

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

MARCEL VASSEUR

**Sur la conservation d'un réseau conjugué dans la  
déformation d'une surface**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1930

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1930\\_\\_108\\_\\_1\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1930__108__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :  
2123  
Série A.  
N° DE SÉRIE :  
1254

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR MARCEL VASSEUR

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — SUR LA CONSERVATION D'UN RÉSEAU CONJUGUÉ DANS LA DÉFORMATION D'UNE SURFACE.

2<sup>e</sup> THÈSE. — APPLICATION DES TOURBILLONS ALTERNÉS AU CALCUL DE LA RÉSISTANCE D'UN SOLIDE DANS UN LIQUIDE INDÉFINI.

Soutenues le

devant la Commission d'Examen.

---

MM. COURSAT, *Président.*  
VESSIOT } *Examineurs.*  
VILLAT }

---

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1930

# UNIVERSITÉ DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen .....	C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.
Doyens honoraires.....	P. APPELL, M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires...	A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERN- BACH, A. LEDUC, E. HÉROUARD.
	E. PICARD..... Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	KOENIGS..... Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT..... Calcul différentiel et Calcul intégral.
	JANET..... Electrotechnique générale.
	WALLERANT..... Minéralogie.
	PAINLEVÉ..... Mécanique analytique et Mécanique céleste.
	GABRIEL BERTRAND.. Chimie biologique.
	M <sup>me</sup> P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	G. URBAIN..... Chimie générale.
	EMILE BOREL..... Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	MARCHIS..... Aviation.
	JEAN PERRIN..... Chimie physique.
	RÉMY PERRIER..... Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	ABRAHAM..... Physique.
	M. MOLLIARD..... Physiologie végétale.
	E. CARTAN..... Géométrie supérieure.
	LAPICQUE..... Physiologie générale.
	VESSIOT..... Théorie des fonctions, théorie des transform.
	COTTON..... Physique générale.
Professeurs.....	DRACH..... Application de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY..... Physique.
	C. PEREZ..... Zoologie.
	LÉON BERTRAND.... Géologie appliquée et Géologie structurales.
	R. LESPIEAU..... Théories chimiques.
	E. RABAUD..... Biologie expérimentale.
	P. PORTIER..... Physiologie comparée.
	E. BLAISE..... Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD.... Botanique.
	P. MONTEL..... Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT.... Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ..... Biologie maritime.
	G. JULIA..... Mathématiques générales.
	A. MAILHE..... Etude des Combustibles.
	L. LUTAUD..... Géographie physique et géologie dynamique.
	EUGÈNE BLOCH..... Physique théorique et Physique céleste.
	HENRI VILLAT..... Mécanique des fluides et applications.
	CH. JACOB..... Géologie.
	P. PASCAL..... Chimie minérale.
	LÉON BRILLOUIN.... Théories physiques.
	V. AUGER..... Chimie appliquée.
	E. ESCLANGON..... Astronomie.
E. PÉCHARD.....	Chimie (Enseign <sup>nt</sup> P.C.N.)
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.
A. GUILLET.....	Physique.
C. MAUGUIN.....	Minéralogie.
L. BLARINGHEM..	Botanique.
A. MICHEL-LÉVY .	Pétrographie.
A. DEREIMS.....	Géologie.
A. DENJOY.....	Calcul différentiel et intégral.
H. BENARD.....	Physique (P. C. N.).
E. DARMOIS.....	Physique.
G. BRUHAT.....	Physique.
H. MOUTON.....	Chimie physique.
	L. JOLEAUD..... Paléontologie
	M. JAVILLIER..... Chimie biologique.
	A. DUFOUR... .. Physique (P. C. N.).
	F. PICARD..... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	ROBERT-LÉVY.... Zoologie.
	L. DUNOYER..... Optique appliquée.
	A. GUILLIERMOND Botanique (P. C. N.).
	A. DEBIERNE..... Radioactivité.
	M. FRECHET..... Calcul des Probabilités et Physique mathématiques.

Secrétaire..... A. PACAUD.

A

**MONSIEUR BERTRAND GAMBIER**

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE



# PREMIÈRE THÈSE.

SUR

## LA CONSERVATION D'UN RÉSEAU CONJUGUÉ

DANS

## LA DÉFORMATION D'UNE SURFACE

### INTRODUCTION.

Peterson et Bianchi ont les premiers abordé l'étude des surfaces applicables à réseau conjugué permanent. Bianchi ramène la recherche de ces surfaces à celle des surfaces auxiliaires (B), dont la courbure totale  $K$  a pour valeur

$$(-1) : [U(u) + V(v)]^2,$$

$u$  et  $v$  étant les paramètres des asymptotiques.

Dans sa thèse (Moscou, 1917, en russe), M. Finikoff, reprenant ce problème, rappelle les résultats antérieurement acquis; sur un  $ds^2$  donné *a priori*, un réseau, choisi arbitrairement, est conjugué sur 0, 1, 2,  $\infty$  surfaces représentatives. M. Finikoff aborde la question nouvelle et difficile : sur une surface  $S_0$  (et non plus un  $ds^2$ ) donnée *a priori*, combien existe-t-il de réseaux conjugués pouvant rester conjugués sur  $\infty$  surfaces  $S$  déformées de  $S_0$  (*bases principales*, par opposition aux *bases simples* qui ne sont conjuguées que sur deux surfaces)? M. Finikoff montre que les *quadriques* possèdent exactement *trois bases principales* (les réseaux en question sont doublement conjugués au sens de M. G. Kœnigs). *Aucune surface ne peut posséder plus de  $\infty^2$  bases principales et seuls, les deux hélicoïdes minimums possèdent effectivement  $\infty^2$  bases principales; chacun d'eux possède  $\infty^1$  bases principales formées de géodésiques.*

M. Finikoff a bien voulu nous communiquer ces résultats au cours de nos recherches ; une partie en paraîtra au *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Le présent travail a été résumé en cinq notes parues aux *Comptes rendus* (t. 186, 1928, p. 1694 ; t. 187, 1928, p. 1109 ; t. 188, 1929, p. 29, 603 et 761) ; il comprend deux chapitres : le premier est consacré à l'étude d'un couple de deux surfaces applicables et de la base correspondante ; le second est consacré à l'étude de la famille la plus générale de surfaces applicables ayant un réseau conjugué commun.

Le premier chapitre comprend cinq paragraphes :

- 1° Étude du réseau conjugué commun à deux surfaces applicables.
- 2° Détermination de tous les couples de surfaces à base doublement conique ; je montre que la méthode pourrait aussi donner les systèmes  $\infty^1$  de surfaces à base doublement conique et donne effectivement deux exemples intéressants où toutes les surfaces sont unicursales.
- 3° J'indique rapidement les couples déduits de l'équation de Laplace ponctuelle, de la forme d'Euler-Poisson  $E(2,2)$ .
- 4° Étude du parallélisme de Peterson.
- 5° Transformations conformes de l'espace à 6 ou 8 dimensions et détermination, à partir d'un premier couple applicable, de nouveaux couples.

Le second chapitre comprend sept paragraphes :

- 1° Résumé des résultats obtenus sur les bases principales par divers géomètres : Bianchi, Peterson, Voss et MM. Cosserat, Demoulin, Drach, Egoroff, Finikoff, Gambier, Goursat, Tzitzéica.
- 2° Méthode simple et nouvelle pour mettre en équation le problème général. Transformations asymptotiques des surfaces (B) qui accompagnent une surface (S) au cours de sa déformation ; invariance de l'équation tangentielle de Laplace relative à la base principale.
- 3° Détermination des surfaces de Bianchi, applicables sur des surfaces de révolution.
- 4° Étude des bases principales contenant une famille de géodésiques.
- 5° Exemple simple de  $ds^2$  (et non plus de surface) pour lequel on sait

trouver  $\infty^1$  bases principales : c'est celui des développées des surfaces minima.

6° Étude détaillée des équations de Laplace *ponctuelle et tangentielle*.

7° Rectification d'une erreur de principe commise par MM. Egoroff et Masloff. Recherche systématique des réseaux conjugués coniques permanents; la réunion de deux méthodes distinctes, *mécanismes doubles* d'une part, qui fournissent à la fois les couples et les systèmes  $\infty^1$ , et d'autre part, utilisation des méthodes propres aux déformations continues, cette réunion, dis-je, permet d'obtenir tous les réseaux doublement coniques; bien que M. Masloff les ait obtenus, indépendamment de moi et peu de temps avant, seule la réunion des deux méthodes permet d'affirmer que les résultats sont complets. Elle permet aussi d'obtenir aisément les formules qui définissent explicitement la déformation. Essai de classification des surfaces en jeu et application de la méthode à de nombreux exemples présentant des particularités intéressantes. Il reste un point à élucider : existe-t-il des réseaux conjugués permanents tels que le lieu des sommets des cônes circonscrits le long d'une famille de lignes coniques (quelle que soit la nature de la seconde famille) soit une courbe gauche? Cette question, dont MM. Egoroff et Masloff n'ont pas soupçonné l'existence, me paraît difficile et j'essaierai de la résoudre dans un autre travail.

En terminant, je dois remercier M. Gambier, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, de l'intérêt qu'il a porté à mon travail et des nombreux conseils qu'il m'a donnés.

## CHAPITRE I.

### I. — Résultats généraux relatifs au réseau conjugué commun à deux surfaces applicables.

1. Soient S et S' deux surfaces applicables rapportées à leur réseau conjugué commun  $(u, v)$ , E, F, G les coefficients de leur élément linéaire; les coordonnées  $x, y, z; x', y', z'$  des points homologues M et M'



et l'expression  $x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$  sont sept solutions de l'équation de Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Cette proposition est due à M. Gabriel Kœnigs.

Considérons la seconde nappe focale  $S_1$  de la congruence des tangentes aux courbes  $v = \text{const.}$  de  $S$ ; les coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  du point  $M_1$  de  $S_1$  correspondant au point  $M$  de  $S$ , sont :

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = x - \frac{\partial x}{\partial u} : \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \\ y_1 = y - \frac{\partial y}{\partial u} : \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \\ z_1 = z - \frac{\partial z}{\partial u} : \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \end{cases}$$

soit  $S'_1$  la surface analogue à  $S_1$  relative aux courbes  $v = \text{const.}$  de  $S'$ ; les formules (2) montrent que l'on a, en grandeur et signe, le sens positif correspondant aux  $u$  croissants,

$$MM_1 = M'M'_1 = -\sqrt{E} : \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

D'ailleurs, si nous faisons rouler, sans glissement ni pivotement, la surface  $S'$  sur la surface  $S$ , de manière que le point de contact décrive sur les deux surfaces une courbe  $u = u_0$ , les développables circonscrites à  $S$  et à  $S'$  le long de cette courbe roulent également l'une sur l'autre; on retrouve ainsi l'égalité des distances focales  $MM_1 = M'M'_1$ ; on voit de plus que les courbes  $u = \text{const.}$  de  $S_1$  et  $S'_1$  ont même courbure aux points homologues et se correspondent par égalité d'arcs, proposition bien connue, mais que le calcul de l'élément linéaire de  $S_1$  permet de préciser. Soient  $c, c', c''$  les cosinus directeurs de la normale à  $S$ ; posons

$$\delta du^2 + 2\delta' du dv + \delta'' dv^2 = -S dc dx;$$

en dérivant (2) et tenant compte de l'équation

$$(3) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + c\delta,$$

et des équations analogues où  $x$  est remplacé par  $y$  puis  $z$ , on obtient

$$(4) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \{12\}}{\partial u} \{2\}}{\{12\}^2} - \frac{\{11\}}{\{1\}} \frac{\{12\}}{\{2\}} \right] \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\{11\}}{\{2\}} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\delta}{\{12\}} c,$$

$$(5) \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\frac{\partial \{12\}}{\partial v} \{2\}}{\{12\}^2} - \frac{\{12\}}{\{2\}} \frac{\partial x}{\partial u},$$

les coefficients  $E_1, F_1, G_1$  de l'élément linéaire de  $S_1$  se calculent aisément en tenant compte des identités

$$S'c \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad Sc \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad Sc^2 = 1,$$

il vient

$$(6) \quad E_1 = \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \{12\}}{\partial u} \{2\}}{\{12\}^2} - \frac{\{11\}}{\{1\}} \frac{\{12\}}{\{2\}} \right]^2 E - 2 \frac{\{11\}}{\{12\}} \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \{12\}}{\partial u} \{2\}}{\{12\}^2} - \frac{\{11\}}{\{1\}} \frac{\{12\}}{\{2\}} \right] F + \frac{\{11\}^2}{\{12\}^2} G + \frac{\delta^2}{\{12\}^2},$$

$$(7) \quad F_1 = \left[ \frac{\frac{\partial \{12\}}{\partial v} \{2\}}{\{12\}^2} - \frac{\{12\}}{\{2\}} \right] \left[ E \left( 1 + \frac{\frac{\partial \{12\}}{\partial u} \{2\}}{\{12\}^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \right],$$

$$(8) \quad G_1 = \left[ \frac{\frac{\partial \{12\}}{\partial v} \{2\}}{\{12\}^2} - \frac{\{12\}}{\{2\}} \right]^2 E.$$

On remarque que, seul,  $E_1$  contient un terme en  $\delta$  dépendant de la seconde forme fondamentale de  $S$ ; donc l'applicabilité de  $S$  et  $S'$  établit entre  $S_1$  et  $S'_1$  une correspondance ponctuelle telle que *les deux familles de courbes pour lesquelles les longueurs se conservent, sont confondues entre elles et avec une famille du réseau conjugué commun.*

Observons encore que les coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x'_1, y'_1, z'_1)$

des points  $M_1$  et  $M'_1$  vérifient la même équation de Laplace.

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} - \left[ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \log \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \left] \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right. \\ \left. - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial u} \log \left[ \frac{\partial \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \right\} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = 0,$$

dont les coefficients ne dépendent que de ceux de l'équation (1) <sup>(1)</sup>; en tenant compte du fait que le coefficient  $F_1$  est le même pour  $S_1$  et  $S'_1$ , on voit que l'équation (9) admet les sept solutions

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1; \quad x'_1, \quad y'_1, \quad z'_1; \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x'^2_1 - y'^2_1 - z'^2_1,$$

ce qui généralise la proposition de M. G. Kœnigs pour deux surfaces applicables.

2. Supposons établie une correspondance ponctuelle entre deux surfaces  $S$  et  $S'$ , de façon que :

- 1° Le réseau  $(u, v)$  soit conjugué sur  $S$  et  $S'$ ;
- 2° Que les courbes  $v = \text{const.}$  soient l'unique famille (comptant alors pour deux) de courbes conservant la même longueur en passant de  $S$  à  $S'$ ;
- 3° Que la distance focale  $MM_1$  soit égale à la distance homologue  $M'M'_1$ .

Ces conditions se traduisent par

$$(10) \quad E = E', \quad F = F', \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}',$$

l'accent se rapportant à la surface  $S'$ ; la dernière équation, rendue entière, s'écrit :

$$(10') \quad \frac{\partial}{\partial u} \log(G' - G) = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

l'équation nouvelle  $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'$  non contenue dans les précédentes,

---

(1) Nous retrouverons ce résultat plus loin en étudiant le parallélisme.

donne la même valeur que (10') pour  $\frac{\partial}{\partial u} \log(G' - G)$ , de sorte qu'elle est conséquence des équations (10); donc l'équation de Laplace relative à  $S'$  coïncide avec l'équation relative à  $S$ , et, en vertu de l'égalité  $F = F'$ , cette équation commune admet la septième solution

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

On constate que le couple  $(S_1, S'_1)$  possède pour les courbes  $u = \text{const.}$  exactement les mêmes propriétés que le couple  $(S, S')$  pour les courbes  $v = \text{const.}$  de sorte qu'on obtient cette propriété remarquable : que les couples  $(S, S')$  et  $(S_1, S'_1)$  sont parfaitement réciproques. En effet, la relation entre  $S$  et  $S_1$  est réciproque; les équations (6), (7), (8) ont été écrites pour le passage de  $S$  à  $S_1$ ; en échangeant  $u$  avec  $v$ ,  $E$  avec  $G_1$ ,  $F$  avec  $F_1$ ,  $G$  avec  $E_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (11) \quad E &= \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1^2} - \frac{\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1} \right] G_1, \\ (12) \quad F &= \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1^2} - \frac{\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1} \right] \left[ G_1 \left( 1 + \frac{\frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1} \right) - \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial v}}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1} \right], \\ (13) \quad G &= \left[ 1 + \frac{\frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1^2} - \frac{\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1} \right]^2 G_1 - 2 \frac{\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1} \left[ 1 + \frac{\frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1^2} - \frac{\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}_1}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1} \right] F_1 \\ &\quad + \frac{\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}_1^2}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1^2} E_1 + \frac{\frac{\partial^2 G_1}{\partial v^2}}{\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1}, \end{aligned}$$

où l'indice 1 se rapporte à la surface  $S_1$ .

3. Supposons que toutes les hypothèses du paragraphe précédent soient remplies et de plus que la courbure soit la même aux points homologues des courbes  $u = \text{const.}$  de  $S_1$  et  $S'_1$ ; les développables engendrées par les tangentes à ces courbes peuvent rouler l'une sur l'autre, et l'égalité  $MM_1 = M'M'_1$  assure même longueur aux courbes

de contact de ces développables avec les surfaces S et S'; on a donc  $G = G'$  : les surfaces S et S' sont applicables; la réciproque de la propriété donnée au n° 1 se trouve ainsi établie.

4. *Angles des plans focaux des congruences des tangentes aux courbes du réseau.* — Les plans focaux d'un rayon MM<sub>1</sub> sont : le plan tangent en M à la surface S et le plan osculateur à la courbe  $\varphi = \text{const.}$  qui passe par ce point; ce dernier est déterminé par les vecteurs

$$\left( \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right) \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right);$$

en tenant compte de l'équation (3) on calcule les cosinus directeurs  $\gamma, \gamma', \gamma''$  de la normale à ce plan et l'angle  $\alpha_1$  des deux plans focaux :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{c \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sqrt{\overline{EG - F^2}} - \partial \left( c' \frac{\partial z}{\partial u} - c'' \frac{\partial y}{\partial u} \right)}{\sqrt{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}^2 (EG - F^2) + E \delta^2}}, \\ \gamma' &= \frac{c' \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sqrt{\overline{EG - F^2}} - \partial \left( c'' \frac{\partial x}{\partial u} - c \frac{\partial z}{\partial u} \right)}{\sqrt{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}^2 (EG - F^2) + E \delta^2}}, \\ \gamma'' &= \frac{c'' \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sqrt{\overline{EG - F^2}} - \partial \left( c \frac{\partial y}{\partial x} - c' \frac{\partial x}{\partial u} \right)}{\sqrt{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}^2 (EG - F^2) + E \delta^2}}; \\ \cos \alpha_1 &= c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' = \frac{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sqrt{\overline{EG - F^2}}}{\sqrt{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}^2 (EG - F^2) + E \delta^2}}, \\ (14) \quad \tan \alpha_1 &= \frac{\sqrt{E} \delta}{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sqrt{\overline{EG - F^2}}}, \end{aligned}$$

on trouverait de même pour l'angle des plans focaux des rayons de la congruence des tangentes aux courbes  $u = \text{const.}$  :

$$(15) \quad \tan \alpha_2 = \frac{\sqrt{G} \delta''}{\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \sqrt{\overline{EG - F^2}}};$$

donc si S se déforme en conservant le réseau  $(u, v)$  conjugué, ces angles  $\alpha_1, \alpha_2$  varient, puisque les expressions précédentes dépendent de la seconde forme fondamentale de S; il n'y a d'exception que si  $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$  ou  $\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}$  est nul, c'est-à-dire si l'une des familles du réseau est formée de *géodésiques*, auquel cas l'angle correspondant demeure droit.

Des expressions (14) et (15), et de l'équation de Gauss, nous déduisons

$$\operatorname{tang} \alpha_1 \operatorname{tang} \alpha_2 = \frac{\sqrt{\operatorname{EGK}}}{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}},$$

où K est la courbure totale de S; cette expression ne dépend que des coefficients de l'élément linéaire et par suite est *invariante* pour une déformation de S avec conservation du réseau  $(u, v)$  conjugué.

5. Soient  $S_2$  la seconde nappe focale de la congruence des tangentes aux courbes  $u = \text{const.}$  de la surface S et  $M_2$  le second foyer du rayon tangent en M à la surface S; cette congruence  $MM_2$  jouit des propriétés analogues à celles trouvées plus haut pour la congruence  $MM_1$ ; en particulier, la distance focale  $MM_2$  ne dépend que de l'élément linéaire de S; ceci suggère une remarque bien simple, dont nous aurons à faire état plus loin : *tous* les éléments du triangle  $MM_1M_2$  dépendent uniquement des coefficients de l'élément linéaire de S; donc si S' est une déformée de S sur laquelle le réseau conjugué  $(u, v)$  est resté conjugué, le triangle  $M'M_1M_2$  est égal au triangle  $MM_1M_2$  de sorte que l'on a

$$M_1M_2 = M_1M_2.$$

6. *Congruence des droites*  $M_1M_2$ . — Posons, pour abrégér, l'écriture

$$A = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Un point de la droite  $M_1M_2$  a des coordonnées

$$\begin{aligned} X &= x - \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial u} + \left( \frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \rho, \\ Y &= y - \frac{1}{B} \frac{\partial y}{\partial u} + \left( \frac{1}{A} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{1}{B} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \rho, \\ Z &= z - \frac{1}{B} \frac{\partial z}{\partial u} + \left( \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{B} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \rho. \end{aligned}$$

Ces formules permettent d'étudier la congruence des droites  $M_1M_2$ .  
Les cosinus directeurs de  $M_1M_2$  sont :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{\frac{G}{A^2} - \frac{2F}{AB} + \frac{E}{B^2}}}, \\ \eta &= \frac{\frac{1}{A} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{1}{B} \frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{\frac{G}{A^2} - \frac{2F}{AB} + \frac{E}{B^2}}}, \\ \zeta &= \frac{\frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{B} \frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{\frac{G}{A^2} - \frac{2F}{AB} + \frac{E}{B^2}}}.\end{aligned}$$

Nous devons remarquer que, si la surface  $S$  se déforme, de sorte que le réseau  $(u, v)$  reste conjugué, en entraînant avec elle le trièdre lié au point  $M$ , dont les arêtes sont les tangentes aux lignes  $u$  et  $v$  et la normale, les points  $M_1M_2$ , ainsi que la droite  $M_1M_2$  restent invariablement liés à ce trièdre. Nous allons montrer que si, pour la surface  $S$ , la congruence  $M_1M_2$  est congruence de normales, elle le reste quand  $S$  est appliquée sur  $S'$ . Il suffit de calculer l'expression

$$I = \xi d\left(x - \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial u}\right) + \eta d\left(y - \frac{1}{B} \frac{\partial y}{\partial u}\right) + \zeta d\left(z - \frac{1}{B} \frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

et de montrer qu'elle n'a pas changé en passant de  $S$  à  $S'$ ; or, la condition nécessaire et suffisante pour que  $M_1M_2$  engendre une congruence de normales est que  $I$  soit une différentielle totale exacte. On a aisément

$$d\left(x - \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \left(1 + \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial u}\right) - \frac{1}{B} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right] du + \left[\frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial v} - \frac{1}{B}\right] \frac{\partial x}{\partial u} dv,$$

et comme

$$S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}, \quad S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v},$$

le théorème est établi aussitôt.

Nous rencontrons plus bas une déformation continue où cette constance se présente.

L'étude détaillée de la congruence  $M_1M_2$  donnerait beaucoup de

résultats intéressants que nous nous proposons de développer dans un autre travail.

## II. — Réseaux conjugués doublement coniques.

1. Avec Peterson, nous dirons qu'une ligne tracée sur une surface est *cylindrique* ou *conique* si la développable circonscrite à la surface le long de cette ligne est un cylindre ou un cône; il résulte du paragraphe précédent, que si le réseau conjugué aux surfaces applicables  $S$  et  $S'$  comprend sur  $S$  une famille de lignes coniques (ou cylindriques), cette famille reste conique (ou cylindrique) en passant de  $S$  à  $S'$ . Je me propose de déterminer tous les couples de surfaces applicables dont le réseau conjugué commun est formé de *deux* familles *coniques*.

Le cas de deux familles de lignes cylindriques a été complètement résolu par Peterson et Bianchi; il s'agit de couples de surfaces de translation applicables, M. Gambier a repris la question et étudié les diverses circonstances nouvelles relatives à l'applicabilité physique; dans ce cas, les seuls exemples de déformation continue sont les surfaces minima et les surfaces à profil de translation plans situés dans deux plans rectangulaires.

Le cas d'une famille formée de lignes coniques et l'autre de lignes cylindriques est également épuisé: Peterson <sup>(1)</sup> a indiqué le type à déformation continue; M. Gambier <sup>(2)</sup> a déterminé deux types de couples isolés comme application d'un mécanisme transformable de deux courbes, dans un Mémoire auquel nous aurons constamment à nous reporter.

Le cas de deux familles de courbes coniques a été amorcé par Młodziejowski <sup>(3)</sup> qui n'a pu indiquer tous les résultats; je reviendrai plus loin sur sa méthode, qui est différente de celle employée ici.

2. Dans le cas d'un réseau conjugué doublement conique, les surfaces focales que nous avons appelées  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S'_1$ ,  $S'_2$  au paragraphe précédent, se réduisent à des courbes  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(A)$ ,  $(B)$ , lieux des sommets des cônes circonscrits le long des lignes du réseau; quels

---

<sup>(1)</sup> Voir DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> édition, p. 181-184.

<sup>(2)</sup> *Journal de Mathématiques*, 9<sup>e</sup> série, t. I, 1922, p. 19-76.

<sup>(3)</sup> *Mathematische Annalen*, t. 63, 1907, p. 62-84.



que soient les points  $M_1$  et  $M_2$  pris respectivement sur  $(a)$  et  $(b)$ ,  $M_1$  et  $M_2$  désignant leurs homologues sur  $(A)$  et  $(B)$ , nous avons, en vertu de la remarque qui termine le paragraphe précédent,

$$M_1 M_2 = M_1' M_2';$$

donc, le couple de courbes  $[(a), (b)]$  constitue un mécanisme transformable en le couple  $[(A), (B)]$  au sens de M. Gambier.

D'autre part, étant donnée une surface rapportée à un réseau conique  $(\alpha, \beta)$ , les coordonnées d'un point de cette surface sont, comme on sait, susceptibles d'être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \frac{\int a_1 d\alpha - \int b_1 d\beta}{\alpha - \beta}, \\ y &= \frac{\int a_2 d\alpha - \int b_2 d\beta}{\alpha - \beta}, \\ z &= \frac{\int a_3 d\alpha - \int b_3 d\beta}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Le cône circonscrit suivant la ligne  $\alpha = \text{const.}$  a pour sommet  $a_1(\alpha), a_2(\alpha), a_3(\alpha)$ ; de même, le cône de sommet  $b_1(\beta), b_2(\beta), b_3(\beta)$ . On peut écrire ces formules :

$$(S) \quad \begin{cases} x = \frac{a_1 \alpha - \bar{a}_1 - (b_1 \beta - b_1)}{\alpha - \beta} \\ y = \frac{a_2 \alpha - \bar{a}_2 - (b_2 \beta - b_2)}{\alpha - \beta} \\ z = \frac{a_3 \alpha - \bar{a}_3 - (b_3 \beta - b_3)}{\alpha - \beta}; \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{a}_1}{da_1} = \frac{d\bar{a}_2}{da_2} = \frac{d\bar{a}_3}{da_3} = \alpha, \\ \frac{d\bar{b}_1}{db_1} = \frac{d\bar{b}_2}{db_2} = \frac{d\bar{b}_3}{db_3} = \beta. \end{cases}$$

Ces coordonnées  $(x, y, z)$  sont solutions de l'équation pontuelle de Laplace,  $E(1, 1)$  (voir DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. II, 2<sup>e</sup> édition, p. 55 et suiv.)

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0.$$

Ce résultat prouve que l'on *peut* supposer  $\alpha$  et  $\beta$  invariants en passant de S à S'; nous écrivons les coordonnées de S'

$$(S') \quad \begin{cases} X = \frac{\Lambda_1 \alpha - \bar{\Lambda}_1 - (B_1 \beta - \bar{B}_1)}{\alpha - \beta}, \\ Y = \frac{\Lambda_2 \alpha - \bar{\Lambda}_2 - (B_2 \beta - \bar{B}_2)}{\alpha - \beta}, \\ Z = \frac{\Lambda_3 \alpha - \bar{\Lambda}_3 - (B_3 \beta - \bar{B}_3)}{\alpha - \beta}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\Lambda_1} = \frac{d\bar{\Lambda}_2}{d\Lambda_2} = \frac{d\bar{\Lambda}_3}{d\Lambda_3} = \alpha, \\ \frac{d\bar{B}_1}{dB_1} = \frac{d\bar{B}_2}{dB_2} = \frac{d\bar{B}_3}{dB_3} = \beta. \end{cases}$$

Le calcul du  $ds^2 = E dx^2 + 2F dx d\beta + G d\beta^2$  donne

$$(1) \quad \begin{cases} (\alpha - \beta)^4 E = \beta^2 S(a_1 - b_1)^2 - 2\beta S(a_1 - b_1)(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) + S(\bar{a}_1 - \bar{b}_1)^2, \\ (\alpha - \beta)^4 F = \alpha\beta S(a_1 - b_1)^2 - (\alpha + \beta) S(a_1 - b_1)(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) + S(\bar{a}_1 - \bar{b}_1)^2, \\ (\alpha - \beta)^4 G = \alpha^2 S(a_1 - b_1)^2 - 2\alpha S(a_1 - b_1)(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) + S(\bar{a}_1 - \bar{b}_1)^2, \end{cases}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de l'applicabilité de (S) et (S') sont, outre (1) et (3),

$$(5) \quad S(a_1 - b_1)^2 = S(\Lambda_1 - B_1)^2,$$

$$(6) \quad S(a_1 - b_1)(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) = S(\Lambda_1 - B_1)(\bar{\Lambda}_1 - \bar{B}_1),$$

$$(7) \quad S(\bar{a}_1 - \bar{b}_1)^2 = S(\bar{\Lambda}_1 - \bar{B}_1)^2.$$

L'équation (5) a été prévue *a priori*; les deux couples (a), (b) et (A), (B) forment un mécanisme transformable, au sens du Mémoire de M. Gambier (*Journal de Liouville*, 7<sup>e</sup> série, t. I, 1922, p. 19-76).

On aperçoit immédiatement un *second* mécanisme  $[(\bar{a}), (\bar{b}); (\bar{A}), (\bar{B})]$  intimement lié au précédent : les tangentes aux points homologues de  $(\bar{a})$  et (a) sont parallèles; de même pour  $(\bar{A})$  et (A) et, de plus, les arcs infiniment petits de  $(\bar{a})$  et (a) ont le même rapport que ceux de  $(\bar{A})$  et (A), le rapport variant d'un point à un autre; même énoncé pour (b),  $(\bar{b}); (B), (\bar{B})$ . L'angle  $(\vec{ab}, \vec{\bar{a}\bar{b}})$  est égal à l'angle  $(\vec{AB}, \vec{\bar{A}\bar{B}})$  quels que soient les points a et b sur (a) et (b). La dérivation en  $\alpha$

ou  $\beta$  des équations (5), (6), (7) montre que ces équations (1), (3), (5), (6), (7) ne sont pas indépendantes.

3. Nous devons faire une remarque importante : le mécanisme  $(a)$ ,  $(b)$  est lié d'une façon intrinsèque à la surface  $(S)$ , mais non  $(\bar{a})$ ,  $(\bar{b})$ ; en effet on peut écrire aussi :

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1 \alpha - a_1 - (b_1 \beta - \bar{b}_1)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{a_1(\lambda + \mu \alpha) - (\lambda a_1 + \mu \bar{a}_1) - [b_1(\lambda + \mu \beta) - (\lambda b_1 + \mu \bar{b}_1)]}{\lambda + \mu \alpha - (\lambda + \mu \beta)}. \end{aligned}$$

Si donc j'appelle  $\lambda(a) + \mu(\bar{a})$  la courbe lieu du point

$$\lambda a_1 + \mu \bar{a}_1, \quad \lambda a_2 + \mu \bar{a}_2, \quad \lambda a_3 + \mu \bar{a}_3,$$

courbe dont la construction au moyen de  $(a)$  et  $(\bar{a})$  est évidente géométriquement, on voit que l'on peut remplacer  $(\bar{a})$ ,  $(\bar{b})$  par  $\lambda(a) + \mu(\bar{a})$  et  $\lambda(b) + \mu(\bar{b})$ , en même temps que  $\alpha$  et  $\beta$  par  $\lambda + \mu \alpha$  et  $\lambda + \mu \beta$ ; quand  $S$  est déformée en  $(S')$  l'invariance de  $\alpha$  et  $\beta$ , qu'il est *commode* de supposer réalisée (mais qui n'est pas *nécessaire*), revient à choisir parmi les couples  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  que l'on peut associer à  $(S')$  un couple particulier correspondant au couple  $(\bar{a})$ ,  $(\bar{b})$  déjà choisi pour  $(S)$ , de sorte que  $\alpha$  et  $\beta$  ne varient pas aux points se correspondant dans l'applicabilité.

D'autre part, la correspondance entre les deux mécanismes

$$[(a), (b); (A), (B)] \quad \text{et} \quad [(a), (\bar{b}); (\bar{A}), (\bar{B})]$$

est réciproque, de sorte que les surfaces  $\Sigma$

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{\bar{a}_1 \frac{1}{\alpha} - a_1 - \left( \bar{b}_1 \frac{1}{\beta} - b_1 \right)}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}, \\ y_1 &= \frac{\bar{a}_2 \frac{1}{\alpha} - a_2 - \left( \bar{b}_2 \frac{1}{\beta} - b_2 \right)}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}, \\ z_1 &= \frac{\bar{a}_3 \frac{1}{\alpha} - a_3 - \left( \bar{b}_3 \frac{1}{\beta} - b_3 \right)}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} \end{aligned} \right.$$

et  $\Sigma'$

$$(\Sigma') \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{\bar{A}_1 \frac{1}{\alpha} - A_1 - \left( \bar{B}_1 \frac{1}{\beta} - B_1 \right)}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}, \\ Y_1 = \frac{\bar{A}_2 \frac{1}{\alpha} - A_2 - \left( \bar{B}_2 \frac{1}{\beta} - B_2 \right)}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}, \\ Z_1 = \frac{\bar{A}_3 \frac{1}{\alpha} - A_3 - \left( \bar{B}_3 \frac{1}{\beta} - B_3 \right)}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} \end{array} \right.$$

sont applicables ( $\Sigma$  sur  $\Sigma'$ ) en même temps que S sur S', on peut d'ailleurs écrire :

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{\beta(a_1\alpha - \bar{a}_1) - \alpha(b_1\beta - \bar{b}_1)}{\alpha - \beta}, \\ y_1 = \frac{\beta(a_2\alpha - \bar{a}_2) - \alpha(b_2\beta - \bar{b}_2)}{\alpha - \beta}, \\ z_1 = \frac{\beta(a_3\alpha - \bar{a}_3) - \alpha(b_3\beta - \bar{b}_3)}{\alpha - \beta}, \end{array} \right.$$

$$(\Sigma') \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{\beta(A_1\alpha - \bar{A}_1) - \alpha(B_1\beta - \bar{B}_1)}{\alpha - \beta}, \\ Y_1 = \frac{\beta(A_2\alpha - \bar{A}_2) - \alpha(B_2\beta - \bar{B}_2)}{\alpha - \beta}, \\ Z_1 = \frac{\beta(A_3\alpha - \bar{A}_3) - \alpha(B_3\beta - \bar{B}_3)}{\alpha - \beta}. \end{array} \right.$$

De même,  $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$  étant des constantes quelconques, on obtient, pour un premier mécanisme *double* connu, une infinité d'autres en remplaçant

$$(a), \quad (b), \quad (A), \quad (B)$$

par

$$\lambda(a) + \mu(\bar{a}), \quad \lambda(b) + \mu(\bar{b}), \quad \lambda(A) + \mu(\bar{A}), \quad \lambda(B) + \mu(\bar{B});$$

$$(\bar{a}), \quad (\bar{b}), \quad (\bar{A}), \quad (\bar{B})$$

par

$$\lambda'(a) + \mu'(\bar{a}), \quad \lambda'(b) + \mu'(\bar{b}), \quad \lambda'(A) + \mu'(\bar{A}), \quad \lambda'(B) + \mu'(\bar{B});$$

$$\alpha \quad \text{par} \quad \frac{\lambda' + \mu'\alpha}{\lambda + \mu\alpha}$$

et

$$\beta \quad \text{par} \quad \frac{\lambda' + \mu' \beta}{\lambda + \mu \beta}.$$

Le couple (S, S') se trouve alors remplacé par le couple

$$(\lambda S + \mu \Sigma, \quad \lambda S' + \mu \Sigma') :$$

si la surface (S') dépend d'un paramètre de déformation qui la laisse applicable sur S, le couple  $\lambda S' + \mu \Sigma'$  est aussi déformable à un paramètre et reste applicable sur  $\lambda S + \mu \Sigma$ ; la surface  $\lambda S + \mu \Sigma$  admet comme courbes intrinsèquement liées à elle précisément le couple

$$\lambda(a) + \mu(\bar{a}), \quad \lambda(b) + \mu(\bar{b}).$$

Nous verrons que les surfaces  $\lambda S + \mu \Sigma$  sont toutes celles qui correspondent à S par parallélisme, de sorte que les courbes  $\alpha$  et  $\beta$  restent coniques. En tout cas, cette possibilité, pour la surface S, de remplacer  $(\bar{a})$  et  $(\bar{b})$  par  $\lambda(a) + \mu(\bar{a}), \lambda(b) + \mu(\bar{b})$  est l'une des causes de difficultés dans la recherche des déformations continues.

4. La classification des mécanismes (simples) a été faite par M. Gambier par l'étude des *relations linéaires à coefficients constants* liant les dérivées

$$\frac{da_1}{d\alpha}, \quad \frac{da_2}{d\alpha}, \quad \dots, \quad \frac{dA_1}{d\alpha},$$

comme conséquence de la relation

$$S \frac{da_1}{d\alpha} \frac{db_1}{d\beta} = S \frac{dA_1}{d\alpha} \frac{dB_1}{d\beta}$$

déduite par dérivation de

$$S(a_1 - b_1)^2 = S(A_1 - B_1)^2,$$

mais alors, en vertu de la proportionnalité des dérivées, le mécanisme nouveau

$$[(\bar{a}), (\bar{b}); (\bar{A}), (\bar{B})]$$

appartient au même type que le premier. Il sera d'ailleurs utile d'exprimer provisoirement

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad \bar{a}_1, \quad \bar{a}_2, \quad \dots$$

au moyen d'un paramètre  $\alpha_1$  indéterminé (qui pourra être par exemple  $a_1$  ou  $a_2 \dots$ ); on aura ensuite

$$\alpha = \frac{d\bar{a}_1}{da_1}.$$

M. Gambier dans son Mémoire a indiqué 8 types de mécanismes; on s'aperçoit qu'on ne peut garder que les types VII et VIII.

Prenons d'abord le type VII (1); il correspond (comme on le voit en se reportant au Mémoire de M. Gambier) aux formules où  $h, m, C$  sont des constantes *arbitraires*

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{llll} (a) & a_1 & a_2, & a_3 = 0, \\ (b) & b_1 & b_2 = 0, & b_3; \\ (A) & \Lambda_1 = ha_1 & \Lambda_2, & 0, \\ (B) & B_1 = \frac{b_1}{h} + m, & 0, & B_2, \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \Lambda_2^2 = a_1^2 (1 - h^2) + a_2^2 + 2mh a_1 - C,$$

$$(9') \quad B_2^2 = b_1^2 \left( 1 - \frac{1}{h^2} \right) + b_3^2 - 2m \frac{b_1}{h} + C - m^2.$$

(a), (b) sont planes, dans deux plans rectangulaires, mais à part cela, arbitraires; on suppose  $a_1, a_2$  exprimées au moyen d'un paramètre provisoire  $\alpha_1$ , et  $b_1, b_3$  au moyen du paramètre analogue  $\beta_1$ . On écrit, avec trois constantes arbitraires nouvelles  $\bar{C}, C', \bar{m}$ .

$$(\bar{a}) \quad \bar{a}_1, \quad \bar{a}_2, \quad 0,$$

$$(\bar{b}) \quad \bar{b}_1, \quad 0, \quad \bar{b}_3,$$

$$(\bar{A}) \quad h\bar{a}_1, \quad \bar{\Lambda}_2, \quad 0,$$

$$(\bar{B}) \quad \frac{\bar{b}_1}{h} + m, \quad 0, \quad B_2;$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_1^2 (1 - h^2) + \bar{a}_2^2 - \bar{\Lambda}_2^2 + 2mh\bar{a}_1 - C = 0, \\ a_1 \bar{a}_1 (1 - h^2) + a_2 \bar{a}_2 - \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 + h(ma_1 + m\bar{a}_1) - C' = 0, \\ \bar{a}_1 \frac{da_1}{d\alpha_1} (1 - h^2) + \bar{a}_2 \frac{da_2}{d\alpha_1} - \bar{\Lambda}_2 \frac{d\Lambda_2}{d\alpha_1} + h\bar{m} \frac{da_1}{d\alpha_1} = 0. \end{array} \right.$$

---

(1) J'indique rapidement pourquoi II (par exemple) s'élimine : raisons analogues

Les deux premières équations (10) remplacent (6) et (7); la dernière (10), à elle seule, remplace les équations (1) et (3). On constate aisément, par différentiation de (9) et des deux premières équations (10), que les équations (1) et (3) sont vérifiées.

On a de même :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \bar{b}_1^2 \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) + \bar{b}_3^2 - \bar{B}_3^2 - 2m \frac{\bar{b}_1}{h} + \bar{C} - m^2 = 0, \\ b_1 \bar{b}_1 \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) + b_3 \bar{b}_3 - B_3 \bar{B}_3 - \frac{1}{h} (\bar{m} b_1 + m \bar{b}_1) + C' - m \bar{m} = 0, \\ b_1 \frac{db_1}{d\beta_1} \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) + \bar{b}_3 \frac{d\bar{b}_3}{d\beta_1} - \bar{B}_3 \frac{d\bar{B}_3}{d\beta_1} - \frac{\bar{m}}{h} \frac{db_1}{d\beta_1} = 0. \end{array} \right.$$

Donc, tout mécanisme simple  $[(a), (b), (A), (B)]$  du type VII fait connaître par des calculs de dérivation et d'élimination  $\infty^3$  mécanismes associés  $[(\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{A}), (\bar{B})]$ ; bien que  $(a), (b)$  soit déformable (à trois paramètres) en  $(A), (B)$ , en général  $[(a), (b); (\bar{a}), (\bar{b})]$  est simplement transformable en  $[(A), (B); (\bar{A}), (\bar{B})]$ , car  $(\bar{a}), (\bar{b})$  dépendent (en général) des paramètres de déformation de  $(a), (b)$ . Pour calculer effectivement  $(\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{A}), (\bar{B})$  on peut opérer ainsi : si  $h$  n'est égal

pour les autres. On aurait

$$A_3^2 = a_3^2 + C, \quad \bar{A}_3^2 = \bar{a}_3^2 - \bar{C},$$

$C$  et  $\bar{C}$  étant constants; en dérivant on a

$$A_3 dA_3 = a_3 da_3, \quad \bar{A}_3 d\bar{A}_3 = \bar{a}_3 d\bar{a}_3$$

donc on a aussi

$$\bar{A}_3 dA_3 = \bar{a}_3 da_3$$

mais alors on doit avoir

$$\frac{\bar{a}_3}{a_3} = \frac{\bar{A}_3}{A_3} = \lambda \quad \text{et} \quad \lambda' C = \bar{C}.$$

de sorte que  $\lambda$  est une constante; mais alors  $\frac{d\bar{a}_3}{da_3}$  est aussi constant : il y a contradiction parce que  $\frac{d\bar{a}_3}{da_3}$  doit être précisément la variable indépendante  $z$ .

à  $+1$  ni  $-1$ , on prend l'inconnue auxiliaire

$$(12) \quad J = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 \sqrt{1-h^2} + \frac{mh}{\sqrt{1-h^2}} & \bar{a}_2 & \iota \bar{\Lambda}_2 \\ a_1 \sqrt{1-h^2} + \frac{mh}{\sqrt{1-h^2}} & a_2 & \iota \Lambda_2 \\ \frac{da_1}{d\alpha_1} \sqrt{1-h^2} & \frac{da_2}{d\alpha_1} & \iota \frac{d\Lambda_2}{d\alpha_1} \end{vmatrix}$$

et l'élevation au carré donne

$$J = \iota \sqrt{\left\{ \left( \frac{da_1}{d\alpha_1} \right)^2 (1-h^2) + \left( \frac{da_2}{d\alpha_1} \right)^2 - \left( \frac{d\Lambda_2}{d\alpha_1} \right)^2 \right\} \\ \times \left\{ \left( C + \frac{h^2 m \bar{m}}{1-h^2} \right)^2 - \left( \bar{C} + \frac{h^2 \bar{m}^2}{1-h^2} \right) \left( C + \frac{h^2 m^2}{1-h^2} \right) \right\}},$$

de sorte que  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\Lambda}_2$  s'obtiennent en résolvant les trois équations *linéaires* formées par les deux dernières équations (10) réunies à (12). On calcule de même  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}_3$ . Si  $h = \pm 1$  il y a grande simplification, car les deux dernières équations (10) donnent  $\bar{a}_2$  et  $\frac{\bar{\Lambda}_2}{\Lambda_2}$  rationnellement en fonction de  $a_1, a_2, \bar{a}_1$  et il reste une équation [la première (10)] de degré 2 en  $\bar{a}_1$  : si même  $m = 0$ , cette équation se réduit au premier degré en  $\bar{a}_1$ , de sorte que le cas  $h = \pm 1, m = 0$  est un cas particulièrement simple, et cette remarque justifie l'étude que nous en ferons.

Pour le mécanisme VIII, (a) est une courbe *arbitraire* tracée sur une quadrique Q, (b) une courbe arbitraire sur une quadrique (Q') homofocale à (Q); (A) est la courbe de (Q') se déduisant de (a) par l'affinité d'Ivory; (B) se déduit de même, sur (Q), de (b); si, pour simplifier l'exposé, je me borne au cas de (Q) et (Q') à centre, on a avec 4 constantes arbitraires  $l, m, n, C$

$$(13) \quad \begin{cases} a_1^2(1-l^2) + a_2^2(1-m^2) + a_3^2(1-n^2) = C, \\ A_1 = la_1, \quad A_2 = ma_2, \quad A_3 = na_3, \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} b_1^2 \left(1 - \frac{1}{l^2}\right) + b_2^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) + b_3^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -C, \\ B_1 = \frac{b_1}{l}, \quad B_2 = \frac{b_2}{m}, \quad B_3 = \frac{b_3}{n}. \end{cases}$$



La courbe  $(\bar{a})$  doit être sur une quadrique homothétique à  $(Q)$ ; or on peut, *sans restreindre les couples*  $(S, S')$ , remplacer  $(\bar{a})$  par une courbe homothétique : on supposera donc  $(\bar{a})$  sur  $(Q)$  et  $(\bar{b})$  sur  $(Q')$  et l'on voit que  $(\bar{a})$  est sur  $Q$ , parallèle à  $(a)$ . On résout :

$$(15) \quad \begin{cases} \bar{a}_1^2(1-l^2) + a_1^2(1-m^2) + a_1^2(1-n^2) = C, \\ a_1 a_1(1-l^2) + a_2 \bar{a}_2(1-m^2) + a_1 \bar{a}_1(1-n^2) = C', \\ \bar{a}_1(1-l^2) da_1 + \bar{a}_2(1-m^2) da_2 + \bar{a}_1(1-n^2) da_3 = 0, \end{cases}$$

où  $C'$  est une constante arbitraire; système analogue pour  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$  obtenu en remplaçant  $C$  par  $-C$ ,  $C'$  par  $-C'$  et  $l, m, n$  par  $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ . De la sorte tout mécanisme simple, du type VIII, fournit  $\infty^1$  mécanismes doubles; à chaque mécanisme double correspond un couple  $(S, S')$ .

5. *Déformation continue.* — Nous ne gardons que le type VII : les courbes  $(a), (b)$  sont planes dans deux plans rectangulaires. Les équations (9), (10), au nombre de 4, permettent de calculer  $A_2, \bar{A}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2$  en fonction de  $a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}$  (en prenant  $\alpha_1 = a_1$ ) et des constantes  $m, h, C, \bar{m}, \bar{C}, C'$  : ces constantes devront être fonctions d'un unique paramètre  $t$ , dont  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  ne doivent pas dépendre. Imaginons que nous ayons éliminé *rationnellement*  $A_2, \bar{A}_2$  (ce qui est possible; dans le procédé indiqué plus haut, on pourra, par exemple, rendre rationnelles les formules donnant  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ ). On a donc deux équations

$$(16) \quad \begin{cases} f_1(a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, C, h, m, C, C', \bar{m}) = 0, \\ f_2(a_1, a_2, \dots) = 0, \end{cases}$$

dont les premiers membres peuvent être écrits sous la forme linéaire ( $n$  désigne un certain entier positif supérieur à 1)

$$(17) \quad \sum_1^n T_i U_i = 0,$$

où les  $T_i$  dépendent de  $t$  par l'intermédiaire de  $C, h, m, \bar{C}, C', \bar{m}$  et

les  $U_i$  de  $a_1$  seul, par l'intermédiaire de  $a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ . Or une telle équation entraîne que les  $U_i$  soient liées par  $p$ , équations linéaires à coefficients constants,  $p$  étant un entier compris entre 0 et  $n$  inclus, tandis que les  $T_i$  sont liés par  $n - p$ , équations linéaires à coefficients constants, déduites aisément des  $p$  relations de l'autre série; chaque équation (16) fournit, on le constate aisément, *au moins deux* relations entre  $a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}$  (indépendantes de  $t$ ), de sorte que nous avons *au moins quatre* relations,

$$(18) \quad \varphi_i \left( a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2 \right) = 0,$$

qui remplacent définitivement le système primitif et que l'on peut résoudre en  $a_2, \frac{da_2}{da_1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2$  (il faudra que  $\frac{da_2}{da_1}$  soit effectivement la dérivée de  $a_2$ ) et, dans le cas de possibilité, il est ainsi démontré que  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, a_2$  sont des fonctions algébriques de  $a_1$ ; de même  $C, h, m, \bar{C}, C', \bar{m}$  se trouvent liées par des équations algébriques, de sorte que les mécanismes doubles, les surfaces à déformation continue et leur déformation sont *algébriques*. Pour éviter des calculs assez pénibles, si l'on remarque que  $A_2^2$  et  $A_2 \frac{dA_2}{da_1}$  s'expriment *rationnellement* en  $a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}$ , écrivons les deux dernières équations (10) sous la forme

$$(19) \quad \begin{cases} a_1 \bar{a}_1 (1 - h^2) + a_2 \bar{a}_2 + h(\bar{m} a_1 + m \bar{a}_1) - C' - (A_2^2) \frac{\lambda_2}{\Lambda_2} = 0, \\ \bar{a}_1 (1 - h^2) + \bar{a}_2 \frac{da_2}{da_1} + hm - \left( \lambda_2 \frac{d\lambda_2}{da_1} \right) \frac{\lambda_2}{\Lambda_2} = 0. \end{cases}$$

L'élimination de  $\frac{\bar{A}_2}{\Lambda_2}$  fournit une équation du type (16) qui, en général, conduit à assez de relations linéaires pour pouvoir achever la question.

6. J'applique ces considérations au cas simple déjà signalé  $h = 1, m = 0$ . [La méthode du Chapitre II a l'avantage de ne faire intervenir

que l'unique mécanisme (a), (b), (A), (B) lié intrinsèquement au couple (S, S') et de faire trouver les deux relations nécessaires et suffisantes entre C, h, m : le fait que  $h = 1$ ,  $m = 0$  réussit est une circonstance heureuse. Mais cette méthode ne met pas aussi aisément en évidence ce cas particulièrement simple, qu'il est donc naturel de traiter ici. | La résolution des équations (9), (10) donne *rationnellement*  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$ ,  $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$  à savoir :

$$(20) \quad -C\bar{a}_2 + C'a_2 + m a_2 \left( a_2 \frac{da_1}{da_2} - a_1 \right) - C\bar{m} \frac{da_1}{da_2} = 0,$$

$$(21) \quad -2mC\bar{a}_1 + C\bar{C} - C'^2 + 2mC'a_1 \\ m^2 C \left( \frac{da_1}{da_2} \right)^2 + m^2 \left[ a_2^2 \left( \frac{da_1}{da_2} \right)^2 - \bar{a}_1^2 \right] = 0,$$

$$(22) \quad -C\Lambda_2 + \Lambda_2 \left[ C' + m \left( a_2 \frac{da_1}{da_2} - a_1 \right) \right] = 0.$$

N'ayant en vue ici que d'obtenir une solution *particulière*, j'introduis des hypothèses *commodes* (qui ne sont peut-être pas *nécessaires*); supposons, dans (20), que  $\bar{m}$  et  $C\bar{m}$  s'expriment *linéairement* en C et C' (C et C' sont fonctions l'une de l'autre, mais nous supposons que cette relation ne se réduise pas à C : C' = const.). On a avec certaines constantes  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  ( $\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1 \neq 0$ )

$$(23) \quad m = \lambda C + \mu C', \quad C\bar{m} = \lambda_1 C + \mu_1 C'.$$

Cela permet donc de remplacer (20) par les équations obtenues en égalant à zéro le coefficient de C ou C' :

$$(24) \quad \bar{a}_2 - \lambda a_2 \left( a_2 \frac{da_1}{da_2} - a_1 \right) + \lambda_1 \frac{da_1}{da_2} = 0,$$

$$(25) \quad a_2 + \mu a_2 \left( a_2 \frac{da_1}{da_2} - a_1 \right) - \mu_1 \frac{da_1}{da_2} = 0.$$

L'équation (21) préalablement divisée par  $\bar{m}$  ne contient que les termes C, C',  $\bar{m}$  et  $C\bar{m}$ , déjà exprimés linéairement en C et C', et le terme  $\frac{C\bar{C} - C'^2}{\bar{m}}$ ; écrivons aussi, avec deux constantes nouvelles  $\lambda_2$  et  $\mu_2$  :

$$(26) \quad \frac{C\bar{C} - C'^2}{\bar{m}} = \lambda_2 C + \mu_2 C',$$

puis annulons le terme en C et le terme en C' : (21) se trouve remplacée par les deux équations :

$$(27) \quad -2\bar{a}_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \left( \frac{da_1}{da_2} \right)^2 + \lambda \left[ a_2^2 \left( \frac{da_1}{da_2} \right)^2 - a_1^2 \right] = 0,$$

$$(28) \quad \mu_2 + 2a_1 - \mu_1 \left( \frac{da_1}{da_2} \right)^2 + \mu \left[ a_2^2 \left( \frac{da_1}{da_2} \right)^2 - a_1^2 \right] = 0.$$

Nous devons donc simplement résoudre le système (24), (25), (27), (28) qui se trouve préparé de façon à simplifier encore notre discussion, car (25) et (28) devront donner  $a_2$  et  $\frac{da_2}{da_1}$ ; ensuite (24) donne  $\bar{a}_2$  et (27)  $\bar{a}_1$ . L'élimination de  $\frac{da_1}{da_2}$  entre (25) et (28) donne

$$(29) \quad a_2^2 (\mu a_1 - 1)^2 = (\mu a_2^2 - \mu_1) (\mu a_2^2 - 2a_1 - \mu_2).$$

Ceci posé, on a deux cas :

*Premier cas* :  $\mu = 0$ . — (25) et (29) donnent

$$(30) \quad a_2 - \mu_1 \frac{da_1}{da_2} = 0, \quad a_2^2 - 2a_1\mu_1 - \mu_1\mu_2 = 0,$$

ces deux équations se réduisent évidemment à la dernière : *la vérification annoncée est faite.*

*Deuxième cas* :  $\mu \neq 0$ . — En multipliant par  $\mu$ , l'équation (29) s'écrit

$$(31) \quad (\mu a_2^2 - \mu_1) (1 - \mu\mu_2) + \mu_1 (\mu a_1 - 1)^2 = 0,$$

ce qui, dérivé logarithmiquement, fournit

$$\frac{a_2 da_2}{\mu a_1^2 - \mu_1} = \frac{da_1}{\mu a_1 - 1},$$

c'est-à-dire (25) : *la vérification est encore faite.*

Le reste du calcul n'est plus qu'une question de patience : on voit

aisément que pour passer de  $(a)$ ,  $(\bar{a})$  à  $(b)$ ,  $(\bar{b})$  et profiter des calculs déjà faits, on doit faire les échanges

$$(32) \quad \begin{cases} a_1, & a_2, & \bar{a}_1, & \bar{a}_2, & A_2, & \bar{A}_2, & C, & \bar{C}, & C', & \bar{m}, \\ b_1, & b_3, & \bar{b}_1, & \bar{b}_3, & B_3, & \bar{B}_3, & -C, & m^2 - \bar{C}, & -C', & -\bar{m}, \end{cases}$$

puis

$$\begin{aligned} \lambda, & \mu, & \lambda_1, & \mu_1, & \lambda_2, & \mu_2, \\ \lambda, & \mu, & -\lambda_1, & -\mu_1, & \lambda_2 - \lambda_1, & \mu_2 - \mu_1. \end{aligned}$$

7. Prenons la *première solution*; une translation, le long de  $Ox$ , du système  $(a)$ ,  $(b)$ , permet de supposer  $\mu_2 = 0$ ; une *homothétie*,  $\mu_1 = 1$ ; on remplace ensuite la courbe

$$\mu_1(\bar{a}) + \lambda_1(a) \quad \text{ou} \quad (\bar{a}) + \lambda_1(a)$$

par  $(\bar{a})$ , ce qui est permis du moment que  $\lambda_1$  est *indépendant* du paramètre de déformation; cela revient à faire  $\lambda_1 = 0$ ; une translation et homothétie de  $(\bar{a})$ ,  $(\bar{b})$  permet ensuite de faire  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda = 1$ . [Il est bon d'écrire d'abord le système déduit de (24), (25), (27), (29) par les échanges (32) et (33); ce n'est qu'à ce moment que l'on fera, de *part et d'autre*,  $\lambda = \mu_1 = 1$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ .]

On trouve finalement le tableau :  $\alpha = 3a_1$ ,  $\beta = 3b_1 - 2$

$$\begin{aligned} (a) & \quad a_1, & a_2^2 = 2a_1, & & 0, \\ (b) & \quad b_1, & 0, & & b_3^2 = 1 - 2b_1, \\ (A) & \quad a_1, & A_2^2 = 2a_1 - C, & & 0, \\ (B) & \quad b_1, & 0, & & B_3^2 = 1 - 2b_1 + C; \\ (\bar{a}) & \quad \bar{a}_1 = \frac{3}{2}a_1^2, & \bar{a}_2 = a_1a_2, & & 0, \\ (\bar{b}) & \quad \bar{b}_1 = \frac{1}{2} - 2b_1 + \frac{3}{2}b_1^2, & 0, & & \bar{b}_3 = b_3(b_1 - 1); \\ (\bar{A}) & \quad \bar{a}_1, & \bar{A}_2 = A_2(a_1 + C), & & 0, \\ (\bar{B}) & \quad \bar{b}_1 + C, & 0, & & \bar{B}_3 = B_3(b_1 + C - 1). \end{aligned}$$

C est le paramètre de déformation; pour simplifier, je n'écris que les coordonnées de  $S_c$ ,  $\Sigma_c$ ; pour  $C = 0$  on trouve  $(S, \Sigma)$  et  $[(a)$ ,

$(b); (\bar{a}), (\bar{b})]$  on a

$$\begin{aligned} (S_c) \quad & \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\frac{3}{2}a_1^2 - \frac{3}{2}b_1^2 + C + \frac{1}{2}}{3a_1 - 3b_1 + 2}, \\ y &= \frac{(2a_1 - C)^{\frac{3}{2}}}{3a_1 - 3b_1 + 2}, \\ z &= \frac{(1 + C - 2b_1)^{\frac{1}{2}}}{3a_1 - 3b_1 + 2}, \end{aligned} \right. \\ (\Sigma_c) \quad & \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\frac{3}{2}a_1^2(3b_1 - 2) - 3a_1\left(\frac{3}{2}b_1^2 - C - \frac{1}{2}\right)}{3a_1 - 3b_1 + 2}, \\ \bar{y} &= \frac{(3b_1 - 2)(2a_1 - C)^{\frac{3}{2}}}{3a_1 - 3b_1 + 2}, \\ \bar{z} &= \frac{3a_1(1 + C - 2b_1)^{\frac{1}{2}}}{3a_1 - 3b_1 + 2}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

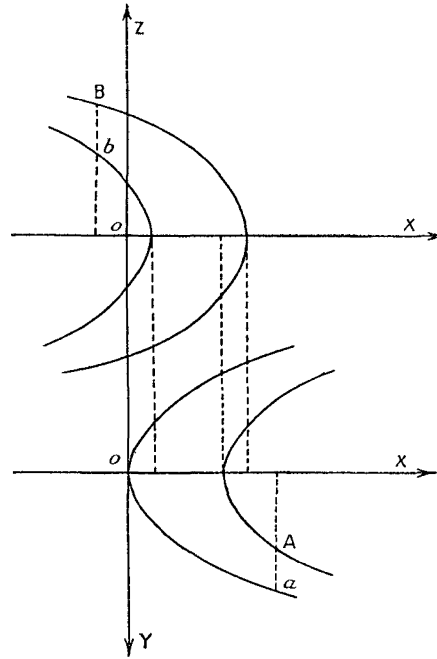


Fig. 1

On voit aussitôt que les surfaces  $S_c$  sont toutes *égales* à la surface  $S_0$ .

qui est donc *auto-applicable* : dans l'égalité de  $S_c$  et  $S_0$ , le point  $(a_1, b_1)$  de  $S_0$  a pour homologue le point  $(a_1 + \frac{C}{2}, b_1 + \frac{C}{2})$  de  $S_c$ ;  $S_c$  s'obtient en faisant glisser  $S_0$  de  $\frac{C}{2}$  le long de  $Ox$ .

$(a), (b)$  sont deux paraboles focales;  $(A), (B)$  est ce même couple, ayant glissé de  $\frac{C}{2}$  le long de  $Ox$ ; les points homologues  $a$  et  $A$  sont dans un même plan, perpendiculaires à  $Ox$ ; de même  $b$  et  $B$ . La figure 1 (faite en deux projections) indique cette correspondance. En cours de déformation la congruence  $M_1 M_2$  signalée à la fin du paragraphe 1 (ici la congruence  $AB$ ) est, et reste, congruence de normales. Les surfaces obtenues  $\lambda S_c + \mu \Sigma_c$  (déformées à 1 paramètre de  $\lambda S_0 + \mu \Sigma_0$ ) sont toutes unicursales.

En écrivant les relations

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= \frac{3}{8} a_2^2, & \bar{a}_2 &= \frac{a_2^3}{2}, \\ \bar{A}_1 &= \frac{3}{8} (A_2^2 + C)^2, & \bar{A}_2 &= \frac{A_2(A_2^2 + 3C)}{2}, \\ \bar{b}_1 &= \frac{3}{8} \left(b_2^2 + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{6}, & \bar{b}_2 &= -\frac{b_2}{12} (1 + b_2^2), \\ \bar{B}_1 &= \frac{3}{8} B_1^2 + \frac{1-3C}{4} B_1^2 + \frac{1}{8} (3C^2 + 6C - 1), \\ \bar{B}_2 &= -\frac{B_2(B_1^2 + 1 - 3C)}{2};\end{aligned}$$

on voit que  $(\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{A}), (\bar{B})$  sont des quartiques unicursales; la variation de  $C$  change effectivement  $(\bar{A}), (\bar{B})$  de sorte que la surface  $\Sigma_c$  ne reste pas égale à elle-même; on peut remarquer que pour  $C = \frac{1}{3}$ ,  $(\bar{A})$  devient égale à  $(\bar{b})$  et  $(\bar{B})$  égale à  $(\bar{a})$ ; on constate en effet qu'en écrivant la relation

$$3a_1 + 3b_1 = 2,$$

on peut produire les échanges suivants (les indices pour  $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{\frac{1}{2}}, \dots$  ou  $x_0, \dots, x_{\frac{1}{2}}, \dots$  se rapportant à  $\Sigma_0, \Sigma_{\frac{1}{2}}, S_0, S_{\frac{1}{2}}$ ):

$$\begin{aligned}a_1, & b_1, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, x_0, y_0, z_0, \\ \frac{2}{3} - b_1, & \frac{2}{3} - a_1, x_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}, -\bar{z}_{\frac{1}{2}}, -\bar{y}_{\frac{1}{2}}, -x_{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}, z_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Cela prouve que la surface  $\Sigma_i$  admet pour plan de symétrie le plan second bissecteur du dièdre  $Oxy$ ,  $Oxz$ ; en même temps nous avons découvert une nouvelle application de chaque surface  $\lambda S_i + \mu \Sigma_i$  sur la surface  $\lambda S_i - \mu \Sigma_i$  (application qui n'est réductible à un déplacement ou symétrie que si  $C = \frac{1}{3}$ ), à savoir celle qui fait correspondre au point

$$a_1 = h, \quad b_1 = h$$

le point

$$a_1 = \frac{\lambda}{3} - h, \quad b_1 = \frac{\lambda}{3} - h.$$

Les surfaces  $\lambda S - \mu \Sigma$  sont donc applicables sur les surfaces  $\lambda S + \mu \Sigma$ ; dans cette application les courbes  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  s'échangent. Les courbes  $\lambda(A) + \mu(\bar{A})$  et  $\lambda(B) + \mu(\bar{B})$  sont aussi des quartiques unicursales.

8. Prenons la seconde solution. — Des considérations analogues permettent de supposer

$$\mu = 1, \quad \lambda = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,$$

on pose

$$\mu_2 = \text{sh}^2 \omega,$$

où  $\omega$  est une constante, et l'on a

$$a_2^2 + \frac{(a_1 - 1)^2}{\text{ch}^2 \omega} = 1, \quad b_2^2 - \frac{(b_1 - 1)^2}{\text{sh}^2 \omega} = -1,$$

ce qui prouve que le couple  $(a)$ ,  $(b)$  se compose d'une ellipse et d'une hyperbole focales. Cette détermination faite, on peut reporter le centre commun des coniques  $(a)$ ,  $(b)$  à l'origine et l'on a le tableau suivant que je n'écris, pour simplifier, que pour  $(A)$ ,  $(B)$ ;  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$ ; je substitue au paramètre de déformation  $C$  [qui pour  $C = 0$  donne  $(a)$ ,  $(b)$ ;  $(\bar{a})$ ,  $(\bar{b})$ , et le couple  $S$ ,  $S'$ ] le paramètre  $D = \sqrt{1 - C}$ ; j'appelle  $t$  et  $\tau$  les paramètres curvilignes sur  $(a)$  et  $(b)$  :

$$\begin{aligned} (A) \quad & A_1 = \text{ch } \omega \cos t, \quad A_2 = (D^2 - \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}, \quad A_3 = 0, \\ (B) \quad & B_1 = -\text{sh } \omega \text{ch } t, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = (\text{ch}^2 \tau - D^2)^{\frac{1}{2}}; \\ (\bar{A}) \quad & \bar{A}_1 = -\frac{\text{ch}^2 \omega}{2} \tan^2 t, \quad \bar{A}_2 = \frac{A_1 \text{ch } \omega}{D^2 \cos t}, \quad \bar{A}_3 = 0, \\ (B) \quad & B_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{D^2} + \frac{\text{sh}^2 \omega}{2} \text{th}^2 \tau, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\frac{B_1 \text{sh } \omega}{D^2 \text{ch } \tau}; \\ & \alpha = \frac{\text{ch } \omega}{\cos t}, \quad \beta = \frac{\text{sh } \omega}{\text{ch } \tau}. \end{aligned}$$



Le couple  $(a), (b)$  se compose de deux coniques focales (cercle et son axe, ou couple parabolique exceptés);  $(\bar{a})$  et  $(\bar{b})$  sont deux paraboles focales de grandeur arbitraire, dont les plans coïncident respectivement avec ceux des coniques  $(a)$  et  $(b)$ ; le parallélisme des tangentes suffit à établir la correspondance ponctuelle  $(a), (\bar{a})$  et  $(b), (\bar{b})$ . Le couple  $(A), (B)$  se déduit du couple  $(a), (b)$  par une homothétie de rapport  $D$  et le couple  $(\bar{A}), (\bar{B})$  de  $(\bar{a}), (\bar{b})$  par une homothétie de rapport  $\frac{1}{D^2}$ . Les courbes  $\lambda(A) + \mu(\bar{A})$  et  $\lambda(B) + \mu(\bar{B})$  sont unicursales et de degré 6, pour  $\lambda : \mu$  quelconque. Les surfaces  $\lambda S_D + \mu \Sigma_D$  sont unicursales; la surface  $S_D$  est constamment homothétique à la surface  $S_1$  et de même la surface  $\Sigma_D$  à  $\Sigma$ .

### III. -- Couples relatifs à l'équation $E(2, 2)$ .

L'équation ponctuelle relative aux surfaces de translation est  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0$  ou  $E(0, 0)$ ; celle relative aux surfaces à réseau conjugué doublement conique est  $E(1, 1)$  ou

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{1}{u-v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{u-v} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

L'équation la plus simple, après celles-là, est  $E(2, 2)$  et les essais précédents engagent à essayer de trouver des surfaces applicables relatives à  $E(2, 2)$ : cette fois nous trouverons uniquement des *couples* et la méthode nous prouve qu'au moins dans l'espace à 3 dimensions, les équations  $E(\beta, \beta)$  avec  $\beta \geq 3$  ne donnent plus de couples. Écrivons  $E(2, 2)$ ,

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{2}{u-v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{2}{u-v} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

D'après les équations liant  $E, F, G$  aux coefficients de l'équation ponctuelle de Laplace, on voit qu'ici on peut poser

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\partial \psi}{\partial u} : (u-v)^2, \\ G = - \frac{\partial \psi}{\partial v} : (u-v)^2, \\ F = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} : (u-v)^2, \end{array} \right. .$$

les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  de la surface étant

$$(4) \quad x_i = \frac{u'_i + v'_i}{(u - v)^2} - 2 \frac{u_i - v_i}{(u - v)^3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

On trouve sans peine

$$(5) \quad \psi = - \frac{12 \Sigma (u_i - v_i)^2}{(u - v)^3} + 12 \frac{\Sigma (u'_i + v'_i)(u_i - v_i)}{(u - v)^2} - 4 \frac{\Sigma (u'^2_i + u'_i v'_i + v'^2_i)^2}{u - v} \\ + \int (\Sigma u''_i)^2 du - \int (\Sigma v''_i)^2 dv.$$

M. Gambier a indiqué (*Annales scientifiques de l'Université de Jussy*, t. XVI, 1929, p. 301-338) comment déterminer les nouvelles fonctions  $U_i, V_i$  telles que la surface correspondante  $(X_1, X_2, X_3)$  soit applicable sur la première  $(x_1, x_2, x_3)$ . Une solution correspond au tableau ( $h = \text{const.} \neq \pm 1$ )

$$(6) \quad \begin{cases} u_1, & u_2, & 0, & U_1 = hu_1, & U_2, & 0, \\ v_1, & 0, & v_3, & V_1 = v_1 : h, & 0, & V_3; \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} u_1^2 (h^2 - 1) + U_1^2 - u_2^2 = f(u), \\ u_1'^2 (h^2 - 1) + U_1'^2 - u_2'^2 = \frac{3}{10} f''(u) + \frac{\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma}{10}, \\ u_1''^2 (h^2 - 1) + U_1''^2 - u_2''^2 = \frac{2}{5} \alpha + \frac{f''(u)}{10}; \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} v_1^2 \left( \frac{1}{h^2} - 1 \right) + V_1^2 - v_3^2 = -f(v), \\ v_1'^2 \left( \frac{1}{h^2} - 1 \right) + V_1'^2 - v_3'^2 = -\frac{3}{10} f''(v) - \frac{\alpha v^2 + 2\beta v + \gamma}{10}, \\ v_1''^2 \left( \frac{1}{h^2} - 1 \right) + V_1''^2 - v_3''^2 = -\frac{2}{5} \alpha - \frac{f''(v)}{10}, \end{cases}$$

où  $f$  est un polynome arbitraire de degré 6;  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des constants arbitraires.

La méthode employée ici aurait pu être employée pour  $E(0, 0)$ ,  $E(1, 1)$  et aurait donné les résultats qui seront indiqués au Chapitre II pour  $E(1, 1)$ .

#### IV. — Parallélisme de Peterson.

1. Une surface  $S(x, y, z)$  est rapportée à un réseau conjugué et fournit une équation de Laplace *ponctuelle*.

$$(1) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial g}{\partial u} - B \frac{\partial g}{\partial v} = 0.$$

Les quadratures de différentielles totales

$$(2) \quad \begin{cases} dx' = P \frac{\partial x}{\partial u} du + Q \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy' = P \frac{\partial y}{\partial u} du + Q \frac{\partial y}{\partial v} dv, \\ dz' = P \frac{\partial z}{\partial u} du + Q \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{cases}$$

fournissent une surface  $S'$ , *parallèle à S sur la base*  $(u, v)$ , pour employer le langage de Peterson (les plans tangents homologues et les tangentes aux courbes homologues  $u$  ou  $v$  sont parallèles), à condition que  $P$  et  $Q$  vérifient le système

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial v} - A(Q - P) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial u} - B(P - Q) = 0,$$

et l'équation de Laplace relative à  $S'$  est

$$(4) \quad \frac{\partial^2 g'}{\partial u \partial v} - A \frac{Q}{P} \frac{\partial g'}{\partial u} - B \frac{P}{Q} \frac{\partial g'}{\partial v} = 0.$$

Comme l'équation (1) et le système (3) ne dépendent que de l'élément linéaire de  $S$ , s'il existe une nouvelle surface  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ , déformée de  $S$  suivant la base  $(u, v)$ , toujours en adoptant le langage de Peterson, on aura encore une surface  $S'_1$ , parallèle à  $S_1$  suivant la base  $(u, v)$ , déformée de  $S'$  suivant la base  $(u, v)$  en écrivant, avec les *mêmes* fonctions  $P$  et  $Q$ ,

$$(2') \quad \begin{cases} dx'_1 = P \frac{\partial x_1}{\partial u} du + Q \frac{\partial x_1}{\partial v} dv, \\ dy'_1 = P \frac{\partial y_1}{\partial u} du + Q \frac{\partial y_1}{\partial v} dv, \\ dz'_1 = P \frac{\partial z_1}{\partial u} du + Q \frac{\partial z_1}{\partial v} dv. \end{cases}$$

Cette transformation bien connue exige l'intégration du système (3), qui peut se ramener à l'une ou l'autre équation

$$(5) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} - \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} - B \right) \frac{\partial P}{\partial v} - A \frac{\partial P}{\partial u} = 0, \quad Q = P + \frac{1}{A} \frac{\partial P}{\partial v},$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v} - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial v} - A \right) \frac{\partial Q}{\partial u} + B \frac{\partial Q}{\partial v} = 0, \quad P = Q + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial u}$$

ou, opérant comme Darboux (*Théorie des Surfaces*, t. II, 2<sup>e</sup> édition, p. 260), posant  $R = P - Q$ , à l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} + A \frac{\partial R}{\partial u} + B \frac{\partial R}{\partial v} + R \left( \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \right) = 0,$$

qui est l'adjointe de (1) et par suite s'intègre en même temps qu'elle; une fois (7) intégrée, on a

$$(8) \quad P = \int \left( \frac{\partial R}{\partial u} + BR \right) du - AR dv, \quad Q = P - R.$$

Or, il existe beaucoup d'équations de Laplace que l'on sait intégrer explicitement : pour chacune d'elles, le problème du parallélisme est résolu par quadratures; les équations  $E(\beta, \beta')$ , où  $\beta$  et  $\beta'$  sont des entiers, sont dans ce cas et parmi elles  $E(0, 0)$ ,  $E(1, 1)$ ,  $E(2, 2)$  sont d'autant plus intéressantes qu'elles donnent des couples (ou systèmes  $\infty^1$ ) applicables, qui, par parallélisme, donnent aussi des couples (ou systèmes  $\infty^1$ ) applicables.

2. Si la surface  $S$  possède un réseau  $(u, v)$  conjugué où les lignes  $u = \text{const.}$  sont coniques (mais non cylindriques), on a

$$B \neq 0, \quad A = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial v}$$

( $B = 0$  donne une famille cylindrique).

Supposant  $S$  rapportée à un réseau conjugué, cherchons à quelle condition les lignes  $u = \text{const.}$  sur  $S'$  sont coniques (qu'elles soient ou non coniques sur  $S$ ) (inutile de parler du cas de lignes cylindriques, car si elles le sont sur une surface, elles le sont sur les surfaces parallèles, résultat évident géométriquement). On doit donc

écrire

$$(9) \quad A \frac{Q}{P} = \frac{\partial}{\partial v} \log \left( B \frac{P}{Q} \right),$$

ce qui, en remplaçant  $\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial v}$  par  $A \left( \frac{Q}{P} - 1 \right)$  donne

$$(10) \quad \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial v} - A - \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial v} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v} - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial v} - A \right) \frac{\partial Q}{\partial u} + B \frac{\partial Q}{\partial v} = 0.$$

On obtient manifestement deux classes de solutions I et II.

*Solution I.* —  $A = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial v}$  de sorte que S est à lignes,  $u = \text{const.}$ , coniques ; il est nécessaire et suffisant de prendre  $Q = U$  où U est fonction arbitraire de  $u$  (et alors la surface S' correspondante est aussi du type I, tandis que si Q est une solution différente de ce type, la surface S' sera du type II).

*Solution II.* —  $A - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial v} \neq 0$  ; la condition de compatibilité des équations (10) et (6) est

$$(11) \quad B + \frac{\partial}{\partial u} \log \left( \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial v} - A \right) = 0,$$

et il ne reste, pour déterminer Q, que l'équation (10), qui donne Q par une quadrature (S est du type II, mais S' est du type I). Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux du paragraphe I, formule (9).

En particulier, prenons  $E(\beta, \beta')$ , c'est-à-dire

$$A = \frac{\beta'}{u - v}, \quad B = \frac{\beta}{v - u} \quad \text{pour } \beta' = 1,$$

les lignes  $u = \text{const.}$  sont coniques ; supposons  $\beta' \neq 1$  : la condition II devient alors  $\beta = -1$  ; de la sorte nous pouvons affirmer que les surfaces déduites de  $E(2, 2)$  ne peuvent, par parallélisme, donner une famille conique.

Il est donc intéressant de revenir aux surfaces déduites de  $E(1, 1)$  : réseau conjugué  $(u, v)$  doublement conique, et de chercher les surfaces

parallèles à réseau *doublement conique* encore ; nous avons trouvé une solution précédemment, nous allons voir que c'est la seule. En effet, on doit avoir ici

$$Q = U, \quad P = V$$

et (3) donne

$$\frac{U'}{U-V} = \frac{1}{u-v}, \quad \frac{V'}{U-V} = \frac{1}{u-v},$$

c'est-à-dire

$$U = \lambda + \mu u, \quad V = \lambda + \mu v.$$

$\lambda$  et  $\mu$  étant constants, on a alors

$$x = \frac{u_1 - v_1}{u - v}, \quad x' = \lambda x + \mu \frac{v u_1 - u v_1}{u - v}.$$

On retrouve donc bien la solution indiquée.

## V. — Application des transformations conformes de l'espace euclidien à $n$ dimensions.

I. Par les opérations du groupe conforme de l'espace euclidien à  $n$  dimensions, à toute variété *minima*, c'est-à-dire telle que  $ds^2 = 0$ , correspond une variété analogue. Deux surfaces applicables

$$S(x, y, z), \quad S_1(x_1, y_1, z_1)$$

donnent donc dans l'espace à 6 dimensions, en posant

$$\xi = ix_1, \quad \eta = iy_1, \quad \zeta = iz_1,$$

une variété *minima* à 2 dimensions  $\Sigma(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$  ; le groupe conforme (à 28 paramètres), de l'espace à 6 dimensions donne  $\infty^{28}$  variétés analogues qui fournissent  $\infty^{15}$  couples de surfaces applicables distincts du premier (on a retranché 6 pour le déplacement de  $S$ , 6 pour celui de  $S_1$ , 1 pour une homothétie portant sur  $S$  et  $S_1$ ),  $S$  et  $S_1$  étant rapportées à leur réseau conjugué commun  $u, v$ ), on sait que

$$(1) \quad x, y, z, \xi, \eta, \zeta : x^2 + y^2 + z^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

sont sept solutions d'une même équation de Laplace :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - A \frac{\partial \theta}{\partial u} - B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Une transformation du groupe conforme en jeu donne à la place de (1) un ensemble

$$(3) \quad \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\zeta}, \bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{\zeta}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\xi}^2,$$

qui sont sept solutions d'une équation nouvelle de Laplace, qui a les *mêmes invariants* que (2); il en résulte que de tout couple applicable sur une base simplement ou doublement conique, ce procédé donne  $\infty^3$  couples de même espèce.

2. Pour les mécanismes, on obtient des résultats analogues, car l'équation

$$(14) \quad \sum_1^n (a_i - b_i)^2 - \sum_1^n (\Lambda_i - B_i)^2 = 0$$

se transforme, en posant

$$(5) \quad \begin{cases} a_{n+1} = i\Lambda_1, & \dots, & a_{2n} = i\Lambda_n, \\ b_{n+1} = iB_1, & \dots, & b_{2n} = iB_n. \end{cases}$$

$$(6) \quad \sum_1^{2n} (a_i - b_i)^2 = 0.$$

Donc de deux mécanismes (a), (b), (A), (B) *trans* ou *déformables* l'un en l'autre dans l'espace à trois dimensions, on déduit comme plus haut  $\infty^3$  nouveaux mécanismes *simplement transformables*, même si le mécanisme de départ est *déformable*.

3. Dans le Mémoire déjà cité, Młodziejowski remarque qu'en écrivant

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{u_1 - v_1}{u_3 - v_3}, & y = \frac{u_2 - v_2}{u_3 - v_3}, & z = \frac{u_3 - v_3}{u_3 - v_3}, \\ X = \frac{U_1 - V_1}{u_3 - v_3}, & Y = \frac{U_2 - V_2}{u_3 - v_3}, & Z = \frac{U_3 - V_3}{u_3 - v_3}, \end{cases}$$

où les  $u_i$  et  $U_i$  dépendent d'un paramètre  $u$ , et les  $v_i$  et  $V_i$  d'un paramètre  $v$ , on a des surfaces rapportées à un réseau conjugué formé de lignes cylindriques ou coniques; les plans tangents à la première sur-

face le long de la courbe  $u = \text{const.}$  passent par le point

$$\left( \frac{du_1}{du}, \frac{du_2}{du}, \frac{du}{du}, \frac{du_3}{du} \right)$$

en coordonnées homogènes, de sorte que la ligne est conique ou cylindrique, suivant que  $u$ , est variable ou constant. Les conditions d'appliquabilité peuvent s'écrire, dans tous les cas, en introduisant les fonctions nouvelles  $U$ , de  $u$  et  $V$ , de  $v$  :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^3 (u_i - v_i)^2 = \sum_1^3 (U_i - V_i)^2 = (u - v)(U - V), \\ \sum_1^3 \left( \frac{du_i}{du} \right)^2 = \sum_1^3 \left( \frac{dU_i}{du} \right)^2 = \frac{du_3}{du} \frac{dU_3}{du}, \\ \sum_1^3 \left( \frac{dv_i}{dv} \right)^2 = \sum_1^3 \left( \frac{dV_i}{dv} \right)^2 = \frac{dv_3}{dv} \frac{dV_3}{dv}. \end{array} \right.$$

En posant

$$(9) \quad \begin{array}{ll} 1) u_i = u, - U_i, & 2) U_i = u, + U_i, \\ 1) v_i = v, - V_i, & 2) V_i = v, + V_i. \end{array}$$

les équations (8) prennent la forme très remarquable

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^3 (u_i - v_i)^2 = \sum_1^3 (U_i - V_i)^2, \\ \sum_1^3 \left( \frac{du_i}{du} \right)^2 = \sum_1^3 \left( \frac{dU_i}{du} \right)^2, \\ \sum_1^3 \left( \frac{dv_i}{dv} \right)^2 = \sum_1^3 \left( \frac{dV_i}{dv} \right)^2. \end{array} \right.$$

On est donc amené à déterminer tous les mécanismes *dé* ou *transformables* de l'espace à quatre dimensions, puis à ne conserver parmi eux que ceux où l'arc de la courbe ( $a$ ) est égal à celui de la courbe (A), l'arc de ( $b$ ) étant aussi égal à celui de (B). La forme des équations (8) montre que l'on peut remplacer  $u$ , et  $v$ , simultanément par  $U$ , et  $V$ , (ou si l'on préfère changer de signe  $u$ , et  $v$ ,) de sorte que



tout couple de cette espèce en fournit un autre (il peut arriver ainsi qu'on ait un couple à réseau cylindrique-conique d'une part, et conique-conique de l'autre; il peut arriver que l'un des couples se réduise à une développable). Or les résultats de Młodziejowski n'ont pas été poussés par lui jusqu'au bout, malgré leur intérêt, non seulement pour les couples, mais surtout pour la déformation continue; ce géomètre a bien obtenu la déformation continue sur réseau conique-cylindrique, mais n'a pu obtenir aucun exemple de déformation continue à réseau doublement conique.

4. En tout cas, remarquons que, dans l'espace à 8 dimensions, les courbes  $(u_1, u_2, u_3, u_4, iU_1, iU_2, iU_3, iU_4)$  et  $(v_1, v_2, v_3, v_4, iV_1, iV_2, iV_3, iV_4)$  sont minima, et telles que tout cône (à 7 dimensions) isotrope ayant son sommet sur l'une, contient l'autre : les opérations du groupe conforme de l'espace à 8 dimensions, groupe à 45 paramètres, conservent ces propriétés : en retranchant, comme plus haut, 6 paramètres pour les déplacements de chacune des surfaces dans l'espace ordinaire à 3 dimensions et 1 pour l'homothétie, d'un couple de surfaces applicables de l'espèce en jeu, on déduit  $\infty^{32}$  couples analogues, distincts du couple de départ; et du même coup, de tout mécanisme double, on fait dériver  $\infty^{32}$  mécanismes doubles nouveaux.

5. La substitution de  $U_s$  à  $u_s$  et  $V_s$  à  $v_s$ , par exemple, revient à remplacer  $(u_1, u_2, u_3, u_4, iU_1, iU_2, iU_3, iU_4)$  par  $(u_1, u_2, u_3, -u_4, iU_1, iU_2, iU_3, iU_4)$  (et de même pour les  $v$  et  $V$ ), ce qui est bien une opération du groupe conforme de l'espace à 8 dimensions (d'ailleurs avec le même mécanisme de l'espace à 4 dimensions, un simple échange du nom des indices revient à une opération analogue que Młodziejowski ne signale pas). Il est intéressant de voir comment cette transformation de Młodziejowski transforme notre mécanisme double : soient

$$[(a), (b); (\bar{a}), (\bar{b})], \quad [(\lambda), (B); (\bar{A}), (\bar{B})]$$

les mécanismes doubles correspondant aux surfaces (7) et

$$[(\alpha), (\beta); (\bar{\alpha}), (\bar{\beta})], \quad [(\alpha), (\beta); (\bar{\alpha}), (\bar{\beta})]$$

leurs transformés relatifs aux surfaces obtenues en mettant  $U_3 = V_3$  en dénominateur, au lieu de  $u_3 = v_3$ . Nous avons

$$(11) \quad u_1 = a_1(u_3 + U_3) - \bar{a}_1, \quad \frac{d\bar{a}_1}{da_1} = u_3 + U_3.$$

La dérivation fournit

$$(12) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{du_1}{du_3 + dU_3}, & a_2 = \frac{du_2}{du_3 + dU_3}, & a_3 = \frac{du_3}{du_3 + dU_3}, \\ \Lambda_1 = \frac{dU_1}{du_3 + dU_3}, & \Lambda_2 = \frac{dU_2}{du_3 + dU_3}, & \Lambda_3 = \frac{dU_3}{du_3 + dU_3}. \end{cases}$$

On en déduit

$$(13) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - \Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 - \Lambda_3^2 = \frac{dU_3 - du_3}{dU_3 + du_3}.$$

En changeant  $u_3$  en  $-u_3$  on a

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{du_1}{dU_3 - du_3}, & \alpha_2 = \frac{du_2}{dU_3 - du_3}, & \dots, \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = \frac{dU_3 + du_3}{dU_3 - du_3}, \end{cases}$$

et par suite,

$$(15) \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2}, \quad \dots,$$

de sorte que le mécanisme  $[(a), (b); (A), (B)]$  se transforme en  $[(\alpha), (\beta); (\mathcal{A}), (\mathcal{B})]$  par une inversion dans l'espace à six dimensions; la transformation du mécanisme  $[(\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{A}), (B)]$  est plus compliquée : mais ceci n'a rien d'étonnant, car nous avons vu que ce mécanisme n'est pas lié intrinsèquement au couple de surfaces applicables.

6. J'ai indiqué comment le parallélisme de Peterson fait correspondre au couple  $(S, S')$  le couple  $(\Sigma, \Sigma')$ , les rôles des mécanismes  $[(a), (b); (A), (B)]$  et  $[(\bar{a}), (\bar{b}); (\bar{A}), (\bar{B})]$  se trouvent échangés : montrons quelle est la transformation du groupe conforme à huit dimensions qui fait passer de  $(S, S')$  à  $(\Sigma, \Sigma')$ . On remplace respectivement

$$(16) \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad U_1, \quad U_2, \quad U_3$$

par

$$(17) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{u_1}{u_k + U_k}, & \bar{u}_2 = \frac{u_2}{u_k + U_k}, & \bar{u}_3 = \frac{u_3}{u_k + U_k}, \\ \bar{U}_1 = \frac{U_1}{u_k + U_k}, & \bar{U}_2 = \frac{U_2}{u_k + U_k}, & \bar{U}_3 = \frac{U_3}{u_k + U_k}, \end{cases}$$

et analogues pour  $e_1, e_2, e_3, V_1, V_2, V_3$ ; il reste à trouver  $\bar{u}_k, \bar{U}_k, \bar{e}_k, \bar{V}_k$ . On a d'abord

$$(18) \quad u_k + \bar{U}_k = \frac{1}{u_k + U_k}, \quad \bar{e}_k + \bar{V}_k = \frac{1}{e_k + V_k}.$$

Écrivons maintenant

$$(19) \quad \sum_1^3 (\bar{u}_i - \bar{e}_i)^2 - \sum_1^3 (\bar{U}_i - \bar{V}_i)^2 = 0.$$

Si, pour abréger, on désigne par  $Su_i^2$ , par exemple, l'expression  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ , on voit que cette équation (19) s'écrit

$$(19') \quad \frac{S(u_i^2 - U_i^2)}{(u_k + U_k)^2} - \frac{2S(u_1 e_1 - U_1 V_1)}{(u_k + U_k)(e_k + V_k)} + \frac{S(e_i^2 - V_i^2)}{(e_k + V_k)^2} + \left[ \frac{1}{u_k + U_k} - \frac{1}{e_k + V_k} \right] [\bar{u}_k - \bar{U}_k - (e_k - V_k)] = 0.$$

En tenant compte de

$$(20) \quad S(u_i^2 - U_i^2) + S(e_i^2 - V_i^2) - 2S(u_1 e_1 - U_1 V_1) + [u_k + U_k - (e_k + V_k)][u_k - U_k - (e_k - V_k)] = 0.$$

on voit que la combinaison schématique

$$(19') = \frac{(20)}{(u_k + U_k)(e_k + V_k)}$$

débarassée du facteur  $\frac{1}{u_k + U_k} - \frac{1}{e_k + V_k}$  donne

$$(21) \quad \begin{cases} \bar{U}_k - \bar{u}_k = \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_k^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2 - U_k^2}{u_k + U_k}, \\ \bar{V}_k - \bar{e}_k = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_k^2 - V_1^2 - V_2^2 - V_3^2 - V_k^2}{e_k + V_k}. \end{cases}$$

Posons

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2 - U_4^2, \\ \bar{u}_i = \frac{1}{2} \frac{1 - \sigma}{u_i + U_i}, \quad \bar{U}_i = \frac{1}{2} \frac{1 + \sigma}{u_i + U_i}; \\ \tau = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 - V_1^2 - V_2^2 - V_3^2 - V_4^2, \\ v_i = \frac{1}{2} \frac{1 - \tau}{v_i + V_i}, \quad \bar{V}_i = \frac{1}{2} \frac{1 + \tau}{v_i + V_i}; \end{array} \right.$$

$$(23) \quad ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2 - dU_1^2 - dU_2^2 - dU_3^2 - dU_4^2.$$

$$(24) \quad d\bar{s}^2 = d\bar{u}_1^2 + d\bar{u}_2^2 + d\bar{u}_3^2 + d\bar{u}_4^2 - d\bar{U}_1^2 - d\bar{U}_2^2 - d\bar{U}_3^2 - d\bar{U}_4^2.$$

On obtient, en remplaçant dans  $d\bar{s}^2$  les lettres  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots$  par leurs valeurs,

$$d\bar{s}^2 = \frac{ds^2}{(u_i + U_i)^2},$$

ce qui prouve bien que notre transformation appartient au groupe conforme de l'espace à 8 dimensions.

Il était intéressant de rattacher à des principes généraux la transformation indiquée par Młodziejowski et la nôtre. J'ajouterai que la méthode de Młodziejowski devait fatalement échouer pour la déformation continue avec réseau doublement conique, parce que la quantité  $u_i$  égale à  $u_i + U_i$  fait intervenir à la fois le mécanisme  $(u_1, u_2, u_3, u_4)(v_1, v_2, v_3, v_4)$  et son transformé.

## CHAPITRE II.

### I. — Résumé des résultats relatifs aux bases principales obtenus antérieurement.

M. Cosserat (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1873) a montré le premier que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau conjugué d'une surface soit permanent, c'est-à-dire reste conjugué au cours d'une déformation continue, est que son image sphérique satisfasse au système

$$(1) \quad \frac{\partial \{12\}'}{\partial u \{1\}} = \frac{\partial \{12\}'}{\partial v \{2\}} = 2 \{1\}' \{2\}';$$

plus tard, Bianchi a donné de ce résultat une interprétation élégante et féconde : *L'image sphérique d'une surface (S) rapportée à un réseau conjugué permanent est aussi l'image sphérique d'une surface (B) <sup>(1)</sup> rapportée à ses asymptotiques, la courbure totale de (B) ayant pour expression*

$$(2) \quad K = (-1) : [U(u) + V(v)]^2;$$

*réciroquement*, à toute surface (B) de cette espèce correspondent  $\infty$  surfaces (S) obtenues par l'intégration d'une équation de Moutard. Bianchi a rencontré de nouveau les surfaces (B) au cours de ses recherches sur les congruences W : ce sont les *surfaces focales des congruences W* pour lesquelles, aux points correspondants des deux nappes focales, la courbure totale est la même.

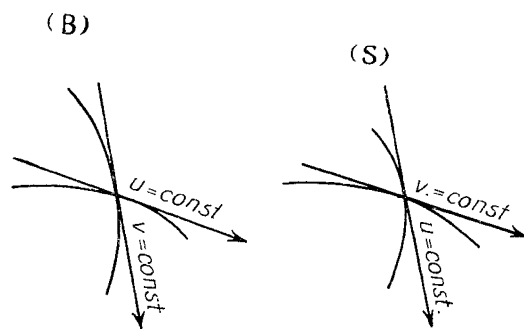


Fig. 2.

La correspondance entre le réseau des asymptotiques d'une surface (B) et le réseau conjugué d'une surface (S) correspondante est simple : aux points homologues M et M' de ces deux surfaces les tangentes aux courbes *u = const.* de (B), *v = const.* de (S) sont *parallèles*; de même pour les tangentes *v = const.* de (B) et *u = const.* de (S).

Les équations (1) montrent immédiatement que les surfaces (S) et (B) se répartissent en trois classes :

$$\text{Classe (A)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}' = 0.$$

---

(<sup>1</sup>) Je désignerai désormais ces deux espèces de surfaces par les lettres (S) ou (B).

le réseau conjugué est formé de deux familles de géodésiques et réciproquement tout réseau conjugué formé de deux familles géodésiques est permanent; il s'agit de surfaces bien connues sous le nom de surfaces de Voss et Guichard; M. Gambier a étudié leur déformation dans un Mémoire inséré aux *Acta mathematica* en s'occupant tout particulièrement de la réalité ou de celles qui sont applicables sur des surfaces de révolution.

Les surfaces (B) sont ici les surfaces à courbure totale constante ( $U = \text{const.}$ ,  $V = \text{const.}$ )

$$\text{Classe (B)} \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \neq 0,$$

les lignes  $u = \text{const.}$  du réseau conjugué sont *géodésiques*, les lignes  $v = \text{const.}$  ne le sont pas; les surfaces (B) ont une famille d'*asymptotiques* formée de courbes à *torsion constante* ( $v = \text{const.}$ ). Je montre plus loin que si deux surfaces applicables ont un réseau conjugué commun comprenant une famille de géodésiques, il existe une déformation continue conservant ce réseau conjugué; autrement dit, si un tel réseau est base d'une déformation, il est *base principale*, et *non base simple*.

$$\text{Classe (C)} \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \neq 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \neq 0,$$

aucune des deux familles du réseau conjugué n'est formée de géodésiques; ni  $U$  ni  $V$  ne se réduit à une constante.

Les formules de Lelievre ramènent la recherche des surfaces de Bianchi à celle des équations de Moutard

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M \theta$$

qui admettent un système (au moins) de trois solutions liées par la relation quadratique

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = U + V,$$

où  $U$  désigne une fonction de  $u$  seul et  $V$  une fonction de  $v$ , ces solutions sont dites, suivant la terminologie adoptée par Guichard, *solutions quadratiques*.

M. Gambier a donné au *Mémorial des Sciences mathématiques*

(fasc. XXXI) les équations que doivent vérifier les coefficients d'un  $ds^2$  donné pour que les courbes coordonnées forment un réseau conjugué sur  $\infty^1$  surfaces représentatives : en nous bornant à la classe (C), on a le système nécessaire et suffisant :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \log \left[ K(EG - F^2) : \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log \left[ K(EG - F^2) : \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 : 4(u + v)^2 \end{cases}$$

[ les variables  $u$  et  $v$  ont été choisies de manière que la courbure totale de la surface (B) correspondante soit  $K = (-1) : (u + v)^2$  ].

J'ai signalé dans l'Introduction les principaux résultats obtenus par M. Finikoff.

Les exemples de surface (S) connus sont relativement peu nombreux : on a d'abord le cas relativement banal où la base principale est formée des méridiens et parallèles des surfaces de révolution, d'où, en transformant par parallélisme de Peterson, les surfaces moulure. Les surfaces données par M. Goursat (*American Journal of Mathematics*, t. 45, 1892, p. 1) pour lesquelles le réseau conjugué contient une famille de courbes planes situées dans des plans parallèles, les courbes de l'autre famille sont planes également : Raffy a montré (*Comptes rendus*, t. 132, 1901, p. 729) que ces surfaces sont les *seules* surfaces (S) dont le réseau conjugué comprend une famille de courbes planes, leur détermination dépend de trois fonctions arbitraires d'une variable et, à ce titre, elles constituent le type le plus étendu de surfaces (S) connues <sup>(1)</sup>. Les surfaces minima sont surfaces de Voss; le réseau conjugué permanent est formé des lignes de longueur nulle, son image sphérique est formée de deux systèmes de génératrices rectilignes de la sphère. M. Drach (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. 10, 1908, p. 125) a déterminé les surfaces (S) dont l'image sphérique du réseau conjugué en jeu contient une famille de lignes de

---

(1) Ce type comprend donc, comme cas particuliers, les surfaces de révolution, les surfaces moulure déjà citées, les quadriques, les surfaces de translation de Bianchi à profils de translation plane dans deux plans rectangulaires.

longueur nulle, les surfaces (B) correspondantes sont réglées et à génératrices isotropes.

Les surfaces tétraédrales

$$\alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1$$

admettent  $\infty^1$  réseaux conjugués permanents; pour chacun de ces réseaux on obtient  $\infty^1$  surfaces tétraédrales ayant une asymptotique commune restant rigide; cette belle propriété a été mise en évidence par M. Tzitzéica (*Annales de l'Académie Roumaine : Section des Sciences*, t. 38, 1916, p. 241-258) et étudiée en détail par M. Gambier (*Journal de Mathématiques*, t. 5, 1926, p. 227-291) et par M. Jonas (*Mathematische Annalen*, t. 92, 1924, p. 214-257).

M. Gambier a déterminé parmi les  $\infty^2$  surfaces hélicoïdales ou révolutives représentatives d'un  $ds^2$  de révolution les familles  $\infty^1$  possédant un réseau conjugué permanent (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. 1, 1926) en dehors du cas bien connu où les surfaces de révolution se déforment en surfaces de révolution avec conservation des méridiens et des parallèles, on trouve trois types de solutions :

$$1^0 \quad ds^2 = u^2 (du^2 + dv^2),$$

on a les hélicoïdes applicables sur la développée du caténoïde; le  $ds^2$  en jeu possède  $\infty^2$  géodésiques qu'on peut répartir en réseaux définis par l'équation

$$\lambda^2 du^2 - (u^2 - \lambda^2) dv^2 = 0 \quad (\lambda = \text{const.});$$

chacun d'eux est conjugué sur  $\infty^1$  surfaces représentatives; l'hélicoïde minimum imaginaire d'équation

$$2[3x + (\gamma + iz)^2](\gamma + iz) = 3(\gamma - iz)$$

appartient à chacune de ces familles (<sup>1</sup>).

$$2^0 \quad ds^2 = ch^2 u (du^2 + dv^2),$$

---

(<sup>1</sup>) GAMBIER, *Comptes rendus*, t. 188, 1919, p. 758, et *Bulletin des Sciences mathématiques* (*loc. cit.*), cette surface a déjà été citée par M. Blaschke et antérieurement par M. Weingarten, à propos de la méthode si curieuse que cet auteur a imaginée pour l'étude de la déformation, mais le rôle de cette surface comme surface de Voss-Guichard avait complètement échappé, les géomètres ayant eu scrupule à conserver une surface imaginaire et n'ayant pas remarqué les nombreuses applications qu'elle a, même dans le domaine réel, systèmes cycliques, systèmes orthogonaux.



on a les hélicoïdes applicables sur le caténoïde; comme précédemment on peut répartir les géodésiques en  $\infty^1$  réseaux,

$$\lambda^2 du^2 + (\operatorname{ch}^2 u - \lambda^2) dv^2 = 0,$$

tels qu'à chacun d'eux corresponde une famille  $\infty^1$  de surfaces sur lesquelles ce réseau est conjugué; chacune de ces familles contient l'hélicoïde minimum réel.

3° On trouve ensuite  $\infty^2$  types de  $ds^2$ ; chacun d'eux donne  $\infty^2$  surfaces hélicoïdales ou révolutives de l'ensemble desquelles on ne peut extraire qu'une famille, admettant un réseau conjugué permanent.

Ce troisième type s'obtient à partir du premier et du second par le parallélisme de Peterson.

Dans ces trois cas, le réseau conjugué est formé de deux familles de géodésiques; ce sont des surfaces de Voss; les deux hélicoïdes minima sont donc  $\infty^1$  fois surfaces de Voss. M. Finikoff a montré que ce sont les seules surfaces qui possèdent cette propriété.

Citons enfin les surfaces de translation dont les profils de translation sont dans des plans rectangulaires, ce sont les seules surfaces admettant un réseau conjugué permanent doublement cylindrique (en dehors des surfaces minima).

## II. — Mise en équation du problème général.

I. Soient  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  trois solutions de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M \theta$$

vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(2) \quad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = U(u) + V(v);$$

considérons trois cas :

*Premier cas : ni U ni V ne se réduit à une constante.* — C'est ce que Bianchi appelle la classe (C), on peut, sans restriction, supposer

$$U(u) = u, \quad V(v) = v,$$

de sorte que (2) s'écrit

$$(3) \quad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = u + v;$$

dérivons en  $u$  ou  $v$ ,

$$(4) \quad S \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad S \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = \frac{1}{2}.$$

En dérivant la première équation (4) par rapport à  $v$  ou de la seconde par rapport à  $u$ , et tenant compte de (1), on a

$$(5) \quad S \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = -M(u + v).$$

Considérons la surface  $S'$  décrite par le point de coordonnées  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ; son élément linéaire est

$$ds'^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2, \\ E' = S \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right)^2, \quad F' = S \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \frac{\partial \theta_1}{\partial v}, \quad G' = S \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right)^2,$$

en tenant compte de (1) et (4) on a

$$(6) \quad \frac{\partial E'}{\partial v} = \frac{\partial G'}{\partial u} = M,$$

ce qui permet avec une fonction auxiliaire  $X$  d'écrire successivement

$$(7) \quad E' = \frac{\partial X}{\partial u}, \quad G' = \frac{\partial X}{\partial v},$$

$$(8) \quad M = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \quad F' = -(u + v) \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v},$$

$$(9) \quad ds'^2 = \frac{\partial X}{\partial u} du^2 - 2(u + v) \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial X}{\partial v} dv^2;$$

$X$  doit vérifier l'équation du quatrième ordre obtenue en exprimant que la fonction  $\varphi = \frac{1}{2}(u + v)$  vérifie l'équation

$$(10) \quad \Delta_{22}\varphi + 1 = \Delta_2\varphi - K(2\varphi - \Delta_1\varphi),$$

que Bianchi (1) appelle *seconde équation de l'applicabilité*, équation où

(1) BIANCHI, *Lezioni*, t. 4, p. 220. — DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. 3, p. 260.

les paramètres différentiels et la courbure totale  $K$  sont relatifs à l'élément linéaire (9); à toute intégrale  $X$  de cette équation correspond une surface dont les coordonnées  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  dépendent de l'intégration d'une équation de Riccati; on vérifie facilement que ces coordonnées satisfont à l'équation

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \theta.$$

Il suffit pour cela de vérifier que les projections octogonales du vecteur  $\left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial u \partial v} \right)$  sur trois directions non parallèles à un même plan sont égales à celles du vecteur  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  multipliées par  $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$ ; cette propriété résulte des identités

$$\begin{aligned} S \theta_1 \theta_1 &= u + v, & S \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} &= \frac{1}{2}, & S \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} &= \frac{1}{2}, \\ S \theta_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} &= (u + v) \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \\ S \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \\ S \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

*Donc, les équations de Moutard qui admettent un système de trois intégrales quadratiques dépendent de quatre fonctions arbitraires irréductibles d'une variable (1).*

A toute surface (S') ainsi obtenue, les formules de Lelievre font correspondre une surface (B); les surfaces (S) à réseau conjugué permanent correspondantes s'obtiennent en prenant l'enveloppe du plan

$$\theta_1 u + \theta_2 v + \theta_3 z + \theta_4 = 0,$$

où  $\theta_4$  est une quatrième intégrale de l'équation déjà rencontrée (1) ou (11)

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \theta,$$

linéairement indépendante de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

---

(1) M. Demoulin a donné l'équivalent pour la recherche des systèmes de deux solutions quadratiques (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, classe des sciences, 5<sup>e</sup> série, t. 6.

*Éléments linéaires des surfaces (B) et (S) et de leur représentation sphérique.* — Si nous nous reportons à la méthode suivie par Darboux pour former l'équation dont dépend la distance  $r = \sqrt{2\varphi}$  d'un point d'une surface à un point fixe, en rapportant (S') à un système de coordonnées polaires

$$\theta_1 = r \cos \theta \cos \varphi, \quad \theta_2 = r \cos \theta \sin \varphi, \quad \theta_3 = r \sin \theta,$$

on obtient

$$\frac{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2 - dr^2}{r^2} = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2,$$

le second membre est l'élément linéaire de la sphère décrite par l'extrémité du vecteur, unité dont le support joint l'origine au point  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ; autrement dit, c'est l'image sphérique des surfaces (B) et (S); en remplaçant  $E', F', G'$  et  $r$  par leurs valeurs il vient <sup>(1)</sup>

$$(14) \quad d\sigma^2 = \left[ \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{1}{4(u+v)} \right] \frac{du^2}{u+v} - 2 \left[ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4(u+v)^2} \right] du dv + \left[ \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{1}{4(u+v)} \right] dv^2,$$

en posant

$$\varphi = X - \frac{1}{4}L(u+v),$$

on retrouve le résultat donné en 1901 par M. Demoulin (*Comptes rendus*, t. 433, p. 265)

$$(16) \quad d\sigma^2 = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{u+v} du^2 - 2 \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}} du dv + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{u+v} dv^2;$$

remarquons que l'équation du quatrième ordre, vérifiée par  $X$  ou  $\varphi$ , peut s'obtenir directement en écrivant que (14) ou (16) est l'élément linéaire d'une surface de courbure totale  $+1$ .

(<sup>1</sup>) On arrive au même résultat en remarquant que la sphère est le lieu du point

$$c_1 = \frac{\theta_1}{\sqrt{u+v}}, \quad c_2 = \frac{\theta_2}{\sqrt{u+v}}, \quad c_3 = \frac{\theta_3}{\sqrt{u+v}}$$

et différentiant directement.

L'élément linéaire de (B) se déduit immédiatement de (16) <sup>(1)</sup>.

$$(17) \quad d\Sigma^2 = (u + v) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial u} du^2 + 2(u + v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv^2 \right].$$

Soient, maintenant,  $M(x, y, z)$  et  $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  deux points homologues de deux surfaces (S) et (B); nous avons des identités de la forme

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = R \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = S \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \end{cases}$$

les fonctions R et S devant satisfaire au système

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial u} = R \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} - S \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} = S \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} - R \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}, \end{cases}$$

qui exprime que les équations (18) sont complètement intégrables et où les symboles de Christoffel sont calculés avec les coefficients de l'élément linéaire (17) <sup>(2)</sup>. L'élément linéaire de (S) s'obtient immédiatement

$$(20) \quad ds^2 = (u + v) \left[ R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} du^2 + 2RS(u + v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} du dv + S^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv^2 \right].$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale

$$-S dv dx = \delta du^2 + 2\delta' du dv + \delta'' dv^2$$

se calculent aisément et sont :

$$(21) \quad \begin{cases} \delta = \sqrt{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} (u + v)^2 R}, \\ \delta' = 0, \\ \delta'' = \sqrt{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} (u + v)^2 S}. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> BIANCHI, *Lezioni*, t. 1, p. 240. — DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. 4, p. 30

<sup>(2)</sup> En comparant avec ce qui précède, l'intégration du système (19) est équivalente à celle de l'équation de Montard (II).

En résumé : pour obtenir les surfaces (S) admettant un réseau conjugué permanent dont aucune famille n'est formée de géodésiques il faut intégrer successivement une équation au quatrième ordre puis un système linéaire (19) du premier ordre (équivalent à une équation de Moutard), ce qui montre que ces surfaces dépendent de six fonctions arbitraires irréductibles d'une variable.

Tout système de solutions  $X, R, S$  détermine intrinsèquement une surface (S); si l'on désire déterminer explicitement les coordonnées ponctuelles ou tangentielles, il est nécessaire d'intégrer une équation de Riccati. Remarquons encore que nos variables  $u$  et  $v$  sont les mêmes que celles utilisées par M. Gambier pour établir le système (3) signalé au paragraphe précédent, il s'ensuit que le changement de fonctions défini par les équations

$$\begin{aligned} E &= (u + v) R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ F &= (u + v)^2 R S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \\ G &= (u + v) S^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{aligned}$$

ramène le système (3) à celui que nous venons d'établir.

2. On doit maintenant indiquer comment ayant obtenu une surface (S) on obtient (au moins intrinsèquement) les  $\infty^1$  surfaces ( $\bar{S}$ ) déformées de (S) suivant la base principale ( $u, v$ ). Calculons pour cela la seconde forme  $-Sdc dx$  de (S) et de ( $\bar{S}$ ), on a pour (S) et ( $\bar{S}$ ) les secondes formes

$$\partial du^2 + \partial'' dv^2 \quad \text{et} \quad \bar{\partial} du^2 + \bar{\partial}'' dv^2,$$

on peut écrire avec une inconnue auxiliaire  $\lambda$  ou  $\nu$

$$\bar{\partial} = \lambda \partial, \quad \bar{\partial}'' = \partial'' : \lambda, \quad \lambda^2 = 1 + \frac{1}{\nu}$$

et les équations de Gauss-Codazzi fournissent aussitôt (en nous bornant à la classe C)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial u} &= -\frac{\nu + 1}{u + v}, & \frac{\partial \nu}{\partial v} &= -\frac{\nu}{u + v}, \\ (u + v)(\nu + 1) &= -V, & (u + v)\nu &= -U, \end{aligned}$$

V et U étant des fonctions de  $v$  seul ou  $u$  seul, on voit la relation identique

$$u + v = -V + U,$$

d'où, avec une constante *arbitraire*  $k$ , qui est le paramètre de déformation,

$$V = -v + k, \quad U = u + k, \\ \lambda^2 = \frac{v+1}{v} = \frac{V}{U} = \frac{k-v}{k+v}.$$

Ces résultats avaient été signalés par M. Tzitzéica, les surfaces S se trouvent ainsi déterminées intrinsèquement.

Il est intéressant de donner l'élément  $d\sigma^2$  de l'image sphérique

$$d\sigma^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

on sait, résultat classique, que l'on a

$$e = \frac{G \partial^2}{EG - F^2}, \quad f = \frac{-F \partial \partial''}{EG - F^2}, \quad g = \frac{E \partial''^2}{EG - F^2}, \\ eg - f^2 = \frac{\partial^2 \partial''^2}{EG - F^2}.$$

Donc  $eg - f^2$ , ni  $f$ , ni  $eg$  ne changent <sup>(1)</sup>, on a

$$\bar{e} = e \lambda^2, \quad \bar{f} = f, \quad \bar{g} = \frac{g}{\lambda^2}; \\ (22) \quad d\sigma^2 = \frac{k-v}{k+u} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{u+v} du^2 + 2 \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}}{du dv} du dv + \frac{k+u}{k-v} \frac{dv^2}{dv^2} \\ = \frac{\frac{\partial \varphi'}{\partial u'}}{\frac{u'+v'}{u'+v'}} du'^2 + 2 \frac{\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial u' \partial v'}}{du' dv'} du' dv' + \frac{\frac{\partial \varphi'}{\partial v'}}{\frac{v'+u'}{v'+u'}} \frac{dv'^2}{dv'^2}.$$

La seconde expression a pour but de reproduire la forme (16) de  $d\sigma^2$ , on voit aisément que l'on peut prendre

$$(23) \quad \begin{cases} \varphi'(u', v') = \varphi(u, v), \\ u' = \frac{k+u}{k-v}, & v' = \frac{k+v}{k-u}, \\ u = \frac{k+u'}{k-v'}, & v = \frac{k+v'}{k+u'}. \end{cases}$$

---

(1) L'interprétation de ce fait, qui est vrai encore pour *une base simple*, est évidente, mais semble n'être pas suffisamment mise en relief dans l'enseignement de cette

et par suite

$$\varphi'(u', v') \equiv \varphi\left(\frac{ku'}{k-u'}, \frac{kv'}{k+v'}\right).$$

Donc, de toute solution  $\varphi$  de l'équation d'ordre 4 obtenue précédemment, on déduit la solution nouvelle

$$(24) \quad \varphi\left(\frac{ku}{k-u}, \frac{kv}{k+v}\right),$$

correspondant à la déformation continue; la fonction  $\varphi(u, v)$  se retrouve si la constante  $k$  devient infinie. On a ensuite

$$X(u, v) \equiv \varphi(u, v) + \frac{1}{4} L(u + v),$$

$$X'(u', v') \equiv \varphi'(u', v') + \frac{1}{4} L(u' + v'),$$

$$\equiv \varphi(u, v) + \frac{1}{4} L(u + v) - \frac{1}{4} L(k + u) - \frac{1}{4} L(k - v) + \frac{1}{2} Lk$$

ou finalement

$$(25) \quad X'(u', v') = X(u, v) - \frac{1}{4} L\left(\frac{k+u}{k}\right) - \frac{1}{4} L\left(\frac{k-v}{k}\right) \\ \equiv X\left(\frac{ku'}{k-u'}, \frac{kv'}{k+v'}\right) - \frac{1}{4} L\left(\frac{k}{k-u'}\right) - \frac{1}{4} L\left(\frac{k}{k+v'}\right),$$

si donc  $X(u, v)$  est une solution de l'équation du quatrième ordre en  $X$ ,

$$X\left(\frac{ku}{k-u}, \frac{kv}{k+v}\right) - \frac{1}{4} L\frac{k}{k-u} - \frac{1}{4} L\frac{k}{k+v}$$

est une nouvelle solution

Ceci prouve que si l'on a obtenu trois intégrales  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  d'une équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M \theta$$

liées par la relation

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = U + V,$$

$U$  étant fonction de  $u$  et  $V$  de  $v$ , la surface  $S$  correspondante peut se déformer en une surface  $S_k$  où le réseau  $(u, v)$  est encore conjugué;

---

théorie : deux portions homologues de surfaces applicables ont des représentations sphériques *équivalentes*; les images sphériques de la base (simple ou principale) conservent leur angle.



représentons par  $\theta_{1k}$ ,  $\theta_{2k}$ ,  $\theta_{3k}$  les solutions correspondant à  $S_k$ , on a

$$U_k = \frac{k'U}{k+U} + k'', \quad V_k = \frac{k'V}{k-V} - k'',$$

où  $k$  est le paramètre de déformation,  $k'$  et  $k''$  deux constantes arbitraires, qui peuvent être regardées comme fonctions arbitraires de  $k$ ; en effet, la constante  $k''$  peut être supprimée; ensuite passer de  $\frac{k'U}{k+U}$ ,  $\frac{k'V}{k-V}$  à  $\frac{kU}{k+U}$ ,  $\frac{kV}{k-V}$  est possible par une homothétie sur la surface  $B_k$ : il est clair, en effet, qu'à une surface  $S_k$  correspondent  $\infty^1$  surfaces  $B_k$  déterminées à une homothétie près; les fonctions  $U_k$  et  $V_k$  qui correspondent à une même substitution homographique sur  $U$  et  $-V$  ne donnent pas un résultat plus général que  $\frac{kU}{k+U}$ ,  $\frac{kV}{k-V}$ , mais dans les applications il importe de tenir compte de ces résultats.

Ce qui précède permet d'expliquer, en particulier, pourquoi en remplaçant  $U$  et  $V$  par  $U+h$  et  $V-h$  et les expressions  $\frac{kU}{k+U}$ ,  $\frac{kV}{k-V}$  par  $\frac{k(U+h)}{k+U+h}$  et  $\frac{k(V-h)}{k-V+h}$  on n'obtient rien de nouveau; en effet, on peut écrire

$$\frac{kU}{k+U} + \frac{kV}{k-V} = \frac{-k^2}{k+U} + \frac{k^2}{k-V},$$

$$\frac{k(U+h)}{k+U+h} + \frac{k(V-h)}{k-V+h} = \frac{-k^2}{k+h+U} + \frac{k^2}{k+h-V},$$

on voit que remplacer la première expression par la seconde revient à faire sur le paramètre de déformation le changement de variable  $k_1 = k+h$  et sur  $B_k$  une homothétie; ceci explique pourquoi nous nous bornons à la formule (24) avec une seule constante  $k$  et non

$$\varphi\left(\frac{au+b}{cu+d}, \frac{av-b}{-cv+d}\right).$$

3. *Transformations asymptotiques spéciales des surfaces (B) qui accompagnent une surface (S) au cours de sa déformation.* — Je rappelle rapidement la théorie des transformations asymptotiques imaginée par Bianchi (1).

---

(1) BIANCHI, *Lezioni*, t. II, p. 40-89; *Rendiconti di Palermo*, 1908, *Annali di Mat.*, 8<sup>e</sup> serie, t. X, 1890, p. 3.

Soient  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  trois solutions, linéairement indépendantes, d'une équation de Moutard

$$(M) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M(u, v) \theta.$$

les formules de Lelievre leur font correspondre une surface  $(\beta)$  rapportée à ses asymptotiques; la transformation de Moutard effectuée à l'aide d'une quatrième solution  $R$  transforme  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  en trois intégrales  $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$  de l'équation

$$(M') \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = R \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial u \partial v} \theta'.$$

auxquelles correspond une nouvelle surface  $(\beta')$  rapportée à ses asymptotiques;  $(\beta)$  et  $(\beta')$  sont les deux nappes de la surface focale d'une congruence, appelée par Bianchi congruence  $W$ , telle que les foyers d'un *même* rayon soient les points de mêmes  $(u, v)$ , c'est cette correspondance qu'il a nommée transformation asymptotique, je n'insiste pas sur toutes ces propriétés bien connues.

Supposons maintenant que  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  soient trois solutions quadratiques; en général il n'en est pas de même de  $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ ; Bianchi a montré (*Lezioni*, t. II, p. 79) qu'il existe  $\infty^2$  intégrales  $R$ , que nous nommerons *transformatrices*, telles que l'on ait

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \theta'^2_1 + \theta'^2_2 + \theta'^2_3 = U(u) + V(v),$$

les surfaces  $(\beta)$  et  $(\beta')$  sont alors des surfaces  $(B)$  pour lesquelles, aux points homologues, la courbure totale est la même.

J'indique comment se calculent ces solutions  $R$  :

Écrivons l'élément linéaire de la représentation sphérique de  $(B)$  sous la forme

$$d\sigma^2 = e du^2 + 2\sqrt{eg} \cos 2\omega du dv + g dv^2$$

et posons

$$(26) \quad \tan \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{U-h}{V+h}},$$

à toute solution  $\psi$  du système complètement intégrable

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{e}{g}} \frac{1}{2} \left\{ \sin 2\omega + \sqrt{e} \cot \frac{\sigma}{2} \sin(\psi + \omega) \right\}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v} - \sqrt{\frac{g}{e}} \frac{1}{2} \left\{ \sin 2\omega - \sqrt{g} \tan \frac{\sigma}{2} \sin(\psi - \omega) \right\}, \end{cases}$$

équivalent à une équation de Riccati, correspond la solution R

$$(28) \quad \log R = \int \left[ \frac{\cot^2 \frac{\sigma}{2}}{2} \frac{1}{1 + \sqrt{e}} + \sqrt{e} \cot \frac{\sigma}{2} \cos(\psi + \omega) \right] du \\ + \left[ \frac{\tan^2 \frac{\sigma}{2}}{2} \frac{1}{1 + \sqrt{g}} + \sqrt{g} \tan \frac{\sigma}{2} \cos(\psi - \omega) \right] dv.$$

Rappelons encore une élégante proposition due à Bianchi : Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux solutions transformatrices correspondant à deux intégrales  $\psi_1$  et  $\psi_2$  du système (27),  $(B'_1)$  et  $(B'_2)$  les surfaces transformées de  $(B)$ ,  $(M'_1)$  et  $(M'_2)$  les équations de Moutard transformées de  $(M)$ ; si l'on transforme  $(B'_1)$  et  $(M'_1)$  à l'aide de la transformée de  $R_2$  par  $R_1$  ou  $(B'_2)$  et  $(M'_2)$  à l'aide de la transformée de  $R_1$  par  $R_2$ , on obtient la même surface  $(\mathcal{B})$  et la même équation  $(\mathcal{M})$ ; de plus  $(B)$ ,  $(B'_1)$ ,  $(B'_2)$ ,  $(\mathcal{B})$  ont même courbure totale aux points homologues, c'est cette proposition que Bianchi nomme *Théorème spécial de permutabilité* pour les surfaces  $(B)$ ;  $(B'_1)$  et  $(B'_2)$  étant obtenues,  $(\mathcal{B})$  s'obtient par de simples quadratures.

Je donne maintenant quelques résultats nouveaux concernant la déformation des surfaces  $(S)$  et la transformation des surfaces  $(B)$  correspondantes.

Considérons deux surfaces  $(S)$  et  $(B)$  correspondant à trois intégrales quadratiques  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  de l'équation

$$(29) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} \theta,$$

telles que

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = u + v,$$

soient  $(S_h)$  une déformée de  $(S)$  sur le réseau conjugué  $(u, v)$  comme

base,  $(B_k)$  la surface auxiliaire de Bianchi correspondante; ces surfaces sont relatives à trois intégrales quadratiques  $\theta_{1k}, \theta_{2k}, \theta_{3k}$

$$\theta_{1k}^2 + \theta_{2k}^2 + \theta_{3k}^2 = \frac{ku}{k+u} + \frac{kv}{k-v}$$

d'une équation de Moutard qui, nous allons le voir, n'est autre que l'équation (29).

Le changement de variables (23) fait écrire

$$\theta_{1k}^2 + \theta_{2k}^2 + \theta_{3k}^2 = u' + v'.$$

de sorte que  $\theta_{1k}(u', v'), \theta_{2k}(u', v'), \theta_{3k}(u', v')$  sont solutions de l'équation

$$(30) \quad \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial u' \partial v'} = \frac{\partial^2 X'}{\partial u' \partial v'} \theta_k.$$

où  $X'$  désigne la solution de l'équation (10) définie par l'équation (25) et à laquelle, d'après ce que nous avons vu plus haut, ne correspond qu'une seule surface  $(B_k)$  dont la courbure totale est  $-\frac{1}{(u'+v')^2}$ , l'identité

$$\frac{\partial^2 X'}{\partial u' \partial v'} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{du}{du'} \frac{dv}{dv'}$$

montre que si l'on revient aux variables primitives  $\theta_{1k}(u, v), \theta_{2k}(u, v), \theta_{3k}(u, v)$  sont trois intégrales de l'équation (29).

*Donc quand (S) se déforme, avec conservation du réseau conjugué  $(u, v)$ , l'équation tangentielle de Laplace, ramenée à la forme de Moutard, ne change pas* (1).

Étudions maintenant les transformées asymptotiques spéciales des surfaces  $(B_k)$ , examinons les équations (26), (27), (28).

Pour la surface  $(B)$ , on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}' = -\frac{1}{u+v},$$

$$\operatorname{tang} \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{u-h}{v+h}} \quad (h = \text{const. arbitraire});$$

---

(1) Des lectures, faites depuis la rédaction de ce travail, m'ont appris que M. Masloff a obtenu le même résultat par une méthode différente (*Recueil de la Société mathématique de Moscou*, t. 33).

pour la surface  $(B_k)$ , en posant

$$\frac{km}{k+m} = \lambda,$$

on a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_k &= -\frac{V'}{U+V} = -\frac{k-u}{k+v} \frac{1}{u+v}, \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_k &= -\frac{U'}{U+V} = -\frac{k-v}{k+u} \frac{1}{u+v}, \\ \tan \frac{\sigma}{2} &= \sqrt{\frac{1-m}{1+m}} = \sqrt{\frac{k-v}{k+u}} \sqrt{\frac{u-\lambda}{v+\lambda}}, \end{aligned}$$

en portant ces valeurs de  $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_k$ ,  $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_k$  et  $\tan \frac{\sigma}{2}$  dans les équations (28) et (27) et en remarquant que l'angle  $\omega$  ne dépend pas du paramètre de déformation, on voit que les solutions transformatrices R sont les *mêmes* pour  $(B)$  et  $(B_k)$ .

Considérons une surface  $(S')$  correspondant à la transformée  $(B')$  de  $(B)$  par une solution R déterminée, et  $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$  les transformées de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = g_1'^2 + g_2'^2 + g_3'^2 = u + v,$$

si  $(S')$  se déforme en  $(S'_k)$ ,  $(B')$  se transforme en  $(B'_k)$  et  $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ , en  $\theta'_{1k}, \theta'_{2k}, \theta'_{3k}$

$$g_{1k}^2 + g_{2k}^2 + g_{3k}^2 = g_{1k}'^2 + g_{2k}'^2 + g_{3k}'^2 = \frac{ku}{k+u} + \frac{kv}{k+v}.$$

ou en faisant le changement de variables défini par les équations (23) :

$$g_{1k}^2 + g_{2k}^2 + g_{3k}^2 = g_{1k}'^2 + g_{2k}'^2 + g_{3k}'^2 = u' + v',$$

$\theta'_{1k}, \theta'_{2k}, \theta'_{3k}$  sont trois intégrales de l'équation de Moutard

$$(31) \quad \frac{\partial^2 g'_k}{\partial u' \partial v'} = R \frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} g'_k, \quad \left[ R \left( \frac{ku'}{k+u'}, \frac{kv'}{k+v'} \right) \right]$$

transformée de l'équation (30) par R, cette équation admet aussi les trois intégrales quadratiques  $\theta''_{1k}, \theta''_{2k}, \theta''_{3k}$  transformées  $\theta_{1k}, \theta_{2k}, \theta_{3k}$  de sorte que l'on a

$$g_{1k}^2 + g_{2k}^2 + g_{3k}^2 = g_{1k}''^2 + g_{2k}''^2 + g_{3k}''^2 = u' + v';$$

il résulte des considérations faites au n° 1 du paragraphe actuel que l'on peut passer du groupe  $(\theta'_{1l}, \theta'_{2k}, \theta'_{3h})$  au groupe  $(\theta''_{1l}, \theta''_{2k}, \theta''_{3h})$  par une transformation orthogonale, équivalente à un déplacement de  $(B'_k)$ , on peut donc supposer

$$\theta_{1h} = \theta''_{1h}, \quad \theta'_{2l} = \theta''_{2k}, \quad \theta'_{3h} = \theta''_{3h};$$

on voit donc que  $B'_k$  est transformée asymptotique de  $B_k$ , la solution transformatrice  $R$  étant indépendante du paramètre  $k$ .

4. *Deuxième cas : l'une des fonctions U ou V se réduit à une constante.* — Supposons pour fixer les idées que ce soit  $V$ ; nous pouvons sans restriction supposer  $U = u$ ,  $V = 0$ , les équations (3), (4), (5), (6) sont remplacées par

$$\begin{aligned} \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 &= u, \\ S \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} &= \frac{1}{2}, \quad S \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = 0, \quad S \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = -\frac{1}{4}Mu. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, pour les coefficients de l'élément linéaire de  $S'$ ,

$$\frac{\partial E'}{\partial v} = M, \quad \frac{\partial G'}{\partial u} = 0,$$

$G'$  est donc une fonction de  $v$  seule, nous pouvons sans restreindre supposer  $G' = 1$ , d'où

$$(32) \quad ds'^2 = E' du^2 - 2u \frac{\partial E'}{\partial v} du dv + dv^2.$$

Comme plus haut nous obtenons l'équation à laquelle doit satisfaire  $E'$  en écrivant que  $\varphi = \frac{1}{2}u$  vérifie l'équation (10) où les paramètres différentiels et la courbure totale  $K$  sont relatifs à l'élément (32); on obtient ainsi une équation du *troisième* ordre, au lieu du quatrième comme dans le premier cas; on obtient  $d\sigma^2$  et  $d\Sigma^2$  comme plus haut

$$d\sigma^2 = \left( \frac{E'}{u} - \frac{1}{4u^2} \right) du^2 - 2 \frac{\partial E'}{\partial v} du dv + \frac{dv^2}{u}$$

et

$$d\Sigma^2 = \left( E'u - \frac{1}{4} \right) du^2 + 2 \frac{\partial E'}{\partial v} u^2 du dv + u dv^2.$$

en posant

$$e = \frac{E'}{u} - \frac{1}{4u^2}, \quad \mathcal{E} = u^2 e,$$

il vient

$$(33) \quad d\sigma^2 = e du^2 + 2u \frac{\partial e}{\partial v} du dv + \frac{dv^2}{u},$$

$$(34) \quad d\Sigma^2 = \mathcal{E} du^2 + 2u \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} du dv + u dv^2;$$

pour achever la détermination des surfaces S correspondantes il faut maintenant intégrer le système (19) où les symboles de Christoffel sont calculés à partir de (23).

Donc, la détermination des surfaces (B) dont une famille de lignes asymptotiques est formée de courbes à torsion constante dépend de trois fonctions arbitraires irréductibles d'une variable; les surfaces (S) dont une famille du réseau conjugué permanent est formé de géodésiques dépendent de cinq fonctions irréductibles d'une variable.

5. Troisième cas : les fonctions U et V se réduisent toutes deux à une constante. — Je ne cite que pour mémoire ce cas bien connu; les surfaces (B) sont à courbure totale constante et les surfaces (S) sont les surfaces de Voss.

Sans restreindre nous pouvons supposer  $U = V = \frac{1}{2}$ , on a

$$\begin{aligned} g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 &= 1, \\ S g_1 \frac{\partial g_1}{\partial u} = S g_1 \frac{\partial g_1}{\partial v} &= 0, \quad S \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} = -M, \\ \frac{\partial E'}{\partial v} = \frac{\partial G'}{\partial u} &= 0, \end{aligned}$$

$E'$  est une fonction de  $u$  seul et  $G'$  une fonction de  $v$  seul, nous pouvons sans restriction supposer  $E' = G' = 1$  et en posant  $M = \cos 2\omega$ , on a

$$(35) \quad ds'^2 = d\sigma^2 = du^2 - 2 \cos 2\omega du dv + dv^2,$$

$$(36) \quad d\Sigma^2 = du^2 + 2 \cos 2\omega du dv + dv^2;$$

en écrivant que l'élément linéaire (24) convient à une surface de

courbure totale  $+1$  on a le résultat classique

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega.$$

### III. Surfaces B applicables sur des surfaces de révolution.

1. *Surfaces de la classe (C).* — Aucune famille de lignes asymptotiques n'est formée de courbes à torsion constante; si une telle surface est applicable sur une surface de révolution les courbes  $u + v = \text{const.}$  recouvrent les parallèles et, par conséquent, les coefficients de l'élément linéaire ne dépendent que de l'argument  $x = u + v$ ; la fonction  $\varphi$  du paragraphe précédent est fonction de  $x$  seul et l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{d^2 \varphi}{dx^2},$$

on est ainsi amené à poser

$$H = x \frac{d\varphi}{dx},$$

de sorte que l'élément linéaire (17) s'écrit

$$(17') \quad d\Sigma^2 = H(du^2 + dv^2) + 2(xH' - H) du dv.$$

La fonction  $H$  est déterminée par l'équation différentielle du troisième ordre obtenue en égalant à  $-\frac{1}{x^2}$  la courbure totale de l'élément linéaire (17')

$$(1) \quad x^2 H H''' (2H - xH') + xH'' (x^2 H' H'' - xHH'' - xH'^2) + HH'^2 + H'^2 (2H - xH'^2) = 0.$$

L'ordre s'abaisse d'une unité en faisant le changement de variable

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dH} = t;$$

en prenant pour fonction inconnue la fonction  $t(H)$ , l'équation (1) devient

$$(2) \quad \{3(t' + t^2)^2 - t(t'' + 3tt' + t^3)\} \\ \times (2Ht - 1) - (t' + t^2) \{-t' - 2t^2 + H(t' + t^2)\} \\ Ht^3 + t(2Ht - 1)^2 = 0.$$



on aperçoit la solution  $t = \frac{1}{2H}$  inacceptable, car elle donne pour les coefficients de (17') des valeurs toutes égales entre elles; ceci posé, faisons le nouveau changement de variable

$$\frac{1}{t} = 2H + \zeta,$$

l'équation (2) devient

$$(3) \quad H(2\zeta\zeta'' - \zeta'^2) + \zeta^2(\zeta'' - 1) = \alpha,$$

la surface est rapportée à ses asymptotiques; les coefficients de sa seconde forme fondamentale sont donc

$$\partial = 0, \quad \partial' = \sqrt{\frac{H'(2H + xH')}{x}}, \quad \partial'' = 0,$$

ils ne dépendent pas de  $x$ , et, par suite, les surfaces obtenues sont hélicoïdales ou révolutives; pour décider entre ces deux éventualités, formons l'équation des lignes de courbure

$$du^2 - dv^2 = 0,$$

qui montre que les courbes  $x = u + v = \text{const.}$  sont lignes de courbure : on a donc des *surfaces de révolution*.

Une solution particulière évidente de l'équation (3) est

$$\zeta'' = 1, \quad \zeta = \left(\frac{H + C}{2}\right)^2,$$

où  $C$  est une constante arbitraire; revenons aux variables primitives

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dH} = \frac{2}{(H + C + 2)^2 - 4(C + 1)},$$

en intégrant et en posant  $p = \sqrt{c + 1}$ ,

$$H = \frac{x^p(1+p)^2 - x^{-p}(1-p)^2}{x^{-p} - x^p}.$$

2. *Surfaces de la classe (B).* — Les asymptotiques  $u = \text{const.}$  sont des courbes à torsion constante; dans l'application sur une surface de révolution, elles recouvrent les parallèles; elles ont donc leur courbure constante, ce sont des hélices; d'autre part, les coefficients de

l'élément linéaire (23) du paragraphe précédent ne doivent dépendre que de  $u$ , donc,  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} = 0$ ; on a des surfaces minima, les coefficients de la seconde forme fondamentale

$$\delta = 0, \quad \delta' = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{u}}, \quad \delta'' = 0$$

ne dépendent aussi que de  $u$ , les surfaces cherchées sont hélicoïdales; *ce sont les deux hélicoïdes minima*. On peut vérifier ce résultat en formant l'équation différentielle en  $\mathcal{E}$  obtenue en écrivant que la courbure totale de la surface est  $-\frac{1}{u^2}$ ,

$$4\mathcal{E}^2 - \mathcal{E} - u \frac{d\mathcal{E}}{du} = 0,$$

dont les solutions s'obtiennent aisément :

$$1^{\circ} \quad \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}(4\mathcal{E}-1)} = \frac{du}{u}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{4u-1},$$

on peut, sans restreindre, supposer  $\lambda = 4$ , et le changement de variable  $u = \text{ch}^2 u_1$  donne l'élément connu de l'hélicoïde minimum réel

$$d\Sigma^2 = \text{ch}^2 u_1 (du_1^2 + dv^2).$$

$$2^{\circ} \quad \mathcal{E} = \frac{1}{4},$$

le changement de variable  $u = u_1^2$  donne immédiatement l'élément linéaire de l'hélicoïde minimum imaginaire

$$d\Sigma^2 = u_1^2 (du_1^2 + dv^2).$$

Les surfaces (S) correspondantes sont : pour l'hélicoïde réel, les surfaces moulures ordinaires; pour l'hélicoïde imaginaire, les surfaces moulures signalées par M. Gambier dans son Mémoire *Sur quelques cas méconnus de la déformation des surfaces* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1929, p. 224-239).

#### IV. — Surface de la seconde classe de Bianchi.

1<sup>o</sup> Considérons deux surfaces applicables (S) et (S<sub>1</sub>) rapportées à leur réseau conjugué commun  $u, v$  pour lequel les courbes  $v = \text{const.}$

sont des géodésiques tandis que les courbes  $u = \text{const.}$  ne possèdent pas cette propriété, l'élément linéaire de (S) étant

$$(1) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

On a la condition classique sous l'une ou l'autre forme

$$(2) \quad \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{F}{\sqrt{E}} \right) \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

Les coefficients  $\partial, \partial', \partial'', \partial_1, \delta_1', \delta_1''$  des secondes formes fondamentales de (S) et (S<sub>1</sub>) satisfont aux équations

$$\partial' = 0, \quad \delta_1' = 0$$

et aux équations de Gauss et Codazzi

$$(4) \quad \partial \partial'' = H^2 K,$$

$$(5) \quad \frac{1}{\partial} \frac{\partial \partial}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$(6) \quad \frac{1}{\partial''} \frac{\partial \partial''}{\partial u} = - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial''} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

$$(4') \quad \partial_1 \delta_1'' = H^2 K,$$

$$(5') \quad \frac{1}{\partial_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$(5'') \quad \frac{1}{\delta_1''} \frac{\partial \delta_1''}{\partial u} = - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial_1}{\delta_1''} + \begin{Bmatrix} 13 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

où K est la courbure totale, avec

$$H^2 = EG - F^2;$$

pour abréger l'écriture, posons encore

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = A, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -B, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = -C, \quad \Omega = H^2 K.$$

les équations (5) et (5'), (4) et (4') montrent que l'on a

$$(7) \quad \partial = \partial_1 U, \quad \partial'' = \delta_1'' : U,$$

où U est une fonction de  $u$  seule; en portant dans (2) et (2') ces valeurs

de  $\partial$  et  $\partial''$ , puis retranchant membre à membre,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \log \mathfrak{L} &= B(1 - \mathfrak{U}^2) \partial_1 : \partial'_1, \\ \frac{\partial}{\partial u} \log \mathfrak{L} &= B(1 - \mathfrak{U}^2) \partial_1 : \partial'_1\end{aligned}$$

ou

$$(8) \quad \mathfrak{U}' : \mathfrak{L}(1 - \mathfrak{U}^2) = B \partial_1 : \partial'_1,$$

nous supposons  $\mathfrak{U} \neq \pm 1$ , ce qui revient à supposer que (S) et (S<sub>1</sub>) ne sont ni égales ni symétriques, cas banal que nous écartons; de la comparaison de (7) et (8), il résulte

$$(9) \quad \mathfrak{U}\mathfrak{U}' : (1 - \mathfrak{U}^2) = B \partial : \partial'',$$

ce qui montre que les expressions  $B\partial : \partial''$  et  $B\partial_1 : \partial'_1$  sont des fonctions de la seule variable  $u$ , ceci conduit à poser

$$(10) \quad \partial'' : B\partial = \mathfrak{U},$$

cette équation, jointe à l'équation de Gauss

$$\partial\partial'' = \Omega,$$

donne

$$(11) \quad \partial'^2 = B\Omega\mathfrak{U}, \quad \partial^2 = \Omega : B\mathfrak{U} \quad (1),$$

les racines carrées donnant  $\partial$  et  $\partial''$  doivent être prises de manière que l'on ait  $\partial\partial'' = \Omega$ ; en portant ces valeurs dans les équations (5) et (6), on obtient

$$(12) \quad {}_2A = \frac{\partial}{\partial v} \log(\Omega : B),$$

$$(13) \quad {}_3 : \mathfrak{U} + {}_2C = \frac{\partial}{\partial u} \log(\Omega B) + \mathfrak{U}' : \mathfrak{U},$$

(12) donne une condition nécessaire pour l'élément linéaire, et

(13) montre que

$${}_2C = \frac{\partial}{\partial u} \log(\Omega B)$$

est aussi une fonction de  $u$  seul; on a donc la nouvelle condition

(1) Les lignes  $u = \text{const.}$  n'étant pas géodésiques  $B \neq 0$ .

nécessaire

$$(14) \quad 2 \frac{\partial C}{\partial v} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log(\Omega B) = 0.$$

Les conditions *nécessaires* (2), (12) et (14) sont *suffisantes*; en effet, si elles sont satisfaites, (13) devient une équation différentielle ordinaire en  $u$  qui s'intègre par *une* quadrature et livre  $u$  avec une constante arbitraire  $\lambda$ ; les équations (11) donnent  $\partial$  et  $\partial''$  qui, en vertu de (12) et (13), vérifient les équations de Codazzi et dépendent de  $\lambda$ ; on obtient donc  $\infty^1$  surfaces applicables sur le réseau conjugué  $(u, v)$  comme base et pour lequel, en vertu de (2), les courbes  $v = \text{const.}$  sont des géodésiques.

Observons que, pour établir le système d'équation (2), (12), (14), il a suffi de supposer l'existence de deux surfaces applicables  $(S)$  et  $(S_1)$  de l'espèce en jeu, il en résulte que : *si l'on a un couple  $(S, S_1)$  de surfaces applicables dont le réseau conjugué comprend une famille de lignes géodésiques, il existe une déformation continue, faisant passer de  $(S)$  à  $(S_1)$  avec conservation de ce réseau conjugué au cours de la déformation.*

Voyons maintenant comment les coefficients dépendent du paramètre de déformation; nous supposons donc (2), (12) et (14) satisfaites; soit  $u$  une solution particulière de (13) : les équations (11) lui font correspondre une surface  $(S)$ , l'équation (13) peut s'écrire

$$\frac{\bar{u}'}{\bar{u}} - \frac{2}{\bar{u}} = \frac{u'}{u} - \frac{2}{u},$$

où  $\bar{u}$  est la fonction inconnue; pour intégrer il suffit de faire le changement de fonction

$$\bar{u} = \frac{\bar{U}_1}{U_1}, \quad u = \frac{U_1}{U_1'}.$$

En négligeant le facteur de proportionnalité introduit par le changement de fonction que nous venons de faire, on obtient de suite

$$\bar{U}_1^2 = U_1^2 + \lambda,$$

d'où

$$\partial'^2 = B\Omega \frac{U_1^2 + \lambda}{U_1 U_1'}, \quad \partial^2 = \frac{\Omega}{B} \frac{U_1 U_1'}{U_1^2 + \lambda},$$

on voit que  $(S)$  correspond à  $\lambda = 0$ .

*Étude du système* (2), (12), (14). — Nous écrivons

$$E = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

nous n'avons plus que deux inconnues  $X$  et  $G$  que déterminent les équations (12) et (14) qui s'écrivent

$$(12') \quad \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\Omega}{B} = \frac{2G \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u}}{\frac{\partial X}{\partial u} \left[ G - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2 \right]},$$

$$(13') \quad \frac{\partial}{\partial u} \log(\Omega B) - \frac{U_1'}{U_1} - \frac{U_1'}{U_1} = \frac{\frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}}{G - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2},$$

on peut remplacer (13') par une intégrale première évidente

$$\frac{B\Omega}{U_1 U_1} V = G - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2,$$

où  $V$  désigne une fonction de  $v$ ; désormais nous écrirons  $U$  au lieu de  $U_1$ , aucune confusion n'étant possible avec la fonction  $U$  du début de ce paragraphe. La forme des équations précédentes se simplifie encore quelque peu si l'on remplace la fonction inconnue  $G$  par la fonction  $Z$  définie par l'équation

$$G = Z \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2,$$

nous aboutissons ainsi au système définitif ne comportant que les deux inconnues  $X$  et  $Z$  et deux équations

$$(I) \quad (Z - 1) \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\Omega}{B} - \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0,$$

$$(II) \quad \frac{B\Omega}{U^2} V - (Z - 1) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2 = 0,$$

à toute solution  $(X, Z)$  de ce système correspond une famille de surfaces applicables de la seconde classe; l'élément linéaire de ces surfaces est

$$(15) \quad ds^2 = dX^2 + Z \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2 dv^2.$$

les coefficients de la seconde forme fondamentale sont, comme nous l'avons vu,

$$\delta_i^2 = \frac{B}{\Omega} \frac{U U'}{U^2 + \lambda}, \quad \delta_i' = 0, \quad \delta_i'^2 = B \Omega \frac{U^2 + \lambda}{U U'}.$$

où  $\lambda$  est le paramètre de déformation; si l'on veut donner explicitement les équations de la surface, il faut intégrer une équation de Riccati.

2. *Représentation sphérique.* — Les coefficients de l'élément linéaire de la représentation sphérique

$$(17) \quad d\sigma^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

se calculent par les formules classiques

$$e = \frac{G}{H^2} \delta^2, \quad f = -\frac{F}{H^2} \Omega, \quad g = \frac{E}{H^2} \delta'^2,$$

on obtient

$$(18) \quad e = \frac{Z}{B^2} \frac{U^2 U'^2}{V(U^2 + \lambda)} \left( \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2, \quad f = -\frac{U U'}{B V} \frac{\frac{\partial X}{\partial u}}{\frac{\partial X}{\partial v}}, \quad g = \frac{U^2 + \lambda}{V},$$

on sait que les lignes coordonnées étant conjuguées sur (S) les cosinus directeurs  $e, e', e''$  de la normale satisfont à une équation de Laplace

$$(19) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} + \gamma g = 0.$$

dont les coefficients ne dépendent que de  $e, f, g$ , et de leurs dérivées premières et sont déterminées par les équations

$$(20) \quad f = \gamma, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial v} + \alpha e + \beta f = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} + \alpha f + \beta g = 0.$$

desquelles on tire

$$\alpha = -\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}', \quad \beta = -\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}';$$

le réseau  $(u, v)$  étant conjugué, on a

$$(21) \quad S \frac{\partial e}{\partial v} \frac{\partial e}{\partial u} = 0,$$

$$(22) \quad S e \frac{\partial e}{\partial v} = 0;$$

d'autre part, les courbes  $c = \text{const.}$  sont des géodésiques : les vecteurs

$$\left( \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right), \quad \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad (c, c', c'')$$

sont coplanaires, de sorte que de (21) et (22) il résulte

$$(23) \quad S \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial c}{\partial v} = 0$$

dérivons (21) en tenant compte de (23), il vient

$$(24) \quad S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 c}{\partial u \partial v} = 0,$$

en remplaçant les dérivés  $\frac{\partial^2 c}{\partial u \partial v}$ ,  $\frac{\partial^2 c'}{\partial u \partial v}$ ,  $\frac{\partial^2 c''}{\partial u \partial v}$  par leurs valeurs tirées de (19) on obtient

$$\alpha S \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = 0;$$

or

$$S \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} \neq 0;$$

donc

$$\alpha = - \frac{\{12\}'}{\{1\}} = 0$$

et

$$\beta = - \frac{\{12\}'}{\{2\}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial v} = - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial g} = \frac{-U U'}{U^2 + \lambda},$$

de sorte que l'équation (19) s'écrit

$$(25) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{U U'}{U^2 + \lambda} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{U U'}{B V} \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial u}}{\frac{\partial X}{\partial v}} g = 0,$$

c'est une équation à invariants égaux; donc l'image sphérique du réseau conjugué envisagé sur (S) est l'image sphérique des asymptotiques d'une certaine surface (B); la torsion des asymptotiques qui passent par un point de cette surface est

$$\frac{1}{T} = U^2 + \lambda,$$



on a retrouvé la surface auxiliaire de Bianchi dont les lignes asymptotiques  $u = \text{const.}$  sont à torsion constante.

3. *Étude d'une solution particulière.* — Je me propose de rechercher les solutions pour lesquelles les coefficients E, F, G ne dépendent que de  $x = u + v$ , de sorte que, pour toute surface (S) représentative, si l'on fait correspondre le point  $(u + h, v - h)$  au point  $(u, v)$ , où  $h$  est une constante quelconque, la correspondance établie est une auto-application de la surface. Posons  $E = \xi^2$ ,  $\xi$  ne dépendant que de  $u + v$ , l'équation (2) devient

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{du} \frac{F}{\xi}$$

et donne

$$F = \xi^2 + 2C\xi, \quad (C = \text{const.});$$

comme plus haut posons

$$G = Z(\xi + 2C)^2,$$

Z étant une fonction de  $x$ , l'élément linéaire s'écrit

$$(26) \quad ds^2 = \xi^2 du^2 + 2\xi(\xi + 2C) du dv + Z(\xi + 2C)^2 dv^2.$$

Voyons maintenant ce que devient le système (I), (II), nous remplaçons l'une de ces équations par la combinaison obtenue en éliminant  $\Omega$  entre elles, on obtient ainsi

$$(I') \quad \frac{2Z'(\xi + C)}{\xi(K - 1)} + \frac{2\xi'}{\xi + 2C} - \frac{2B}{B'} = \frac{V'}{V},$$

$$(II') \quad \frac{(Z - 1)(\xi + 2C)^2}{B\Omega} = \frac{V}{C\Omega};$$

le premier membre de (I') est une fonction de la variable  $x = u + v$  seule pendant que le second membre est une fonction de  $v$  seule, on en conclut que ces deux membres sont égaux à une même constante  $a$

$$\frac{V'}{V} = a,$$

de même (II') montre que l'on a

$$\frac{V}{C\Omega} = f(u + v);$$

posons

$$\frac{1}{UU'} = M,$$

les dérivées du produit  $MV$  par rapport à  $u$  et par rapport à  $v$  doivent être égales, donc

$$\frac{M'}{M} = \frac{V'}{V} = a;$$

on a deux cas à considérer suivant que  $a$  est ou n'est pas nul.

*Premier cas :  $a = 0$ ,  $UU'$  et  $V$  sont constants, nous posons*

$$UU' = 2\alpha, \quad V = 2\beta, \quad \frac{\beta}{\alpha} = m,$$

et le système (I'), (II') se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires où  $\xi$  et  $Z$  sont les fonctions inconnues :

$$\frac{2Z'(\xi + c)}{\xi(Z-1)} + \frac{2\xi'}{\xi + 2c} - 2\frac{B'}{B} = 0,$$

$$\frac{(Z-1)(\xi + 2c)^2}{B\Omega} = m,$$

l'équation des asymptotiques des surfaces  $S$ , est

$$(28) \quad \frac{UU'}{U^2 + \gamma} du^2 + B dv^2 = 0;$$

d'après (27) on a

$$U^2 = \alpha u + \alpha_1,$$

$\alpha_1$  étant une nouvelle constante, de sorte que l'équation des asymptotiques s'écrit

$$(29) \quad \frac{2\alpha}{\alpha u + \alpha_1 + \gamma} du^2 + B dv^2 = 0.$$

Considérons deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  correspondant à deux valeurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  du paramètre  $\lambda$ , nous savons qu'elles sont applicables par les points de mêmes coordonnées  $(u, v)$ ; d'autre part, nous avons vu que faire correspondre sur  $(S_1)$  les points  $(u, v)$  et  $(u + h, v - h)$ , c'est réaliser une auto-application de cette surface et, par suite, mettre en correspondance les points  $(u + h, v - h)$  de  $(S_1)$  et  $(u, v)$  de  $(S_2)$ , c'est encore réaliser l'application de ces surfaces; or, si nous choi-

sissons  $h$  tel que

$$\lambda_1 - h = \lambda_2,$$

L'équation (29) montre que les asymptotiques se *conservent* dans cette dernière application de  $(S_1)$  sur  $(S_2)$ , donc ces surfaces sont *égales* : la déformation obtenue, dans le cas actuel, est une *auto-application avec réseau conjugué permanent dont une famille de courbes est formée de géodésiques*.

*Deuxième cas :  $a \neq 0$ .* — Nous pouvons, sans restreindre, supposer  $a = 1$ , on obtient

$$UU' = e^{-u}, \quad U^2 = -\frac{1}{2}e^{-u} + \frac{\alpha}{2}.$$

L'équation des asymptotiques est :

$$\frac{2e^{-u} du^2}{\alpha + 2\lambda - e^{-u}} + B dv^2 = 0;$$

en raisonnant comme dans le premier cas on voit que l'auto-application  $u \rightarrow u + h$ ,  $v \rightarrow v - h$  de  $S_1(\lambda_1)$  réalise l'égalité de cette surface et de  $S_2(\lambda_2)$  si  $h$  est choisie de manière à satisfaire à l'équation

$$\alpha + 2\lambda_1 = (\alpha + 2\lambda_2)e^{-h},$$

nous avons donc, encore, une auto-application avec réseau conjugué permanent.

#### V. — Réseau conjugué permanent dans l'auto-application de la développée d'une surface minima applicable sur une surface de révolution.

On sait que les développées des surfaces minima sont toutes applicables sur une *même* surface de révolution et de ce fait admettent des auto-applications ; je vais donner un exemple de réseau conjugué permanent relatif à ces auto-applications obtenu en supposant que la surface minima est applicable sur une surface de révolution. Considérons une surface minima  $(\Sigma)$  définie par les formules de Weierstrass :

$$x = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) \mathcal{F}(u) du + \frac{i}{2} \int (1 - u_1^2) \mathcal{F}_1(u_1) du_1,$$

$$y = \frac{i}{2} \int (1 + u^2) \mathcal{F}(u) du - \frac{1}{2} \int (1 + u_1^2) \mathcal{F}_1(u_1) du_1,$$

$$z = \int u \mathcal{F}(u) du + \int u_1 \mathcal{F}_1(u_1) du_1,$$

l'équation des lignes de courbure est

$$\mathcal{F}(u) du^2 - \mathcal{F}_1(u_1) du_1^2 = 0;$$

prenons, par exemple, la famille

$$(2) \quad \sqrt{\mathcal{F}(u)} du - \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)} du_1,$$

le rayon de courbure principal et l'élément linéaire de la nappe de développée correspondants sont :

$$R = -\frac{1}{2}(1 + uu_1)^2 \sqrt{\mathcal{F}(u)} \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)},$$

$$ds^2 = dR^2 - 2R \left[ \sqrt{\mathcal{F}(u)} du - \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)} du_1 \right]^2.$$

Ces résultats rappelés, prenons une seconde surface minima (S') obtenue en remplaçant dans les formules (1)  $\mathcal{F}(u)$  par  $\Phi(v)$  et  $\mathcal{F}_1(u_1)$  par  $\Phi_1(v_1)$ ; la correspondance  $u(v, v_1)$ ,  $u_1(v, v_1)$ , qui réalise l'application des nappes de développées correspondantes (S) et (S') de  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$ , est définie par les équations

$$(4) \quad \begin{cases} (1 + uu_1)^2 \sqrt{\mathcal{F}(u)} \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)} = (1 + vv_1)^2 \sqrt{\Phi(v)} \sqrt{\Phi_1(v_1)}, \\ \sqrt{\mathcal{F}(u)} du - \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)} du_1 = \sqrt{\Phi(v)} dv - \sqrt{\Phi_1(v_1)} dv_1. \end{cases}$$

Tout réseau de (S) défini par une équation de la forme

$$(5) \quad \alpha du^2 + \beta du_1^2,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux fonctions quelconques de  $u$  et  $u_1$ , est conjugué; pour qu'il conserve cette propriété dans l'application de (S) sur (S'), il faut et il suffit qu'en exprimant  $u$  et  $u_1$  en fonction de  $v$  et  $v_1$  la transformée de l'équation (5) soit privée de terme rectangle.

Ceci pose, je prends un exemple simple où  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$  sont une même surface applicable sur une surface de révolution :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= u^p, & \mathcal{F}_1(u_1) &= u_1^p, \\ \Phi(v) &= v^p, & \Phi_1(v_1) &= v_1^p, \end{aligned}$$

où  $p$  est un nombre quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable, les équations (4) deviennent

$$uu_1 = vv_1, \quad u^{\frac{p}{2}+1} - u_1^{\frac{p}{2}+1} = v^{\frac{p}{2}+1} - v_1^{\frac{p}{2}+1} + \lambda,$$

où  $\lambda$  désigne une constante arbitraire; en la faisant varier, on obtient  $\infty^1$  auto-applications. Des équations (6), on déduit

$$u^{\frac{p}{2}+1} - u_1^{\frac{p}{2}+1} \pm 2 i u^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}} u_1^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}} = v^{\frac{p}{2}+1} - v_1^{\frac{p}{2}+1} \pm 2 i v^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}} v_1^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}} + \lambda,$$

les signes  $\pm$  se correspondent dans les deux membres, de sorte que les courbes

$$(7) \quad u^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}} \pm i u_1^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}} = \text{const.}$$

se transforment quand on passe de S à S', en

$$(8) \quad v^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}} \pm i v_1^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}} = \text{const.}$$

Différentiées, les équations (7) entraînent

$$(9) \quad u^{\frac{p}{2}-1} du^2 + u_1^{\frac{p}{2}-1} du_1^2 = 0,$$

$$(10) \quad v^{\frac{p}{2}-1} dv^2 + v_1^{\frac{p}{2}-1} dv_1^2 = 0,$$

ces équations étant privées de terme rectangle mettent en évidence que *le réseau formé par les courbes (7) est conjugué permanent dans l'auto-application envisagée*; nous avons ainsi découvert pour le  $ds^2$  des développées des surfaces minima  $\infty^1$  bases principales, et chacune de ces bases correspond à une auto-application de la surface correspondante; on remarquera que si  $p$  est commensurable, on a des surfaces algébriques et une auto-application algébrique.

## VI. — Sur les équations de Laplace ponctuelles et tangentielles.

Considérons la surface développable (D) définie par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} x = a + a'v, \\ y = b + b'v, \\ z = c + c'v, \end{cases}$$

où  $a, b, c$ , coordonnées du point qui décrit l'arête de rebroussement, sont trois fonctions de  $u$  et  $a', b', c'$ , leurs dérivées; supposons que *l'arête de rebroussement est une courbe, non un point*, autrement dit, la

développable (D) n'est ni cône, ni cylindre; nous supposons également qu'elle n'est pas un plan.

Ceci posé, les courbes coordonnées peuvent être considérées comme formant un réseau conjugué; les coordonnées (1) vérifient l'équation de Laplace

$$(e) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

dont les *invariants* sont :

$$h = -1 : \varphi^2, \quad k = -2 : \varphi^2;$$

aucun d'eux n'est nul, et cependant la transformation de Laplace

$$(2) \quad \theta_1 = \theta - \varphi \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

conduit à une courbe : l'arête de rebroussement, l'équation (e) n'est pas le dernier élément de la suite de Laplace correspondante, la transformation (2) conduit à l'équation

$$(e_1) \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = 0$$

dont l'invariant  $h$  est nul; cette équation, privée de terme en  $\frac{\partial \theta_1}{\partial u}$ , est effectivement vérifiée par les coordonnées  $a(u)$ ,  $b(u)$ ,  $c(u)$  d'un point de l'arête de rebroussement.

Je vais montrer que ce fait est général lorsqu'on part d'une développable quelconque rapportée à ses génératrices et une famille de trajectoires arbitraires.

Considérons l'équation

$$(E_1) \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = 0,$$

où  $\varphi$  est une fonction *quelconque* de  $u$  et  $v$  et dont l'invariant  $h$  est manifestement nul; la substitution

$$(3) \quad \theta = \theta_1 + \varphi \frac{\partial \theta_1}{\partial u}$$

fait remonter de l'équation (E<sub>1</sub>) à l'équation (E) la précédant dans la

suite de Laplace correspondante

$$(E) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} & 1 + \frac{\partial \rho}{\partial u} & \rho \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} & \frac{\partial \rho}{\partial v} & \frac{\partial \rho}{\partial u} \end{vmatrix} = 0.$$

Soient  $a(u)$ ,  $b(u)$ ,  $c(u)$  trois fonctions quelconques de  $u$  : ce sont trois solutions particulières de  $(E_1)$ , la transformation (3) leur fait correspondre les trois solutions de  $(E)$

$$x = a + a'\rho, \quad y = b + b'\rho, \quad z = c + c'\rho,$$

équations de la développable la plus générale rapportée à ses génératrices  $u = \text{const.}$  et à un système de trajectoires quelconques  $v = \text{const.}$

Comme nous l'avons annoncé, l'invariant  $h$  de  $(E)$  n'est pas nul, la transformation de Laplace correspondante conduit : *au point de vue géométrique*, à l'arête de rebroussement ; *au point de vue analytique*, à une équation pour laquelle l'invariant  $h$  est nul. De sorte que  $(E_1)$  limite la suite de Laplace.

Il importe donc de remarquer une différence entre les opérations analytiques et les opérations géométriques de la transformation de Laplace : *En général cette transformation revient géométriquement à considérer sur une surface un réseau conjugué  $(u, v)$ , puis à prendre la seconde surface focale de la congruence des tangentes aux courbes  $u = \text{const.}$  ; soit  $\Sigma_1$  la surface obtenue ; sur  $\Sigma_1$  on prend de nouveau la congruence des tangentes aux courbes  $u = \text{const.}$ , d'où  $\Sigma_2$ , . . . , et ainsi de suite ; on est arrêté quand on arrive à une nappe focale réduite à une courbe ou à un point.*

Si la surface  $\Sigma_p$  n'est pas développable et si  $\Sigma_{p+1}$  se réduit à une courbe, cela veut dire que sur  $\Sigma_p$  les lignes  $v = \text{const.}$  sont *coniques* ;  $\Sigma_p$  limite la suite des surfaces fournies par les transformations de Laplace successives :

*Géométriquement*, on a la suite des nappes focales

$$\Sigma, \quad \Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \dots, \quad \Sigma_p, \quad \Sigma_{p+1}.$$

*Analytiquement*, on a la suite d'équations

$$E, \quad E_1, \quad E_2, \quad \dots, \quad E_p.$$

Si la surface  $\Sigma_p$  est *développable* (ni cône, ni cylindre),  $\Sigma_{p+1}$  se réduit encore à une courbe : l'arête de rebroussement, les courbes  $u = \text{const.}$  sont les génératrices ; de sorte que la famille des tangentes à ces courbes est  $\infty^1$  et non  $\infty^2$  <sup>(1)</sup> ; il y a ici une différence essentielle avec le cas précédent qui n'a jamais été remarquée. Quand les lignes  $v = \text{const.}$  de  $\Sigma_p$  sont coniques, le point qui décrit le lieu des sommets des cônes est *fonction de  $v$* , tandis que lorsque  $\Sigma_p$  est développable, le point qui décrit l'arête de rebroussement est *fonction de  $u$*  et, dans ce dernier cas, la suite de Laplace compte une équation de plus :

*Géométriquement*,

$$\Sigma, \quad \Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \dots, \quad \Sigma_p, \quad \Sigma_{p+1}.$$

*Analytiquement*,

$$E, \quad E_1, \quad E_2, \quad \dots, \quad E_p, \quad E_{p+1}.$$

Enfin, si  $\Sigma_p$  est un cône ou un cylindre on constate que l'équation  $E_p$  est la dernière (et non plus l'avant-dernière). En effet, écrivons les équations générales de  $\Sigma_p$

$$x = a\rho, \quad r = b\rho, \quad z = c\rho,$$

où  $a, b, c$  sont des fonctions de  $u$ , et  $\rho$  une fonction de  $u$ , et  $v$ , l'équation de Laplace correspondante est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} & \frac{\partial \rho}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u} & \frac{\partial \rho}{\partial u} & \rho \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v} & \frac{\partial \rho}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

on voit de suite que  $\rho$  est une quatrième solution ; par conséquent les fonctions de  $u$  seul

$$\frac{x}{\rho} = a, \quad \frac{r}{\rho} = b, \quad \frac{z}{\rho} = c$$

vérifient une équation de Laplace ayant les mêmes invariants que

---

(1) En réalité chaque génératrice compte pour  $\infty^1$  tangentes.



l'équation (4); comme elle doit être vérifiée par des fonctions de  $u$  seul, elle est nécessairement de la forme

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

équation dont l'invariant  $h$  est nul; il en est donc de même pour l'équation (4); les cas où  $\Sigma_p$  est un cylindre se ramènent immédiatement au précédent par une homographie.

Pour étudier simultanément les surfaces  $\Sigma_i$  aux points de vue ponctuel et tangentiel, il est commode d'associer à chacune d'elles la surface  $\bar{\Sigma}_i$  dualistiquement correspondante; l'équation ponctuelle de  $\bar{\Sigma}_i$  est l'équation tangentielle de  $\Sigma_i$  et réciproquement; les résultats qui précèdent montrent que les suites de surfaces  $\Sigma_i$  et  $\bar{\Sigma}_i$  sont *simultanément* limitées ou illimitées dans le *même* sens et conduisent au tableau suivant, où les colonnes de droite indiquent le nombre d'opérations de Laplace nécessaires pour intégrer les équations E et  $\bar{E}$  qui correspondent aux surfaces initiales :

		E.	$\bar{E}$ .
(I)	$\Sigma_p$ ni développable ni courbe; $\Sigma_{p+1}$ courbe gauche . . . . .	$p$	
	$\bar{\Sigma}_p$ ni courbe ni développable; $\bar{\Sigma}_{p+1}$ développable (ni cône ni cylindre); $\bar{\Sigma}_{p+2}$ courbe gauche (arête de rebroussement) . . . . .		$p + 2$
(II)	$\Sigma_p$ ni développable ni courbe; $\Sigma_{p+1}$ courbe plane (droite exceptée) . . . . .	$p$	
	$\bar{\Sigma}_p$ ni courbe ni développable; $\bar{\Sigma}_{p+1}$ cône ou cylindre . . .		$p + 1$
(III)	$\Sigma_p$ contient une famille de courbes planes; $\Sigma_{p+1}$ développable (ni cône ni cylindre); $\Sigma_{p+2}$ courbe gauche (arête de rebroussement) . . . . .	$p + 2$	
	$\bar{\Sigma}_p$ contient une famille de lignes coniques; $\bar{\Sigma}_{p+1}$ courbe gauche . . . . .		$p$
(IV)	$\Sigma_p$ ni courbe ni développable; $\Sigma_{p+1}$ cône ou cylindre . . .	$p + 1$	
	$\bar{\Sigma}_p$ ni développable ni courbe; $\bar{\Sigma}_{p+1}$ courbe plane (droite exceptée) . . . . .		$p$
(V)	$\Sigma_p$ contient une famille de courbes planes; l'autre famille est formée de lignes coniques; $\Sigma_{p+1}$ droite . . . . .	$p$	
	$\bar{\Sigma}_p$ contient une famille de lignes coniques, l'autre est formée de courbes planes; $\bar{\Sigma}_{p+1}$ droite . . . . .		$p$

Les cas (I) et (III), (II) et (IV) sont corrélatifs, (V) est corrélatif de lui-même.

On voit bien ainsi que si l'équation ponctuelle (ou tangentielle) relative à un réseau conjugué a une suite de Laplace limitée dans un sens, il en est de même pour l'équation tangentielle (ou ponctuelle), les deux suites se terminent dans *le même* sens après un nombre d'opérations qui diffère de *deux unités au plus* quand on passe de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle.

Si une surface admet une déformation continue avec réseau conjugué permanent, l'équation tangentielle de Laplace a ses invariants égaux; donc, si elle est intégrable par la méthode de Laplace, la suite se termine dans les deux sens et l'intégrale générale s'obtient sans signe de quadrature, les considérations faites plus haut montrent qu'il en est de même pour l'équation ponctuelle.

En général, si une équation de Laplace s'intègre sans signe de quadrature, son intégrale générale est de la forme

$$\theta = \beta U + \beta_1 U' + \dots + \beta_i U^{(i)} + \gamma V + \gamma_1 V' + \dots + \gamma_j V^{(j)},$$

où  $\beta, \beta_1, \dots, \beta_i, \gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_j$  sont des fonctions déterminées,  $U$  et  $V$  des fonctions arbitraires de  $u$  et  $v$  respectivement; si  $\theta$  ne peut être mise sous une forme analogue où il y aurait moins de dérivées de  $U$  et  $V$ , elle est dite de rang  $i+1$  par rapport à  $u$  et  $j+1$  par rapport à  $v$  (DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. II, p. 35); si l'équation envisagée est à invariants égaux, on a  $i=j$ ; nous appellerons ce nombre *rang de l'équation*; par exemple, si  $n$  est un entier, l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{n(n+1)}{(u-v)^2} \theta$$

est de rang  $n+1$ .

## VII. — Recherche des réseaux conjugués coniques permanents.

1. La recherche des réseaux conjugués permanents, comprenant une famille de lignes coniques, a été abordée par M. Egoroff en 1907 (*Comptes rendus*, 145, p. 1256), qui a commis une erreur de principe initiale : soit une surface  $\Sigma$  rapportée à un réseau conjugué  $(u, v)$ ,

dont les lignes  $u = \text{const.}$  sont coniques; sur la surface corrélative  $\bar{\Sigma}$ , les courbes  $u = \text{const.}$  du réseau conjugué  $(u, v)$  sont planes; la seconde nappe focale de la congruence des tangentes à ces courbes est la développable  $\bar{\Sigma}_1$  enveloppée par leurs plans; Egoroff dit : *Il s'ensuit que l'application à  $\bar{\Sigma}_1$  de la transformation de Laplace conduit à l'arête de rebroussement de la développable, la congruence des tangentes se réduit au système de génératrices, et, par conséquent, l'équation ponctuelle relative au système conjugué sur la surface est caractérisée par cette propriété qu'en lui appliquant une fois la transformation de Laplace, on est conduit à une équation dont l'un des invariants est nul.*

L'étude faite au paragraphe précédent montre que cette conclusion n'est valable que si la développable  $\bar{\Sigma}_1$  est un cône ou un cylindre, c'est-à-dire si le lieu des sommets des cônes circonscrits à la surface  $\Sigma$  le long des courbes  $u = \text{const.}$  est une *courbe plane* ( $a$ ), de sorte que M. Egoroff a omis d'examiner le cas où ce lieu serait une courbe gauche.

2. En résumé, si un réseau conjugué permanent contient une famille de courbes coniques ou cylindriques, l'équation tangentielle de Laplace est de *rang un, deux ou trois*; nous allons étudier successivement ces trois cas :

1° L'équation tangentielle est de *rang un*, elle ramène à l'équation *unique*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

Le tableau de la page 168 montre que si les lignes  $u = \text{const.}$  sont coniques ou cylindriques, la courbe ( $a$ ) correspondante est une droite (à distance finie ou infinie), le réseau est entièrement formé de courbes planes, on sait que toutes les surfaces en jeu ont été déterminées par M. Goursat (<sup>1</sup>).

Le même tableau montre que pour tout réseau conjugué permanent contenant une famille de courbes planes, l'équation tangentielle est de *rang un*, les surfaces de M. Goursat sont donc les *seules* possédant

---

(<sup>1</sup>) *American Journal* (*loc. cit.*).

cette propriété, le résultat de Raffi (1) est ainsi retrouvé très simplement.

2° L'équation tangentielle est de *rang deux*, elle se ramène encore à une équation unique

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{-2}{(u-v)^2} \theta,$$

qui admet pour intégrale générale

$$\theta = 2 \frac{U - V}{u - v} - (U' + V'),$$

où  $U$  et  $V$  sont deux fonctions arbitraires de  $u$  et  $v$  respectivement.

Les systèmes de trois intégrales quadratiques de l'équation (1) ont été déterminés par M. Egoroff (2), M. Drach (3) et M. Gambier (4); il suffit de prendre les intégrales obtenues en remplaçant  $(U, V)$  par  $(u_1, 0)$ ,  $(u_2, 0)$  et  $(0, -v_3)$ ,

$$\theta_1 = \frac{2u_1}{u-v} - u'_1, \quad \theta_2 = \frac{2u_2}{u-v} - u'_2, \quad \theta_3 = \frac{2v_3}{u-v} + v'_3,$$

où  $u_1$  et  $u_2$  sont deux fonctions de  $u$ , et  $v_3$  une fonction de  $v$  telles que

$$(3) \quad u_1^2 + u_2^2 = q_4, \quad v_3^2 = -q_4,$$

où  $q_4$  désigne un polynome quelconque du quatrième ordre (5); dans ces conditions, le plan

$$(4) \quad [2u_1 - u'_1(u-v)]x + [2u_2 - u'_2(u-v)]y + [2v_3 + v'_3(u-v)]z + 2(u-v) - (u'_1 + v'_3)(u-v) = 0$$

enveloppe une surface rapportée à un réseau conjugué permanent, il reste à examiner comment il faut choisir  $u$ , et  $v$ , pour que les courbes  $u = \text{const.}$  soient coniques; à cet effet, M. Egoroff a cherché les arêtes de rebroussement des développables circonscrites le long de ces courbes.

(1) *Comptes rendus (loc. cit.)*.

(2) *Comptes rendus*, 132 1901, p. 1545.

(3) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1908, p. 125-164.

(4) *Annales de l'Université de Jassy (loc. cit.)*.

(5) Si l'on remarque qu'une même substitution homographique faite sur  $u$  et  $v$  ne change pas l'équation (1), on voit qu'on peut prendre l'un des zéros de  $q_4$  infini, c'est-à-dire supposer ce polynome du troisième ordre.

J'indique ici une méthode analogue mais plus rapide : il suffit d'exprimer que le long de chaque ligne  $u = \text{const.}$  le plan tangent passe par un point  $a_1(u)$ ,  $a_2(u)$ ,  $a_3(u)$ ,  $a_4(u)$  (en coordonnées homogènes) ne dépendant que de  $u$ , l'équation

$$(5) \quad [2u_1 - u'_1(u - v)]a_1 + [2u_2 - u'_2(u - v)]a_2 + [2v_3 + v'_3(u - v)]a_3 + [2(u_4 - v_4) - (u'_4 + v'_4)(u - v)]a_4 = 0$$

doit être une identité, dérivons-la deux fois par rapport à  $v$ , on obtient

$$v'''_3 a_3 + v'''_4 a_4 = 0.$$

Nous éliminons *a priori* la solution  $a_3 = a_4 = 0$  qui, d'après le paragraphe précédent, ne peut correspondre à une équation de rang deux; d'ailleurs, sans tenir compte de cette discussion précédente, en écrivant que (5) est identiquement vérifiée, on aurait

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 = 0, \quad u'_1 a_1 + u'_2 a_2 = 0$$

et, par suite, soit

$$a_1 = a_2 = 0,$$

soit

$$-\frac{a_2}{a_1} = \frac{u_1}{u_2} = \text{const.},$$

le premier cas est évidemment impossible, le second également car  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deviennent linéairement dépendants, (4) envelopperait une développable, cas banal écarté.

Les solutions ( $v'''_3 = 0$ ,  $v'''_4 = 0$ ) ou ( $v'''_3 = 0$ ,  $a_4 = 0$ ) sont également inacceptables; en effet, elles donnent pour  $v_3$  un polynôme de degré deux; or si l'on remarque qu'on ne change pas l'intégrale (2) en ajoutant à  $U$  un polynôme arbitraire du second degré en  $u$  et à  $V$  le même polynôme en  $v$ , on voit qu'on peut remplacer le couple ( $U = 0$ ,  $V = -v_3$ ) où  $v_3$  est un polynôme  $p_2(v)$  de degré deux, par le couple [ $U = p_2(u)$ ,  $V = 0$ ], mais alors le plan mené par  $O$  parallèlement au plan tangent a pour équation

$$[2u_1 - u'_1(u - v)]x + [2u_2 - u'_2(u - v)]y + [2p_2(u) - p'_2(u)(u - v)]z = 0.$$

quand  $v$  varie,  $u$  restant constant, il pivote autour de la droite d'équa-

tions

$$\begin{aligned} u_1 x + u_2 y + p_2(u)z &= 0, \\ u'_1 x + u'_2 y + p'_2(u)z &= 0, \end{aligned}$$

les lignes  $u = \text{const.}$  sont donc cylindriques et non coniques (le cas  $v''_4 = 0$  permet même de prendre  $v_4 = 0$ , la surface est développable, nous éliminons donc ce cas).

On est donc amené à prendre  $-\varphi''_4 : \varphi'''_3$  et  $a_3 : a_4$  égaux à une *même constante* finie; un changement de plans de coordonnées permet de supposer  $\varphi'''_4 = 0$ ,  $u_3 = 0$ , ou, en vertu de la remarque précédente,  $v_4 = 0$  et  $a_4 = 1$ ; on est donc amené à prendre

$$\theta_4 = \frac{2u_4}{u - v} - u'_4,$$

cette condition est suffisante; en effet, si elle est vérifiée, en faisant  $a_3 = 0$  dans (5) puis en annulant le coefficient de  $v$  et le terme qui en est indépendant on obtient

$$(6) \quad u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_4 = 0,$$

$$(7) \quad u'_1 a_1 + u'_2 a_2 + u'_4 = 0.$$

qui montrent que la courbe lieu du point  $(a_1, a_2, a_3)$  est l'enveloppe de la droite (6) du plan  $a_3 = 0$ .

Les surfaces obtenues dépendent, une fois le polynome  $q_4$  choisi, de deux fonctions arbitraires d'une variable  $u_2$  et  $u_4$ ; les cônes circonscrits et leurs lignes de contact avec les surfaces sont algébriques, car l'équation (5) contient  $v$  algébriquement; quant aux surfaces elles ne sont algébriques que si  $u_2$  et  $u_4$  le sont.

3° L'équation tangentielle est de *rang trois*, c'est une transformée de Moutard de l'équation (1), ces équations ne se ramènent pas à un type comme les équations de rang un ou deux; dans ce qui suit nous déterminons les réseaux conjugués coniques correspondant à une équation de *rang trois*.

3. Soient

$$(8) \quad \theta_i = 2 \frac{u_i - v_i}{u - v} - (u'_i + v'_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

quatre intégrales de l'équation (1), les  $u_i$  sont des fonctions de  $u$  seul et des  $v_i$  des fonctions de  $v$

$$(9) \quad \omega = \frac{\alpha(u) - \beta(v)}{u - v} = [\alpha'(u) + \beta'(v)],$$

une cinquième solution à l'aide de laquelle on effectue la transformation de Moutard, si  $\bar{\theta}_i$  est la transformée de  $\theta_i$  nous avons

$$(10) \quad \bar{\theta}_i \omega = H_i,$$

avec

$$(11) \quad H_i = \int \left( \theta_i \frac{\partial \omega}{\partial u} - \omega \frac{\partial \theta_i}{\partial u} \right) du - \left( \theta_i \frac{\partial \omega}{\partial v} - \omega \frac{\partial \theta_i}{\partial v} \right) dv;$$

cherchons à déterminer  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega$  de manière que le plan

$$\bar{\theta}_1 x + \bar{\theta}_2 y + \bar{\theta}_3 z + \bar{\theta}_4 = 0$$

enveloppe une surface sur laquelle les lignes  $u = \text{const.}$  sont coniques, les sommets des cônes circonscrits étant répartis sur une *courbe gauche*; soient  $a_1(u), a_2(u), a_3(u), a_4(u)$  les coordonnées homogènes; d'un point de cette courbe, on doit avoir *identiquement* :

$$a_1 \bar{\theta}_1 + a_2 \bar{\theta}_2 + a_3 \bar{\theta}_3 + a_4 \bar{\theta}_4 = 0$$

ou en tenant compte de (10)

$$(12) \quad a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_3 H_3 + a_4 H_4 = 0.$$

Dérivons par rapport à  $v$  en tenant compte de (11) :

$$\omega \left[ a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} + a_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} + a_4 \frac{\partial \theta_4}{\partial v} \right] - \frac{\partial \omega}{\partial v} [a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + a_3 \theta_3 + a_4 \theta_4] = 0,$$

en intégrant et en désignant par  $a_5$  une fonction de  $u$  on obtient

$$a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + a_3 \theta_3 + a_4 \theta_4 + a_5 \omega = 0;$$

remplaçons  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega$  par leurs expressions (8) et (9), chassons le dénominateur  $u - v$  et dérivons deux fois par rapport à  $v$ , il vient

$$a_1 v_1''' + a_2 v_2''' + a_3 v_3''' + a_4 v_4''' + a_5 \beta''' = 0,$$

relation qui entraîne  $k \leq 5$  relations linéaires homogènes à coefficients

constants entre les  $a_i$  et  $5 - k$  entre les fonctions de  $v$ ; mais  $a_1, a_2, a_3, a_4$  étant les coordonnées d'un point qui décrit une courbe *gauche*, nous ne devons prendre que  $k = 1$ ; on a

$$v_i''' = \alpha_i \beta''' \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où  $\lambda_i$  désignent quatre constantes; nous avons déjà observé que si l'on augmente  $u_i$  d'un polynôme du second degré *quelconque* en  $u$  et  $v_i$ , du même polynôme en  $v$ ,  $\theta_i$  ne change pas, ceci permet de supposer :

$$(13) \quad v_i = \lambda_i \beta;$$

nous allons montrer que ces conditions sont suffisantes.

4° D'une manière générale, si  $m$  et  $n$  sont deux intégrales de (1), l'expression

$$\left(m \frac{\partial n}{\partial u} - n \frac{\partial m}{\partial u}\right) du - \left(m \frac{\partial n}{\partial v} - n \frac{\partial m}{\partial v}\right) dv$$

est une différentielle totale exacte, nous écrivons

$$(m, n) = \int \left(m \frac{\partial n}{\partial u} - n \frac{\partial m}{\partial u}\right) du - \left(m \frac{\partial n}{\partial v} - n \frac{\partial m}{\partial v}\right) dv,$$

ces expressions sont définies à une constante près; en désignant par  $p$  et  $q$  deux constantes et par  $m_1, n_1, m_2, n_2$  quatre intégrales de (1), on a les relations simples

$$\begin{aligned} (m, n) + (n, m) &= \text{const.}, \\ (pm, qn) &= pq(m, n) + \text{const.}, \\ (m_1 + n_1, m_2 + n_2) &= (m_1, m_2) + (m_1, n_2) + (n_1, m_2) + (n_1, n_2) + \text{const.}, \end{aligned}$$

de sorte qu'en posant

$$\varphi_i = \frac{2u_i}{u-v} - u'_i, \quad \varphi = \frac{2x}{u-v} - \alpha', \quad \psi = \frac{-2\beta}{u-v} - \beta',$$

on a :

$$\begin{aligned} H_i = (\mathcal{G}_i, \omega) &= (\varphi_i + \lambda_i \psi, \varphi + \psi) = (\varphi_i, \varphi) + (\varphi_i, \psi) + \lambda_i (\psi, \varphi) \\ &= (\varphi_i - \lambda_i \varphi, \varphi) + (\varphi_i - \lambda_i \varphi, \psi), \end{aligned}$$



on est ainsi amené à poser

$$u_i = u_i - \lambda_i \alpha, \quad \mu_i = \frac{2u_i}{u - v} - u'_i;$$

d'où

$$H_i = (\mu_i, \varphi) + (\mu_i, \psi);$$

les quatre expressions  $(\mu_i, \varphi)$  et  $(\mu_i, \psi)$  se calculent aisément, on obtient :

$$H_i = 2 \frac{\alpha u'_i - \alpha' u_i}{u - v} + \int (\alpha'' u'_i - \alpha' u''_i) du + 2 \frac{u_i \beta' - \beta u'_i}{u - v} - \beta' u'_i;$$

en portant ces expressions dans (12) il vient ;

$$(14) \quad (2\beta - \beta'v)f_1(u) + \beta'f_2(u) + vf_3(u) + f_4(u) = 0$$

où

$$\begin{aligned} f_1 &= - \sum_{i=1}^4 a_i u'_i, \\ f_2 &= \sum_{i=1}^4 a_i (2u_i - u u'_i), \\ f_3 &= - \sum_{i=1}^4 a_i \int (\alpha'' u'_i - \alpha' u''_i) du, \\ f_4 &= \sum_{i=1}^4 a_i \left[ 2(\alpha u'_i - \alpha' u_i) + u \int (\alpha'' u'_i - \alpha' u''_i) du \right], \end{aligned}$$

cette relation est de la forme déjà rencontrée à plusieurs reprises, nous la traitons toujours par la même méthode : les quantités  $2\beta - \beta'v$ ,  $\beta'$ ,  $v$ ,  $1$  sont quatre fonctions de  $v$  dont deux,  $v$  et  $1$ , sont linéairement indépendantes ; donc parmi ces quatre quantités il y en a, soit deux, soit trois, soit quatre linéairement indépendantes ; si le nombre est deux ou trois il y a au moins une relation linéaire, homogène à coefficients constants entre  $2\beta - \beta'v$ ,  $\beta'$ ,  $v$ ,  $1$  et cela entraîne que  $\beta$  soit un polynôme de degré deux que nous pouvons supposer identiquement nul, le plan

$$\bar{\theta}_1 x + \bar{\theta}_2 y + \bar{\theta}_3 z + \bar{\theta}_4 = 0$$

dépend linéairement de  $v$ , les courbes  $u = \text{const}$  sont des droites ;

elles doivent être asymptotiques d'une part et conjuguées des courbes  $v$  de sorte que la surface est développable : ce cas est à écarter.

Si les quatre quantités  $2\beta - \beta'v$ ,  $\beta'$ ,  $v$ ,  $1$  sont linéairement indépendantes, leurs coefficients dans l'équation (14) doivent être nuls, ce qui donne les trois équations :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 a_i \mathcal{U}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^4 a_i \mathcal{U}'_i = 0, \\ \sum_{i=1}^4 a_i \int (\alpha'' \mathcal{U}'_i - \alpha' \mathcal{U}''_i) du = 0, \end{array} \right.$$

qui déterminent la courbe  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  lieu du sommet des cônes circonscrits. L'interprétation est aisée : on choisit cinq intégrales  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega$  de (1) correspondant aux couples  $(\mathcal{U}_1, 0), (\mathcal{U}_2, 0), (\mathcal{U}_3, 0), (\mathcal{U}_4, 0), (\alpha, \beta)$  où  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4, \alpha$  sont cinq fonctions *arbitraires* de  $u$  et  $\beta$  une fonction arbitraire de  $v$ ; on transforme  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  par  $\omega$  et l'on a le plan tangent à la surface

$$\bar{\theta}_1 x + \bar{\theta}_2 y + \bar{\theta}_3 z + \bar{\theta}_4 = 0.$$

La courbe  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  est située sur la développable enveloppe du plan

$$\mathcal{U}_1 x + \mathcal{U}_2 y + \mathcal{U}_3 z + \mathcal{U}_4 = 0;$$

pour l'obtenir il suffit de prendre l'intersection de la génératrice  $(u)$  avec le plan

$$\begin{aligned} & x \int (\alpha'' \mathcal{U}'_1 - \alpha' \mathcal{U}''_1) du + y \int (\alpha'' \mathcal{U}'_2 - \alpha' \mathcal{U}''_2) du \\ & + z \int (\alpha'' \mathcal{U}'_3 - \alpha' \mathcal{U}''_3) du + \int (\alpha'' \mathcal{U}'_4 - \alpha' \mathcal{U}''_4) du = 0. \end{aligned}$$

Pour qu'il existe une déformation continue de la surface avec réseau

conjugué permanent, il faudrait avoir

$$\bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_2^2 + \theta_3^2 = A(u) + B(v)$$

ou

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \omega^2 [A(u) + B(v)].$$

$H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  étant les quantités calculées plus haut, la discussion de cette équation paraît pénible, bien que, théoriquement, elle se fasse par les méthodes classiques de différentiations et éliminations.

5° Revenons à l'équation de rang deux; dans ce qui précède nous n'avons fait aucune hypothèse sur les courbes  $v = \text{const.}$ ; *de la discussion faite au paragraphe VI du présent chapitre, il résulte que, si l'on considère les tangentes à ces courbes, la seconde nappe focale est une courbe plane (b) (à distance finie ou infinie) ou une surface  $\Sigma_1$ ; dans ce dernier cas, les courbes  $v = \text{const.}$  de  $\Sigma_1$  sont planes.*

Nous allons maintenant montrer comment la méthode employée ici permet d'extraire, parmi les surfaces trouvées plus haut, celles dont le réseau permanent est formé de *deux* familles de lignes coniques ou cylindriques; nous pouvons nous borner aux deux premiers cas (équation tangentielle de rang un ou deux); en effet si le réseau  $(u, v)$  contient une famille de lignes cylindriques, la courbe (a) ou (b) correspondante est plane (dans le plan de l'infini); si les *deux* familles  $(u, v)$  sont coniques, il résulte du Chapitre I que (a) et (b) sont toutes deux planes; dès lors, en se reportant à notre tableau (p. 168), on voit que l'équation tangentielle de Laplace ne peut être de rang trois; c'est ce qui explique que les résultats de M. Masloff (<sup>1</sup>) sont complets malgré l'erreur commise par M. Egoroff sur le rang de l'équation tangentielle, mais la discussion faite ici est seule à le justifier.

1° L'équation de Laplace tangentielle est de rang un. Si les courbes  $u = \text{const.}$  et  $v = \text{const.}$  sont toutes coniques ou cylindriques, il résulte du paragraphe VI du chapitre actuel que (a) et (b) sont deux droites, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I ces droites ne peuvent être toutes deux à distance finie, l'une au moins est dans le plan de l'infini, on obtient ainsi deux types de surfaces bien connus :

---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus (loc. cit.)*.

les surfaces de translation à profils de translation situées dans des plans rectangulaires (1) et les surfaces de Peterson (2).

2° L'équation de Laplace tangentielle est de rang deux. Aucune famille ne peut être cylindrique, il est aisé de voir comment il faut choisir les fonctions  $u_2$  et  $u_4$  pour que les courbes  $u = \text{const.}$  et  $v = \text{const.}$  soient toutes coniques. Écrivons que, pour  $v = \text{const.}$ , le plan (4) contient le point  $[b_1(v), b_2(v), b_3(v)]$  et dérivons deux fois par rapport à  $u$  l'équation obtenue, il vient

$$u_4''' b_1 + u_2''' b_2 + u_4'' = 0.$$

$b_1$  et  $b_2$  sont donc liés par une relation linéaire de sorte que le lieu des sommets des cônes circonscrits le long des courbes  $v = \text{const.}$  est une courbe ( $b$ ) située dans un plan perpendiculaire au plan de la courbe ( $a$ ) relative aux courbes  $u = \text{const.}$ ; on retrouve ainsi un résultat obtenu au Chapitre I; on peut, sans inconvénient, supposer que l'on a

$$b_2 = 0, \quad u_1'' = u_4'' = 0.$$

de sorte que  $u_1$  et  $u_4$  sont deux polynômes du second degré  $p_2(u)$  et  $\pi_2(u)$ , résultat qu'on peut prévoir si l'on observe qu'il n'y a entre les variables  $u$  et  $v$  qu'une dissymétrie apparente.

En résumé une surface à réseau permanent doublement conique est l'enveloppe du plan

$$(16) \quad \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 = 0,$$

$$(17) \quad \theta_i = \lambda \frac{u_i - v_i}{u - v} - (u_i' + v_i') \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$(18) \quad \begin{cases} u_1 = p_2(u) & u_2 = \sqrt{-p_4(u)} & u_3 = 0 & u_4 = \pi_2(u), \\ v_1 = 0 & v_2 = 0 & v_3 = -\sqrt{-q_4(v)} & v_4 = 0. \end{cases}$$

$p_2, p_4, q_4$  désignent des polynômes de degré égal (ou inférieur) à

(1) BIANCHI, *Giornale de Matematiche*, t. 16, 1878, p. 267. — B. GAMBRIER, *Nouvelles Annales*, 4<sup>e</sup> série, t. 20, 1910.

(2) Voir DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. I, p. 176-184.

l'indice, liés par l'identité

$$(19) \quad p_2^2 = p_4 + q_4,$$

on sait que si  $\theta_i$  ne change pas si l'on augmente  $u_i$  d'un polynome arbitraire (en  $u$ ) de degré 2 et  $v_i$  du même polynome (en  $v$ ) de sorte que le tableau (18) peut être remplacé par le suivant :

$$(20) \quad \begin{cases} u_1 = 0, & u_2 = \sqrt{-p_4(u)}, & u_3 = 0, & u_4 = 0, \\ v_1 = -p_2(v), & v_2 = 0, & v_3 = -\sqrt{-q_4(v)}, & v_4 = -\pi_2(v), \end{cases}$$

en changeant ensuite tous les  $u_i$  et  $v_i$  de signe dans (20) [ce qui est indifférent pour le plan (16)], car tous les  $\theta_i$  sont changés de signe], on voit qu'on a bien manifesté la symétrie entre les variables  $u$  et  $v$ ; ( $u_1, u_2, u_4$ ) sont les coordonnées tangentielles de la courbe ( $a$ ). On a donc

$$(21) \quad a_1 = \frac{2p_4\pi_2' - \pi_4'p_2}{p_2p_4' - 2p_4p_2'}, \quad a_2 = \sqrt{-p_4} \frac{p_2'\pi_1 - p_2\pi_2'}{p_2p_4' - 2p_4p_2'},$$

et formules analogues pour  $b_1, b_3$  en remplaçant  $u$  par  $v$  et  $p_4$  par  $q_4$ ;  $p_2p_4' - 2p_4p_2', 2p_4\pi_2' - \pi_4'p_2$  sont de degré 4 au plus,  $p_2'\pi_2 - p_2\pi_2'$  de degré deux. Pour être complet, il faut indiquer les éléments analogues,  $P_2, P_4, Q_4, H_2$  relatifs à la surface déformée; les méthodes générales exposées au paragraphe II du présent chapitre auraient l'inconvénient d'exiger beaucoup de calculs. C'est ici que la méthode des mécanismes (simples ou doubles) vient au secours de la méthode générale. Bien que le mécanisme  $[(\bar{a}), (\bar{b}); (\bar{A}), (\bar{B})]$  qui double  $[(a), (b); (A), (B)]$  ne soit pas indispensable, il est commode à employer et a d'ailleurs l'avantage d'offrir, outre les  $\infty^1$  surfaces  $S_0, S_l$  applicables entre elles ( $l$  désigne le paramètre de déformation), encore les surfaces  $\lambda S_0 + \mu \Sigma_0, \lambda S_l + \mu \Sigma_l$  qui, pour  $\lambda$  et  $\mu$  fixes et  $l$  variant sont applicables entre elles et parallèles (Peterson) aux surfaces  $S_0, S_l$ . On définit  $\Sigma_0$  en même temps que  $S_0$  en remplaçant  $\pi_2$  par un polynome nouveau  $\bar{\pi}_2$  arbitraire (indépendant de  $p_2$  et  $\pi_2$ ); remplacer  $\bar{\pi}_2$  par  $k\bar{\pi}_2$  revient à une homothétie de  $\Sigma$  relativement à l'origine; remplacer  $\bar{\pi}_2$  par  $\bar{\pi}_2 - kp_2$  revient à faire glisser  $\Sigma$  le long de  $Ox$ ; remplacer  $\bar{\pi}_2$  par

$\bar{\pi}_2 - k\pi_2$  revient à remplacer  $\Sigma$  par  $\Sigma - kS$ ; on profite donc de ces remarques pour choisir  $\bar{\pi}_2$  aussi simple que possible).

Si l'on met en évidence les coefficients de  $q_*$  et  $p_*$ , on a

$$(22) \quad \begin{cases} q_*(u) \equiv d_0 u^4 + 4d_1 u^3 + 6d_2 u^2 + 4d_3 u + d_4, \\ p_*(u) \equiv e_0 u^2 + 2e_1 u + e_2, \\ p_* = p_*^2 - q_*, \end{cases}$$

$$(23) \quad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = U + V = u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 - 4d_0(u^2 - v^2) - 8d_1(u - v)$$

et l'on peut prendre

$$(24) \quad \begin{cases} U = p_*'^2(u) - \frac{p_*'^2(u)}{4p_*(u)} - 4d_0 u^2 - 8d_1 u = \frac{m_*(u)}{p_*(u)}, \\ V = -\frac{q_*'^2(v)}{4q_*(v)} + 4d_0 v^2 + 8d_1 v = \frac{n_*(v)}{q_*(v)}. \end{cases}$$

On vérifie aisément, en vertu de (22), que  $m_*$  et  $n_*$  sont des polynômes de degré 4 (au plus); la fraction  $\frac{m_*}{p_*}$  n'est réductible que si  $p_*$  a une racine multiple, et de même  $\frac{n_*}{q_*}$ ; dans ce qui suit, *nous ne la réduirons pas*, c'est-à-dire que si le calcul direct de  $U$ , par exemple, a donné une fraction  $\frac{l^\pi}{\pi}$  où  $\pi$  est un diviseur de  $p_*$  ( $p_*$  ayant des racines multiples), nous la rétablirons sous la forme  $\frac{m_*}{p_*}$  en multipliant les deux termes par un facteur convenable; avec cette précaution, tout ce qui suit s'applique quels que soient les cas particuliers. Au cours de la déformation  $U$  et  $V$  se trouvent remplacés par  $\frac{l'U}{1+lU}$  et  $\frac{l'V}{1+lV}$  où  $l$  est le paramètre de déformation ( $l=0$  donne la surface initiale  $S_0$ ) et où  $l'$  est une constante *arbitraire*, d'ailleurs indifférente au point de vue final, que l'on choisit donc de façon à simplifier le cas échéant les formules. On a donc ( $\lambda, \mu$  constantes)

$$(25) \quad P_* \equiv \lambda(p_* + lm_*) \quad Q_* \equiv \mu(q_* - ln_*)$$

avec la condition que le polynôme  $\lambda(p_* + lm_*) + \mu(q_* - ln_*)$  soit carré parfait; cette condition détermine le rapport  $\mu : \lambda$ , rationnellement en

fonction de  $l$  car l'identité

$$Au^4 + 4Bu^3 + 6Cu^2 + 4Du + E \equiv \left( \sqrt{A} u^2 + \frac{2B}{\sqrt{A}} u + \varepsilon \sqrt{E} \right)^2, \quad \varepsilon = \pm 1$$

entraîne (en supposant  $A \neq 0$ )

$$B^2 E = D^2 A, \quad 6ABC - 4B^3 + 3A^2 D = 0;$$

ici  $A, B, C, D, E$  sont de la forme  $\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \dots$ , de sorte que, pour calculer  $\lambda : \mu$ , nous avons deux équations (compatibles) de degré 3, qui ont une racine commune, obtenue *rationnellement* en fonction de  $l$  (les exemples indiqués plus bas suffisent pour en donner la preuve; il n'y a que certains cas particuliers où les équations peuvent avoir plusieurs racines communes, mais néanmoins il n'y a qu'une valeur de  $\lambda : \mu$  qui convienne et qui reste rationnelle); cette racine  $\lambda : \mu$  tend vers 1 quand  $l$  tend vers zéro et cette considération suffit (sauf cas très particuliers) pour choisir la racine; on peut prendre  $\lambda$  arbitrairement,  $\mu$  en résulte, ainsi que  $P_4, Q_1, P_2$ .

On a d'autre part (avec les notations du Chapitre I, § II)

$$A_2^2 = a_1^2(1 - h^2) + a_2^2 + 2mha_1 - C$$

ou

$$\begin{aligned} (26) \quad (P_2 P'_4 - 2P_4 P_2)^2 &= (1 - h^2) (\pi_4 \pi'_2 - \pi_2 \pi'_4)^2 - P_4 (P'_2 \pi_2 - P_2 \pi'_2)^2 \\ &+ 2mh (\pi_4 \pi'_2 - \pi_2 \pi'_4) (P_2 P'_4 - 2P_4 P_2) \\ &- C (P_2 P'_4 - 2P_4 P_2)^2, \end{aligned}$$

or  $A_2$  ne peut contenir que le radical  $\sqrt{-P_4}$ , donc le second membre de (26) doit être divisible par  $P_4$  (ou du moins par les facteurs impairs de  $P_4$ ), d'où quatre équations (dans le cas général); le quotient obtenu est carré parfait, d'où deux équations; cela fait un total de six équations (compatibles) donnant  $c, h, m$  en fonction de  $l$ ; dans le cas où  $P_4$  a une racine multiple, le nombre d'équations s'abaisse mais suffit encore (en ayant peut-être recours aux conditions analogues pour  $B_1^2$ ) à calculer  $c, h, m$ . Ce calcul est d'ailleurs indépendant de celui qui donne  $\lambda : \mu$ ; si donc on opère comme à l'instant, inversement le calcul de  $A_1, A_2, B_1, B_2$  donnera  $P_1, P_2, P_4$ ; il suffit de remarquer que

les relations

$$\begin{aligned} U_1 A_1 + U_2 A_2 + U_4 &= 0, \\ U'_1 A_1 + U'_2 A_2 + U'_4 &= 0 \end{aligned}$$

entraînent

$$U_1 A'_1 + U_2 A'_2 = 0;$$

les valeurs proportionnelles —  $A'_2$  et  $A'_1$  ainsi trouvées pour  $U_1$  et  $U_2$  suffisent à obtenir les polynômes  $U_1$  et  $U_2^2$  (de degré 2 et 4); on a ensuite

$$U_4 = -(U_1 A_1 + U_2 A_2);$$

mais alors les valeurs exactes de  $P_4$  et  $Q_4$  se trouvent connues, on a  $\lambda$  et  $\mu$ . On peut ensuite recommencer pour  $\bar{\pi}_2, \bar{\Pi}_2, (\bar{A}), (\bar{B})$  ce qui a été fait pour  $\pi_2, \Pi_2, (A), (B)$ , c'est-à-dire obtenir  $\bar{C}, \bar{m}$  et  $C'$ ; dans certains cas il peut y avoir avantage à calculer  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{B}_1, \bar{B}_3$  par les intégrales

$$\int \frac{d\bar{a}}{da_1} dA_1, \quad \int \frac{d\bar{a}_1}{da_1} dA_2, \quad \int \frac{d\bar{b}_1}{db_1} dB_1, \quad \int \frac{d\bar{b}_3}{db_1} dB_3.$$

En tout cas la méthode est assez souple pour pouvoir, grâce à la surabondance des équations, calculer tous les éléments des surfaces déformées. Il est assez curieux qu'une question de pure algèbre se trouve ainsi résolue par des considérations de géométrie.

Il reste à essayer de classer les surfaces obtenues : d'abord il y a à ranger ensemble toutes les surfaces parallèles (Peterson) à la surface initiale  $S$  et à réseau doublement conique : ce sont les surfaces  $\alpha S + \beta \Sigma$  (un seul paramètre de forme  $\alpha : \beta$ ), cela revient à éliminer l'influence du choix de  $\pi_2$  ou  $\bar{\Pi}_2$ , de sorte qu'il n'y a plus à tenir compte que de  $p_2$  et  $p_4$ , ce qui donne  $3 + 5 = 8$  paramètres homogènes; mais il y a à retrancher trois unités pour la substitution homographique

$$u = \frac{a\bar{u} + b}{c\bar{u} + d}, \quad v = \frac{a\bar{v} + b}{c\bar{v} + d},$$

qui respecte la forme de l'équation initiale

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\alpha g}{(u - v)^2} = \alpha$$



et remplace  $u_i$  et  $v_i$  par  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  avec

$$u_i = \bar{u}_i \frac{ad - bc}{(c\bar{u} + d)^2}, \quad v_i = \bar{v}_i \frac{ad - bc}{(c\bar{v} + d)^2}.$$

Ces formules montrent que  $p_2, p_1, q_1$  se transforment (à un facteur numérique près) en

$$(c\bar{u} + d)^2 p_2 \left( \frac{a\bar{u} + b}{c\bar{u} + d} \right), \quad (c\bar{u} + d)^4 p_1 \left( \frac{a\bar{u} + b}{c\bar{u} + d} \right).$$

Il reste donc simplement, à une homothétie près,  $\infty^5$  surfaces; on peut répartir ces surfaces en séries  $\alpha S_l + \beta \Sigma_l$  où  $l$  est un paramètre de déformation, la surface  $S_l$  dépendant de trois paramètres de forme.

La meilleure classification est basée sur la forme réduite que l'on peut donner à  $p_2$ ; on peut se borner à  $p_2 \equiv 1, u, u^2 + 1$  suivant que  $p_2$  a une racine double, deux racines distinctes réelles, deux racines distinctes imaginaires; ensuite il y a à envisager les racines de  $p_1$  avec leur multiplicité et leur réalité et de plus à tenir compte des valeurs remarquables des rapports anharmoniques des racines de  $p_2, p_1, q_1$ , puis à voir si  $p_1$  peut avoir des racines communes avec  $p_2$  ( $p_1$  ne peut être égal à  $\lambda p_2^2$  sinon  $\theta_1$  et  $\theta_2$  seraient proportionnels). On a donc divers cas tels que

$p_2$	$p_1$	$q_1$
1	$\lambda(u^2 + 1)$	$1 - \lambda(u^2 + 1)$
1	$\lambda u^2$	$1 - \lambda u^2$
1	$\lambda(u^2 - 1)$	$1 - \lambda(u^2 - 1)$
1	$u$	$1 - u$

Ces cas sont caractérisés par ce fait que  $p_2$  a une racine double, racine aussi d'ordre 2 ou 3 de  $p_1$ ; comme on prend  $u_2 = \sqrt{-p_1(u)}$ ,  $v_3 = -\sqrt{-q_1(v)}$ , le premier et le second cas ne donnent que des surfaces imaginaires et le troisième, pour obtenir des surfaces réelles, exige que l'on ait  $\lambda(1 - \lambda) > 0$ .

Si la racine double de  $p_2$  est racine simple de  $p_1$ , on a de même

les cas :

$p_2$	$p_4$	$q_4$
1	$(u^2 + 1)(au + b)$	$1 - (u^2 + 1)(au + b)$
1	$(u^2 - 1)(au + b)$	$1 - (u^2 - 1)(au + b)$
1	$au^2(u - 1)$	$1 - au^2(u - 1)$
1	$u^3$	$1 - u^3$

puis en supposant toujours  $p_2$  muni d'une seule racine double, on supposera que cette racine n'appartient pas à  $p_4$ , .... On voit le grand nombre de cas distincts que l'on peut obtenir.

Dès que  $p_4$  et  $q_4$  ont chacun une racine double les surfaces obtenues sont unicursales; cela se produit *en particulier* pour

$p_2$	$p_4$	$q_4$
$p_2 = 1$	$p_4 = \lambda(u^2 - 1)$	$q_4 = 1 + \lambda - \lambda u^2$
$p_2 = 1$	$p_4 = u$	$q_4 = 1 - u$
$p_2 = u$	$p_4 = \lambda(u^2 - 1)$	$q_4 = u^2(1 - \lambda) + \lambda$
$p_2 = u$	$p_4 = u$	$q_4 = u^2 - u$

Ces cas ont été obtenus en supposant que  $p_4$  et  $q_4$  ont une racine double commune qui est en même temps racine simple ou double de  $p_2$ ; dans le cas où  $p_2$  a deux racines distinctes, on a, de plus, supposé que ces racines et les couples de racines simples de  $p_4$  (ou  $q_4$ ) appartiennent à une même involution [sinon on aurait eu  $p_2 = u + k$ ,  $p_4 = \lambda(u^2 - 1)$ ,  $q_4 = \lambda(1 - u^2) + (u + k)^2$ ]. Dans le cas où  $p_4$  et  $q_4$  ont chacun une racine double, la racine double de  $p_4$  n'étant pas égale à la racine double de  $q_4$ , par une substitution homographique, on suppose ces racines égales à 0 et  $\infty$ ; il suffit de choisir

$$p_2 \equiv au^2 + 2bu + c,$$

puis écrire

$$p_4 \equiv u^2[a^2u^2 + 4abu - d], \quad q_4 \equiv du^2 + 4bcu + c^2,$$

$a, b, c$  étant arbitraires.

Le cas  $p_2 = u^2 + 1$ ,  $p_4 = 2u^2$ ,  $q_4 = (u^2 - 1)^2$  est très intéressant, mais ne donne que des surfaces imaginaires.

Il est bon maintenant d'indiquer quelques exemples numériques

pour vérifier que les circonstances sont bien conformes aux prévisions.

J'ai choisi les exemples avec certaines particularités intéressantes.

*Premier exemple :*

$$\begin{aligned}
 p_4 &\equiv 2 - u^4, & q_4 &\equiv v^4 - 1, & p_2 &\equiv 1, \\
 u_1 &\equiv 1, & u_2 &\equiv \sqrt{u^4 - 2}, & v_3 &\equiv -\sqrt{1 - v^4}, & u_3 &\equiv u^2, & \bar{u}_4 &\equiv u, \\
 a_1 &\equiv -\frac{2}{u^2}, & a_2 &\equiv -\frac{\sqrt{u^4 - 2}}{u^2}, & b_1 &\equiv \frac{-1}{v^2}, & b_3 &\equiv \frac{\sqrt{1 - v^4}}{v^2}, \\
 \bar{a}_1 &\equiv -\frac{u^4 + 2}{2u^3}, & \bar{a}_2 &\equiv -\frac{\sqrt{u^4 - 2}}{2u}, & \bar{b}_1 &\equiv -\frac{1 + v^4}{2v}, & \bar{b}_3 &\equiv \frac{\sqrt{1 - v^4}}{2v}, \\
 U &\equiv \frac{8u^2}{u^4 - 2} + \frac{4v^2}{1 - v^4}, \\
 P_4 &\equiv \lambda(2 - u^4 - 8lu^2), \\
 Q_4 &\equiv \mu(v^4 - 1 + 4lv^2), \\
 P_2 &\equiv (1 - 2lu^2) : \sqrt{1 + 4l^2}, \\
 \lambda &\equiv 1, & \mu &\equiv (1 + 8l^2) : (1 + 4l^2), \\
 A_1 &\equiv -\frac{2}{u^2} \sqrt{\frac{1 + 4l^2}{1 + 8l^2}}, & A_2 &\equiv -\frac{\sqrt{u^4 - 2 + 8lu^2}}{u^2 \sqrt{1 + 8l^2}}, \\
 h &\equiv \sqrt{\frac{1 + 4l^2}{1 + 8l^2}}, & C &\equiv \frac{8l^2}{1 + 8l^2}, \\
 B_1 &\equiv -\frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{1 + 8l^2}{1 + 4l^2}} - \frac{2l}{\sqrt{(1 + 4l^2)(1 + 8l^2)}}, \\
 B_3 &\equiv \frac{\sqrt{1 - v^4 - 4lv^2}}{v^2 \sqrt{1 + 4l^2}}, & m &\equiv \frac{-2l}{\sqrt{(1 + 4l^2)(1 + 8l^2)}}, \\
 \bar{A}_1 &\equiv -\frac{u^4 + 2}{2u^3} \sqrt{\frac{1 + 4l^2}{1 + 8l^2}}, & \bar{A}_2 &\equiv -\frac{(2lu^2 + 1) \sqrt{u^4 - 2 + 8lu^2}}{2u^3 \sqrt{1 + 8l^2}}, \\
 \bar{C} &\equiv -l, \\
 \bar{B}_1 &\equiv -\frac{1 + v^4}{2v^3} \sqrt{\frac{1 + 8l^2}{1 + 4l^2}}, & \bar{B}_3 &\equiv \frac{(2lv^2 + 1) \sqrt{1 - v^4 - 4lv^2}}{2v^3 \sqrt{1 + 4l^2}}, \\
 C' &\equiv 0, & \bar{m} &\equiv 0, \\
 U_4 &\equiv (u^2 + 4l) \sqrt{1 + 8l^2}, & \bar{U}_4 &\equiv u \sqrt{1 + 8l^2}, \\
 \alpha &\equiv \frac{d\bar{a}_1}{da_1} = \frac{6 - u^4}{8u}, & \beta &\equiv \frac{d\bar{b}_1}{db_1} = \frac{3 - v^4}{4v}.
 \end{aligned}$$

Les calculs ont été faits en suivant pas à pas la méthode indiquée;

le polynome  $P_1 + Q_1$  est bicarré, la condition pour qu'il soit carré parfait est

$$4l^2(\mu - 2\lambda)^2 + (\mu - 2\lambda)(\mu - \lambda) = 0.$$

La racine  $\mu - 2\lambda = 0$  est à rejeter, car elle ne tend pas vers un quand  $l$  tend vers zéro; on a donc pris l'autre racine. *On remarquera que si  $p_2$  a une racine double, cette propriété disparaît au cours de la déformation; les racines de  $p_1$ ,  $q_1$  et  $p_2$  ici appartiennent, par couples, à une même involution et cette particularité subsiste au cours de la déformation pour  $P_1$ ,  $Q_1$  et  $P_2$ .*

*Deuxième exemple :*

$$\begin{aligned} p_2 &= u, & p_1 &= u^4 - 1, & q_1 &= 1 + u^2 - u^4, \\ u_1 &= u, & u_2 &= \sqrt{1 - u^4}, & v_2 &= -\sqrt{v^4 - v^2 - 1}, \\ & & u_3 &= 1, & \bar{u}_3 &= u^2, \\ a_1 &= \frac{-2u}{1+u^4}, & a_2 &= \frac{-\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}, & b_1 &= \frac{v-2v^3}{v^4+1}, & b_2 &= \frac{\sqrt{v^4-v^2-1}}{v^4+1}, \\ \bar{v} &= \frac{1+4u^2-u^4}{1-u^4}, & \bar{v} &= \frac{5v^2}{v^4-v^2-1}, \\ P_2 &= l[u^4 - 1 + l(u^4 - 4u^2 - 1)], \\ Q_1 &= p(1 + u^2 - u^4 - 5lu^2). \end{aligned}$$

Ici on a encore pour  $P_1 + Q_1$  un polynome bicarré

$$u^4[\lambda(1+l) - p] + u^2[\mu(1+5l) - 4l] + \mu - (1+l)\lambda,$$

et la condition pour qu'il soit carré parfait est, *en n'oubliant pas qu'il faut s'assurer d'abord si le terme en  $u^4$  est nul ou non*,

$$\{[4l\lambda - \mu(1+5l)]^2 + 4[\mu - (1+l)\lambda]^2\}[\mu - \lambda(1+l)] = 0$$

et la racine à prendre pour cette équation de degré 3 est la *racine rationnelle tendant vers un si  $l$  tend vers zéro*,  $\mu : \lambda = 1 + l$ ; on prend  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1 + l$  et l'on trouve aisément

$$\begin{aligned} P_2 &= u\sqrt{1+2l+5l^2}, & P_1 &= u^4 - 1 + l(u^4 - u^2 + 1), \\ Q_1 &= (1+l)[1+u^2-u^4+5lu^2], \\ G &= \frac{4l^2}{4l^2+(1+l)^2}, & h &= \sqrt{\frac{1}{1+l}}, & m &= 0. \end{aligned}$$

Cet exemple offre la particularité que les racines de  $p_2$  *divisent harmoniquement un premier, puis un second couple de racines de  $p_4$  (et par suite aussi de  $q_4$ )*; et alors les racines de  $P_2$  sont fixes et continuent à avoir les mêmes propriétés pour  $P_4$  et  $Q_4$  au cours de la déformation.

*Troisième exemple :*

$$\begin{aligned} p_2 &= 1, & p_4 &= -u^3, & q_4 &= 1 + v^3, \\ u_1 &= 1, & u_2 &= \sqrt[3]{u^3}, & v_3 &= -\sqrt[3]{-1 - v^3}, & u_4 &= u, & \bar{u}_4 &= u^2, \\ a_1 &= -\frac{u}{3}, & a_2 &= \frac{-2}{3\sqrt[3]{u}}, & b_1 &= \frac{2 - v^3}{3v^2}, & b_3 &= \frac{2\sqrt[3]{-1 - v^3}}{3v^2}, \\ \bar{a}_1 &= \frac{u^2}{3}, & \bar{a}_2 &= \frac{-4\sqrt[3]{u}}{3}, & \bar{b}_1 &= \frac{4 + v^3}{3v}, & \bar{b}_3 &= \frac{4\sqrt[3]{-1 - v^3}}{3v}, \\ \alpha &= \frac{d\bar{a}_1}{da_1} = -2u, & \beta &= \frac{d\bar{b}_1}{db_1} = \frac{(4 - 2v^3)v}{4 + v^3}, \\ U &= u = \frac{u^4}{u^3}, & V &= \frac{8v - v^4}{1 + v^3}. \end{aligned}$$

On a mis  $U$  sous la forme  $\frac{u^4}{u^3}$ , où le dénominateur reproduit  $p_4$ ; on a

$$\begin{aligned} P_4 &= -\lambda(1 + lu)u^3, \\ Q_4 &= \mu[1 + v^3 + l(v^4 - 8v)]. \end{aligned}$$

On a sans peine, en prenant  $\mu = 1$ ,

$$\begin{aligned} P_2 &= 1 - 4lu - 8l^2u^2, & \lambda &= 1 - 64l^3, & \mu &= 1, \\ h &= \sqrt[3]{1 - 64l^3}, & m &= \frac{-16}{\sqrt[3]{1 - 64l^3}}, & C &= -4l, \\ \Lambda_1 &= \frac{-u}{3}\sqrt[3]{1 - 64l^3}, & \Lambda_2 &= \frac{-2}{3\sqrt[3]{u}}(1 + 2lu)\sqrt[3]{1 + lu}. \end{aligned}$$

Ici  $p_2$  a une racine double qui est racine simple de  $p_4$  et, de plus,  $p_4$  a une racine triple;  $P_4$  a une racine triple fixe, mais  $P_2$  a des racines distinctes.

*Quatrième exemple :*

Supposons que  $p_2$  ait une racine double qui soit en même temps racine triple de  $p_4$  et  $q_4$ , on pourra écrire

$$p_2 = 1, \quad p_4 = -2u, \quad q_4 = 1 + 2v,$$

choisissons

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \sqrt{2u}, \quad v_3 = \sqrt{-1 - 2v}, \quad u_4 = u, \quad \bar{u}_4 = \frac{u^2}{2}.$$

Nous retrouvons, aux notations près, l'exemple trouvé directement au Chapitre I, § II, n° 7.

On a ici  $U = 1 : 2u$ ,  $V = -1 : (1 + 2v)$ , et au cours de la déformation, on peut prendre

$$\begin{aligned} P_4 &= -2u - l, & Q_4 &= 1 + 2v + l, & P_2 &= 1, \\ U_1 &= 1, & U_2 &= \sqrt{2u + l}, & V_3 &= \sqrt{-1 - l - 2v}, & U_4 &= u + l, \\ \bar{U}_4 &= \frac{u^2}{2} + lu - l^2. \end{aligned}$$

Cet exemple où le couple  $(a)$ ,  $(b)$  se compose de deux paraboles focales qui restent égales à elles-mêmes au cours de la déformation est très curieux, car on remarque que les coordonnées tangentielles de la parabole  $(a)$ , à savoir  $1$ ,  $\sqrt{2u}$ ,  $u$ , pourraient être multipliées par  $\lambda u + \mu$  sans que les conditions de degré exigées soient modifiées [mais le couple  $(\bar{a})$ ,  $(\bar{b})$  doit être modifié]; si l'on suppose  $\lambda = 0$ , on retombe sur le type étudié; nous pourrions donc supposer, par homothétie,  $\lambda = 1$ , et cela nous conduit au cinquième exemple.

*Cinquième exemple :*

$$p_2 = u + k, \quad p_4 = -2u(u + k)^2, \quad q_4 = (1 + 2u)(u + k)^2,$$

$p$ , et  $q$ , admettent les racines de  $p_2$ , l'une comme racine double  $(-k)$ , l'autre  $(\infty)$  comme racine simple. En prenant  $u_4 = u(u + k)$ , nous trouvons pour  $(a)$ ,  $(b)$  un couple de paraboles focales; or, on voit aussitôt que la transformation

$$\Lambda_1 = ha_1, \quad \Lambda_2 = a_1^2(1 - h^2) + a_2^2 + 2hma_1 - C$$

transforme une conique quelconque  $(a_1, a_2)$  d'axe  $Ox$  en une nouvelle conique; si en même temps on prend la conique focale  $(b_1, b_3)$ , la transformation

$$B_1 = \frac{b_1}{h} + m, \quad B_3 = b_1^2 \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) + b_3^2 - 2m \frac{b_1}{h} + C - m^2$$

fournit pour (B) la conique focale de (A) et ceci quels que soient les paramètres  $C, h, m$  qui définissent la transformation.

Il s'agit maintenant de trouver  $(\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{A}), (\bar{B})$ ; les polynômes du second degré linéairement indépendants, au nombre de trois, peuvent être pris égaux à  $u(u+k), u+k, 1$ ; le premier a déjà été employé; le second égal à  $p_2$  doit être rejeté. Nous prendrons donc  $\bar{\pi}_2 = 1$ .

Nous avons donc

$$\begin{aligned} p_2 &= u+k, & p_4 &= -2u(u+k)^2, & q_4 &= (1+2v)(v+k)^2, \\ \pi_2 &= u+k, & \pi_4 &= 1, \\ a_1 &= u, & a_2 &= \sqrt{2u}, \\ \bar{a}_1 &= \frac{-(3u+k)}{(u+k)^2}, & \bar{a}_2 &= \frac{\sqrt{2u}}{(u+k)^2}, \\ b_1 &= 1+v, & b_2 &= \sqrt{-1-2v}, \\ b_3 &= \frac{-(1+k+3v)}{(v+k)^2}, & b_4 &= \frac{-\sqrt{-1-2v}}{(v+k)^2}, \\ u+1 &= \sqrt{\frac{u^2+(6k+2)u+k^2}{2u} - \frac{v^2+(6k+2)v+(1+k)^2}{1+2v}}. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned} P_4 : (u+k)^2 &= -\lambda \{ 2u+l[u^2+(6k+2)u+k^2] \}, \\ Q_4 : (v+k)^2 &= \mu \{ 1+2v+l[v^2+(6k+2)v+(1+k)^2] \}. \end{aligned}$$

Cette fois une difficulté se présente : le polynôme

$$\begin{aligned} (P_4 + Q_4) : (u+k)^2 \\ = lu^2(\mu - \lambda) + (\mu - \lambda) [l(6k+2) + 2]u + \mu[(1+k)^2 + 1] - \lambda lk^2 \end{aligned}$$

est carré parfait pour deux valeurs de  $\mu$ ;  $\lambda$  dont l'une est fixe et égale à un, l'autre variable avec  $l$  et tendant vers un quand  $l$  tend vers zéro, de sorte que nous ne savons *a priori* quelle racine prendre; mais nous avons remarqué que nous pouvons continuer sans calculer  $\lambda$ ;  $\mu$ ;  $A_2$  et  $B_3$  ne doivent contenir d'autre irrationalité que

$$\sqrt{2u+l[u^2+(6k+2)u+k^2]}$$

ou

$$\sqrt{-1-2v-l[v^2+(6k+2)v+(1+k)^2]}$$

et puisque l'on a

$$\begin{aligned} A_2^2 &= u^2(1-h^2) + 2(1+mh)u - C, \\ B_3^2 &= (1+v)^2 \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) - 1 - 2v - \frac{2m}{h}(1+v) + C - m^2, \end{aligned}$$

on aura

$$\frac{1-h^2}{l} = \frac{mh+1}{(3k+1)l+1} = \frac{-C}{lk^2} = \frac{(mh+1)^2 - Ch^2}{l(1+k)^2+1}.$$

En prenant comme inconnues  $H = h^2 - 1$ ,  $M = mh + 1$ , on a

$$C = k^2 H, \quad M = -H \left[ 3k + 1 + \frac{1}{l} \right]$$

et par suite

$$\frac{H}{l} = \frac{-H^2 \left[ 3k + 1 + \frac{1}{l} \right]^2 + k^2 H(H+1)}{l(1+k)^2+1}.$$

La solution  $H = 0$  est inacceptable, car elle donnerait

$$h = 1, \quad m = -1, \quad C = 0, \quad A_2 \equiv 0, \quad B_2 \equiv 0,$$

et la surface déformée de  $S$  se réduirait à l'axe des  $x$ ; on prend donc

$$\begin{aligned} H = h^2 - 1 &= \frac{-l}{(4k+1)l+1}, \quad mh+1 = \frac{(3k+1)l+1}{(4k+1)l+1}, \\ C &= \frac{-k^2 l}{(4k+1)l+1}, \quad h = \sqrt{\frac{4kl+1}{(4k+1)l+1}}, \\ A_1 &= u \sqrt{\frac{4kl+1}{(4k+1)l+1}}, \quad A_2 = -\frac{\sqrt{2u+l[u^2+(6k+2)u+k^2]}}{\sqrt{(4k+1)l+1}}. \end{aligned}$$

L'identité  $U_1 A'_1 + U_2 A'_2 = 0$  permet d'écrire

$$\begin{aligned} U_1 = P_2 &= \frac{[1+l(u+3k+1)](u+k)}{\sqrt{4kl+1}}, \\ U_2 = \sqrt{-P_2} &= (u+k) \sqrt{2u+l[u^2+(6k+2)u+k^2]}, \\ U_3 &= \frac{\{u+l[(3k+1)u+k^2]\}(u+k)}{\sqrt{(4k+1)l+1}}. \end{aligned}$$

Inutile de poursuivre davantage les calculs : ces valeurs de  $P_2$  et  $P_3$  montrent que la racine  $\mu : \lambda$  à choisir est celle qui n'est pas égale à 1 ; au cours de la déformation le couple (A), (B) se compose de deux



coniques focales à centre dont les excentricités sont respectivement  $\frac{1}{h}$  et  $h$ , de sorte que, sauf pour  $h = 0$ , c'est-à-dire sauf pour S, on a des coniques à centre;  $P_4$  et  $Q_4$  ont une racine double commune fixe (*nécessairement* racine de  $P_2$ ), on remarque que les racines variables de  $P_4$  (ou  $Q_4$ ) ont une demi-somme égale à la racine variable de  $P_2$ . Nous verrons un peu plus loin l'utilité de cette remarque.

*On doit remarquer que pour  $k = 0$ ,  $p_4$  a une racine triple qui lui est commune avec  $p_2$ , cette propriété se conserve au cours de la déformation.*

Autre remarque : L'exemple 5 comprend l'exemple 4 comme cas particulier; mais on a détruit l'homogénéité en écrivant  $u + k$  au lieu de  $\lambda u + \mu$ ; il faut supposer que  $k$  devienne infini et il est bon de substituer à  $l$  une variable  $C$  définie par l'égalité

$$C = \frac{-k^2 l}{(4k+1)l+1},$$

et l'on suppose que  $k$  devienne infini, mais que  $C$  reste fini;  $C$  est le paramètre de déformation.

*Sixième exemple.* — C'est celui qui a été donné au Chapitre I, § II, n° 8, (A), (B) sont deux coniques focales à centre, et  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  deux paraboles focales. On a pris ( $\omega$  constante arbitraire)

$$\begin{aligned} A_1 &= u \operatorname{ch}^2 \omega, & A_2 &= (D^2 - u^2 \operatorname{ch}^2 \omega)^{\frac{1}{2}}, \\ B_1 &= u \operatorname{sh}^2 \omega, & B_2 &= (u^2 \operatorname{sh}^2 \omega - D^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \bar{A}_1 &= \frac{u^2 \operatorname{ch}^2 \omega - 1}{2u^2}, & \bar{A}_2 &= \frac{A_2}{uD^2}, \\ B_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{D^2} + \frac{u^2 \operatorname{sh}^2 \omega - 1}{2u^2}, & \bar{B}_2 &= \frac{-B_2}{uD^2}, \end{aligned}$$

$D$  est le paramètre de déformation;  $D = 1$  donne la surface initiale. Les équations tangentielles des coniques à centre (A), (B) prouvent que l'on doit prendre  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  proportionnels à  $u$ ,  $\sqrt{D^2 - u^2 \operatorname{ch}^2 \omega}$ ,  $-D^2$ ; or l'expression  $A_1 u + A_2 \sqrt{D^2 - u^2 \operatorname{ch}^2 \omega}$  est égale à  $-(u + D^2)$  tandis que  $\bar{A}_1 u + \bar{A}_2 \sqrt{D^2 - u^2 \operatorname{ch}^2 \omega}$  est égale à  $u \operatorname{ch}^2 \omega \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{D^2} \right) + \frac{1}{2u}$  de sorte que pour obtenir des polynômes de degré 2,  $U_4$  et  $\bar{U}_4$  il faut

prendre

$$\begin{aligned} U_1 &= u^2, & U_2 &= u \sqrt{D^2 - u^2 \operatorname{ch}^2 \omega}, & U_3 &= -u D^2, \\ \bar{U}_1 &= u^2 \operatorname{ch}^2 \omega \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{D^2} \right) + \frac{1}{2}, \\ u_1 &= u^2, & u_2 &= u \sqrt{1 - u^2 \operatorname{ch}^2 \omega}, & u_3 &= -u, \\ P_2 &= u^2, & P_4 &= u^4 \operatorname{ch}^2 \omega - D^2 u^2, & Q_4 &= D^2 v^2 - v^4 \operatorname{sh}^2 \omega, \end{aligned}$$

autrement dit  $P_4$  et  $Q_4$  ont une racine double commune, fixe au cours de la déformation, nécessairement racine de  $P_2$  et qui de plus est double pour  $P_2$ .

Je reviens d'abord sur l'étude de cet exemple si intéressant : comparons sur les surfaces  $S_1$  et  $S_D$  les nappes engendrées par les points

$$\begin{aligned} u &= u_0, & v &= v_0 & \text{sur } S_1, \\ u &= D u_0, & v &= D v_0 & \text{sur } S_D, \end{aligned}$$

les valeurs de  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  sont alors  $D^2 u_0^2$ ,  $D^2 u_0 \sqrt{1 - u_0^2 \operatorname{ch}^2 \omega}$ ,  $-u_0 D^3$  que l'on peut réduire à  $u_0^2$ ,  $u_0 \sqrt{1 - u_0^2 \operatorname{ch}^2 \omega}$ ,  $-D u_0$  de sorte que la nappe considérée de  $S_D$  est l'homothétique de celle de  $S_1$ , le centre étant l'origine et le rapport d'homothétie  $\frac{S_D}{S_1}$  égal à  $+D$ ; mais dans l'applicabilité le point  $(u_0, v_0)$  de  $S_1$  a pour homologue le point  $(u_0, v_0)$  de  $S_D$  et non plus  $(D u_0, D v_0)$ . Considérons de même  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_D$ ; remarquons que, par une translation le long de  $Ox$ , on peut réduire, pour  $\Sigma_D$ ,  $\bar{U}_4$  à  $\frac{1}{2}$  : alors le même raisonnement prouve que la nappe engendrée par le point  $(D u_0, D v_0)$  de  $\Sigma_D$  est l'homothétique encore de la nappe engendrée par le point  $(u_0, v_0)$  de  $\Sigma_1$ , mais avec le rapport d'homothétie  $\frac{1}{D^2}$ .

De la sorte, à deux paraboles focales *arbitraires* correspond *une seule* surface  $\Sigma$ , pour une valeur donnée de  $\omega$ , autrement dit à chaque couple de paraboles focales nous ferons correspondre :

- $\infty^1$  surfaces  $\Sigma$  (le paramètre étant  $\omega$ ) de notre sixième exemple;
- $\infty^1$  surfaces  $S$  (le paramètre étant  $k$ ) de notre cinquième exemple;
- Une seule surface  $S$  du quatrième exemple (je rappelle que la surface  $S$  est auto-applicable).

Les surfaces ainsi obtenues ont toutes un réseau conjugué permanent doublement conique, les sommets des cônes circonscrits étant répartis sur les deux paraboles. La discussion faite sur les polynômes  $p_2, p_4, q_4$  ou  $P_1, P_4, Q_4$  prouvent que ces trois espèces sont essentiellement distinctes; en particulier elles ne sont pas applicables les unes sur les autres.

De même, l'excentricité commune des ellipses (A) du sixième exemple étant  $\text{th } \omega$ , on voit qu'à tout couple donné constitué d'une ellipse et d'une hyperbole focales correspond :

1° Une unique surface S du sixième exemple;

2°  $\infty^1$  surfaces  $\Sigma$  du cinquième exemple, le paramètre étant  $k$ ; chaque valeur de  $k$  donnant une seule surface  $\Sigma$ ; ici encore, il y a irréductibilité des surfaces en question.

Or, le sixième exemple met en évidence que l'on aurait encore les conditions de degré voulues en prenant

$$u_1 = u(\lambda u + \mu), \quad \mu_2 = \lambda u + \mu \sqrt{1 - u^2 \text{ch}^2 \omega}, \quad u_3 = -(\lambda u + \mu),$$

La valeur  $\mu = 0$  redonnerait le sixième exemple; supposons donc  $\mu \neq 0$ , donc, par homothétie, égal à 1; mais alors les polynômes

$$\begin{aligned} p_2 &= u(\lambda u + 1), \\ p_4 &= (u^2 \text{ch}^2 \omega - 1)(\lambda u + 1)^2, \\ q_4 &= (1 - u^2 \text{sh}^2 \omega)(\lambda u + 1) \end{aligned}$$

sont tels que  $p_4$  et  $q_4$  ont une racine double commune, racine simple de  $p_2$ ; d'autre part, les racines simples de  $p_4$  (ou  $q_4$ ) ont pour demi-somme zéro qui est l'autre racine de  $p_2$ : ce sont justement les circonstances caractéristiques de l'exemple 5 (comme on le voit par un simple changement linéaire sur  $u$ ). Il n'y a donc rien de nouveau à obtenir; sans notre discussion préalable, nous voyons ainsi que nous aurions risqué de faire des calculs superflus; de plus, les cas prévus *a priori* ont été retrouvés directement.

Exemple 6 :

$$p_2 = 1, \quad p_4 = \lambda(u^2 - 1), \quad q_4 = 1 + \lambda - \lambda u^2.$$

Exemple 4 :

$$p_2 = 1, \quad p_4 = u, \quad q_4 = 1 - u.$$

Exemple 5 :

$$p_2 = u, \quad p_4 = \lambda(u^2 - 1), \quad q_4 = u^2(1 - \lambda) + \lambda.$$

Exemple 3 (pour  $k = 0$ ) :

$$p_2 = u, \quad p_4 = u, \quad q_4 = u^2 - u.$$

Cet exemple 5 est curieux en ce sens qu'il donne comme cas particuliers 4 ou 6 qui se trouvent ainsi réunis par un lien difficile à apercevoir à l'avance. J'ai signalé qu'il y a encore un autre cas où le couple  $(a), (b)$  est composé de deux coniques focales, à savoir :

$$p_2 = u + k, \quad p_4 = \lambda(u^2 - 1), \quad q_4 = \lambda(1 - u^2) + (u + k)^2.$$

En terminant, remarquons que deux plans imaginaires conjugués ne peuvent être perpendiculaires, donc toute surface à réseau doublement conique *permanent*, si elle est réelle, donne un réseau réel; mais pour le cas des *bases simples*, on peut avoir un réseau doublement conique imaginaire dans les deux familles, les deux surfaces étant réelles. Dans le cas d'une base permanente doublement cylindrique, il n'y a que l'exemple des surfaces minima qui donne un réseau imaginaire.

