances mutuelles sont des multiples de $\frac{2\pi}{\varpi(m_2 - m_1)}$, soit

$$s = \mathrm{E}\left[\frac{\varpi(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2)}\right] + \eta \qquad \text{avec } \eta = 0 \text{ ou } \eta = 1.$$

Soit alors k_0 une valeur de k pour laquelle l'intervalle $\mathcal{J}$ contient un point θ_h tel que

$$\theta_h - \left[\theta_0 + \frac{2k_0\pi}{m_2 - m_1} - \frac{\pi}{m_1 + m_2}\right] < \frac{2\pi}{\varpi(m_2 - m_1)}.$$

Il résulte de ce qui précède que *les valeurs de k pour lesquelles les moitiés droites des boucles correspondantes contiennent des points* $Z_k(\vartheta)$ *sont de la forme*

$$k_0 + \gamma x_3 + B x_4, \tag{56}$$

x_3 *prenant toutes les valeurs entières comprises entre* o *et* $(d' - 1)$, x_4 *toutes les valeurs entières comprises entre* o *et* $s - 1$.

Finalement, on voit que *le nombre* ν *est égal au maximum, lorsque* k_0 *prend toutes les valeurs entières de* o *à* $(m_2 - m_1)$, *du nombre de solutions distinctes de la congruence*

$$(\mu_2 - \mu_1)x_1 + A x_2 - \gamma x_3 - B x_4 \equiv k_0 \qquad [\mathrm{mod}(m_2 - m_1)] \tag{57}$$

qui satisfont aux conditions

$$0 \leq x_1 < d, \qquad 0 \leq x_3 < d,$$
$$0 \leq x_2 < r, \qquad 0 \leq x_4 < s.$$

Remarquons d'ailleurs, d'après la manière même dont nous avons obtenue cette congruence, que ν est toujours inférieur au plus petit des deux nombres rd et sd'.

22. Nous pouvons maintenant revenir à la recherche des maxima de ν_-, σ_1 et τ_2. Pour ν_-, il faudra résoudre quatre problèmes du type précédent, correspondant respectivement :

1° Aux moitiés droites des boucles du premier quadrant et au point β_4 ;
2° Aux moitiés gauches des boucles du second quadrant et au point β_3 ;
3° Aux moitiés droites des boucles du troisième quadrant et au point β_2 ;
4° Aux moitiés gauches des boucles du quatrième quadrant et au point β_1.

Remarquons que chacun de ces problèmes se subdivise en plusieurs, selon que l'on donne aux nombres ε et η qui figurent dans les valeurs de r et s les valeurs 0 ou 1. Mais les nombres ε_i et η_i (¹) relatifs à ces quatre problèmes *ne sont pas complètement indépendants ;* tout d'abord, *un au moins des* ε_i *est nul* et l'on a de plus

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4\equiv\mu_2-\mu_1 \qquad (\text{mod}\,4),$$

et, si $(\mu_2-\mu_1)$ est *pair*,

$$\varepsilon_1=\varepsilon_3, \qquad \varepsilon_2=\varepsilon_4 ;$$

d'autre part, les points β_i sont deux à deux diamétralement opposés sur la circonférence (C). Si l'on peut avoir

$$\frac{(2q+1)\pi}{p}=\frac{2q'\pi}{m_2-m_1},$$

c'est-à-dire *si* γ *est pair et* ϖ *impair*, les points θ_h relatifs à β_3 se déduisent des points θ_h relatifs à β_1 par une translation d'un multiple de $\frac{2\pi}{m_2-m_1}$; donc

$$\eta_1=\eta_3 \qquad \text{et} \qquad \eta_2=\eta_4.$$

S'il n'en est pas ainsi, la translation, par laquelle on passe d'un de

(¹) Nous donnons aux lettres ε, η, r, s l'indice du point β auquel elles correspondent.

ces systèmes de points à l'autre est égale à $\frac{\pi}{\varpi(m_2 - m_1)}$, à un multiple de $\frac{2\pi}{m_2 - m_1}$ près ; on en déduit la relation

$$s_1 + s_3 = 2\,\mathrm{E}\left[\frac{\varpi(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2)}\right] + \eta_1 + \eta_3 = \mathrm{E}\left[\frac{\varpi(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}\right] + \eta_0,$$

η_0 étant égal à 0 ou 1 ; la même relation est valable pour η_2 et η_4.

Pour le maximum de $(\sigma_1 + \tau_2)$, on aura les quatre mêmes problèmes à résoudre, à la seule différence près qu'ici β_1 et β_2 sont confondus en ω_1, β_3 et β_4 en ω_2. Aux relations précédentes entre les ε_i et les η_i viennent s'ajouter celles qui correspondent à ce fait nouveau : on peut remarquer que $s_1 + s_2$ sera le nombre des points situés dans les intervalles $\mathfrak{I} + \mathfrak{I}'$, $\mathfrak{I}'$ désignant les intervalles déduits de $\mathfrak{I}$ par la translation $\frac{\pi}{m_1 + m_2}$; par suite,

$$s_1 + s_2 = 2\,\mathrm{E}\left[\frac{\varpi(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2)}\right] + \eta_1 + \eta_2 = \mathrm{E}\left[\frac{\varpi(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}\right] + \eta_0$$
$$(\eta_0 = 0 \text{ ou } \eta_0 = 1)$$

et l'on a la même relation en η_3 et η_4.

Donnons, pour terminer, un exemple auquel nous appliquerons la méthode précédente. Nous prendrons l'équation

$$1 + z^6 + a_1 z^{11} + a_2 z^{19} = 0.$$

On a ici

$$p = 3, \qquad n_1 = 11, \qquad n_2 = 19;$$

on peut appliquer la formule (53). Il suffit de trouver le maximum de ν_-. On a

$$m_1 = 8, \qquad m_2 = 16,$$

d'où

$$d = 8, \qquad \mu_1 = 1, \qquad \mu_2 = 2;$$

un des r_i est égal à 1, les trois autres sont nuls. Un seul des quatre nombres ν_i est donc différent de zéro ; d'ailleurs $d' = 1$ et

$$s = \mathrm{E}\left[\frac{3.8}{2.24}\right] + \eta = \eta;$$

donc on a $\nu = 1$, et, d'après (53),

$$\mathfrak{N} \geqq 2.$$

CHAPITRE II.

LES POLYNOMES UNIVALENTS.

Bibliographie.

Ajouter à la bibliographie du Chapitre I, les Ouvrages et Mémoires suivants :

[13] J. W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions* (*Annals of Mathematics*, t. **17**, 1915, p. 12-22).

[14] S. Kakeya. — *On zeros of a polynomial and its derivatives* (*The Tôhoku Mathematical Journal*, t. **11**, 1917, p. 5-16).

[15] G. Szegö. — *Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen* (*Mathematische Zeitschrift*, t. **13**, 1922, p. 28-55).

[16] L. Fejér. — *Ueber trigonometrische Polynome* (*Journal de Crelle*, t. **146**, 1926, p. 53-82).

[17] P. Montel. — *Sur les suites de fonctions analytiques qui ont pour limite une constante* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. **53**, 1925, p. 246-257).

[18] L. Bieberbach. — *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. II, (2^e^ édition, 1931).

[19] G. Pólya und G. Szegö. — *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, t. II.

1. Nous dirons, avec M. P. Montel, qu'une fonction analytique $f(z)$ est *p-valente* dans un domaine (D) du plan des z lorsque, quelle que soit la valeur a, l'équation

$$f(z) - a = 0 \tag{1}$$

a au plus p racines dans le domaine (D), et qu'il existe une valeur de a au moins pour laquelle l'équation (1) a exactement p racines intérieures à (D) (les racines étant comptées avec leur ordre de multiplicité); on dit encore que p est *l'ordre de multivalence* de la fonction dans (D). En particulier $f(z)$ est *univalente* dans (D) si elle y prend une fois au plus toute valeur. Comme l'ordre de multivalence est invariant par une représentation conforme, on peut se borner, pour étudier les fonctions p-valentes dans un domaine *simplement connexe*, au cas où ce domaine est un cercle centré à l'origine, en particulier le cercle unité.

En supposant $f(z)$ *holomorphe* dans le cercle unité, et représentée par le développement en série de Taylor,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{2}$$

on est amené naturellement à se poser le problème suivant : (A) *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les coefficients de la série* (2) *pour que* $f(z)$ *soit au plus p-valente dans le cercle unité?* ([18]), p. 83).

Ce problème est actuellement loin d'être résolu, même pour les fonctions univalentes. Dans ce dernier cas, on a seulement pu obtenir des conditions nécessaires, sous forme de limites supérieures pour les modules des coefficients : en général, on peut montrer que si $f(z)$ est univalente dans le cercle unité, on a

$$|a_n| < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) en. \tag{3}$$

Pour $|a_2|$ et $|a_3|$, on a les limites plus précises

$$|a_2| \leqq 2, \qquad |a_3| \leqq 3, \tag{4}$$

et *ces limites sont atteintes* pour la fonction $\frac{z}{(1-z)^2}$ ([18], p. 74 et 80).

On peut encore poser le problème précédent sous la forme équivalente suivante : (B) *Les coefficients de la série* (2) *étant donnés, déterminer le rayon* R *du plus grand cercle ayant pour centre l'origine, et où* $f(z)$ *est au plus p-valente*. [R est dit *rayon de p-valence* de $f(z)$]. En effet, si l'on savait résoudre ce problème, il suffirait d'écrire $R \geqq 1$ en remplaçant R par son expression en fonction des coefficients de (2) pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes cherchées; et réciproquement, R est la plus grande valeur du nombre positif r pour laquelle les coefficients de la série

$$z + a_2 r z^2 + a_3 r^2 z^3 + \ldots + a_n r^{n-1} z^n + \ldots$$

satisfont à ces conditions. Tout résultat obtenu dans l'un de ces problèmes peut donc se traduire immédiatement dans l'autre : par exemple, les inégalités (4) donnent, pour le rayon d'univalence, les inégalités correspondantes

$$R \leqq \frac{2}{|a_2|}, \qquad R \leqq \sqrt{\frac{3}{|a_3|}}.$$

Remarquons enfin qu'on peut, sans diminuer la généralité des problèmes précédents, se borner au cas où $f(z)$ est un *polynome*. Cela résulte du théorème suivant, dû à M. P. Montel ([17], p. 253) : *Si une suite de fonctions holomorphes $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, au plus p-valentes dans un domaine* (D), *converge uniformément vers une fonction $f(z)$ différente d'une constante, $f(z)$ est au plus p-valente dans* (D); *réciproquement si une suite de fonctions holomorphes $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z) \ldots$ converge uniformément vers une fonction $f(z)$ au plus p-valente dans le domaine* (D) *toutes les fonctions de la suite sont, à partir d'une certaine valeur de n, au plus p-valentes dans tout domaine* (D') *complètement intérieur à* (D).

2. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étudier quelques aspects du problème (B), en nous limitant à la recherche du *rayon d'univalence* R d'un *polyonme*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n.$$

Nous commencerons par transformer la définition de R. Considérons, dans ce but, l'ensemble des valeurs que prend $f(z)$ sur la circonférence (C) d'équation $|z| = R$. Tout d'abord, si α est une de ces valeurs, les autres racines de l'équation $f(z) - \alpha = 0$ ne peuvent être intérieures au cercle (C). En effet, si z_1 est la racine située sur la circonférence, z_2 une racine intérieure à (C), la relation $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$ établit une correspondance continue entre les points ζ_1 voisins de z_1 et les points ζ_2 voisins de z_2; il serait alors possible de choisir ζ_1 intérieur à (C) et assez voisin de z_1 pour que ζ_2 soit également intérieur à (C); $f(z)$ ne serait pas univalent dans (C).

Ceci posé, je dis que R est caractérisé par le fait que *sur la circonférence* (C), *le polynome $f(z)$ prend deux fois au moins une certaine valeur α, en des points distincts ou confondus, et qu'aucune circonférence $|z| = r < R$ ne possède cette propriété.* La seconde partie de cette proposition est évidente d'après la définition de R. Pour établir la première, il suffit de remarquer que si, pour tout point z_1 de la circonférence (C), la racine z_2 de l'équation $f(z) - f(z_1) = 0$ la plus rapprochée de (C) reste toujours extérieure à cette circonférence, il en sera encore de même pour la circonférence $|z| = R + \varepsilon$, ε étant un nombre positif suffisamment petit; $f(z)$ sera donc univalent dans le cercle $|z| < R + \varepsilon$, ce qui est en contradiction avec la définition de R.

On peut donc définir R comme *le rayon de la plus petite circonférence ayant pour centre l'origine et sur laquelle $f(z)$ prend deux fois la même valeur, en des points distincts ou confondus.* Écrivons alors que l'on a $f(z_1) = f(z_2)$ pour deux points distincts de même module

$$z_1 = \rho e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = \rho e^{i\theta_2},$$

ou, en posant

$$x = \rho e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}, \qquad \theta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \neq 0, \pi$$

pour

$$z_1 = x e^{i\theta}, \qquad z_2 = x e^{-i\theta}.$$

Il vient

$$x(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + a_2 x^2 (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) + \ldots + a_n x^n (e^{ni\theta} - e^{-ni\theta}) = 0,$$

d'où, en divisant par $2ix \sin\theta \neq 0$,

$$1 + a_2 x \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} + a_3 x^2 \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + \ldots + a_n x^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 0.$$

Inversement, pour toute valeur de θ différente de 0 et π, correspondent à chaque racine x de cette équation deux points z_1 et z_2 de module $|x|$, où le polynome prend la même valeur. D'ailleurs si l'on fait tendre θ vers zéro ou π l'équation tend respectivement vers $f'(x) = 0$ ou $f'(-x) = 0$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le rayon d'univalence du polynome $f(z)$ est égal au rayon du plus grand cercle, ayant pour centre l'origine, où ne pénètre aucune racine de l'équation associée

$$(5) \qquad \varphi(x, \theta) \equiv 1 + a_2 x \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} + a_3 x^2 \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + \ldots + a_n x^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 0$$

lorsque θ varie de 0 à π.

Remarquons d'ailleurs que l'équation (5) ne change pas lorsqu'on change θ en $-\theta$, ou lorsqu'on change θ en $\pi-\theta$ et x en $-x$. Il est donc équivalent, pour notre problème, de faire varier θ de o à $\frac{\pi}{2}$, de o à π ou de o à 2π; on pourra se placer dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, suivant qu'elle facilitera plus ou moins les raisonnements.

3. On peut encore énoncer le résultat précédent en disant que *la condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit univalent dans le cercle unité est que ce cercle ne contienne aucune racine de l'équation* (5), *quel que soit* θ. Or, nous avons rappelé (Chap. I, n° 4) les conditions nécessaires et suffisantes, données par M. I. Schur, pour qu'une équation ait toutes ses racines intérieures au cercle unité ou sur la circonférence : en les appliquant à l'équation aux inverses de (5), on obtient $(n-1)$ inégalités

$$\delta_\nu(\theta) \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

les $\delta_\nu(\theta)$ étant des polynomes trigonométriques en θ à coefficients réels, ne contenant d'ailleurs que des cosinus. On voit donc que le problème (A) serait résolu pour les polynomes univalents *si l'on savait exprimer qu'un polynome trigonométrique est positif, par un nombre fini de conditions rationnelles par rapport aux coefficients de ce polynome.* C'est malheureusement un problème qui n'est pas encore résolu : on sait seulement mettre les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynome trigonométrique soit positif, sous la forme d'une infinité d'inégalités contenant les coefficients du polynome (*voir*, par exemple, [10 *a*], p. 229). Le procédé que nous venons d'indiquer ne peut donc fournir que des *conditions nécessaires*, en nombre aussi grand que l'on veut, pour que le polynome $f(z)$ soit univalent dans le cercle unité, ces conditions n'étant naturellement pas toutes indépendantes si leur nombre dépasse une certaine limite.

D'ailleurs, l'expression de $\delta_\nu(\theta)$ étant très compliquée dès que ν dépasse les premières valeurs entières, la méthode précédente conduit à des calculs inextricables. Si l'on se borne à chercher des conditions nécessaires pour que $f(z)$ soit univalent dans le cercle unité, on peut en obtenir de plus simples de la manière suivante : M. I. Schur a établi

([10 *b*], p. 136) que l'on peut encore exprimer la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

ait toutes ses racines intérieures au cercle unité, en disant que la *forme hermitienne*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & \sum_{\lambda=1}^{n} |\bar{\alpha}_n x_\lambda + \bar{\alpha}_{n-1} x_{\lambda+1} + \ldots + \bar{\alpha}_\lambda x_n|^2 \\ & - \sum_{\lambda=1}^{n} |\alpha_0 x_\lambda + \alpha_1 x_{\lambda+1} + \ldots + \alpha_{n-\lambda} x_n|^2 \end{aligned}$$

doit être définie positive. Lorsque, dans cette forme, on annule tous les x_i à l'exception d'un seul, on obtient les $\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ conditions nécessaires

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_n|^2 - |\alpha_0|^2 \geqq 0, \\ |\alpha_n|^2 + |\alpha_{n-1}|^2 - |\alpha_1|^2 - |\alpha_0|^2 \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |\alpha_n|^2 + |\alpha_{n-1}|^2 + \ldots + \left|\alpha_{\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right|^2 - \left|\alpha_{\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)-1}\right|^2 - \ldots - |\alpha_1|^2 - |\alpha_0|^2 \geqq 0. \end{array} \right.$$

En appliquant ces conditions à l'équation aux inverses de (5), on aura des inégalités plus simples que $\delta_\nu(\theta) \geqq 0$. En particulier, si l'on fait $\theta = 0$ [ce qui revient à appliquer les conditions (6) à l'équation aux inverses de $f'(z) = 0$], on obtient

$$\begin{gathered} n^2 |a_n|^2 - 1 \leqq 0, \\ n^2 |a_n|^2 + (n-1)^2 |a_{n-1}|^2 - 4 |a_2|^2 - 1 \leqq 0, \\ n^2 |a_n|^2 + (n-1)^2 |a_{n-1}|^2 + (n-2)^2 |a_{n-2}|^2 - 9 |a_3|^2 - 4 |a_2|^2 - 1 \leqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

ce qui donne entre autres, en utilisant (4),

$$|a_n| \leqq \frac{1}{n}, \qquad |a_{n-1}| \leqq \frac{\sqrt{17}}{n-1}, \qquad |a_{n-2}| \leqq \frac{\sqrt{98}}{n-2}.$$

Pour $n < 6$, cette limite de $|a_{n-1}|$ est d'ailleurs trop élevée, car, en faisant $\theta = \frac{\pi}{n}$ dans l'équation (5), on voit qu'on a toujours $|a_{n-1}| \leqq 1$.

4. Revenons maintenant au problème de la détermination de R. Nous allons voir d'abord que la considération de l'équation (5) permet de coordonner certains résultats déjà connus.

En premier lieu, comme le module de la racine de plus petit module d'une équation

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

est au moins égal à la racine positive de l'équation

$$|\alpha_0| - |\alpha_1| x - |\alpha_2| x^2 \ldots - |\alpha_n| x^n = 0.$$

on voit que *l'on a* $R \geqq R_0$, R_0 *étant la racine positive de l'équation*

$$1 - 2|a_2| x - 3|a_3| x^2 \ldots - n|a_n| x^{n-1} = 0,$$

en vertu de l'inégalité $\left|\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\right| \leqq m$. Cette proposition est due à M. Alexander [13], qui a montré de plus que $f(z)$ représente le cercle $|z| \leqq R_0$ sur un domaine *étoilé* par rapport à l'origine.

5. Cherchons maintenant à comparer les rayons d'univalence R et R' de deux polynomes

$$f(z) \equiv z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n,$$
$$g(z) \equiv z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n.$$

Nous utiliserons le théorème suivant, dû à M. Szegö ([15], p. 35) : *Si les racines d'une équation*

$$A(x) \equiv \alpha_0 + C_n^1 \alpha_1 x + C_n^2 \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

sont toutes situées dans un domaine circulaire (K) (¹), *et si l'on désigne par* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *les racines de l'équation*

$$B(x) \equiv \beta_0 + C_n^1 \beta_1 x + C_n^2 \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_n x^n = 0,$$

toute racine ξ *de l'équation « composée »*

$$C(x) \equiv \alpha_0\beta_0 + C_n^1 \alpha_1 \beta_1 x + C_n^2 \alpha_2 \beta_2 x^2 + \ldots + \alpha_n \beta_n x^n = 0$$

(¹) Rappelons qu'on entend par *domaines circulaires* l'intérieur d'un cercle, l'extérieur d'un cercle et le demi-plan.

est de la forme

$$\xi = -\lambda_\nu k,$$

où k est un certain point du domaine (K).

L'application de cette proposition aux équations associées de $f(z)$ et $g(z)$ donne immédiatement le résultat suivant :

On a, entre les rayons d'univalence des polynomes $f(z)$ et $g(z)$, la relation

$$|\lambda| R' \leqq R \leqq \frac{1}{|\mu|} R', \tag{7}$$

λ étant la racine de plus petit module de l'équation

$$\psi(x) \equiv 1 + C_{n-1}^1 \frac{a_2}{b_2} x + C_{n-1}^2 \frac{a_3}{b_3} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{b_n} x^{n-1} = 0, \tag{8}$$

μ la racine de plus petit module de l'équation

$$\chi(x) \equiv 1 + C_{n-1}^1 \frac{b_2}{a_2} x + C_{n-1}^2 \frac{b_3}{a_3} x^2 + \ldots + \frac{b_n}{a_n} x^{n-1} = 0. \tag{9}$$

L'une ou l'autre de ces équations n'a plus de sens lorsqu'un des coefficients a_k ou b_k devient nul. Cependant, si l'on suppose que

$$a_{k_1} = a_{k_2} = \ldots = a_{k_i} = 0 \qquad \text{et} \qquad b_{k_1} = b_{k_2} = \ldots = b_{k_i} = 0,$$

les autres coefficients étant différents de zéro, la proposition subsiste encore, en remplaçant, par convention, dans les équations (8) et (9) les expressions $\frac{a_{k_\nu}}{b_{k_\nu}}$ et $\frac{b_{k_\nu}}{a_{k_\nu}}$ par o. Si, en dehors de ces coefficients, il y a encore d'autres coefficients a_k nuls, mais aucun autre b_k, l'inégalité $R \geqq |\lambda| R'$ subsiste seule; de même, on peut seulement écrire $R \leqq \frac{1}{|\mu|} R'$ s'il y a d'autres coefficients b_k nuls, mais aucun autre a_k. Enfin, on ne peut plus rien affirmer s'il y a des coefficients a_k et b_k d'indices différents simultanément nuls.

6. Ce théorème a été déjà établi sous une forme légèrement différente par M. Szegö, dans le Mémoire précité (p. 55); son auteur n'en a d'ailleurs fait aucune application. Nous allons voir pourtant que cette proposition contient, entre autres cas particuliers, deux résultats sur

le rayon d'univalence des polynomes, démontrés antérieurement par d'autres moyens.

Prenons d'abord

$$b_2 = C_{n-1}^1, \qquad b_3 = C_{n-1}^2, \qquad \ldots, \qquad b_{n-1} = C_{n-1}^{n-2}, \qquad b_n = 1.$$

Il vient

$$g(z) \equiv z(1+z)^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \psi(z) \equiv \frac{f(z)}{z};$$

on obtient, sans difficulté, $R' = \frac{1}{n}\cdot$ Donc, *si* z_0 *est la racine de plus petit module de l'équation* $\frac{f(z)}{z} = 0$, $f(z)$ *est certainement univalent dans le cercle* $|z| \leqq \frac{|z_0|}{n}\cdot$ On retrouve un théorème énoncé par M. Alexander ([13], p. 16), qui a montré de plus que $f(z)$ représente le cercle $|z| \leqq \frac{|z_0|}{n}$ sur une région *étoilée* par rapport à l'origine.

Posons maintenant

$$b_2 = \frac{C_{n-1}^2}{2}, \qquad b_3 = \frac{C_{n-1}^3}{3}, \qquad \ldots, \qquad b_n = \frac{1}{n}\cdot$$

Il vient

$$g(z) \equiv \frac{(1+z)^n - 1}{n} \qquad \text{et} \qquad \psi(z) \equiv f'(z).$$

On a ici $R' = \sin\frac{\pi}{n}$; *par suite, si* z_1 *est la racine du plus petit module de* $f'(z) = 0$, $f(z)$ *est univalent dans le cercle* $|z| \leqq |z_1| \sin\frac{\pi}{n}$, proposition établie par M. Kakeya ([14], p. 13).

7. Comme autre application, prenons

$$f(z) \equiv \frac{F(z)}{z}, \qquad g(z) \equiv F'(z),$$

où

$$F(z) \equiv z^2 + a_2 z^3 + \ldots + a_n z^{n+1}.$$

On a

$$\begin{aligned} \chi(x) &\equiv 2 + 3C_{n-1}^1 z + 4C_{n-1}^2 z^2 + \ldots + (n+1)z^{n-1} \\ &\equiv \frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^2(1+z)^{n-1}] \equiv (1+z)^{n-2}(nz+2), \end{aligned}$$

d'où

$$R' \geqq \frac{2R}{n}.$$

Je signale encore les deux résultats suivants, que le lecteur démontrera sans difficulté ([1]). Si l'on prend

$$g(z) \equiv f(z) + a_{n+1} z^{n+1},$$

on trouve

$$R' \leqq 2R \qquad \text{lorsque } n \text{ est pair,}$$

$$R' \leqq 2R \cos\frac{\pi}{2n} \qquad \text{lorsque } n \text{ est impair.}$$

Si l'on suppose que les coefficients de $f(z)$ et $g(z)$ sont tels que

$$|a_k| = |b_k| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

on trouve

$$(\sqrt[n]{2} - 1) R' \leqq R \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} R'.$$

En faisant des hypothèses plus restrictives sur la nature des polynomes $f(z)$ et $g(z)$, il est parfois possible d'obtenir des inégalités plus serrées que (7) entre R et R'. Supposons par exemple que f et g soient de la forme

$$f(z) = z + a_2 z^{p+1} + a_3 z^{2p+1} + \ldots + a_n z^{(n-1)p+1},$$
$$g(z) \equiv z + b_2 z^{p+1} + b_3 z^{2p+1} + \ldots + b_n z^{(n-1)p+1}.$$

On voit alors, en posant $z^p = t$ dans les équations associées de $f(z)$ et $g(z)$, que l'on a ici

$$|\lambda|^{\frac{1}{p}} R' \leqq R \leqq \frac{R'}{|\mu|^{\frac{1}{p}}},$$

λ et μ ayant la même signification que ci-dessus. Au théorème de M. Alexander correspond l'inégalité plus précise

$$R \geqq R_0 |z_0|, \qquad \text{où} \qquad R_0 = \frac{1}{[p(n-1)+1]^{\frac{1}{p}}},$$

z_0 étant, comme ci-dessus, la racine de plus petit module de $\frac{f(z)}{z} = 0$. La méthode de M. Alexander s'applique d'ailleurs encore dans ce cas,

---

([1]) Les deux résultats analogues concernant les zéros des polynomes sont démontrés respectivement dans [**15**], p. 46, et [**11**], p. 144.

et montre de plus que $f(z)$ représente le cercle $|z| \leqq R_0$ sur un domaine *étoilé* par rapport à l'origine.

De même, au théorème de M. Kakeya, correspond l'inégalité

$$R \geqq R_1 |z_1|,$$

R_1 étant le rayon d'univalence du polynome particulier

$$g(z) \equiv \int_0^z (1 + z^p)^{n-1} dz.$$

et z_1 la racine de plus petit module de $f'(z) = 0$. On a d'ailleurs, d'après la proposition de M. Alexander rappelée au n° 4,

$$R_1 \geqq \left(2^{\frac{1}{n-1}} - 1\right)^{\frac{1}{p}} \geqq \left(\frac{1}{n-1} \log 2\right)^{\frac{1}{p}}.$$

8. Nous allons maintenant porter notre attention sur *les polynomes $f(z)$ à coefficients réels;* nous supposerons, pour simplifier, que $R = 1$.

Il résulte alors de la définition que nous avons donnée de R que la fonction des deux variables *réelles* x et θ

$$\varphi(x, \theta) \equiv 1 + a_2 x \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} + a_3 x^2 \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + \ldots + a_n x^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

ne peut s'annuler pour aucun système de valeurs de x et θ telles que

$$0 \leqq \theta < 2\pi,$$
$$-1 < x < 1.$$

Cette fonction reste donc *positive* quelles que soient les valeurs de x et θ comprises dans ces intervalles. Par suite, l'expression

$$\begin{aligned}\psi(x, \theta) \equiv 2 \sin^2\theta\varphi(x, \theta) \equiv 1 + a_2 x \cos\theta + (a_3 x^2 - 1) \cos 2\theta + \ldots \\ + (a_k x^2 - a_{k-2}) x^{k-3} \cos(k-1)\theta + \ldots + a_n x^{n-1} \cos(n+1)\theta\end{aligned}$$

reste *non négative* pour les mêmes valeurs. Or, si l'on donne à x une valeur *fixe* quelconque comprise entre -1 et $+1$, $\psi(x, \theta)$ est *un polynome trigonométrique non négatif* en θ, de la forme

$$1 + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \cos 2\theta + \ldots + \lambda_{n+1} \cos(n+1)\theta$$

et l'on sait alors que l'on a nécessairement ([16], p. 71)

$$|\lambda_k| \leqq 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{10}$$

En appliquant ces inégalités à $\psi(x, \theta)$ et en faisant tendre x vers 1, il vient

$$|a_2| \leqq 2, \qquad |a_3 - 1| \leqq 2, \qquad |a_k - a_{k-2}| \leqq 2 \qquad (k = 4, 5, \ldots). \tag{11}$$

d'où, par récurrence,

$$|a_k| \leqq k, \tag{12}$$

quel que soit k.

Ces inégalités ne dépendent pas du degré du polynome considéré; *elles subsistent donc pour toute fonction holomorphe univalente dans le cercle unité, et réelle sur l'axe réel.* Elles ne peuvent d'ailleurs être améliorées si l'on ne restreint pas la classe des fonctions auxquelles elles s'appliquent, puisque les limites sont atteintes pour $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Par contre, la même méthode fournit des inégalités plus précises pour des catégories particulières de fonctions univalentes : par exemple, si $f(z)$ est *impaire*, $\varphi(x, \theta)$ est une fonction des variables réelles θ et $t = x^2$, qui reste positive pour

$$0 \leqq \theta < 2\pi \qquad \text{et} \qquad -1 < t < +1.$$

En procédant comme ci-dessus, mais en remarquant qu'on peut faire tendre ici t vers ± 1, on obtient, au lieu de (11), les inégalités

$$|a_3 \pm 1| \leqq 2, \qquad |a_{2k+1} \pm a_{2k-1}| \leqq 2 \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

ou encore

$$|a_3| \leqq 1, \qquad |a_{2k+1}| + |a_{2k-1}| \leqq 2, \tag{13}$$

limites qui sont encore atteintes pour la fonction particulière

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2}.$$

De même, si l'on ne considère que *les polynomes $f(z)$ de degré au plus égal à n*, on peut améliorer les inégalités (11); cela résulte de ce qu'on peut remplacer les inégalités (10) par d'autres plus précises, où figure le degré du polynome trigonométrique correspondant, ainsi que l'ont montré M. Fejér ([16], p. 79), puis MM. Szász et v. Egerváry (*Math. Zeitschrift*, t. 27, 1928, p. 644); on a, par exemple, pour un polynome trigonométrique de degré m,

$$|\lambda_1| \leqq 2 \cos \frac{\pi}{m+2},$$

ce qui donne ici, pour le polynome $f(z)$,

$$|a_2| \leqq 2 \cos \frac{\pi}{n+3}.$$

9. On peut aussi appliquer les inégalités (10) à $\varphi(x, \theta)$ même, qui est également un polynome trigonométrique en θ. On trouve ainsi, en posant

$$f_1(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} = a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots,$$

$$f_2(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2} = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots,$$

les deux séries d'inégalités

$$(14') \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| \leqq 1, \\ \displaystyle\operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} \left| \frac{f_1(x) - a_2 x^2}{f_2(x)} \right| \leqq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} \left| \frac{f_1(x) - a_2 x^2 - a_4 x^4 - \ldots - a_{2p} x^{2p}}{f_2(x)} \right| \leqq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$(14'') \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} \left| 1 - \frac{x}{f_2(x)} \right| \leqq 1, \\ \displaystyle\operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} \left| 1 - \frac{x + a_3 x^3}{f_2(x)} \right| \leqq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} \left| 1 - \frac{x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2p+1} x^{2p+1}}{f_2(x)} \right| \leqq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ces inégalités sont encore valables pour toute fonction univalente réelle sur l'axe réel, et les limites sont atteintes pour $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. Lorsque $f_1(z) \equiv 0$, c'est-à-dire lorsque $f(z)$ est *impaire*, les inégalités (14′) sont identiquement vérifiées; mais en posant $\frac{f(x)}{x} = F(x^2)$, on peut alors substituer à (14″) le système d'inégalités

$$(14''') \quad \left\{ \begin{array}{l} \underset{-1 \leqq t \leqq +1}{\operatorname{Max}} \left| 1 - \frac{1}{F(t)} \right| \leqq 1, \\ \underset{-1 \leqq t \leqq +1}{\operatorname{Max}} \left| 1 - \frac{1 + a_3 t}{F(t)} \right| \leqq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \underset{-1 \leqq t \leqq +1}{\operatorname{Max}} \left| 1 - \frac{1 + a_3 t + \ldots + a_{2p+1} t^p}{F(t)} \right| \leqq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

où les limites sont encore atteintes pour $f(z) = \frac{z}{1 - z^2}$. La première de ces inégalités donne

$$(15) \qquad |f(\pm 1)| \geqq \frac{1}{2}, \qquad |f(\pm i)| \geqq \frac{1}{2}.$$

D'ailleurs, si $f(z)$ est une fonction holomorphe univalente dans le cercle unité, on sait qu'il en est de même de $\sqrt{f(z^2)}$, et, de plus, cette fonction est impaire et réelle sur l'axe réel en même temps que $f(z)$; en lui appliquant les inégalités (15), il vient

$$(16) \qquad |f(\pm 1)| \geqq \frac{1}{4}.$$

Cette dernière inégalité n'est autre qu'un cas particulier du théorème de Kœbe-Bieberbach sur les domaines couverts par les fonctions univalentes ([18], p. 75). La méthode de M. Bieberbach permet aussi de montrer que tout point de la frontière du domaine couvert par une fonction impaire univalente dans le cercle unité est à une distance $\geqq \frac{1}{2}$ de l'origine ([19], p. 26, ex. 148), ce qui contient encore les inégalités (15) comme cas particuliers.

10. On peut se demander si, en exprimant les conditions *néces-*

saires et suffisantes pour que $\psi(x, \theta)$, où x est fixe, reste positif quel que soit θ, on ne parviendrait pas à résoudre le problème (A) pour les fonctions univalentes à coefficients réels. Il est aisé de voir qu'il n'en est rien.

En effet, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynome trigonométrique ou une série de Fourier uniformément convergente

$$1 + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \cos 2\theta + \ldots + \lambda_n \cos n\theta + \ldots$$

soit positif ou nul quel que soit θ s'expriment sous forme d'une infinité d'inégalités ([10*a*], p. 229), dont les n premières ne contiennent que les n premiers coefficients, quel que soit n; de plus, il n'y a pas d'autres conditions entre ces n coefficients qui ne soient pas conséquences des précédentes. Comme les n premiers coefficients de $\psi(x, \theta)$ ne dépendent que des n premiers coefficients de $f(z)$, on voit que notre méthode ne pourra donner entre ces n premiers coefficients d'autres inégalités que celles qu'on déduira des n conditions qui viennent d'être rappelées.

Or, pour $n = 3$, un calcul simple montre que les conditions qu'on obtient pour a_2 et a_3 sont les suivantes :

$$(17) \qquad \begin{cases} |a_2| \leqq 2, \\ a_2^2 - 1 \leqq a_3 \leqq 3. \end{cases}$$

Mais, d'autre part, la méthode de M. Bieberbach fournit la condition nécessaire

$$|a_2^2 - a_3| \leqq 1,$$

qui n'est pas une conséquence des inégalités (17), ce qui montre bien que le procédé indiqué ne saurait donner toutes les conditions nécessaires et suffisantes.

11. Nous allons maintenant appliquer la définition que nous avons donnée du rayon d'univalence, à la résolution du problème particulier suivant : *Trouver la valeur maxima du rayon d'univalence* $R(a)$ *du polynome*

$$(18) \qquad f(z, a) \equiv z + z^2 + az^n \qquad (n \geqq 3),$$

lorsque a prend toutes les valeurs possibles. L'existence de ce maximum résulte immédiatement de la première inégalité (4) qui donne $R(a) \leqq 2$.

L'équation associée (5) s'écrit ici

$$1 + 2x\cos\theta + a\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}x^{n-1} = 0 \tag{19}$$

ou

$$\frac{1 + 2x\cos\theta}{x^{n-1}} = -a\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

L'équation (19) ne doit jamais avoir de racines à l'intérieur d'un cercle $|x| \leqq r \leqq R(a)$ quel que soit θ. Par suite, si l'on désigne par (Γ_θ) la courbe qui correspond à la circonférence (C) d'équation $|x| = r$, par la transformation

$$X = \psi(x) \equiv \frac{1 + 2x\cos\theta}{x^{n-1}},$$

le point $X_0 = -a\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ doit être toujours placé, par rapport à (Γ_θ), de sorte que l'argument de $(X - X_0)$ augmente de $-2(n-1)\pi$ lorsque l'argument de x augmente de 2π.

Dans ce qui suit, nous fixerons a et r et nous étudierons la variation simultanée de la courbe (Γ_θ) et du point X_0 lorsque θ varie de o à $\frac{\pi}{2}$. Au Chapitre précédent, nous avons fait l'étude d'une famille de courbes dont les courbes (Γ_θ) ne sont qu'un cas particulier (n° 19); en se reportant aux résultats alors obtenus, on voit d'abord que si $2r\cos\theta > \frac{n-1}{n-2}$, la courbe (Γ_θ) tourne au plus $(n-2)$ fois dans le sens négatif autour de tout point du plan; il y a donc toujours une racine de (19) intérieure au cercle (C). Il nous faut, par conséquent, supposer $2r\cos\theta < \frac{n-1}{n-2}$ pour toutes les valeurs de θ, soit $r < \frac{n-1}{2(n-2)}$, ce qui donne déjà pour $R(a)$ une limite meilleure que celle de M. Bieberbach.

Si $2r\cos\theta < \frac{n-1}{n-2}$, la courbe présente une seule boucle contenant ou non l'origine, suivant que $2r\cos\theta < 1$ ou $2r\cos\theta > 1$; son sommet a pour affixe

$$X_1 = (-1)^n\frac{2r\cos\theta - 1}{r^{n-1}} \tag{20}$$

et son point double

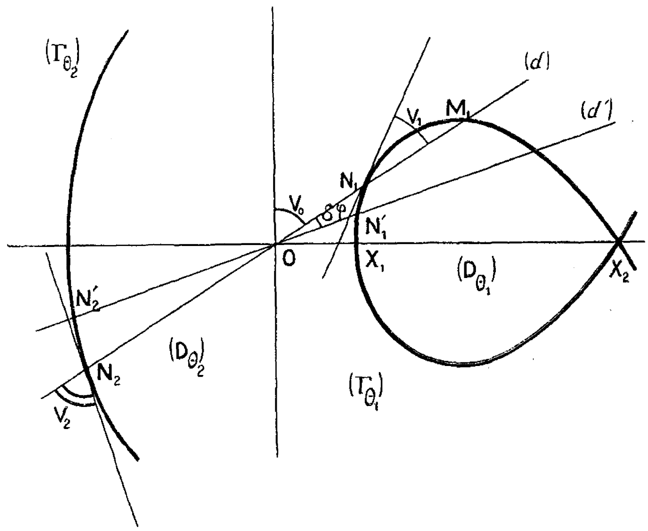
$$(21)\quad X_2 = \frac{(-1)^n}{r^{n-1}} \frac{\sin\varphi_0}{\sin(n-2)\varphi_0} = \frac{(-1)^n}{r^{n-1}}\sqrt{1-4r\cos\varphi_0\cos\theta+4r^2\cos^2\theta},$$

φ_0 étant le plus petit angle positif qui satisfait à l'équation

$$(22)\qquad \sin(n-1)\varphi - 2r\cos\theta\sin(n-2)\varphi = 0.$$

La seule région du plan des X telle que la courbe (Γ_θ) tourne $(n-1)$ fois dans le sens négatif autour de chacun de ses points est le domaine (D_θ) intérieur à cette boucle. Il nous suffit donc d'étudier la variation de ce domaine et du point X_0 lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}\cdot$ Le point X_0 se déplace sur une droite (d) issue de l'origine et faisant un angle égal à arg$a$ (à π près) avec l'axe réel. Chaque domaine (D_θ) découpe sur cette droite un segment MN à l'intérieur duquel doit se trouver le point X_0 (*fig.* 3). Je dis tout d'abord que si $r = R(a)$, il y

Fig. 3.



aura une valeur au moins de θ pour laquelle le point X_0 sera sur la frontière de (D_θ), en l'un des points M ou N (ON $<$ OM). Sinon, la distance de X_0 à (Γ_θ) aurait, lorsque θ varie, un minimum positif, fonction continue de r; en remplaçant r par $r+\varepsilon$, ε étant un nombre positif suffisamment petit, le point X_0 variera encore en restant constamment intérieur au domaine (D_0) correspondant; la valeur de r considérée ne peut donc être égale à $R(a)$.

Supposons donc que pour un certain nombre de valeurs de θ, soient $\theta', \theta'', \ldots, \theta^{(p)}$, le point X_0 vienne sur la courbe (Γ_0) correspondante. Montrons que, *si a n'est pas réel*, on peut le faire varier d'une quantité δa telle que $R(a+\delta a) > R(a)$. Nous utiliserons la remarque suivante : soient θ_1 et θ_2 deux valeurs de θ, telles que

$$2r\cos\theta_1 > 1, \qquad 2r\cos\theta_2 < 1;$$

considérons les courbes (Γ_{θ_1}) et (Γ_{θ_2}) correspondantes, et les points d'intersection N_1 et N_2 de ces courbes avec la droite (d). Il est évident, puisque la courbe (Γ_0) n'a jamais de points d'inflexion (¹), que l'on a (*fig.* 3)

$$V_1 < V_0 < V_2 < \frac{\pi}{2}.$$

Faisons alors tourner la droite (d) d'un petit angle $\delta\varphi$ dans le sens négatif, et soient N'_1 et N'_2 les points d'intersection de la droite (d') ainsi obtenue avec (Γ_{θ_1}) et (Γ_{θ_2}); on a

$$\frac{ON'_1}{ON_1} = 1 - \cot V_1\,\delta\varphi < \frac{ON'_2}{ON_2} = 1 - \cot V_2\,\delta\varphi.$$

Ceci posé, considérons parmi les valeurs $\theta', \theta'', \ldots$ celles pour lesquelles $2r\cos\theta > 1$, et telles de plus que, pour ces valeurs, X_0 vienne coïncider avec l'extrémité N du segment MN correspondant. Désignons par θ_1 celle de ces valeurs pour laquelle l'angle V correspondant est le plus grand, soit V_1 cette valeur maxima. Faisons alors varier l'argument de a d'un angle négatif $-\delta\varphi$ et, en même temps, faisons varier le module de a d'une quantité

$$\delta|a| = -|a|(1-\varepsilon)\cot V_1\,\delta\varphi,$$

ε étant un nombre positif suffisamment petit. Dans ces conditions, il est évident, d'après la remarque précédente, que pour la nouvelle

---

(¹) Bien entendu, lorsque $2r\cos\theta < \dfrac{n-1}{n-2}$.

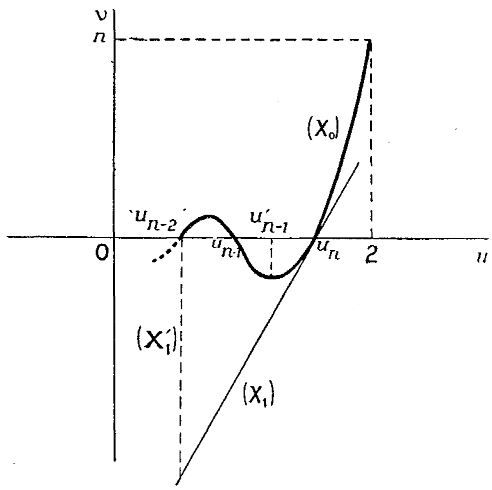
valeur de a, le point X_0 n'est jamais sur la frontière du domaine (D_θ) correspondant, et l'on a bien, par suite,

$$R(a + \delta a) > R(a).$$

12. Nous supposerons donc dans tout ce qui suit que a est réel; pour fixer le signe de X_1 et X_2, nous nous placerons dans le cas où n est pair [1]. Prenons dans un plan deux axes de coordonnées Ouv, et traçons les courbes (X_0), (X_1), (X_2) obtenues en portant en abscisses $u = 2\cos\theta$, en ordonnées $v = -\frac{X_0(\theta)}{a}$, $v = -\frac{X_1(\theta)}{a}$, $v = -\frac{X_2(\theta)}{a}$ respectivement et en faisant varier θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. D'après les raisonnements précédents, la première de ces courbes doit être comprise entre les deux autres et avoir au moins un point commun avec l'une d'entre elles.

La courbe (X_1) est une droite dont le coefficient angulaire a le signe de $-a$; il en résulte, d'après la forme de la courbe (X_0) (*fig.* 4), que

Fig. 4.



si $a \geqq 0$ cette droite ne peut couper l'axe Ou qu'en un point d'abscisse négative ou supérieure à 2; cette abscisse étant égale à $\frac{1}{r} > 0$, on doit

[1] Lorsque n est impair, les résultats qui suivent subsistent en changeant simplement le signe de a dans les formules et les énoncés.

donc avoir

$$r \leqq \frac{1}{2}.$$

Cette valeur est d'ailleurs effectivement atteinte pour le polynome

$$f(z) = z + z^2.$$

Supposons maintenant $a < 0$. La droite (X_1) doit être alors tout entière au-dessous de la courbe (X_0), ce qui n'est possible que si elle coupe l'axe réel en un point d'abscisse supérieure au plus grand zéro de $X_0(u)$,

$$u_n = 2 \cos\frac{\pi}{n}.$$

On a donc la limite supérieure

$$r \leqq \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}. \tag{23}$$

Cherchons si cette limite peut être atteinte pour une valeur particulière de a. Il est d'abord nécessaire pour cela que la droite (X_1) soit tangente à la courbe (X_0) au point u_n, ce qui donne

$$\frac{1}{ar^{n-2}} = \left(\frac{dX_0}{du}\right)_{u=u_n}.$$

Comme

$$\frac{dX_0}{du} = \frac{dX_0}{d\theta}\,\frac{d\theta}{du} = \frac{n\cos n\theta \sin\theta - \cos\theta \sin n\theta}{2\sin^3\theta},$$

il vient

$$a = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{nr^{n-2}} = \frac{2^{n-1}}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^{n-2}\frac{\pi}{n}.$$

Lorsqu'on donne à a cette valeur, la droite (X_1) est bien située au-dessous de la courbe (X_0) pour toute valeur de $u \neq u_n$. En effet, comme $X_0(u)$ est un polynome en u ayant toutes ses racines réelles, sa dérivée seconde est positive dès que $u > u'_{n-1}$, u'_{n-1} étant la plus grande racine de $\frac{dX_0}{du} = 0$; il suffit donc de montrer que

$$X_1(u) \leqq X_0(u) \qquad \text{pour } 0 \leqq u \leqq u_{n-2} \quad (\textit{fig. } 4).$$

Or, on vérifie sans peine que

$$|X'_1| = |X_1(u_{n-2})| \geqq n \geqq |X_0(u)|,$$

quel que soit u, ce qui suffit à établir la proposition.

Il reste maintenant à examiner si la courbe (X_2) est constamment au-dessus de (X_0). Cherchons d'abord le sens de variation de $X_2(u)$; il nous faut pour cela connaître le sens de variation de l'angle φ_0 défini par l'équation (22) en fonction de θ. Or, si l'on pose

$$y_1 = \sin(n-1)\varphi, \qquad y_2 = 2r\cos\theta\sin(n-2)\varphi,$$

on a

$$\left(\frac{dy_1}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = n-1, \qquad \left(\frac{dy_2}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 2(n-2)r\cos\theta.$$

Lorsque $r \leqq \dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}$, je dis que

$$\left(\frac{dy_1}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} \geqq \left(\frac{dy_2}{d\varphi}\right)_{\varphi=0},$$

quel que soit θ; il suffit de montrer que

$$n-1 \geqq \frac{n-2}{\cos\frac{\pi}{n}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{n-1} \geqq 2\sin^2\frac{\pi}{2n};$$

or, pour $n=3$, les deux membres de cette inégalité sont égaux, et pour $n > 3$, on a

$$\frac{1}{n-1} > \frac{\pi^2}{2n^2} > 2\sin^2\frac{\pi}{2n}.$$

Lorsque φ croît à partir de zéro, on a donc d'abord $y_2 < y_1$; φ_0 reste, par suite, toujours compris entre o et $\frac{\pi}{n-1}$. De plus, lorsque θ croît, pour chaque valeur de φ, y_2 est une fonction décroissante de θ; par suite, φ_0 est une *fonction croissante* de θ. Il résulte alors immédiatement de la formule (21) que $X_2(u)$ est une *fonction décroissante* de u; comme $|X_0(u)| \leqq X_0(2)$, pour que la courbe (X_2) soit au-dessus de la courbe (X_0), il faut et il suffit que

$$X_2(2) \geqq X_0(2). \tag{25}$$

En explicitant cette condition, pour la valeur de a donnée par (24), on trouve, lorsque $n > 3$, l'inégalité

$$2\cos\varphi_0 \leqq 3\cos\frac{\pi}{n} - \cos^3\frac{\pi}{n}, \tag{26}$$

φ_0 étant ici la plus petite racine positive de l'équation

$$\cos\frac{\pi}{n}\sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi = 0. \tag{27}$$

Pour $n = 3$, on a

$$X_2(2) = X_1(2);$$

la condition (25) n'est pas vérifiée.

Afin d'examiner à partir de quelle valeur de n l'inégalité (26) est vérifiée, cherchons une limite inférieure de φ_0. Je dis que $\frac{\pi}{4(n-1)}$ est une telle limite : il faut montrer que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{n} \geqq \sin\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4(n-1)}\right]$$

ou

$$\cos\frac{\pi}{n} \geqq \cos\frac{\pi}{4(n-1)} - \sin\frac{\pi}{4(n-1)}, \tag{28}$$

$$\sin\frac{\pi}{4(n-1)} \geqq 2\left[\sin^2\frac{\pi}{2n} - \sin^2\frac{\pi}{8(n-1)}\right].$$

Or, l'inégalité

$$\sin\frac{\pi}{4(n-1)} \geqq \frac{\pi^2}{2n^2},$$

qui entraîne la précédente est vérifiée pour $n = 6$, et, par suite, pour $n > 6$, car, si elle est vérifiée pour une valeur de n, elle l'est aussi pour les valeurs plus grandes, $\frac{d}{dn}\left[n^2\sin\frac{\pi}{4(n-1)}\right]$ étant positive. On constate directement que l'inégalité (28) est satisfaite pour $n = 5$ et qu'elle se réduit à une égalité pour $n = 4$. Pour que l'inégalité (27) soit satisfaite, il suffit donc que l'on ait

$$2\cos\frac{\pi}{4(n-1)} \leqq 3\cos\frac{\pi}{n} - \cos^3\frac{\pi}{n},$$

ou encore

$$\sin^2\frac{\pi}{8(n-1)} \geqq 3\sin^4\frac{\pi}{2n} - 2\sin^6\frac{\pi}{2n}$$

et, *a fortiori*,

$$\sin\frac{\pi}{8(n-1)} \geqq \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{4n^2}.$$

On constate que cette dernière inégalité a lieu pour $n = 10$, et, par suite, pour la même raison que ci-dessus, lorsque $n > 10$. Lorsque $n = 7, 8, 9$, on vérifie directement l'inégalité (27) en calculant une limite inférieure plus précise pour φ_0, dans chaque cas. Pour $n = 4, 5, 6$, on a, au contraire,

$$2\cos\varphi_0 > 3\cos\frac{\pi}{n} - \cos^3\frac{\pi}{n}.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Le rayon d'univalence du polynome

$$f(z, a) \equiv z + z^2 + az^n \qquad (n \geqq 7)$$

est au plus égal à $r_n = \dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{2}}$. *Cette valeur est effectivement égale au rayon d'univalence du polynome particulier*

$$f_n(z) \equiv z + z^2 + (-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^{n-2}\frac{\pi}{n}}{n}z^n.$$

Les deux points du cercle $|z| = r_n$ où ce polynome prend la même valeur sont

$$z_1 = -\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}e^{i\frac{\pi}{n}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}e^{-i\frac{\pi}{n}}$$

et la valeur commune en ces points est égale à

$$a_0 = \frac{1}{2n}\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n} - \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

13. Il nous reste à chercher le maximum de $R(a)$ lorsque $3 \leqq n \leqq 6$. Reportons-nous à la figure 4; nous savons que lorsque le maximum est atteint, ou bien la droite (X_1) est tangente à la courbe (X_0), ou bien on a $X_0(2) = X_2(2)$. Je dis que ces conditions doivent être *simultanément* vérifiées lorsque le point de contact de (X_0) et (X_1) n'est pas sur l'axe Ou. En effet, si (X_1) n'est pas tangente à (X_0), on peut, en diminuant a d'une quantité assez petite δa, faire en sorte que $X_2(2) > X_0(2)$ et que (X_1) reste complètement au-dessous de (X_0); on aura donc $R(a - \delta a) > R(a)$. On raisonne de même si (X_1) est tangente à (X_0) en un point d'abscisse comprise entre u_n et 2, sauf qu'il faut ici augmenter a d'une petite quantité. Si (X_1) est tangente à (X_0) en un point d'abscisse comprise entre u'_{n-1} et u_n, le raisonnement s'applique encore, en diminuant a, *même si l'on a, de plus*,

$$X_0(2) = X_2(2).$$

Ces considérations montrent donc que la recherche du maximum de $R(a)$ revient à trouver quatre nombres a, r, u, φ_0 satisfaisant aux équations

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sin(n-1)\varphi_0 - 2r\sin(n-2)\varphi_0 = 0, \\ &\frac{1}{ar^{n-1}}\sqrt{1 - 4r\cos\varphi_0 + 4r^2} = n, \\ &\frac{dX_0}{du} = \frac{1}{ar^{n-2}}, \\ &X_0 - u\frac{dX_0}{du} = -\frac{1}{ar^{n-1}}, \end{aligned} \right.$$

avec les conditions

$$(29) \qquad 2\cos\frac{\pi}{n} < u < 2, \qquad 0 \leqq \varphi_0 < \frac{\pi}{n-1}.$$

Les polynomes pour lesquels le maximum est atteint prennent la même valeur en deux points distincts de la circonférence $|z| = r$, et, de plus, leur dérivée s'annule en deux points de cette circonférence.

1° $n = 3$. On a

$$X_0(u) = u^2 - 1, \qquad \frac{dX_0}{du} = 2u.$$

Les équations (E) donnent

$$\cos\varphi_0 = r, \qquad 3 = \frac{1}{ar^2}, \qquad 2t = \frac{1}{ar}, \qquad t^2 + 1 = \frac{1}{ar^2},$$

d'où

$$t^2 = 2, \qquad t = \sqrt{2} \qquad \left(\text{on a bien } 2\cos\frac{\pi}{3} < \sqrt{2} < 2\right)$$

et

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{3}\frac{t}{r^2}, \qquad r = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}939\ldots.$$

On en déduit $a = \frac{3}{8}$; on vérifie effectivement que le polynome

$$f_3(z) = z + z^2 + \frac{3}{8}z^3$$

prend aux points

$$z_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{\frac{i\pi}{4}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

la même valeur $a_0 = -\frac{4}{9}$, et que sa dérivée a de plus ses deux zéros situés sur la circonférence $|z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2° $n = 4$:

$$X_0(u) = u^3 - 2u, \qquad \frac{dX_0}{du} = 3u^2 - 2.$$

La première équation (E) s'écrit

$$4\cos^2\varphi_0 - 4r\cos\varphi_0 - 1 = 0,$$

d'où

$$\cos\varphi_0 = \frac{2r + \sqrt{4r^2+4}}{2} = \frac{1}{2}\left[r + \sqrt{r^2+1}\right].$$

Par suite,

$$X_2(z) = \frac{1}{r^3}\sqrt{1 + 4r^2 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2+1}} = \frac{\sqrt{r^2+1} - r}{r^3}.$$

Les autres équations (E) donnent

$$\sqrt{r^2+1} - r = 4ar^3,$$

$$3u^2 - 2 = \frac{1}{ar^2},$$

$$2u^3 = \frac{1}{ar^3}.$$

Posons

$$r = \operatorname{cotg} 2\lambda \qquad \text{et} \qquad b = ar^3.$$

Il vient

$$4b = \operatorname{tang}\lambda,$$

$$3u^2 = \frac{r}{b} + 2 = 2\frac{1 - \operatorname{tang}^2\lambda}{\operatorname{tang}^2\lambda} + 2 = \frac{2}{\operatorname{tang}^2\lambda},$$

$$2u^3 = \frac{4}{\operatorname{tang}\lambda},$$

d'où

$$\frac{3u^2}{2} = \left(\frac{u^3}{2}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad u = \sqrt[4]{6},$$

valeur qui est bien comprise entre $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ et 2. On en tire

$$r = \frac{3\sqrt{6} - 2}{2\sqrt[4]{216}} = 0,697\ldots < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707.$$

et cette valeur est égale au rayon d'univalence du polynome

$$f_4(z) \equiv z + z^2 - 4\left(\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{6} - 2}\right)^3 z^4.$$

3° $n = 5$ et $n = 6$. Posons en général, $b = ar^{n-1}$ et remarquons que la seconde équation (E) peut s'écrire, d'après (21), sous la forme

$$\frac{1}{b} = n\frac{\sin(n-2)\varphi_0}{\sin\varphi_0}.$$

Comme, d'autre part, la première équation (E) donne

$$2r = \frac{\sin(n-1)\varphi_0}{\sin(n-2)\varphi_0},$$

on a aussi

$$\frac{r}{b} = \frac{n}{2}\,\frac{\sin(n-1)\varphi_0}{\sin\varphi_0}.$$

Si l'on pose

$$2\cos\varphi_0 = t \qquad \text{et} \qquad \xi = \frac{1}{b}, \qquad \eta = \frac{r}{b},$$

on voit que les formules précédentes définissent, dans le plan (ξ, η) une courbe unicursale (γ), dont les coordonnées s'expriment par des polynomes en t de degrés $(n-3)$ et $(n-2)$ respectivement. Mais, d'autre part, les deux dernières équations (E) donnent pour ξ et η des polynomes en u de degrés $(n-1)$ et $(n-2)$ respectivement, autrement dit, définissent dans le plan (ξ, η) une seconde courbe unicursale (γ'). Les points d'intersection de ces deux courbes satisfaisant aux conditions (29) donneront les valeurs de a et r cherchées.

En procédant de cette manière, on voit que pour $n=5$ et $n=6$, on obtiendrait u par la résolution d'équations en u^2 du 6e et du 8e degré respectivement.

Un calcul approché donne, pour $n=5$,

$$u=1,666, \qquad r=0,6158<\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{5}}=0,6180;$$

pour $n=6$,

$$u=1,7355, \qquad r=0,57734<\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}}=0,57735.$$

Nous avons ainsi complètement résolu le problème posé au n° 11.

14. Cherchons maintenant à déterminer de même le maximum du rayon d'univalence $R(a)$ du polynome

$$f(z, a)\equiv z+z^p+az^n \qquad (n>p).$$

En posant

$$u=\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}, \qquad v=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

l'équation associée s'écrit

$$\frac{1+ux^{p-1}}{x^{n-1}}=-av.$$

En opérant comme ci-dessus, nous sommes conduits à examiner la position du point $X_0=-av$ par rapport à la courbe (Γ_θ) correspondant à la circonférence $|x|=r$ par la transformation

$$X=\psi(x)=\frac{1+ux^{p-1}}{x^{n-1}}.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que $(n-1)$ est ou non multiple de $(p-1)$. Dans les deux cas, on peut toujours se limiter au cas où $r^{p-1}\leqq\frac{n-1}{p(n-p)}$, car, dans le cas contraire, $f'(z)$ a au moins un zéro dans le cercle $|x|\leqq r$.

1° *Supposons d'abord que* $(p-1)$ *ne divise pas* $(n-1)$. Désignons par d le p.g.c.d. de $(p-1)$ et $(n-1)$, et posons

$$p-1=d\varpi, \qquad n-1=d\nu.$$

Il résulte alors de l'étude faite au Chapitre précédent (n° 21) que la courbe (Γ_0) présente ϖ boucles distinctes, recouvertes chacune d fois et se déduisant de l'une d'entre elles par des rotations de $\frac{2k\pi}{\varpi}$ $(k=0,1,\ldots,\varpi-1)$ autour de l'origine. Pour que l'argument de $(X-X_0)$ puisse augmenter de $-2(n-1)\pi$ lorsque l'argument de x augmente de 2π, il est nécessaire et suffisant que X_0 soit un point *intérieur à toutes les boucles*. Je dis que ceci ne peut se produire que si les boucles contiennent toutes l'origine. En effet, dans le cas contraire, chaque boucle est tout entière d'un même côté de la perpendiculaire à son axe de symétrie menée par l'origine; si $X_0\neq 0$ est un point commun à toutes les boucles, il en est de même de tous les points $X_0 e^{\frac{2hi\pi}{\varpi}}$; tous ces points sont en particulier situés à l'intérieur d'une boucle déterminée, ce qui est impossible si $\varpi>1$, car ils ne peuvent être tous d'un même côté d'une droite quelconque issue de l'origine.

Mais si toutes les boucles contiennent l'origine quel que soit θ, on a nécessairement

$$|u|\,r^{p-1}\leqq 1 \qquad \text{ou} \qquad r^{p-1}\leqq\left|\frac{\sin\theta}{\sin p\theta}\right|,$$

et par suite,

$$R(a)\leqq\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Cette valeur est d'ailleurs égale au rayon d'univalence du polynome particulier

$$f_p(z)\equiv z+z^p.$$

2° *Soit maintenant*

$$n-1=h(p-1),$$

h étant un entier au moins égal à 2. Faisons, dans l'équation associée, le changement de variable $y=x^{p-1}$; on est ramené à étudier la position du point $X_0=-av$, par rapport à la courbe (Γ'_0) déduite de la circonférence $|y| = \rho = r^{p-1}$ par la transformation

$$X = \Psi(y) \equiv \frac{1 + uy}{y^h}.$$

En reprenant les transformations du n° 11, on voit qu'on peut se limiter au cas où a est *réel;* le problème consiste alors à déterminer la plus grande valeur de ρ pour laquelle la courbe (X_0) du plan (u, v) définie par

$$(X_0) \qquad u = \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}, \qquad v = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

lorsque θ varie de o à $\frac{\pi}{2}$, se trouve située entre, d'une part, une courbe (X_1) (formée de deux droites symétriques par rapport à l'axe ov), d'équation

$$(X_1) \qquad v = \frac{\rho|u| - 1}{a\rho^h}$$

et, d'autre part, une courbe (X_2) d'équation

$$(X_2) \qquad v = g(|u|),$$

où $g(|u|)$ est une fonction décroissante de $|u|$, qui prend pour $|u| = p$ la valeur

$$g(p) = \frac{1}{a\rho^h}\,\frac{\sin\varphi_0}{\sin(h-1)\varphi_0} = \frac{1}{a\rho^h}\sqrt{1 - 2p\rho\cos\varphi_0 + p^2\rho^2},$$

φ_0 étant le plus petit angle positif qui satisfait à l'équation

$$(30) \qquad \sin h\varphi - p\rho\sin(h-1)\varphi = 0.$$

On constate aisément que le point le plus éloigné de l'origine où la courbe (X_0) coupe l'axe Ou, correspond à $\theta = \frac{\pi}{n}$; par suite, on doit avoir

$$(31) \qquad \rho \leq \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{p\pi}{n}}.$$

Il faut ensuite examiner si cette valeur peut être effectivement atteinte. On voit comme précédemment que la courbe (X_1) doit être tangente à (X_0) au point où elle coupe l'axe Ou, ce qui exige

$$a = \frac{\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{p\pi}{n} - p\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p\pi}{n}}{n\sin^h\frac{\pi}{n}}\sin^{h-1}\frac{p\pi}{n}.$$

Un calcul assez long mais qui ne présente pas de difficulté sérieuse montre ensuite que la courbe (X_0) tourne sa concavité vers les v positifs lorsque θ varie de o à la valeur qui donne le premier minimum de v; cette portion de courbe est donc bien au-dessus de (X_1). On trouve qu'il en est de même pour le reste de la courbe (X_0) tout au moins dès que h dépasse une certaine valeur indépendante de p[1]; on peut prendre par exemple $h \geqq 10$. Pour que la limite (31) soit atteinte, il reste enfin la condition

$$g(p) \geqq n,$$

a ayant la valeur calculée ci-dessus; en explicitant, on obtient l'inégalité

$$(32) \qquad \cos\varphi_0 \leqq \frac{p^2+1}{2p}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{p\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{p\pi}{n}.$$

Or, en utilisant l'inégalité

$$\frac{\sin p\frac{\pi}{n}}{p\sin\frac{\pi}{n}} > \frac{\frac{p\pi}{n} - \frac{p^3\pi^3}{6n^3}}{\frac{p\pi}{n}} = 1 - \frac{p^2\pi^2}{6n^2} > 1 - \frac{2\pi^2}{3h^2},$$

on constate sans difficulté que l'on a $\varphi_0 \geqq \frac{\pi}{4h}$ dès que $h \geqq 9$; d'autre part, quel que soit h, le second membre de (32) est supérieur à

$$1 - \frac{\pi^4}{2h^4}.$$

Pour que l'inégalité (32) soit satisfaite, il suffit donc que l'on ait

$$1 - \frac{\pi^2}{32h^2} + \frac{\pi^4}{6144h^4} < 1 - \frac{\pi^4}{2h^4}$$

---

(1) Il suffit d'établir : 1° que les extréma de u (ou v) sont, en valeur absolue, inférieurs au premier minimum de cette fonction ; 2° que cette dernière quantité est inférieure, en valeur absolue, à $u(\theta_1)$, θ_1 étant la valeur de θ qui correspond au premier minimum de v.

et l'on constate que cette inégalité est vérifiée dès que $h \geqq 13$. On peut se demander si, en faisant un calcul plus précis, on ne trouverait pas que l'inégalité (32) est vérifiée quel que soit h tout au moins à partir d'une valeur de p suffisamment grande; mais il suffit de prendre $h = 2$ pour voir que, dans ce cas, l'inégalité (32) n'est jamais vérifiée, quelle que soit la valeur de p.

Nous pouvons donc résumer cette discussion dans la proposition suivante : *le rayon d'univalence du polynome*

$$f(z, a) \equiv z + z^p + a z^n \qquad (n > p)$$

est au plus égal à

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad \textit{si } (n-1) \textit{ n'est pas multiple de } (p-1);$$

$$\left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{p\pi}{n}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad \textit{si } n - 1 = h(p-1).$$

Cette valeur est d'ailleurs atteinte lorsque h est supérieur à un certain nombre entier $h_0 \leqq 12$ (ce nombre pouvant à priori dépendre de p).

Lorsque $2 \leqq h \leqq h_0$, la limite exacte est comprise entre les précédentes; on l'obtiendrait par des raisonnements analogues à ceux que que nous avons faits pour $p = 2$. On peut constater que sa détermination se ramène à la résolution d'une équation algébrique dont le degré croît avec p.

Remarquons enfin que la limite supérieure

$$\left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{p\pi}{n}}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

est encore valable pour un polynome à un nombre quelconque de termes, de la forme

$$f(z) = z + a_1 z^n + a_2 z^{2n} + \ldots + a_k z^{kn} + z^p + a_{k+1} z^{(k+1)n} + \ldots + a_m z^{mn}.$$

Il suffit, pour le voir, de faire $\theta = \frac{\pi}{n}$ dans l'équation associée.

CHAPITRE III.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS BORNÉES.

Bibliographie.

Ajouter aux Mémoires cités aux deux Chapitres précédents :

[20] E. LANDAU. — *Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenchaften zu Berlin*, *Phys. math. Klass*, 1925, p. 467-474).

[21] P. MONTEL. — *Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 48, 1930, p. 105-126).

1. Nous nous proposons d'exposer dans ce Chapitre quelques propriétés des fonctions analytiques, bornées dans un domaine simplement connexe, que nous pouvons toujours, à l'aide d'une représentation conforme, supposer être le cercle unité (C). Nous nous occuperons donc de la famille $(\mathcal{F}_M)$ des fonctions analytiques $f(z)$ telles que $|f(z)| \leqq M$ pour $|z| \leqq 1$; commençons par en rappeler quelques propriétés classiques (*voir*, par exemple [18], p. 102 et suiv.). On peut encore dire que les fonctions de la famille $(\mathcal{F}_M)$ font correspondre au cercle (C), par la transformation $Z = f(z)$, un domaine (D) intérieur au cercle (Γ) défini par $|z| \leqq M$ dans le plan des Z. On en déduit immédiatement la proposition fondamentale suivante : *La famille* $(\mathcal{F}_M)$ *est invariante par toute transformation biunivoque des cercles* (C) *et* (Γ) *en eux-mêmes*, c'est-à-dire par tout couple de transformations de la forme

$$z' = e^{i\theta} \frac{z - a}{\bar{a} z - 1}, \tag{1}$$

$$Z' = e^{i\Theta} \frac{M^2(Z - \alpha)}{\bar{\alpha} Z - M^2} \tag{2}$$

$$(|a| < 1, \ |\alpha| < M).$$

Parmi les fonctions de la famille $(\mathcal{F}_M)$, on est naturellement amené à considérer celles qui prennent une valeur donnée en un point donné du cercle (C); grâce aux transformations (1) et (2), on peut toujour ramener l'étude de ces fonctions à celle de la famille (F_M) des fonctions $f(z)$ telles que

$$|f(z)| \leqq M \text{ dans } (C), \qquad f(0) = 0.$$

On peut préciser davantage l'étude de ces fonctions en tenant compte de la valeur de leur dérivée à l'origine, ce qui revient, après multiplication par un facteur constant, à considérer la famille (E_M) des fonctions holomorphes dans (C) dont le développement a la forme

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

et telles que

$$|f(z)| \leqq M.$$

On pourrait encore particulariser les fonctions étudiées en se donnant d'autres coefficients de léur développement, mais nous nous bornerons dans ce Chapitre aux trois familles qui viennent d'être définies.

La propriété essentielle de la famille (F_M) réside dans la remarque que *si $f(z)$ est une fonction de cette famille, $\frac{f(z)}{z}$ est une fonction de la famille ($\mathcal{F}_M$) et inversement*, ce qui n'est autre que le lemme bien connu de Schwarz, énoncé sous une forme légèrement différente. Cette proposition, jointe à l'utilisation des transformations (1) et (2), contient en germe la plupart des propriétés des fonctions bornées *à l'intérieur* de (C). En particulier, l'application alternée du lemme de Schwarz et des transformations (2) a permis à M. I. Schur de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction dont on donne les coefficients du développement en série de Taylor appartienne à la famille ($\mathcal{F}_M$) ([10*a*], p. 221).

Indiquons encore quelques conséquences des généralités précédentes. Le lemme de Schwarz, sous la forme

$$|f(z)| \leqq Mr, \qquad \text{où} \qquad r = |z|,$$

exprime une relation entre les valeurs de $f(z)$ aux points o et z; l'application des transformations (1) et (2) permet d'en déduire plus généralement une relation entre les valeurs d'une fonction de ($\mathcal{F}_M$) en deux points quelconques z_1, z_2 intérieurs à (C) ([18], p. 105). En particulier, si l'on fait seulement une transformation sur la fonction, on obtient, entre autres, l'inégalité

$$(3) \qquad |f(z)| \geqq \mathrm{M}\frac{|f(o)| - \mathrm{M}r}{\mathrm{M} + |f(o)|r}$$

$\left(\text{qui n'est d'ailleurs intéressante que pour } r < \frac{|f(o)|}{\mathrm{M}}\right)$. De même si l'on fait tendre z_1 et z_2 vers un même point z, intérieur à (C), on a, à la limite,

$$(4) \qquad |f'(z)| \leqq \frac{1}{\mathrm{M}}\,\frac{\mathrm{M}^2 - |f(z)|^2}{1 - r^2}.$$

Pour $z = o$ cette inégalité se réduit à la seconde condition de M. Schur :

$$(5) \qquad |f'(o)| \leqq \mathrm{M} - \frac{|f(o)|^2}{\mathrm{M}},$$

la première étant évidemment

$$(6) \qquad |f(o)| \leqq \mathrm{M}.$$

Rappelons enfin que, dans le lemme de Schwarz, l'égalité ne peut avoir lieu que si $f(z) \equiv \mathrm{M}e^{i\theta}z$; on en déduit des propositions analogues pour les inégalités qu'on en tire par application des transformations (1) et (2); c'est ainsi que, pour (3), (4) et (5), l'égalité ne peut avoir lieu que si

$$f(z) = \mathrm{M}e^{i\theta}\frac{z - x}{\bar{x}z - 1}, \qquad \text{avec } |x| \leqq 1.$$

2. Nous allons tout d'abord déterminer *la valeur minima ρ_p du rayon de p-valence d'une fonction de la famille* ($\mathrm{E_M}$). L'existence de ce minimum résulte immédiatement des considérations suivantes : La famille ($\mathrm{E_M}$) étant une famille normale, s'il existait une suite de fonctions de cette famille $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, telle que $f_n(z)$ ne soit pas univalente dans le cercle $|z| \leqq \frac{1}{n}$, il serait possible d'en extraire une suite convergeant uniformément vers une fonction $f(z)$ de la famille ($\mathrm{E_M}$); cette fonction ne pourrait être univalente dans aucun cercle de centre de l'origine, ce qui entraîne que $z = o$ serait un zéro multiple de cette fonction, hypothèse contradictoire avec la condition $f'(o) = 1$.

En posant $n=p+1$, ρ_p peut encore être défini comme le nombre minimum tel qu'on puisse trouver n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ [1] de modules au plus égaux à ρ_p et pour lesquels

$$(7) \qquad f(a_1)=f(a_2)=\ldots=f(a_n)=\alpha,$$

$f(z)$ étant une certaine fonction de la famille (E_M).

Supposons donc qu'il existe n points de cette nature, et cherchons les conditions qu'ils doivent remplir. Faisons sur $f(z)$ une transformation du type (2) en posant

$$F(z)=\frac{M^2[f(z)-\alpha]}{\bar{\alpha}f(z)-M^2}.$$

$F(z)$ est une fonction de la famille $(\mathcal{F}_M)$ et l'on a

$$F(a_1)=F(a_2)=\ldots=F(a_n)=0.$$

On peut donc écrire

$$F(z)=\frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}{(\bar{a}_1z-1)(\bar{a}_2z-1)\ldots(\bar{a}_nz-1)}\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant de nouveau une fonction de la famille $(\mathcal{F}_M)$. Supposons d'abord *que l'un des a_k soit nul*, par exemple $a_1=0$ [comme $f'(0)=1$, un seul au plus de ces nombres peut être nul]. On a, dans ce cas,

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{(z-a_2)\ldots(z-a_n)}{(\bar{a}_2z-1)\ldots(\bar{a}_nz-1)}\varphi(z),$$

d'où

$$(8) \qquad \varphi(0)=\frac{1}{a_2a_3\ldots a_n}$$

et, par suite, d'après (6), on a la condition

$$(9) \qquad |a_2a_3\ldots a_n|\geqq\frac{1}{M}.$$

---

[1] Si q de ces points sont confondus en un point a, il faut remplacer les q équations (7) correspondantes par

$$f(a)=\alpha, \qquad f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(q-1)}(a)=0,$$

mais cela ne change pas la forme de la fonction $F(z)$.

Inversement, si cette condition est remplie, il est possible de trouver une fonction $\varphi(z)$ de la famille $(\mathcal{F}_M)$ pour laquelle $\varphi(o)$ soit donné par (8); par suite, en remontant la série des calculs, il existe bien une fonction de la famille (E_M) qui s'annule aux points $a_1 = o$, a_2, $a_3 \ldots, a_n$.

L'inégalité (9) donne immédiatement

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{Max} |a_k| \geqq \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

et cette limite est atteinte lorsqu'on donne à $a_2, a_3, \ldots, a_n$ des valeurs égales en module à $\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Dans ces conditions, il vient $|\varphi(o)| = M$ et, par suite, $\varphi(z) \equiv Me^{i\theta}$, $-\theta$ étant la somme des arguments de $a_2, \ldots, a_n$. On en tire

$$f(z) \equiv Me^{i\theta} z \frac{(z - a_2) \ldots (z - a_n)}{(\bar{a}_2 z - 1) \ldots (\bar{a}_n z - 1)}.$$

3. L'étude de ce cas particulier étant achevée, supposons maintenant *qu'aucun des a_k ne soit nul.* Les valeurs de $\varphi(o)$ et $\varphi'(o)$ sont alors déterminées en fonctions de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et α. On a d'abord

$$F(o) = \alpha = a_1 a_2 \ldots a_n \varphi(o),$$

puis

$$F'(o) = \frac{|\alpha|^2}{M^2} - 1 = a_1 a_2 \ldots a_n \left[\varphi'(o) + \varphi(o) \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{a}_k - \frac{1}{a_k}\right)\right]$$

comme le montre un calcul facile. Posons, pour abréger,

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \lambda \neq o,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\bar{a}_k - \frac{1}{a_k}\right) = \mu.$$

Il vient alors

$$\text{(11)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(o) &= \frac{\alpha}{\lambda}, \\ \lambda\varphi'(o) &= \frac{|\alpha|^2}{M^2} - \alpha\mu - 1. \end{aligned} \right.$$

$\varphi(z)$, appartenant à la famille $(\mathcal{F}_M)$, doit satisfaire aux conditions de M. Schur, en particulier, les inégalités (6) et (5) doivent être vérifiées, ce qui donne les conditions

$$|\alpha| \leqq M|\lambda|, \tag{12}$$

$$\left|\frac{|\alpha|^2}{M^2} - \alpha\mu - 1\right| \leqq M|\lambda| - \frac{|\alpha|^2}{M|\lambda|}. \tag{13}$$

Inversement, si les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, α vérifient ces inégalités, il est possible de trouver une fonction $\varphi(z)$ de la famille $(\mathcal{F}_M)$, pour laquelle $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$ ont les valeurs données par (11), et par conséquent, en remontant la suite des calculs, il existe bien une fonction de la famille (E_M) qui prend la valeur α aux n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Lorsque $\lambda \neq 0$, *les inégalités* (12) *et* (13) *sont donc les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, α *pour qu'il existe une fonction de la famille* (E_M) *vérifiant les relations* (7).

Remarquons encore que si les deux membres de (13) sont égaux, on a nécessairement

$$\varphi(z) \equiv M e^{i\theta}\frac{z - x}{\bar{x}z - 1} \qquad \text{avec} \qquad |x| \leqq 1;$$

de même, si l'inégalité (12) est remplacée par une égalité, on a

$$\varphi(z) \equiv M e^{i\theta}.$$

4. Ceci posé, considérons pour le moment $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme fixes, α comme variable. Les inégalités (12) et (13) définissent, dans le plan des α, deux domaines (Δ_1), (Δ_2) limités par les courbes (Γ_1), (Γ_2) obtenues en égalant les deux membres dans chacune de ces inégalités [d'ailleurs, (Γ_1) est un cercle centré à l'origine, (Γ_2) une quartique bicirculaire, comme on le voit en développant les deux membres de (13), après les avoir élevés au carré]. On peut donc encore dire que *la condition nécessaire et suffisante pour que les égalités* (7) *soient possibles est que les domaines* (Δ_1) *et* (Δ_2) *aient au moins un point commun.*

Supposons cette condition remplie. Deux cas sont alors possibles : tout d'abord, (Δ_1) et (Δ_2) peuvent avoir *un point intérieur commun* α_0, auquel cas il existe un cercle (γ) de centre α_0 et de rayon δ, dont tous les points sont à la fois intérieurs à (Δ_1) et (Δ_2). Je dis que le *minimum* ρ_p *ne peut pas être atteint* dans ce cas; en effet, les courbes (Γ_1) et (Γ_2) varient d'une façon continue avec les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$; faisons varier ces points en diminuant le module de chacun d'eux d'une quantité $\varepsilon > 0$ assez petite pour que la plus courte distance d'un point quelconque de chacune des nouvelles courbes (Γ'_1), (Γ'_2) à (Γ_1) et (Γ_2) respectivement soit inférieure à $\frac{\delta}{2}\cdot$ Le cercle de centre α_0 et de rayon $\frac{\delta}{2}$ est donc tout entier intérieur aux nouveaux domaines (Δ'_1), (Δ'_2); par conséquent, les relations (7) sont encore possibles pour les nouvelles valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ce qui démontre la proposition.

Le minimum ρ_p ne peut donc être atteint que si les domaines (Δ_1) et (Δ_2) n'ont en commun qu'un nombre fini de points, situés nécessairement sur les courbes (Γ_1) et (Γ_2); ceci entraîne, d'après ce qui précède que $\varphi(z) \equiv \mathrm{M}e^{i\theta}$. En portant cette valeur dans (11), il vient la relation entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$|\lambda|^2 - 1 - \mathrm{M}e^{i\theta}\lambda\mu = 0. \tag{14}$$

ρ_p est donc le plus petit nombre positif tel que l'on puisse trouver n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ liés par la relation (14) et de modules au plus égaux à ρ_p. Pour obtenir cette valeur, nous procéderons comme suit :

Posons

$$a_k = r_k e^{i\omega_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'équation (14), décomposée en partie réelle et imaginaire, est équivalente aux deux relations

$$(15)\quad \begin{cases} g(r_1, r_2, \ldots, r_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ \quad \equiv (r_1 r_2 \ldots r_n)^2 - 1 - \mathrm{M} r_1 r_2 \ldots r_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(r_k - \frac{1}{r_k}\right) \cos(\theta + \Omega - \omega_k) = 0, \\ h(r_1, r_2, \ldots, r_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ \quad \equiv \mathrm{M} r_1 r_2 \ldots r_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(r_k - \frac{1}{r_k}\right) \sin(\theta + \Omega - \omega_k) = 0, \end{cases}$$

où

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Faisons sur les variables ω_k la transformation linéaire

$$\theta_k = \theta + \Omega - \omega_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

dont le déterminant n'est pas nul. Les deux équations (15) permettent alors d'exprimer deux des quantités θ_i, θ_j par des fonctions continues des $(2n-2)$ autres variables

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \quad \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_n,$$

pourvu que l'on ait

$$\frac{D(g, h)}{D(\theta_i, \theta_j)} \neq 0,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$(r_1 r_2 \ldots r_n)^2 \left(r_i - \frac{1}{r_i}\right)\left(r_j - \frac{1}{r_j}\right) \sin(\theta_i - \theta_j) \neq 0.$$

ou, comme aucun des r_k ne peut être égal à 0 ni à 1,

$$(16) \qquad \sin(\theta_i - \theta_j) \neq 0.$$

Ceci posé, considérons un système *quelconque* de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfaisant à la relation (14), et soit r_1 le plus grand des modules de ces points. Faisons décroître r_1, en laissant les autres r_k fixes, ainsi que les θ_k, sauf deux de ces variables, θ_i et θ_j qui seront déterminées par les équations (15) en fonction de r_1, tant qu'elles satisferont à (16). Si cette dernière condition est constamment satisfaite, il arrive un moment où r_1 devient égal au plus grand des r_k restants, soit r_2 par exemple; à partir de ce moment, nous ferons décroître simultanément r_1 et r_2, de manière que ces deux variables *soient constamment égales;* nous laissons toujours fixes les $(2n-2)$ autres variables, sauf θ_i et θ_j, qui seront déterminées par (15) en fonction de l'unique variable $\rho = r_1 = r_2$. Au moment où ρ deviendra égal au plus grand des r_k restants, soit r_3, nous imposerons à r_1, r_2, r_3 les conditions $r_1 = r_2 = r_3 = \rho$ et nous continuerons à faire décroître la valeur ρ, en donnant toujours à θ_i et θ_j les valeurs tirées de (15). On peut continuer ce procédé jusqu'au moment où l'on a $\theta_i = \theta_j$ ou $\theta_i = \theta_j + \pi$; on prendra alors comme nouvelles variables deux autres θ_k (l'un d'eux pouvant être égal a θ_i ou θ_j) qui vérifient la condition (16) et l'on poursuivra comme précédemment, en déterminant constamment ces variables en fonction de ρ

par les équations (15). Il est clair que l'on arrivera ainsi à l'un des deux cas suivants :

1° Ou bien $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = \rho$, les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont sur une circonférence de centre $z = 0$;

2° Ou bien $\sin(\theta_i - \theta_j) = 0$ quels que soient i et j, c'est-à-dire que les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont sur une même droite issue de l'origine.

De chaque système de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifiant la condition (14), nous pouvons donc déduire un autre système, de l'un des deux types précédents, le plus grand des modules de ces points étant au plus égal au plus grand des modules des points du système, d'où l'on est parti. On peut donc se limiter à ces deux cas pour la recherche de ρ_p.

5. 1° Soit $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = \rho$; (14) s'écrit alors

$$\rho^{2n} - 1 - M\rho^n\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} = 0.$$

$\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k}$ est donc un nombre réel, et l'on a évidemment $|\Sigma e^{i\theta_k}| \leqq n$; comme l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{1-\rho^{2n}}{M\rho^{n-1}(1-\rho^2)} = \Sigma e^{i\theta_k},$$

on a donc

$$0 \leqq \frac{1-\rho^{2n}}{M\rho^{n-1}(1-\rho^2)} \leqq n,$$

ce qui montre que ρ_p est au moins égal à la racine, comprise entre 0 et 1, de l'équation

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2} - Mnx^{n-1} = 0. \tag{17}$$

2° Supposons tous les points a_k sur une même droite issue de l'origine; cette droite est nécessairement l'axe réel, sans quoi on déduirait de (15)

$$r_1 r_2 \ldots r_n = 1,$$

ce qui est absurde. L'équation (14) peut donc s'écrire ici

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^2 - 1 - M a_1 a_2 \dots a_n \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - \frac{1}{a_k}\right) = 0. \tag{18}$$

Or, il est bien évident que le minimum du plus grand des modules des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$, *supposés réels* et liés par la relation (18), est au moins égal au minimum du plus grand des modules des *nombres complexes* $a_1, a_2, \dots, a_n$, liés par cette même relation. Pour obtenir cette dernière quantité, on peut recommencer le raisonnement fait sur l'équation (14), avec la différence qu'il y a toujours ici correspondance continue entre les points a_k lorsqu'on les suppose tous à distance finie ([1]); on peut donc toujours se ramener au cas où tous ces points ont le même module r. En posant

$$\varphi_k = \omega_k - \frac{\Omega}{n}, \qquad x = r e^{\frac{\Omega}{n}},$$

où Ω a le même sens que ci-dessus, et

$$c = M \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k},$$

x est déterminé par l'équation

$$x^{2n} + c x^{n+1} - \bar{c} x^{n-1} - 1 = 0, \tag{19}$$

qui s'écrit encore

$$x^{n+1} = \frac{1 + \bar{c} x^{n-1}}{c + x^{n-1}}.$$

Lorsque x décrit une circonférence (γ) ayant pour centre l'origine, x^{n+1} et $\dfrac{1 + \bar{c} x^{n-1}}{c + x^{n-1}}$ décrivent deux circonférences (γ_1) et (γ_2). Lorsque le rayon de (γ) est très petit, ces circonférences sont extérieures l'une à l'autre; il est clair par suite que l'on aura la plus petite valeur possible de r en écrivant que lorsque (γ) a pour rayon r, (γ_1) et (γ_2) sont tan-

([1]) Car la relation est *analytique* en $a_1, a_2, \dots, a_n$, et il est inutile ici de la décomposer en parties réelle et imaginaire.

gentes extérieurement; un calcul simple montre que le minimum de r est atteint lorsque $|c|$ prend sa plus grande valeur, c'est-à-dire pour $c = \mathrm{M}n$. L'équation (19) débarrassée du facteur $(x^2 - 1)$ se réduit alors à l'équation (17).

D'ailleurs, la racine de (17) comprise entre 0 et 1 est inférieure à la limite $\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ donnée par l'inégalité (10). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante [1] : *Le rayon de p-valence des fonctions de la famille* $(\mathrm{E_M})$ *est au moins égal à la racine* ρ_p, *comprise entre* 0 *et* 1, *de l'équation réciproque*

$$(17) \qquad 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2p} - (p+1)\mathrm{M}x^p = 0.$$

Lorsque la limite est atteinte, on a

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \rho_p e^{i\psi},$$

et comme $\varphi(z) \equiv \mathrm{M}e^{-pi\psi}$, il vient

$$\mathrm{F}(z) \equiv \mathrm{M}e^{-pi\psi}\left(\frac{z - \rho_p e^{i\psi}}{\rho_p e^{-i\psi}z - 1}\right)^{p+1} \equiv \mathrm{M}e^{i\psi}\left(\frac{z - \rho_p e^{i\psi}}{\rho_p z - e^{i\psi}}\right)^{p+1}.$$

$\mathrm{Z} = \mathrm{F}(z)$ transforme le cercle unité en le cercle (Γ) recouvert $(p+1)$ fois, le point de ramification unique $\mathrm{Z} = 0$ correspondant à $z = \rho_p e^{i\psi}$. Comme

$$\alpha = \mathrm{F}(0) = \mathrm{M}\rho_p^{p+1}e^{i\psi},$$

il vient finalement

$$f(z) \equiv \mathrm{M}^{i\psi}\frac{(z - \rho_p e^{i\psi})^{p+1} - \rho_p^{p+1}(\rho_p z - e^{i\psi})^{p+1}}{\rho_p^{p+1}(z - \rho_p e^{i\psi})^{p+1} - (\rho_p z - e^{i\psi})^{p+1}}.$$

$f(z)$ transforme également le cercle unité en (Γ) recouvert $(p+1)$ fois, le point de ramification étant ici

$$f(\rho_p e^{i\psi}) = \alpha.$$

6. Remarquons que la première partie du raisonnement qui nous a donné la valeur de ρ_p s'applique, non seulement à la famille $(\mathrm{E_M})$, mais

---

(1) M. Landau m'a communiqué une intéressante démonstration purement algébriqué de cette proposition.

encore à toute famille de fonctions de $(\mathcal{F}_M)$, *ne renfermant pas de constante*. On formera comme ci-dessus la fonction $\varphi(z)$, on explicitera les conditions auxquelles elle est soumise et l'on écrira que ces conditions sont compatibles avec le fait que $\varphi(z)$ appartient à $(\mathcal{F}_M)$; les inégalités qu'on obtient ainsi délimitent la région de p-valence des fonctions de la famille considérée.

En particulier, si l'on considère une famille de fonctions de $(\mathcal{F}_M)$ dont on fixe les valeurs, ainsi que celles d'un certain nombre de leurs dérivées, en un certain nombre de points de (C), on verra, comme ci-dessus, que les limites de la région de p-valence ne peuvent être atteintes que pour les *fractions rationnelles* de la famille, qui font correspondre à (C) le cercle (Γ) recouvert un certain nombre de fois.

7. Revenons à la famille (E_M), et considérons en particulier le cas où $p = 1$; on a alors

$$\rho_1 = M - \sqrt{M^2 - 1}, \tag{20}$$

et les fonctions pour lesquelles la limite est atteinte sont de la forme

$$f(z) = Mz \frac{(e^{i\psi} - Mz)}{Me^{i\psi} - z}. \tag{21}$$

Ce résultat a déjà été obtenu par M. Landau ([20], p. 471-472) en utilisant la formule de Cauchy donnant le nombre de zéros de $f(z) - \alpha = 0$ à l'intérieur d'un cercle. En voici une troisième démonstration, plus simple que la démonstration générale, et qui m'a été également communiquée par M. Landau.

Reprenons la formule (12), qui s'écrit ici

$$|\alpha| \leqq M |a_1 a_2|.$$

Supposons que l'un des deux nombres a_1, a_2 au moins soit de module inférieur à $\frac{1}{M}$, soit a_1 par exemple; la formule (4), appliquée à $\frac{f(z)}{z}$ au point $z = a_1$ donne

$$|\alpha| = |f(a_1)| \geqq M |a_1| \frac{1 - M|a_1|}{M - |a_1|}.$$

Comme par hypothèse $|a_1| \leqq \rho_1$, $|a_2| \leqq \rho_1$, ρ_1 est donc le plus petit nombre satisfaisant à l'inégalité

$$M\rho_1 \geqq M\frac{1 - M\rho_1}{M - \rho_1},$$

c'est-à-dire la racine comprise entre o et 1 de l'équation

$$x^2 - 2Mx + 1 = 0;$$

on retrouve bien la valeur (20).

Remarquons que ρ_1 est aussi la limite inférieure du module des racines de $f'(z) = 0$ pour les fonctions de la famille (E_M), la limite étant atteinte pour les fonctions de la forme (21). Mais, de plus, nous allons montrer que *toute fonction de la famille* (E_M) *représente le cercle* $|z| \leqq \rho_1$ *sur un domaine* (Δ) *étoilé par rapport à l'origine* [1]. Il suffit d'établir que

$$\mathcal{R}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geqq 0$$

pour $|z| = r \leqq \rho_1 < \frac{1}{M}$, ou encore, en posant $\frac{f(z)}{z} = \varphi(z)$ que

$$\mathcal{R}\left[\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right] \geqq -1,$$

inégalité qui sera vérifiée *a fortiori* si l'on a

$$\left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \leqq 1.$$

Or, d'après les inégalités (3) et (4), appliquées à $\varphi(z)$ pour $|z| = r < \frac{1}{M}$,

$$|\varphi(z)| \geqq M\frac{1 - Mr}{M - r},$$

$$|\varphi'(z)| \leqq \frac{1}{M}\,\frac{M^2 - |\varphi(z)|^2}{1 - r^2} \leqq \frac{1}{M}\,\frac{M^2 - M^2\left(\frac{1 - Mr}{M - r}\right)^2}{1 - r^2} = \frac{M(M^2 - 1)}{(M - r)^2},$$

[1] C'est le troisième exemple que nous rencontrons — les deux précédents étant fournis par les deux théorèmes de M. Alexander (Chap. II, nos 4 et 6) — d'une famille de fonctions pour laquelle le rayon d'univalence, le rayon d'étoilement et le module minimum des zéros de la dérivée ont *la même limite inférieure*. Il serait intéressant de chercher s'il s'agit d'une simple coïncidence, ou si, en général, lorsque deux de ces limites sont égales, la troisième leur est égale.

et par suite

$$\left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \leqq \frac{(M^2-1)r}{(M-r)(1-Mr)}.$$

Comme l'inégalité

$$\frac{(M^2-1)r}{(M-r)(1-Mr)} \leqq 1$$

se réduit à

$$r^2 - 2Mr + 1 \geqq 0,$$

c'est-à-dire à $r \leqq \rho_1$, la proposition est démontrée ([1]).

Il est d'ailleurs aisé d'obtenir la plus courte distance d de l'origine à la frontière du domaine (Δ). On a, en effet, d'après (3),

$$|f(z)| \geqq Mr\frac{1-Mr}{M-r}$$

et comme, pour $r = \rho_1$, $\frac{1-M\rho_1}{M-\rho_1} = \rho_1$, il vient

$$(22) \qquad d \geqq M\rho_1^2 = M\left(M - \sqrt{M^2-1}\right)^2 \quad ([2]).$$

La limite est encore atteinte pour les fonctions de la forme (21), au point correspondant à la racine de $f'(z) = 0$.

8. D'une façon générale, on a, pour toute fonction de la famille (F_M) en un point où la dérivée s'annule,

$$(23) \qquad |f(z)| \leqq Mr^2.$$

C'est en effet une conséquence immédiate de la formule (12). On peut d'ailleurs aussi le voir directement, en calculant des limites pour le module de la dérivée d'une telle fonction ; il suffit d'appliquer la formule (3) à la fonction $\frac{f(z)}{z}$, il vient

$$\left|\frac{f'(z)}{z} - \frac{f(z)}{z^2}\right| \leqq \frac{1}{M}\,\frac{M^2 - \left|\frac{f(z)}{z}\right|^2}{1-r^2},$$

([1]) La démonstration de cette proposition, ainsi que celle des inégalités (24), est un peu plus simple que celles que j'avais d'abord données dans ma Note aux *Comptes rendus* du 24 mars 1930 ; ces simplifications m'ont été indiquées par M. Landau.

([2]) Ce résultat est dû à M. Landau (*loc. cit.*).

d'où

$$|f'(z)| \leqq \frac{|f(z)|}{r} + \frac{M^2r^2 - |f(z)|^2}{Mr(1-r^2)}$$

et

$$|f'(z)| \geqq \frac{|f(z)|}{r} - \frac{M^2r^2 - |f(z)|^2}{Mr(1-r^2)}$$

ou encore

$$(24) \qquad \frac{(|f(z)| - Mr^2)(M + |f(z)|)}{Mr(1-r^2)} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{(|f(z)| + Mr^2)(M - |f(z)|)}{Mr(1-r^2)},$$

et la première de ces inégalités redonne bien (23) lorsque $f'(z) = 0$.

Les inégalités (24) se transforment en égalités pour les fonctions de la forme

$$f(z) = Me^{i\theta} z \frac{(1 - xz)}{\bar{x} - z}, \qquad \text{où } |x| > 1.$$

Si l'on pose $x = \rho e^{i\alpha}$, la première inégalité est atteinte pour $z = te^{-i\alpha}$, t étant réel et compris entre o et $\frac{1}{\rho}$, la seconde pour $z = te^{-i\alpha}$, avec $t < 0$ ou $t > \frac{1}{\rho}$.

La seconde des inégalités (24) permet aussi de donner une borne supérieure pour $|f'(z)|$ indépendante de la valeur de $|f(z)|$, et valable pour toute fonction de la famille (F_M). Le second membre de cette inégalité est en effet maximum pour

$$|f(z)| = \frac{M(1 - r^2)}{2};$$

cette valeur ne peut être atteinte que si $\frac{1 - r^2}{2} \geqq r$, c'est-à-dire si $r \geqq \sqrt{2} - 1$. Sinon, le second membre de la seconde inégalité (24) est maximum pour $|f(z)| = Mr$.

Par suite, *on a pour toute fonction de* (F_M),

$$(25) \qquad \begin{cases} |f'(z)| \leqq M & \text{si } r \leqq \sqrt{2} - 1, \\ |f'(z)| \leqq \dfrac{M(1 + r^2)^2}{4r(1 - r^2)} & \text{si } r > \sqrt{2} - 1 \quad [1]. \end{cases}$$

---

[1] Cette proposition peut être considérée comme l'analogue du lemme de Schwarz pour les dérivées des fonctions de (F_M).

On constate sans difficulté que la seconde de ces limites est atteinte, au point (supposé réel) $z = a > \sqrt{2} = 1$, pour la fonction

$$(26) \qquad f(z) = \frac{Mz\left(1 - \frac{a(1+a^2)}{3a^2-1}z\right)}{\frac{a(1+a^2)}{3a^2-1} - z} \quad (^1).$$

On pourrait évidemment obtenir par le même raisonnement des limites analogues à (24) et (25) pour les fonctions de la forme

$$f(z) = z^n \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction arbitraire de $(\mathcal{F}_M)$; nous ne nous y arrêterons pas.

9. Indiquons plutôt comment, des inégalités (25), on peut déduire des relations entre les domaines que font correspondre au cercle unité une fonction holomorphe *quelconque* et sa dérivée.

Soit donc $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, et supposons d'abord que $f(0) = 0$. Cherchons d'abord une limite inférieure du module des zéros de $f'(z)$. Considérons la fonction holomorphe

$$F(z) = f(z) + \lambda z,$$

λ étant une constante que nous laissons pour le moment indéterminée. Lorsque $f'(z) = 0$, on a $F'(z) = \lambda$. Soit $M(r)$ le maximum de $|F(z)|$ sur la circonférence $|z| = r < 1$. D'après la première inégalité (25), on a, pour $|z| \leqq (\sqrt{2} - 1)r$,

$$|F'(z)| \leqq \frac{M(r)}{r}.$$

Donc, s'il est possible de choisir la constante λ telle que

$$(27) \qquad \frac{M(r)}{r} \leqq |\lambda|,$$

$f'(z)$ ne s'annulera pas dans le cercle $|z| < (\sqrt{2} - 1)r$. L'inégalité (27)

---

(1) L'expression donnée dans ma Note du 24 mars 1930 est erronée.

donne pour $|z| = r$

$$|f(z) + \lambda z| \leqq M(r) \leqq |\lambda| r$$

ou

$$\left|\frac{f(z)}{\lambda z} + 1\right| \leqq 1.$$

Si l'on désigne par (D) le domaine que la fonction $\frac{f(z)}{z}$ fait correspondre au cercle $|z| \leqq r$, il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver une valeur de λ satisfaisant à cette inégalité, est que l'angle sous le lequel on voit, de l'origine, le domaine (D), soit inférieur à π.

On peut raisonner de même pour l'équation $f'(z) = a$, a étant un nombre quelconque; il suffit de remplacer $f(z)$ par $f(z) - az$. Enfin, en utilisant la seconde inégalité (25), qu'on peut écrire

$$|f'(z)| \leqq \frac{M}{\sin 4\varphi}, \qquad \text{avec } \operatorname{tang}\varphi = r,$$

il vient finalement le résultat suivant :

$f(z)$ étant une fonction holomorphe dans le cercle unité, soit (D) *le domaine que fait correspondre au cercle $|z| \leqq r < 1$ la fonction*

$$F(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z},$$

(D′) *le domaine que fait correspondre au cercle $|z| \leqq r' < r$ la dérivée $f'(z)$:*

1° *Si $\frac{r'}{r} \leqq \sqrt{2} - 1$,* (D′) *est intérieur au plus petit domaine convexe contenant* (D);

2° *Si $\sqrt{2} - 1 < \frac{r'}{r} < 1$,* (D′) *est intérieur au domaine* (Δ), *lieu des points d'où l'on voit le domaine* (D) *sous un angle au moins égal à $2\pi - 8\psi$ avec*

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{r'}{r} \qquad \left(\frac{\pi}{8} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{4}\right).$$

La seconde partie de cette proposition ne peut être améliorée, comme le montre l'exemple donné par l'égalité (26). Par contre, comme la première inégalité (25) ne se transforme en égalité que pour $f(z) = Mz$, c'est-à-dire lorsque les domaines (D) et (D′) se réduisent à un point, il n'apparaît pas aussi immédiatement que la première partie du théorème précédent donne également la meilleure limite possible. L'exemple suivant montre pourtant qu'il en est bien ainsi : pour la fonction

$$f(z) = \frac{z(1-z)}{1+z};$$

le domaine (D) correspondant au cercle unité est le demi-plan à droite de l'axe imaginaire, et pour $z = \sqrt{2} - 1$ on a $f'(z) = 0$.

10. Comme autre application des inégalités (24), indiquons rapidement comment on peut les utiliser pour démontrer et préciser dans certains cas le théorème suivant, établi par M. Montel dans un Mémoire récent ([21], p. 106) :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une ellipse (E) *de foyers* -1 *et* $+1$, *réelle lorsque z est réel, telle que* $|f(z)| \leqq 1$ *dans* (E) *et s'annulant aux points* -1 *et* $+1$; *soit de plus* $f(0) = a_0 \neq 0$. *Il existe alors un nombre réel* $\theta(a_0)$ *compris entre* 0 *et* 1, *tel que* $f'(z)$ *ait au moins un zéro dans l'intervalle* $(-\theta, +\theta)$. Ce nombre dépend aussi évidemment de la grandeur de l'ellipse (E).

Pour démontrer cette proposition, faisons une représentation conforme de l'ellipse (E) sur le cercle unité, en conservant le centre et les axes de symétrie. Nous avons alors une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle unité, réelle sur l'axe réel et satisfaisant aux conditions

$$|f(z)| \leqq 1, \qquad f(0) = a_0 \neq 0 \qquad \text{(on peut toujours supposer } a_0 > 0\text{)},$$
$$f(-\rho) = f(+\rho) = 0,$$

$\pm\rho$ étant les deux points de l'axe réel qui correspondent aux foyers de (E). Il faut chercher une limite supérieure du module minimum des zéros réels de $f'(z)$ compris entre $-\rho$ et $+\rho$.

En posant

$$f(z) = -\frac{z^2-\rho^2}{\rho^2 z^2 - 1} \cdot \frac{\psi(z) - \dfrac{a_0}{\rho^2}}{\dfrac{a_0}{\rho^2}\psi(z) - 1},$$

$\psi(z)$ est une fonction de la famille (F_1), assujettie à la seule condition supplémentaire d'être réelle sur l'axe réel.

L'équation $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = 0$ s'écrit alors

$$\frac{\psi'(z)}{[\psi(z)+k][k\psi(z)+1]} = K\frac{z}{(z^2-\rho^2)(\rho^2 z^2-1)}, \tag{28}$$

où

$$k = \frac{a_0}{\rho^2}, \qquad K = 2\frac{1-\rho^4}{1-k^2} \qquad (0 < k \leqq 1).$$

On peut supposer $\psi'(0) > 0$; le cas $\psi'(0) = 0$ donnerait une racine de $f'(z) = 0$ à l'origine, et si $\psi'(0) < 0$, on posera $z_1 = -z$, $\psi(z) = \psi_1(z_1)$; on est ramené à l'équation (28) entre z_1 et $\psi_1(z_1)$, et l'on a

$$\psi_1'(0) = -\psi'(0).$$

$\psi(z)$ commence donc par être positif lorsque z croît à partir de $z = 0$. Je dis que si z_0 est la plus petite racine de (28) comprise entre 0 et ρ, $\psi(z) \geqq 0$ lorsque $0 \leqq z \leqq z_0$. Sinon, comme $\psi(z)$ est une fonction continue, $\psi(z)$ s'annulerait pour une valeur z_1 au moins telle que $0 < z_1 < z_0$, et comme $\psi(0) = 0$, on aurait aussi, d'après le théorème de Rolle, une racine de $\psi'(z) = 0$ au moins comprise entre 0 et z_1; si z_2 est la plus petite de ces racines, on a

$$\psi(z) \geqq 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq z \leqq z_2$$

et

$$y_1(0) > y_2(0) = 0,$$
$$y_1(z_2) = 0 < y_2(z_2),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$y_1(z) = \frac{\psi'(z)}{[\psi(z)+k][k\psi(z)+1]}, \qquad y_2(z) = \frac{Kz}{(z^2-\rho^2)(\rho^2 z^2-1)}.$$

Comme y_1 et y_2 sont continues pour $0 \leqq z \leqq z_2$, il y aurait une racine de (28) inférieure à z_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit alors $Y_1(z)$ la limite supérieure de $y_1(z)$ en un point de l'intervalle $0 < z < 1$, lorsqu'on suppose en ce point $\psi(z) > 0$, ψ pouvant être d'ailleurs une fonction quelconque de (F_1), réelle sur l'axe réel. Il résulte de ce qui précède que si l'équation

$$Y_1(z) - y_2(z) = 0$$

a une racine ζ comprise entre o et ρ, $f'(z)=0$ aura toujours une racine de module inférieur à ζ, ce qui démontrera le théorème de M. Montel.

Or, il est aisé de calculer $Y_1(z)$ en se servant de la seconde inégalité (24) qui donne ici

$$|y_1| \leqq \frac{(\psi + z^2)(1-\psi)}{z(1-z^2)(\psi+k)(k\psi+1)},$$

et comme $|\psi| < z$, $Y_1(z)$ sera le maximum du second membre lorsque ψ varie de o à z, z restant fixe. On trouve ainsi

$$Y_1(z) = \frac{1}{(z+k)(kz+1)} \qquad \text{pour } 0 \leqq z \leqq \alpha,$$

$$Y_1(z) = \frac{1+k}{(1-k^2)^2} \frac{(\sqrt{1-kz^2} - \sqrt{k-z^2})^2}{z(1-z^2)} \qquad \text{pour } \alpha \leqq z \leqq \beta,$$

$$Y_1(z) = \frac{z}{1-z^2} \qquad \text{pour } \beta \leqq z \leqq 1,$$

où α désigne la racine comprise entre o et 1 de l'équation

$$z^4 - 2z^3 - \frac{2(1+k+k^2)}{k} z^2 - 2z + 1 = 0$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{1+k+k^2}}.$$

Un calcul immédiat montre alors que l'équation $Y_1(z) - y_2(z) = 0$ a bien toujours un zéro ζ et un seul compris entre o et ρ, quel que soit ρ compris entre o et 1.

11. La valeur ζ que nous venons d'obtenir n'est pas en général la limite exacte du module minimum des zéros de $f'(z)$. Cela tient d'abord à ce que, pour que cette limite fût atteinte, il faudrait que $y_1(\zeta) = Y_1(\zeta)$, et l'on sait que cela ne se produit que pour

$$\psi(z) \equiv \frac{z(1+zx)}{x+z}$$

avec $x > 1$ ou $x < -\frac{1}{\zeta}$; mais la seconde hypothèse est à rejeter, car $\psi(z)$ ne serait pas positif pour $0 \leqq z \leqq \zeta$. Donc, au point ζ,

$$\zeta^2 \leqq \psi(\xi) \leqq \zeta.$$

Comme nous avons fait varier ψ de o à z pour obtenir $Y_1(z)$, on voit aisément qu'à partir d'une certaine valeur de z, la valeur de Y_1 correspondra à une valeur de ψ inférieure à z^2, qui ne peut donc convenir.

Pour obtenir la limite supérieure exacte de $y_1(z)$ en un tel point, il faudrait d'abord trouver la limite exacte de $|\psi'(z)|$ en un point de l'axe réel, lorsqu'on suppose que la fonction $\psi(z)$ de la famille (F_1) est positive entre o et z.

Une autre raison pour laquelle ζ peut ne pas donner la limite exacte est que l'équation (28) peut, *a priori*, avoir des racines comprises entre o et $-\rho$, et de module inférieur à ζ, quelle que soit la fonction $\psi(z)$.

Indiquons toutefois, en terminant, *un cas où ζ donne la limite exacte :* il suffit que $\zeta < \alpha$ et en même temps $\rho < k$, ce qui aura lieu lorsque, k étant fixé, ρ est pris assez petit. La fonction qui donne la limite est alors obtenue en faisant $\psi(z) \equiv z$.

Vu et approuvé :

Paris, le 8 mai 1931.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 8 mai 1931.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.