

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

GEORGES NICOLADZÉ

Sur les systèmes continus de figures géométriques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__88__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__88__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

À mon cher Maître M. E. Cartan, hommage respectueux
de l'auteur

Paris $\frac{5}{VI}$ 1928.

N° D'ORDRE :
2006

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Georges NICOLADZÉ

Professeur-adjoint de l'Université de Tiflis (Géorgie)

1^{re} THÈSE. — SUR LES SYSTÈMES CONTINUS DE FIGURES GÉOMÉTRIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le juin 1928, devant la Commission d'Examen.

MM. CARTAN, . . .	Président
CHAZY, . . .	} Examinateurs
DENJOY. . .	

INSTITUT HENRI POINCARÉ



PARIS.

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD

3 ET 3^{bis}, PLACE DE LA SORBONNE

1928

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Doyens honoraires P. APPELL, M. MOLLIARD.

Prof. honoraires

P. PUISKUX.
V. BOUSSINESQ.
A. JOANNIS
H. LE CHATELIER.
H. LEBESQUE.
A. FERNBACH.
A. LEDUC.

Émile PICARD . . . Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. KÖNIGS . . . Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT . . . Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET . . . Electrotechnique générale.
F. WALLERANT . . . Minéralogie.
H. ANDOYER . . . Astronomie.
P. PAINLEVÉ . . . Mécanique analytique et mécanique céleste.
Gabriel BERTRAND . . . Chimie biologique.
Mme P. CURIE . . . Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY . . . Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN . . . Chimie minérale.
Émile BOREL . . . Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS . . . Aviation.
Jean PERRIN . . . Chimie physique.
Romy PERRIER . . . Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM . . . Physique.
M. MOLLIARD . . . Physiologie végétale.
E. CARTAN . . . Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE . . . Physiologie générale.
E. VESSIOT . . . Théorie des fonctions et théories des trans-
formations.

Professeurs

A. COITON . . . Physique générale.
J. DRACH . . . Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY . . . Physique.
Charles PÉREZ . . . Zoologie.
Léon BERTRAND . . . Géologie structurale et géologie appliquée.
R. LESPIEAU . . . Théories chimiques.
E. RAHAUD . . . Biologie expérimentale.
P. PORTIER . . . Physiologie comparée.
E. BLAISE . . . Chimie organique.
P. A. DANGEARD . . . Botanique.
P. MONTEL . . . Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT . . . Anatomie et histologie comparées.
O. DUROSCQ . . . Biologie maritime.
G. JULIA . . . Mathématiques générales.
A. JOB . . . Chimie générale.
A. MAILHE . . . Étude des combustibles.
L. LUTAUD . . . Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH . . . Physique théorique et physique célestes.
Henri VILLAT . . . Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB . . . Géologie.
P. PASCAL . . . Chimie appliquée.

E. HÉROUARD . . . Zoologie.
E. PÉCHARD . . . Chimie (Enseign. P. C. N.).
V. AUGER . . . Chimie analytique.
M. GUICHARD . . . Chimie minérale.
A. GUILLET . . . Physique.
C. MAUGUIN . . . Minéralogie.
L. BLARINGHEM . . . Botanique.
A. MICHEL-LÉVY . . . Pétrographie.
A. DREIMS . . . Géologie.
R. DONGIER . . . Physique du globe.
A. DENJOY . . . Calcul diffé. et intégral.
H. BÉNARD . . . Physique (P. C. N.).

E. DARMOIS . . . Physique.
G. BRCHAT . . . Physique.
H. MOUTON . . . Chimie physique.
L. JOLEAUD . . . Paléontologie.
M. JAVILLIER . . . Chimie biologique.
A. DUFOUR . . . Physique (P. C. N.).
F. PICARD . . . Zoologie (Évolution des
êtres organisés).
ROBERT-LÉVY . . . Zoologie.
L. DUNOYER . . . Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND . . . Botanique (P. C. N.).
A. DEBIÈRE . . . Radioactivité.

Secrétaire Daniel TOMBRON.

SUR LES SYSTÈMES CONTINUS DE FIGURES GÉOMÉTRIQUES

PRÉFACE

L'étude des transformations continues de figures géométriques se fait en général de la manière suivante : on détermine le système des équations différentielles attaché à l'ensemble donné de transformations et, en étudiant ce système, on en déduit toutes les propriétés de l'ensemble considéré. On sait que les résultats ainsi obtenus, si importants qu'ils soient, ne valent que dans un domaine restreint et ne peuvent s'étendre (en général) à l'intégralité des transformations possibles. En effet, les équations différentielles n'existent que dans les cas génériques des transformations données, tandis que pour les cas exceptionnels elles cessent d'exister (partiellement ou complètement). Donc, les propriétés tirées des équations différentielles ne sont valables que dans un domaine exempt de cas exceptionnels.

La voie que j'ai choisie ici est tout autre. En partant directement des équations en termes finis (même sans les connaître), j'étudie l'influence de quelques propriétés des transformations supposées sur la forme de ces équations et vice versa. Les résultats que j'obtiens ainsi, peuvent évidemment s'étendre à l'intégralité des transformations données.

Pour faciliter l'étude, j'introduis quelques notions auxiliaires, par exemple, celles du système osculateur, de la figure

produite, celle de grade d'un système continu, etc. Ma recherche ne prétend nullement être complète. Ce ne sont plutôt que des principes qu'on peut étendre ensuite dans plusieurs directions. Comme exemple, j'applique les résultats déjà obtenus, dans l'étude de quelques systèmes algébriques de courbes planes dégénérées et je démontre ainsi quelques théorèmes nouveaux dans la théorie des configurations.

Il est à remarquer que la première partie de ce travail admet quelques points de contact avec la théorie récente de l'application projective des figures. Par comparaison, on peut facilement voir que dans cette dernière théorie, on démontre parfois des propriétés qui ne sont pas du tout spécifiquement projectives, mais le caractère plus général de ces propriétés ne peut pas être observé, car la méthode de démonstration qu'on y emploie, n'est valable que pour les transformations projectives. Tandis que, par ma méthode, les mêmes propriétés peuvent être démontrées beaucoup plus simplement, et on voit, en outre, qu'elles gardent leur valeur pour toutes les transformations continues et non seulement pour les déplacements projectifs.

Mon travail a été effectué presque entièrement sous la direction de M. le professeur E. Cartan, à qui je dois beaucoup dans le domaine des méthodes géométriques. L'énoncé de plusieurs théorèmes du texte qui suit a subi de nombreuses modifications dues à la critique de M. Cartan et les précieuses indications qu'il m'a données si souvent pendant mon séjour à Paris, resteront toujours pour moi des repères fondamentaux dans mon travail scientifique ultérieur.

CHAPITRE PREMIER

1. — Considérons sur le plan (x, y) un système continu à p paramètres (λ_j) de courbes, donné par l'équation :

$$(1) \quad F(x, y, \lambda_j) = 0, \quad (j = 1, \dots, p)$$

où F et ses dérivées partielles sont des fonctions continues en x, y, λ_j .

Considérons un autre système de courbes à p paramètres :

$$(2) \quad F(x, y, \lambda_j^0) + \sum_j \frac{\partial F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_j} (\lambda_j - \lambda_j^0) + \dots \\ + \sum_{j_1 \dots j_k} \frac{\partial^k F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}} \cdot \frac{(\lambda_{j_1} - \lambda_{j_1}^0) \dots (\lambda_{j_k} - \lambda_{j_k}^0)}{k!} = 0.$$

Nous appellerons ce système *le système algébrique osculateur d'ordre k du système (1) dans (λ_j^0)* ⁽¹⁾. Convenons que la courbe (λ_j^0) elle-même est un système osculateur d'ordre zéro.

Considérons en même temps le système linéaire de courbes déterminé par l'équation :

$$(3) \quad F(x, y, \lambda_j^0) + \sum_j \frac{\partial F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_j} \mu_j + \dots \\ + \sum_{j_1 \dots j_k} \frac{\partial^k F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}} \mu_{j_1} \dots \mu_{j_k} = 0,$$

⁽¹⁾ Nous disons brièvement « la courbe (λ_j^0) », en supposant une courbe particulière du système donné pour laquelle $\lambda_j = \lambda_j^0$.

où les $\mu_j, \mu_{j_1 j_2}, \dots, \mu_{j_1 \dots j_k}$ sont les paramètres arbitraires, dont nous désignerons le nombre par $N_{k,p}$.

Nous appellerons le système (3) *le système linéaire osculateur d'ordre k du système (1) dans (λ_j^0)* .

Il est évident que le système osculateur algébrique (2) (à p paramètres) est contenu dans le système linéaire osculateur (3) (à $N_{k,p}$ paramètres). Ces deux systèmes sont, en effet, déterminés par les mêmes expressions, à savoir :

$$(4) \quad F(x, y, \lambda_j^0), \frac{\partial F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_j}, \dots, \frac{\partial^k F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}}.$$

Dans la suite nous dirons simplement « le système osculateur d'ordre k » chaque fois que la propriété en considération s'étend sur tout le système osculateur linéaire et non seulement sur le système osculateur algébrique.

Il est facile de déterminer le nombre $N_{k,p}$ de paramètres arbitraires μ de l'équation (3). Effectuons pour cela sur (3) la substitution :

$$\mu_{i_1 \dots i_r} = \frac{\nu_{i_1} \dots \nu_{i_r}}{\nu_0}, \quad \begin{cases} i_j = 1, 2, \dots, p \\ f = 0, 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

où les ν_j (avec $j = 0, 1, \dots, p$) sont des paramètres arbitraires en nombre de $p + 1$. En multipliant ensuite la partie gauche de l'équation (3) par la puissance k de ν_0 , nous obtenons évidemment une forme homogène d'ordre k en ν_j . Donc, en supposant le cas général où toutes les expressions (4) sont linéairement indépendantes, nous avons :

$$(5) \quad N_{k,p} = \binom{k+p}{p} - 1.$$

Il est à remarquer que $N_{k,1} = k$.

REMARQUE. — Supposons qu'on a établi d'une manière quelconque une correspondance biunivoque entre les courbes, les faisceaux linéaires, etc... du système donné (1) d'un côté et les

points, les droites, etc... d'un espace Σ à n'importe quel nombre de dimensions, de l'autre. Il est évident qu'au système (1) correspond dans Σ une variété continue W_p à p dimensions, tandis qu'au système (3), un espace plan $S_{N_{k,p}}$ à $N_{k,p}$ dimensions, osculateur d'ordre k à W_p dans un de ces points. Nous retrouvons ainsi le résultat obtenu pour la première fois par P. Del Pezzo ⁽¹⁾ : que le nombre de dimensions d'un espace plan, osculateur d'ordre k à une variété continue à p dimensions est déterminé par la formule (5). Mais il est aussi évident que cette formule n'est vraie que dans le cas général, tandis que le nombre $N_{k,p}$ diminue, quand les expressions (4) ne sont pas toutes linéairement indépendantes, ce qu'a remarqué pour la première fois C. Segre ⁽²⁾.

Supposons maintenant que la courbe (λ_j^0) est une courbe générique de système (1) et que la dérivée partielle $\frac{\partial^k F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}}$ est une combinaison linéaire des dérivées partielles des ordres moins élevés, c. à d. soit :

$$(6) \quad \frac{\partial^k F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}} = m \frac{\partial^{k-a} F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{i_1} \dots \partial \lambda_{i_{k-a}}} + n \frac{\partial^{k-b} F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{e_1} \dots \partial \lambda_{e_{k-b}}} + \dots (a, b, \dots > 0).$$

Puisque la courbe (λ_j^0) est supposée générique, (6) est une identité. Donc, en dérivant (6), nous voyons qu'alors chaque dérivée partielle de l'expression $\frac{\partial^k F(x, y, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}}$ par rapport aux paramètres sera aussi une combinaison linéaire des dérivées partielles des ordres moins élevés. Cela étant, appelons *le système linéaire d'appartenance du système continu donné* (1) un système linéaire au plus petit nombre des paramètres, contenant le système (1). Soit Q ce nombre.

Dérivons la partie gauche de (1) successivement par rapport

⁽¹⁾ *Rendiconti del Accademia di Napoli*, t. 25 (1886), p. 176.

⁽²⁾ *Atti Acc. Torino*, t. 42 (1906-07), p. 1047.

aux paramètres λ_j . Supposons que toutes les dérivées partielles d'ordre $m + 1$ ainsi obtenues sont des combinaisons linéaires des dérivées des ordres moins élevés. tandis qu'au moins une des dérivées partielles d'ordre m est linéairement indépendante des dérivées partielles des ordres plus petits que m . Nous dirons dans ce cas que le système continu (1) est un *système de grade m* . Il résulte de ce qui précède que dans un tel cas, (la courbe (λ_j^0) étant supposée générique) toutes les dérivées partielles d'un ordre plus élevé que m seront des combinaisons linéaires des dérivées des ordres ne dépassant pas m . Donc, la dimension Q du système linéaire d'appartenance de système (1) de grade m ne peut pas dépasser $N_{m,p}$. En effet, la dimension Q est égale au nombre des dérivées partielles (4) linéairement indépendantes entre elles. Donc, en général, Q est inférieur à $N_{m,p}$. Seulement dans le cas de $p = 1$, Q est exactement égal à $N_{m,1} = m$, c. à d. :

La dimension du système linéaire d'appartenance d'un système continu à un paramètre est égale au grade de ce système.

Nous appellerons une courbe ordinaire (λ_j^0) du système donné (1) une courbe, qui admet avec la courbe générique de ce système exactement les mêmes expressions de la suite (4) (supposée prolongée indéfiniment) linéairement indépendantes.

Considérons la courbe formée par l'ensemble des points d'intersection simultanée des courbes du système (1) avec les courbes homologues de p systèmes quelconques :

$$(7) \quad \Omega_1(x, y, \lambda_j) = 0; \quad \dots; \quad \Omega_p(x, y, \lambda_j) = 0, \quad (j = 1, \dots, p)$$

en supposant que pour $\lambda_j = \lambda_j^0$ cette courbe passe par le point (x^0, y^0) de la courbe (λ_j^0) .

La forme des fonctions continues Ω_i , étant d'ailleurs arbitraire, il nous suffit de supposer que les équations (7) sont

linéaires et résolues par rapport aux paramètres λ_j , en particulier, qu'elles sont de la forme suivante :

$$(7') \quad \lambda_j - \lambda_j^0 = a_j(x - x^0) + b_j(y - y^0),$$

où les constantes a_j, b_j peuvent prendre toutes les valeurs arbitraires.

Nous appellerons cette courbe des intersections simultanées : *la courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$.*

On peut obtenir son équation, en tirant de (7) les λ_j en fonction des x et y , soit :

$$(8) \quad \lambda_j = \mu_j(x, y)$$

et, en portant ces expressions dans (1), ce qui nous donne :

$$(9) \quad F[x, y, \mu_j(x, y)] = 0.$$

2. — Nous supposons tout le long de ce chapitre (même quand cela n'est pas indiqué) que le point (x^0, y^0) , pris sur la courbe considérée, est un point ordinaire de cette courbe.

Démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 1. — *Quand dans un système (1) continu des courbes, la courbe (λ_j^0) admet dans son point ordinaire (x^0, y^0) un contact d'ordre s avec la courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, toutes les courbes du système osculateur d'ordre k dans (λ_j^0) , admettent dans (x^0, y^0) un contact d'ordre $(s - k)$ (au moins) avec (λ_j^0) .*

(En désignant par le contact d'ordre zéro l'intersection ordinaire des courbes).

Réciproquement :

THÉORÈME N° 2. — *Quand pour $k = 0, 1, \dots, s$ toutes les courbes d'un système osculateur d'ordre k dans (λ_j^0) d'un système (1) continu donné admettent dans (x^0, y^0) un contact d'ordre $(s - k)$ (au moins), la courbe produite générique passant*

par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, admet dans ce point un contact d'ordre s avec (λ_j^0) ⁽¹⁾.

Démonstration. — Donnons la forme paramétrique à l'équation :

$$(10) \quad F(x, y, \lambda_j^0) = 0$$

de la courbe (λ_j^0) du système (1). Soient ces équations :

$$(10') \quad x = x(t); \quad y = y(t);$$

soit en outre :

$$(10'') \quad x^0 = x(t^0); \quad y^0 = y(t^0).$$

Il résulte de l'hypothèse admise dans le théorème énoncé que nous devons obtenir une quantité infiniment petite d'ordre $(s + 1)$, en portant dans la partie gauche de l'équation (9) de la courbe produite générique, les expressions suivantes :

$$x = x(t^0 + dt); \quad y = y(t^0 + dt);$$

mais il est évident que nous arriverons au même résultat si nous portons dans la partie gauche de (9) les expressions (10'). Posons ensuite $t = t^0 + dt$ et, pour abrégé le calcul :

$$(11) \quad \mu_j[x(t), y(t)] = \lambda_j(t).$$

Puisque notre courbe produite passe par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, on a :

$$(11') \quad \mu_j(x^0, y^0) = \lambda_j^0,$$

ou, d'après (10'') :

$$(11'') \quad \lambda_j^0 = \lambda_j(t^0).$$

D'après ces conditions, il résulte que l'expression :

$$(12) \quad F[x(t^0 + dt), y(t^0 + dt), \lambda_j(t^0 + dt)] = \Phi(t^0 + dt)$$

⁽¹⁾ *Comptes Rendus*, t. 186 (1928), p. 342.

doit être une quantité infiniment petite d'ordre $(s + 1)$

Donc, en désignant :

$$(13) \quad \frac{d^k \Phi^0}{dt^k} = \left[\frac{d^k V(t)}{dt^k} \right]_{t=t^0}$$

et, en développant (12), nous avons les équations suivantes :

$$(14_0) \quad \Phi^0 = 0; \quad (14_1) \quad \frac{d\Phi^0}{dt} = 0; \quad \dots; \quad (14_s) \quad \frac{d^s \Phi^0}{dt^s} = 0.$$

Désignons :

$$(15) \quad \frac{d^k F^0}{dt^k} = \left[\frac{d^k F[x(t), y(t), \lambda_j^0]}{dt^k} \right]_{t=t^0} \equiv 0.$$

Ces dérivées sont identiquement nulles parce que les équations (10) et (10') représentent la même courbe (λ_j^0) du système (1).

En effectuant le calcul des équations (14) et en tenant compte des identités (15), nous obtenons les équations suivantes :

$$(16_1) \quad \sum_j \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{d\lambda_j^0}{dt} = 0.$$

$$(16_2) \quad 2 \sum_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{dF^0}{dt} \right] \frac{d\lambda_j^0}{dt} + \sum_{j_1 j_2} \frac{\partial^2 F^0}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}} \cdot \frac{d\lambda_{j_1}^0}{dt} \cdot \frac{d\lambda_{j_2}^0}{dt} + \sum_j \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{d^2 \lambda_j^0}{dt^2} = 0.$$

$$(16_3) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3 \sum_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{d^2 F^0}{dt^2} \right] \frac{d\lambda_j^0}{dt} + 3 \sum_{j_1 j_2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}} \left[\frac{dF^0}{dt} \right] \frac{d\lambda_{j_1}^0}{dt} \cdot \frac{d\lambda_{j_2}^0}{dt} \\ & + \sum_{j_1 j_2 j_3} \frac{\partial^3 F^0}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2} \partial \lambda_{j_3}} \cdot \frac{d\lambda_{j_1}^0}{dt} \cdot \frac{d\lambda_{j_2}^0}{dt} \cdot \frac{d\lambda_{j_3}^0}{dt} + 2 \sum_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{dF^0}{dt} \right] \frac{d^2 \lambda_j^0}{dt^2} \\ & + 3 \sum_{j_1 j_2} \frac{\partial^2 F^0}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}} \cdot \frac{d^2 \lambda_{j_1}^0}{dt^2} \cdot \frac{d\lambda_{j_2}^0}{dt} + \sum_j \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{d^3 \lambda_j^0}{dt^3} = 0. \end{aligned} \right.$$

.....
jusqu'à l'ordre s inclus.

REMARQUE. — Nous avons posé ici :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^k \lambda_j^0}{dt^k} = \left[\frac{d^k \lambda_j(t)}{dt^k} \right]_{t=t^0}; \\ & \frac{d^k}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}} \left[\frac{d^l F^0}{dt^l} \right] = \frac{\partial^k}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}} \left[\frac{d^l F[x(t), y(t), \lambda_j^0]}{dt^l} \right]_{t=t^0}. \end{aligned} \right.$$

Puisque la courbe produite est générique, il en résulte que les équations (16) doivent être satisfaites *quelles que soient les fonctions* $\lambda_j(t)$. Donc, les équations (16) entraînent nécessairement les équations suivantes :

$$(18_1) \quad \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{dF^0}{dt} \right] = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{d^{s-1} F^0}{dt^{s-1}} \right] = 0.$$

$$(18_2) \quad \frac{\partial^2 F^0}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}} = 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}} \left[\frac{dF^0}{dt} \right] = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}} \left[\frac{d^{s-2} F^0}{dt^{s-2}} \right] = 0.$$

.....

$$(18_{s-1}) \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s-1}}} = 0; \quad \frac{\partial^{s-1}}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s-1}}} \left[\frac{dF^0}{dt} \right] = 0.$$

$$(18_s) \quad \frac{\partial^s F^0}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_s}} = 0.$$

Ces équations démontrent les théorèmes énoncés.

3. — Considérons l'espace représentatif E à $p + 2$ dimensions, dont les coordonnées non homogènes d'un point sont $(x, y, \lambda_1 \dots \lambda_p)$. L'équation (1) détermine dans cet espace E une hypersurface, que nous appellerons *l'hypersurface-image* F *du système donné* (1). La courbe (λ_j^0) du système (1) peut être considérée comme la projection sur le plan (x, y) de la ligne de l'intersection de l'hypersurface-image F avec le plan $\lambda_j = \lambda_j^0$; tandis que l'intersection même peut être envisagée comme *l'image* Λ^0 *de la courbe* (λ_j^0) *dans* E . L'hypersurface cylindrique, projetant Λ^0 sur le plan (x, y) , est déterminée par l'équation (10) de la courbe (λ_j^0) . Nous appellerons cette hypersurface : *l'hypersurface cylindrique* F^0 ; de même, l'image dans E de la courbe produite générique est la ligne d'intersection simultanée des hypersurfaces (1) et (7), de sorte que la courbe produite (9) n'est que la projection sur le plan (x, y) de cette image.

L'interprétation du théorème n° 1 dans l'espace représentatif E est telle que l'hypersurface cylindrique F^0 , qui a pour

équation (10), admet dans le point (x^0, y^0, λ_j^0) un contact d'ordre s avec l'hypersurface-image F du système donné (1).

En effet, la courbe-image de la courbe produite générique située dans l'hypersurface-image F et passant par le point (x^0, y^0, λ_j^0) , admet dans ce point un contact d'ordre s avec l'hypersurface cylindrique F^0 .

Dans le cas général les points (x^0, y^0, λ_j^0) du contact entre l'hypersurface-image F et l'hypersurface cylindrique F^0 *correspondante* à la courbe (λ_j^0) , ne sont que les points distincts sur l'hypersurface F . Nous disons dans ce cas général que (λ_j^0) est une courbe *particulière* du système donné ; mais il peut arriver que ces points de contact tracent sur F une suite continue des points d'un nombre de dimensions plus ou moins élevé. Il est évident que ce nombre de dimensions peut être au maximum égal à p . Dans ce dernier cas, chaque courbe tracée sur l'hypersurface F admettra nécessairement des points d'intersection avec cette suite p -dimensionnelle ; nous pouvons dire alors que (λ_j^0) est une courbe *générique* du système donné.

4. — Soit donné un système continu à p paramètres par son équation :

$$(1) \quad F(x, y, \lambda_j) = 0. \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

Considérons un système à q paramètres (où $q < p$), déterminé par (1) et par les équations paramétriques :

$$(19) \quad \lambda_j = \lambda_j(\tau_i); \quad \left\{ \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, p \\ i = 1, 2, \dots, q \end{array} \right\} \quad q < p$$

avec la condition :

$$(20) \quad \lambda_j(\tau_i^0) = \lambda_j^0.$$

Nous appellerons ce système, le *système continu* (19) à q paramètres appartenant au système (1) et passant par la courbe (λ_j^0) . Nous l'appellerons brièvement : le *système appartenant* (19).

Quand les fonctions $\lambda_j(\tau_i)$ sont bien déterminées, nous disons que le système (19) est un système *particulier*. Quand, au contraire, les fonctions continues $\lambda_j(\tau_i)$ sont des fonctions quelconques, nous disons que le système (19) est un système *générique*. Nous pouvons supposer dans ce cas les fonctions $\lambda_j(\tau_i)$ linéaires avec les coefficients arbitraires, soumises seulement à la condition de prendre la valeur λ_j^0 pour $\tau_i = \tau_i^0$.

Soit donné en outre un système des q équations :

$$(21) \quad \Omega_1(x, y, \lambda_j) = 0; \quad \dots; \quad \Omega_q(x, y, \lambda_j) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

avec les conditions :

$$(22) \quad \Omega_1(x^0, y^0, \lambda_j^0) = 0; \quad \dots; \quad \Omega_q(x^0, y^0, \lambda_j^0) = 0.$$

Il est évident que les équations (21) déterminent avec le système (19) une courbe produite de ce système. Quand les fonctions Ω_k sont bien déterminées, nous disons que c'est une courbe produite *particulière* ; dans le cas contraire où les fonctions continues Ω_k sont supposées arbitraires, nous disons que la courbe produite est une courbe produite *générique*. D'une manière analogue, nous pouvons supposer dans ce dernier cas les fonctions Ω_k linéaires de la forme (7'). Quand les équations (21) restent les mêmes pour différents systèmes (19), passant par (λ_j^0) , nous disons que la courbe produite de chaque système est produite par les mêmes équations (21). Démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 3. — *Quand la courbe produite générique d'un système continu (1) donné admet dans le point (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$ un contact d'ordre s avec la courbe (λ_j^0) du système (1), la courbe produite générique de chaque système appartenant à ce système (1) d'un nombre quelconque q de paramètres ($q = 1, 2, \dots, p$) et passant par (λ_j^0) , admet dans (x^0, y^0) aussi un contact d'ordre s (au moins) avec (λ_j^0) .*

THÉORÈME N° 4 (RÉCIPROQUE). — *Quand la courbe produite*

générique d'un système continu générique, appartenant au système (1) donné et passant par la courbe (λ_j^0) , admet dans le point (x^0, y^0) un contact d'ordre s avec (λ_j^0) , la courbe produite générique du système (1) lui-même, admet aussi dans (x^0, y^0) un contact d'ordre s avec (λ_j^0) .

Démonstration. — Cherchons l'équation de la courbe produite du système appartenant (19). Portons pour cela (19) dans (21) et résolvons le système obtenu des q équations à q inconnues τ_i ; soient :

$$(23) \quad \tau_i = \bar{\tau}_i(x, y)$$

les solutions de ce système. Donc, on a :

$$(24) \quad \bar{\tau}_i(x^0, y^0) = \tau_i^0.$$

Portons (23) dans (19), ce qui nous donne :

$$(25) \quad \lambda_j = \lambda_j[\bar{\tau}_i(x, y)] = \bar{\mu}_j(x, y),$$

avec la condition, d'après (24) et (20) :

$$(26) \quad \bar{\mu}_j(x^0, y^0) = \lambda_j^0.$$

Donc, l'équation cherchée de la courbe produite est :

$$(27) \quad F[x, y, \bar{\mu}_j(x, y)] = 0.$$

Puisque la forme de l'équation (27) est tout à fait analogue à celle de (9), les théorèmes énoncés n° 3 et n° 4 deviennent évidents. En effet, les conditions de contact dans (x^0, y^0) avec la courbe (λ_j^0) de (9) et (27), avec les fonctions $\mu_j(x, y)$ et $\bar{\mu}_j(x, y)$ arbitraires, doivent être les mêmes : ce sont les équations (18).

5. — Considérons à présent le cas où une courbe produite particulière d'un système continu admet dans chaque point (x^0, y^0) *générique* un contact d'ordre s avec la courbe correspondante (λ_j^0) du système. Démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 5. — Si dans chaque point (x^0, y^0) générique d'une courbe produite particulière (7) d'un système continu donné (1), pour une valeur quelconque particulière k ($1 \leq k \leq s$), toutes les courbes du système osculateur d'ordre k en (λ_j^0) admettent un contact d'ordre $(s - k)$ entre elles, la courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, admet dans (x^0, y^0) un contact d'ordre s (au moins) avec la courbe (λ_j^0) du système donné (1).

Pour abréger les calculs nous admettrons la notation suivante :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\lambda_j^n = d[\mu_j(x, y)]^n; \\ \frac{\partial^{n+i} F^0}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_n} \cdot \partial^{i-f} x \cdot \partial^f y} = \left[\frac{\partial^{n+i} F(x, y, \lambda_j)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_n} \partial^{i-f} x \cdot \partial^f y} \right]_{\substack{\lambda_j = \lambda_j^0 \\ x = x^0 \\ y = y^0}} \end{array} \right.$$

Démonstration. — Supposons d'abord que $k = s$. La condition que toutes les courbes du système osculateur d'ordre s passent par (x^0, y^0) exige les équations :

$$(29_0) \quad F^0 = 0; \quad (29_1) \quad \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} = 0; \quad \dots; \quad (29_s) \quad \frac{\partial^s F^0}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_s}} = 0.$$

Puisque le point (x^0, y^0) est un point générique de la courbe produite, il s'ensuit que pour le point infiniment voisin $(x^0 + dx, y^0 + dy)$ appartenant à la courbe produite et la courbe infiniment voisine correspondante $(\lambda_j^0 + d\lambda_j)$, les équations (29) existent aussi, c. à d. les équations (29) restent toutes satisfaites après la même substitution :

$$(30) \quad x^0 \rightarrow x^0 + dx; \quad y^0 \rightarrow y^0 + dy; \quad \lambda_j^0 \rightarrow \lambda_j^0 + d\lambda_j.$$

Considérons donc l'équation :

$$(29'_{s-1}) \quad \frac{\partial^{s-1} F(x^0 + dx, y^0 + dy, \lambda_j^0 + d\lambda_j)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s-1}}} = 0.$$

En la développant au 2^e ordre près et en tenant compte de (29_s), nous obtenons :

$$(31_{s-1}) \quad \frac{\partial^{s-1}}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s-1}}} \left[F^0 + \frac{\partial F^0}{\partial x} dx + \frac{\partial F^0}{\partial y} dy \right] = 0.$$

En développant au 3^e ordre près l'équation :

$$(29'_{s-2}) \quad \frac{\partial^{s-2} F(x^0 + dx, y^0 + dy, \lambda_j^0 + d\lambda_j)}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s-2}}} = 0$$

et en tenant compte des équations : (31_{s-1}), (29_s), (29_{s-1}), nous obtenons :

$$(31_{s-2}) \quad \frac{\partial^{s-2}}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s-2}}} \left[F^0 + \frac{\partial F^0}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial^2 F^0}{\partial y^2} dy^2 \right] = 0 \text{ (}^1\text{)};$$

etc. On obtient ainsi, à la fin, l'équation :

$$(31_0) \quad F^0 + \frac{\partial F^0}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial^s F^0}{\partial y^s} dy^s = 0.$$

Mais on voit bien que l'ensemble des équations (29) et (31) est équivalent aux équations (18) du précédent. Le théorème est donc démontré pour le cas $k = s$.

Supposons maintenant que $k = s - 1$. Dans ce cas il résulte de l'hypothèse l'existence de l'équation (31_{s-1}). Donc, en développant (29'_{s-1}) et, en tenant compte de (31_{s-1}), on arrive immédiatement à l'équation (29_s), ce qui ramène ce cas au cas précédent déjà démontré. Il en est de même pour les autres k . Le théorème est ainsi complètement démontré.

6. — Considérons le cas où le système donné est un système à un paramètre. Nous l'appellerons *le faisceau continu* (en général non linéaire) des courbes. Démontrons le théorème suivant :

(¹) Pour abrégier les formules nous omettons les coefficients numériques.

THÉORÈME N° 6. — *Pour qu'une courbe produite particulière d'un faisceau continu des courbes admette dans chacun de ses points génériques ordinaires (x^0, y^0) un contact d'ordre s , avec la courbe correspondante (λ^0) , il faut et il suffit que, pour une valeur quelconque particulière k (où $1 \leq k \leq s$), toutes les courbes du système osculateur d'ordre k en (λ^0) admettent dans (x^0, y^0) un contact d'ordre $(s - k)$ entre elles et alors, la courbe produite générique de ce faisceau, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda = \lambda^0$, admet aussi un contact d'ordre s avec (λ^0) .*

REMARQUE. — Le fait que la condition énoncée de ce théorème est suffisante, est la conséquence immédiate du théorème précédent (n° 5), appliqué au cas d'un paramètre. Pour démontrer notre théorème, il suffit donc de démontrer la proposition réciproque suivante :

LEMME. — *Quand une courbe produite particulière d'un faisceau continu donné admet dans chacun de ses points (x^0, y^0) génériques un contact d'ordre s avec la courbe correspondante (λ^0) du faisceau, la courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda = \lambda^0$, admet aussi un contact d'ordre s avec (λ^0) dans (x^0, y^0) .*

En effet, il découle alors du théorème n° 1, que toutes les courbes du système osculateur d'ordre k dans (λ^0) admettent un contact d'ordre $(s - k)$ (au moins) avec (λ^0) .

Démonstration. — Soit :

$$(32) \quad F(x, y, \lambda) = 0$$

l'équation du faisceau donné et soit :

$$(33) \quad \Omega(x, y, \lambda) = 0$$

l'équation produisant la courbe. Il est évident que dans le cas d'un paramètre, la courbe générique (λ^0) du système (32) nous donne des points de la courbe produite : il suffit pour les obtenir de trouver les points d'intersection des deux courbes :

$$(32^0) \quad F(x, y, \lambda^0) = 0 \quad \text{et} \quad (33^0) \quad \Omega(x, y, \lambda^0) = 0$$

(tandis qu'en général, cela n'a pas lieu dans le cas de plusieurs paramètres).

En tenant compte de ce fait, résolvons (33) par rapport à λ . Soit :

$$(34) \quad \lambda = \mu(x, y)$$

la solution, avec la condition :

$$(35) \quad \mu^0 = \mu(x^0, y^0) = \lambda^0.$$

En portant (34) dans (32), nous obtenons l'équation de la courbe produite :

$$(36) \quad F[x, y, \mu(x, y)] = 0.$$

Supposons le point $(x^0 + dx, y^0 + dy)$ appartenant à la courbe (λ^0) du faisceau donné. L'équation de (λ^0) est (32⁰). En portant $(x^0 + dx, y^0 + dy)$ dans (32⁰) et, en développant, nous obtenons (en employant la désignation analogue à celle du précédent) :

$$(37) \quad F^0 + \frac{\partial F^0}{\partial x} dx + \frac{\partial F^0}{\partial y} dy + \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^2} dx^2 + \dots = 0.$$

En portant $(x^0 + dx, y^0 + dy)$ dans (36), nous devons obtenir une quantité infiniment petite d'ordre $s + 1$ (au moins). En développant et en tenant compte de l'identité (37), nous obtenons :

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} [F^0 + \frac{\partial F^0}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial y^{s-1}} dy^{s-1}] d\lambda + \dots + \frac{\partial^s F^0}{\partial \lambda^s} d\lambda^s = 0,$$

où nous avons posé :

$$(39) \quad d\lambda^k = d[\mu(x, y)]^k; \quad \frac{\partial^{k+1} F^0}{\partial^k \lambda \partial x^{l-1} \partial y^l} = \left[\frac{\partial^{k+1} F(x, y, \lambda)}{\partial^k \lambda \partial x^{l-1} \partial y^l} \right]_{\substack{x=x^0 \\ y=y^0 \\ \lambda=\lambda^0}}$$

Quand l'équation (38) n'est pas identiquement nulle, la courbe (λ^0) est une courbe exceptionnelle du faisceau donné.

En effet, elle satisfait à l'équation (38), tandis que sa courbe infiniment voisine $\lambda^0 + d\lambda$, en général, ne la satisfait pas. Donc, dans le cas contraire, c. à d. quand (λ^0) est une courbe générique du faisceau, l'équation (38) doit être satisfaite identiquement, ce qui entraîne les équations suivantes :

$$(40) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} [F^0 + \frac{\partial F^0}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial y^{s-1}} dy^{s-1}] = 0;$$

.....

$$(40) \quad \frac{\partial^{s-1}}{\partial \lambda^{s-1}} [F^0 + \frac{\partial F^0}{\partial x} dx + \frac{\partial F^0}{\partial y} dy] = 0;$$

$$(40_s) \quad \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} F^0 = 0.$$

Cela démontre notre lemme (en tenant compte du théorème n° 2).

Le théorème n° 6 est donc démontré.

On pourrait généraliser le dernier théorème au cas des systèmes à plusieurs paramètres, en considérant les courbes produites par la même équation de tous les faisceaux appartenant au système donné, seulement les applications de cette généralisation ne nous semblent pas intéressantes.

Nous pouvons appliquer le théorème n° 6 à l'enveloppe du faisceau. En effet, l'enveloppe du faisceau n'est qu'une courbe produite particulière dont l'équation productrice est :

$$(33') \quad \Omega(x, y, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} F(x, y, \lambda) = 0.$$

7. — Considérons maintenant le cas de systèmes des surfaces dans l'espace à 3 dimensions. Puisque chaque point de la surface (produite) dépend de 2 paramètres arbitraires, il est évident que non seulement dans le cas d'un paramètre, mais aussi dans le cas de deux paramètres, la surface générique (λ_j^0) du système (1) donné, nous donne des points de la surface pro-

duite. Il suffit pour les obtenir de trouver les points d'intersection simultanée des trois surfaces suivantes :

$$(41) \quad \begin{cases} F(x, y, z, \lambda_j^0) = 0; \\ \Omega_1(x, y, z, \lambda_j^0) = 0; \quad \Omega_2(x, y, z, \lambda_j^0) = 0; \end{cases} \quad (j = 1, 2)$$

ce qui est, en général, toujours possible pour (λ_j^0) arbitraires (tandis que pour $j > 2$ cela n'est pas possible, en général, quand (λ_j^0) est arbitraire). D'une manière analogue à la démonstration du théorème n° 6 pour les courbes, nous pouvons démontrer dans le cas de systèmes des surfaces, le théorème suivant :

THÉORÈME N° 7. — *Pour qu'une surface produite particulière d'un système continu à 2 paramètres des surfaces, admette dans chacun de ses points génériques ordinaires (x^0, y^0, z^0) un contact d'ordre s avec la surface correspondante générique (λ_j^0) du système, il faut et il suffit que pour une valeur quelconque particulière k (où $1 \leq k \leq s$), toutes les surfaces du système osculateur d'ordre k en (λ_j^0) admettent dans (x^0, y^0, z^0) un contact d'ordre $(s - k)$ entre elles et alors, la surface produite générique de ce système, passant par (x^0, y^0, z^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, admet aussi un contact d'ordre s avec (λ_j^0) .*

Dans le cas du système des surfaces à un paramètre (faisceau continu de surfaces), la surface produite est déterminée par les équations :

$$(42') \quad F(x, y, z, \lambda) = 0; \quad \Omega(x, y, z, \lambda) = 0.$$

Chaque valeur de $\lambda = \lambda^0$ détermine une courbe, appartenant à la surface produite.

La démonstration du théorème n° 6, nous montre qu'elle est valable non seulement quand le point considéré (x^0, y^0, z^0) est un point *générique* de cette courbe d'intersection (c. à d. non seulement quand le point (x^0, y^0, z^0) est un point *générique* de la surface produite), mais aussi quand ce point (x^0, y^0, z^0)

est un point *particulier* de la courbe d'intersection *générique*, c. à d. quand le point considéré (x^0, y^0, z^0) décrit une courbe sur la surface produite. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME n° 8. — *Pour qu'une surface produite particulière d'un système continu à un paramètre (un faisceau continu) des surfaces admette dans chaque point (x^0, y^0, z^0) générique d'une de ses courbes particulières ordinaires, un contact d'ordre s avec la surface correspondante générique (λ^0) du faisceau, il faut et il suffit que pour une valeur quelconque particulière k (où $1 \leq k \leq s$), toutes les surfaces du faisceau osculateur d'ordre k en (λ^0) admettent dans (x^0, y^0, z^0) un contact d'ordre $(s - k)$ entre elles et alors, la surface produite générique du faisceau, passant par (x^0, y^0, z^0) pour $\lambda = \lambda^0$, admet aussi un contact d'ordre s avec (λ^0) .*

8. — Revenons au cas des systèmes de courbes sur le plan. Considérons de nouveau le système à p paramètres. Supposons que c'est un système de grade m (voir p. 8). Il résulte immédiatement du théorème n° 4, le théorème suivant :

THÉORÈME n° 9. — *Quand la courbe (λ_j^0) ordinaire d'un système continu de grade m admet dans son point (x^0, y^0) ordinaire, un contact d'ordre s avec la courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$ et $s \geq m$, toutes les courbes de ce système, ainsi que toutes les courbes produites génériques [c. à d. même celles qui pour $\lambda_j = \lambda_j^0$ passent par un point (x^1, y^1) autre que (x^0, y^0)], admettent dans (x^0, y^0) un contact d'ordre $(s - m)$ (au moins) avec (λ_j^0) .*

Dans le cas où le système donné (1) est un système algébrique d'ordre m , on a évidemment le théorème suivant :

THÉORÈME n° 9 bis. — *Quand dans un système algébrique d'ordre m des courbes, la courbe (λ_j^0) admet dans son point ordinaire (x^0, y^0) un contact d'ordre s avec la courbe produite*

générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$ et $s \geq m$, toutes les courbes de ce système, ainsi que toutes les courbes produites génériques [c. à d. même celles qui pour $\lambda_j = \lambda_j^0$ passent par un point (x^1, y^1) autre que (x^0, y^0)] admettent dans (x^0, y^0) un contact d'ordre $(s - m)$ (au moins) avec (λ_j^0) .

CHAPITRE II

9. — Conformément à la remarque du début du § 2, nous avons supposé jusqu'à présent le cas où le point considéré de la courbe quelconque est un point ordinaire de cette courbe. Passons maintenant au cas où ce point est un point multiple.

Démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 1. — *Quand dans un système continu des courbes, la courbe produite générique, passant par le point (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, admet ce point comme un point multiple d'ordre s , toutes les courbes d'un système osculateur d'ordre k dans (λ_j^0) , admettent dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre $(s - k)$ (au moins).*

(En supposant toujours que le système osculateur d'ordre zéro est une courbe (λ_j^0) du système donné).

THÉORÈME N° 2 (RÉCIPROQUE). — *Si pour $k = 0, 1, \dots, s$ toutes les courbes d'un système osculateur d'ordre k en (λ_j^0) d'un système continu donné, admettent dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre $(s - k)$ (au moins), ce point est un point multiple d'ordre s de la courbe produite générique passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$.*

Démonstration. — En conservant la notation des § 1 et 2, il résulte de l'hypothèse du théorème n° 1, que la quantité :

$$(1) \quad F \{ x^0 + dx, y^0 + dy, \mu_i [x^0 + dx, y^0 + dy] \}$$

l'hypersurface F . Nous disons dans ce cas général que la courbe (λ_j^0) est une courbe *particulière* du système donné. Mais il se peut que ces points multiples tracent une suite continue de points sur F d'un nombre de dimensions plus ou moins élevé. Il est évident que ce nombre de dimensions peut être au maximum égal à p . Dans ce dernier cas, chaque courbe tracée sur l'hypersurface F admettra nécessairement des points d'intersection avec cette suite p -dimensionnelle. Nous pouvons dire alors que (λ_j^0) est une courbe générique du système donné. Pour ce cas particulier il est facile de démontrer :

THÉORÈME N° 3. — *Quand la courbe (λ_j^0) générique d'un système continu des courbes admet dans le point (x^0, y^0) un point multiple d'ordre s , la courbe produite générique, passant par ce point (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, admet aussi un point multiple d'ordre s dans (x^0, y^0) .*

Démonstration. — Soit :

$$(4) \quad F(x, y, \lambda_j) = 0$$

l'équation du système donné. D'après l'hypothèse du théorème, nous avons :

$$(5) \quad F^0 = \frac{\partial F^0}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F^0}{\partial y} = 0; \dots; \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial y^{s-1}} = 0$$

(en employant la notation du chapitre précédent).

De ce que la courbe (λ_j^0) est générique, il s'ensuit que pour chaque système $(\lambda_j^0 + d\lambda_j)$ avec les infiniments petits $d\lambda_j$ arbitraires, on peut trouver telles valeurs $x^0 + dx, y^0 + dy$ que les équations (5) resteront toutes satisfaites après la substitution : $(x^0 + dx, y^0 + dy, \lambda_j^0 + d\lambda_j)$ Supposons un tel système et développons l'équation :

$$F(x^0 + dx, y^0 + dy, \lambda_j^0 + d\lambda_j) = 0$$

au 2^e ordre près, en tenant compte des équations (5) elles-mêmes.

Nous obtenons :

$$\sum_j \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} d\lambda_j = 0.$$

Mais, puisque $d\lambda_j$ est arbitraire, il s'ensuit :

$$(6_1) \quad \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} = 0.$$

Développons les équations :

$$\frac{\partial F(x^0 + dx, y^0 + dy, \lambda_j^0 + d\lambda_j)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(x^0 + dx, y^0 + dy, \lambda_j^0 + d\lambda_j)}{\partial y} = 0.$$

De la même façon, nous obtenons :

$$(6_2) \quad \frac{\partial F^0}{\partial x \partial \lambda_j} = 0; \quad \frac{\partial F^0}{\partial y \partial \lambda_j} = 0.$$

En prolongeant cette opération par rapport aux autres équations (5), on obtient toutes les équations du tableau (3), ce qui démontre le théorème énoncé.

D'après le théorème n° 3, on est naturellement conduit à énoncer :

DÉFINITION. — *Quand une courbe quelconque (λ_j^0) d'un système continu des courbes, admet dans le point (x^0, y^0) un point multiple d'ordre s , ainsi que la courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, nous disons que (λ_j^0) admet ce point multiple génériquement.*

Considérons le théorème suivant de M. Severi ⁽¹⁾ :

« *Se una curva C variabile con continuità possiede un punto s-plo variabile, questo è almeno $(s - 1)$ -plo per ogni curva infinitamente vicina a C.* »

Il est évident que ce théorème peut être immédiatement déduit du cas particulier de notre théorème n° 1, où la courbe

⁽¹⁾ SEVERI — *Trattato di Geometria Algebrica*, Bologna, 1926, V. I, Parte 1, p. 40.

(λ_j^0) est une courbe *générique* du système donné. En effet, la courbe infiniment voisine dans le sens de M. Severi appartient au système osculateur d'ordre 1, passant par (λ_j^0) , tandis que, d'après le théorème n° 3, le point multiple considéré par M. Severi est un point *génériquement* multiple. Dès lors, toutes les courbes de ce système osculateur d'ordre 1 admettent dans le point considéré un point multiple d'ordre $(s - 1)$ (au moins) et la courbe infiniment voisine aussi.

11. — D'une manière analogue aux théorèmes n° 3 et n° 4 du chapitre précédent, on peut démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME N° 4. — *Quand la courbe (λ_j^0) d'un système continu donné admet génériquement dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordres, chaque système appartenant à ce système d'un nombre quelconque q de paramètres ($q = 1, 2, \dots, p$) et passant par (λ_j^0) , admet aussi dans (x^0, y^0) un point génériquement multiple d'ordre s (au moins) pour la courbe (λ_j^0) .*

THÉORÈME N° 5 (RÉCIPROQUE). — *Quand par rapport au système continu générique, appartenant à un système (4) donné et passant par (λ_j^0) , le point (x^0, y^0) multiple d'ordre s de la courbe (λ_j^0) , est un point génériquement multiple, ce point est aussi génériquement multiple de la courbe (λ_j^0) par rapport au système (4) lui-même.*

Démonstration. — Soit donné le système à p paramètres par son équation (4) et soit l'équation :

$$(7) \quad \lambda_j = \lambda_j(\tau_i), \quad \begin{matrix} (j = 1, 2, \dots, p) \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{matrix} \quad (q < p)$$

déterminant le système à q paramètres, appartenant à (4) et passant par (λ_j^0) ; nous appellerons brièvement ce système,

le système appartenant (7). Puisque ce système passe par (λ_j^0) , nous pouvons poser :

$$(8) \quad \lambda_j(\tau_i^0) = \lambda_j^0.$$

Donc, l'équation du système appartenant est :

$$(9) \quad F[x, y, \lambda_j(\tau_i)] = 0.$$

Si le point (x^0, y^0) est génériquement multiple de la courbe (λ_j^0) par rapport au système (4), nous avons (d'après le théorème n° 1) pour $k = 1, 2, \dots, s - 1$ les équations suivantes :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^k F^0}{\partial x^k} = 0; \quad \frac{\partial^k F^0}{\partial x^{k-1} \partial y} = 0; \dots; \\ \frac{\partial^k F^0}{\partial y \cdot \partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{k-1}}} = 0; \quad \frac{\partial^k F^0}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_k}} = 0. \end{array} \right.$$

D'autre part, la dérivation nous donne :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F^0}{\partial \tau_i} = \sum_j \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j^0}{\partial \tau_i}; \\ \frac{\partial^2 F^0}{\partial \tau_{i_1} \partial \tau_{i_2}} = \sum_{j_1 j_2} \frac{\partial^2 F^0}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}} \cdot \frac{\partial \lambda_{j_1}^0}{\partial \tau_{i_1}} \cdot \frac{\partial \lambda_{j_2}^0}{\partial \tau_{i_2}} + \sum_j \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_j^0}{\partial \tau_{i_1} \partial \tau_{i_2}}; \dots; \\ \frac{\partial^2 F^0}{\partial x \partial \tau_i} = \sum_j \frac{\partial^2 F^0}{\partial x \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j^0}{\partial \tau_i}; \quad \frac{\partial^3 F^0}{\partial x \partial \tau_{i_1} \partial \tau_{i_2}} = \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

On voit ainsi que quand le système appartenant (7) est un système générique, les équations (11) entraînent aussi les équations suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^k F^0}{\partial x^k} = 0; \dots; \quad \frac{\partial^k F^0}{\partial y \partial \tau_{i_1} \dots \partial \tau_{i_{k-1}}} = 0; \quad \frac{\partial^k F^0}{\partial \tau_{i_1} \dots \partial \tau_{i_k}} = 0. \\ (k = 0, 1, \dots, s - 1). \end{array} \right.$$

Le théorème n° 4 est ainsi démontré.

Réciproquement, quand les équations (12) ont lieu pour un

système appartenant (7) générique, c'est-à-dire pour les fonctions $\lambda_j(\tau_i)$ arbitraires, on voit bien, d'après les équations (11) que cela exige nécessairement les équations (10), ce qui démontre le théorème n° 5.

12. — Supposons maintenant que le système (1) donné est un système de grade m . Il résulte immédiatement du théorème n° 1, le théorème suivant :

THÉORÈME N° 6. — *Quand la courbe (λ_j^0) ordinaire d'un système continu de grade m admet dans le point (x^0, y^0) un point génériquement multiple d'ordre s et $s > m$, toutes les courbes de ce système admettent ce point (x^0, y^0) comme un point génériquement multiple d'ordre $(s - m)$ (au moins).*

En revenant à l'espace représentatif E considéré dans les §§ 3 et 10, nous pouvons nous rappeler que dans le cas général, les points multiples (x^0, y^0, λ_j^0) d'ordre s sur l'hypersurface-image F représentant le système donné, sont distincts. Nous disons alors que la courbe correspondante (λ_j^0) est une courbe particulière du système donné. Mais quand ces points multiples tracent sur l'hypersurface F une suite p -dimensionnelle (c'est-à-dire une suite au maximum de dimensions), la courbe correspondante (λ_j^0) peut être considérée comme une courbe générique de ce système. Donc, d'après le théorème n° 3, comme cas particulier du théorème n° 6, nous obtenons :

THÉORÈME N° 7. — *Un point multiple d'ordre s d'une courbe générique du système continu de grade m des courbes ($m < s$) est un point multiple d'ordre $(s - m)$ (au moins) de la base de ce système.*

Dans le cas des systèmes à un paramètre (dans ce cas, d'après la page 8, le grade du système est égal à la dimension du système linéaire d'appartenance), le théorème précédent généralise

un théorème de M. Beniamino Segre ⁽¹⁾ au cas des courbes quelconques (et non seulement algébriques). Mais nous allons préciser ce dernier théorème plus loin d'un autre point de vue (voir théorème n° 2, du chapitre IV).

Dans le cas où le système donné (4) est un système algébrique d'ordre m , nous avons évidemment le théorème suivant :

THÉORÈME N° 8. — *Quand une courbe (λ_j^0) du système algébrique d'ordre m des courbes, admet génériquement dans le point (x^0, y^0) un point multiple d'ordre s et $s > m$, toutes les courbes de ce système admettent ce point (x^0, y^0) comme un point génériquement multiple d'ordre $(s - m)$ (au moins).*

Comme cas particulier de ce théorème (ainsi que du théorème n° 7), nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 9. — *Un point multiple d'ordre s d'une courbe générique du système algébrique d'ordre m des courbes ($m < s$) est un point multiple d'ordre $(s - m)$ (au moins) de la base de ce système ⁽²⁾.*

Il est évident que le théorème connu de M. Bertini ⁽³⁾, sur les systèmes linéaires, n'est qu'un cas particulier du théorème n° 9, où $m = 1$.

(1) *Rendiconti Acc. dei Lincei*, vol. XXXIII, 1^{er} sem. 1924, p. 182, théorème d), p. 185.

(2) *Comptes Rendus*, t. 185 (1927), p. 1005.

(3) L. BERTINI. — *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Messina, 1923, p. 269.

CHAPITRE III

13. — Nous avons considéré dans les chapitres précédents l'ensemble de courbes appartenant à un système osculateur d'ordre k (où $k = 0, 1, \dots, s$), passant par la courbe (λ_j^0) du système continu donné. Nous avons supposé que toutes ces courbes passent par le point (x^0, y^0) de la courbe (λ_j^0) et, en outre, nous avons envisagé 2 cas extrêmes : dans le cas du premier chapitre, le parabole osculateur d'ordre $s - k$ dans (x^0, y^0) reste le même pour toutes les courbes du système osculateur d'ordre k (pour $k = 1, 2, \dots, s$), passant par (λ_j^0) , tandis que dans le cas du second chapitre, même les paraboles osculateurs d'ordre 1 (c. à d. les tangentes) restent tout à fait indéterminés (en tout cas pour les systèmes à plusieurs paramètres).

Mais il peut y avoir différents cas intermédiaires. Il n'y a pas de difficultés, en suivant notre méthode, d'étudier chacun d'eux séparément. Pour cette raison, nous ne nous arrêterons ici que sur l'un d'eux.

Soit donné un système continu à p paramètres :

$$(1) \quad F(x, y, \lambda_j) = 0$$

et soit la courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, déterminée par les équations :

$$(2) \quad \Omega_1(x, y, \lambda_j) = 0; \quad \dots; \quad \Omega_p(x, y, \lambda_j) = 0.$$

Supposons que cette courbe produite générique admet dans

(x^0, y^0) un point multiple d'ordre s et qu'en outre, une de ces branches admet un contact d'ordre r avec une des branches d'une autre courbe produite générique, différente de la précédente, mais aussi passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$. D'après la première hypothèse, cette courbe admet aussi un point multiple d'ordre s dans (x^0, y^0) .

Énonçons les propositions suivantes :

THÉORÈME N° 1. — *Quand dans un système continu des courbes une courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, admet ce point comme un point multiple d'ordre s et en outre, une de ces branches admet dans (x^0, y^0) un contact d'ordre r avec une des branches d'une autre courbe produite générique, différente de la précédente, mais aussi passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, toutes les courbes du système osculateur d'ordre k en (λ_j^0) admettent dans (x^0, y^0) un point génériquement multiple d'ordre $l \geq s - k$ et en outre, une des branches de chacune de ces courbes, admet dans (x^0, y^0) un contact d'ordre $n \geq r + s - k - l$ avec la branche mentionnée de la courbe produite.*

(Nous avons ici : $0 \leq k \leq s$; $l, s \geq 1$; $n, r \geq 0$).

THÉORÈME N° 2 (RÉCIPROQUE). — *Quand pour $k = 0, 1, \dots, s + r$ toutes les courbes d'un système osculateur d'ordre k dans (λ_j^0) d'un système continu donné, admettent dans le point (x^0, y^0) un point multiple d'ordre $s - k$ (au moins) et en outre, une des branches de chacune de ces courbes admet dans (x^0, y^0) un contact d'ordre $(r + s - k - l)$ (au moins) entre elles, la courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, admet dans ce point un point multiple d'ordre s et en outre, une de ces branches admet dans (x^0, y^0) un contact d'ordre r (au moins) avec la branche analogue d'une autre courbe produite générique, passant par (x^0, y^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$.*

Démonstration. — La première partie des théorèmes énoncés, qui se rapporte à la multiplicité du point (x^0, y^0) , n'est que la

répétition des théorèmes n° 1 et 2 du chapitre précédent et peut être considérée comme étant déjà démontrée. Pour démontrer la seconde partie, concernant le contact des branches de courbes, on peut agir d'une manière analogue à la démonstration des théorèmes n° 1 et 2 du premier chapitre. Nous obtiendrons ainsi le tableau suivant des équations, analogue au tableau (18) du chapitre I :

$$(3_1) \quad \frac{\partial F^0}{\partial \lambda_j} = 0; \dots; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{\partial^{s-2} F^0}{dt^{s-2}} \right] = 0; \dots; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{d^{s+r-1} F^0}{dt^{s+r-1}} \right] = 0;$$

.....

$$(3_{s+r-1}) \quad \frac{\partial^{s+r-1} F^0}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s+r-1}}} = 0; \quad \frac{\partial^{s+r-1}}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s+r-1}}} \left[\frac{dF^0}{dt} \right] = 0;$$

$$(3_{s+r}) \quad \frac{\partial^{s+r} F^0}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_{s+r}}} = 0.$$

Ces équations sont satisfaites pour un point appartenant à la branche mentionnée, tandis que jusqu'à un certain ordre (qui est d'ailleurs facile à déterminer), elles sont satisfaites identiquement. Cela démontre complètement le théorème.

D'après ces 2 théorèmes généraux, il est facile d'énoncer tous les autres théorèmes analogues aux théorèmes des chapitres précédents.

CHAPITRE IV

14. — Considérons à présent particulièrement les systèmes continus à un paramètre que nous appellerons brièvement les *faisceaux continus*.

Soit donné un faisceau continu des courbes sur le plan par son équation :

$$(1) \quad F(x, y, \lambda) = 0.$$

Le faisceau osculateur d'ordre k dans (λ^0) est :

$$(2) \quad \begin{cases} F(x, y, \lambda^0) + (\lambda - \lambda^0) \frac{\partial F(x, y, \lambda^0)}{\partial \lambda} + \dots \\ + \frac{(\lambda - \lambda^0)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k F(x, y, \lambda^0)}{\partial \lambda^k} = Q_k(x, y, \lambda^0, \lambda) = 0; \end{cases}$$

tandis que le système linéaire osculateur d'ordre k en λ^0 est :

$$(3) \quad \begin{cases} F(x, y, \lambda^0) + \mu_1 \frac{\partial F(x, y, \lambda^0)}{\partial \lambda} + \dots \\ + \mu_k \frac{\partial^k F(x, y, \lambda^0)}{\partial \lambda^k} = R_k(x, y, \lambda^0, \mu_j) = 0, \end{cases}$$

dont la dimension Q est égale à k (au plus).

Dans la suite nous emploierons simplement tantôt l'expression « le système osculateur d'ordre k », tantôt « le faisceau osculateur d'ordre k », car les propriétés que nous allons étudier s'étendent également, comme sur le faisceau algébrique osculateur, sur tout le système linéaire osculateur.

Supposons que le point (x^0, y^0) de la courbe (λ^0) est le point *génériquement* multiple d'ordre s .

Alors, d'après le théorème n° 1 du chapitre II, toutes les courbes du système (3) admettent dans (x^0, y^0) un point *génériquement* multiple d'ordre $(s - k)$ (au moins). Considérons l'ensemble des courbes appartenant au système (3) et ayant dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre $(s - k)$ exactement. Soit (μ_j') une telle courbe. Cherchons ses tangentes principales dans (x^0, y^0) . Pour les trouver, développons l'identité :

$$(4) \quad R_k(x^0 + dx, y^0 + dy, \lambda^0, \mu_j') = 0,$$

en supposant que le point $(x^0 + dx, y^0 + dy)$ appartient à la courbe (μ_j') du système osculateur (3). Développons (4) au $(s - k + 1)^e$ ordre près, en tenant compte du fait que le point (x^0, y^0) est le point *génériquement* multiple d'ordre s de la courbe (λ^0) du (1). Nous obtenons :

$$\mu_k \left[\frac{\partial^s F^0}{\partial \lambda^k \partial x^{s-k}} \frac{dx^{s-k}}{(s-k)!} + \dots + \frac{\partial^s F^0}{\partial \lambda^k \partial y^{s-k}} \frac{dy^{s-k}}{(s-k)!} \right] = 0,$$

d'où nous tirons l'équation des tangentes principales :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[\frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial x^{s-k}} (X - x^0)^{s-k} + \binom{s-k}{1} \frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial x^{s-k-1} \partial y} (X - x^0)^{s-k-1} (Y - y^0) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial y^{s-k}} (Y - y^0)^{s-k} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

On voit que *cette équation est indépendante des μ_j' , c'est-à-dire, toutes les courbes de cette espace ont les mêmes tangentes principales dans (x^0, y^0) .*

Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME N° 1. — *Quand une courbe (λ^0) d'un faisceau continu des courbes admet dans le point (x^0, y^0) un point *génériquement* multiple d'ordre s , toutes les courbes du système osculateur d'ordre k dans (λ^0) qui admettent ce point *génériquement* multiple d'ordre $(s - k)$ (ce qui est d'ailleurs bien*

possible d'après le théorème n° 1 du chapitre II), *ont dans ce point les mêmes tangentes principales fixes.*

Comme conséquence immédiate du théorème précédent, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 2. — *m étant la dimension du système linéaire d'appartenance du faisceau continu (1) donné, quand une courbe (λ^0) ordinaire de ce faisceau admet dans son point (x^0, y^0) un point génériquement multiple d'ordre s et $s > m$, ce point est un point multiple d'ordre $(s - m)$, au moins, pour toutes les courbes du faisceau ; alors, les courbes du faisceau, ayant dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre $(s - m)$, ont en même temps les tangentes principales fixes.*

Il est évident que ce théorème contient le cas particulier où la courbe (λ^0) est la courbe générique du système donné.

Dans le cas où le système donné (1) est un système algébrique d'ordre m , nous avons immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME N° 2 bis. — *Quand une courbe (λ^0) d'un faisceau algébrique d'ordre m admet dans son point (x^0, y^0) un point génériquement multiple d'ordre s et $s > m$, ce point est un point multiple d'ordre $(s - m)$, au moins, pour toutes les courbes du faisceau. Alors, les courbes du faisceau, ayant dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre $(s - m)$, ont en même temps les tangentes principales fixes.*

Considérons le théorème suivant cité dans *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Enriques, Chisini, Bologna, 1915, volume 1, p. 183).

« Teorema sui fasci (lineari) determinati da due curve con punto doppio A infinitamente vicino, ..., il fascio limite determinato dalle due curve infinitamente vicine possiede A come punto base semplice : inoltre si ha in A una *tangente fissa* ».

Il est évident que ce théorème n'est qu'un cas particulier de

notre théorème n° 2 *bis* où on a mis $m = 1$ et $s = 2$. En effet, quand une courbe du faisceau admet un point double, ainsi que sa courbe infiniment voisine, ce point est un point *génériquement* double.

15. — Le raisonnement géométrique suivant peut nous donner une certaine indication sur la relation entre les tangentes des points multiples de différents ordres. Supposons pour cela un faisceau continu des courbes, dont la courbe *générique* (λ^0) admet un point (x^0, y^0) multiple d'ordre s et soit que ces points multiples de différentes courbes du faisceau tracent une courbe C ayant dans (x^0, y^0) un point ordinaire. Nous savons du théorème n° 3, du chapitre II, que le point (x^0, y^0) est un point *génériquement* multiple de la courbe (λ^0) . Nous supposons que la courbe *générique* du système osculateur d'ordre k dans (λ^0) admet dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre $(s - k)$. Alors, d'après le théorème précédent (n° 1), les tangentes principales sont fixes et sont déterminées par l'équation (5).

Soient :

$$(6) \quad x = x(t) ; \quad y = y(t)$$

les équations paramétriques de la courbe C , lieu des points multiples du faisceau donné. A chaque point (x^0, y^0) , appartenant à la courbe C , correspond une valeur λ^0 du paramètre du faisceau donné qui détermine la courbe (λ^0) ayant dans (x^0, y^0) son point multiple. Donc, nous pouvons aussi écrire :

$$(7) \quad \lambda = \lambda(t)$$

avec la condition :

$$(8) \quad x(t^0) = x^0 ; \quad y(t^0) = y^0 ; \quad \lambda(t^0) = \lambda^0.$$

Alors, l'équation :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^s F[x(t), y(t), \lambda(t)]}{\partial \lambda^k \partial x^{s-k}} [X - x(t)]^{s-k} + \dots \\ & + \frac{\partial^s F[x(t), y(t), \lambda(t)]}{\partial \lambda^k \partial y^{s-k}} [Y - y(t)]^{s-k} = 0 \end{aligned} \right.$$

(où X, Y sont les coordonnées courantes), détermine dans chaque point $t = t^0$ de la courbe C , l'ensemble de $s - k$ tangentes fixes du système osculateur correspondant.

Considérons $k + 1$ courbes infiniment voisines à (λ^0) :

$$(10) \quad \lambda(t^0), \lambda(t^0 + dt), \dots, \lambda(t^0 + kdt), \lambda[t^0 + (k + 1)dt].$$

Puisque le faisceau osculateur d'ordre k dans (λ^0) a, en général, en commun avec le faisceau donné, la courbe (λ^0) et en outre, k courbes infiniment voisines, il est évident que le groupe (10) de $k + 2$ courbes infiniment voisines détermine 2 faisceaux Q'_k et Q_k osculateurs d'ordre k , infiniment voisins entre eux. En même temps le groupe (10) détermine un seul

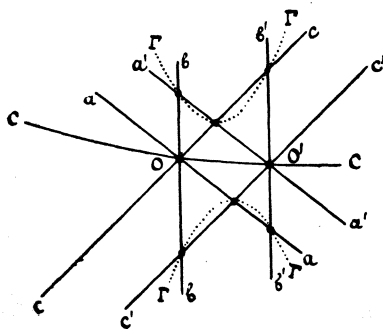


Fig. 1.

faisceau osculateur Q_{k+1} d'ordre $(k + 1)$, auquel il appartient. Considérons $s - k$ tangentes fixes du faisceau Q_k concourant en O (fig. 1) et celles du faisceau Q'_k concourant en O' . Cherchons l'ensemble Ω de $(s - k)^2$ points d'intersection de tangentes

du 1^{er} faisceau avec celles du second. Il est certain qu'en général, un point d'une tangente, infiniment voisin du point de contact, appartient à la courbe (au 2^e ordre près). Donc ceux des points du groupe Ω qui sont infiniment voisins de O et O' , *appartiennent à toutes les courbes des faisceaux Q_k et Q'_k* ; donc, ils appartiennent à toutes les courbes du faisceau Q_{k+1} et aussi aux tangentes principales fixes de ce dernier faisceau. Il est évident que dans le cas général, il faut exclure du groupe Ω l'ensemble de $s - k$ points d'intersection de tangentes fixes *homologues* des faisceaux Q_k et Q'_k . En effet, ces points ne sont pas en général infiniment voisins de O et O' , tandis que les autres $(s - k)(s - k - 1)$ points (les intersections des tangentes fixes *non homologues*), sont en général tous infiniment voisins de O et O' , c. à d. quand le point O' tend indéfiniment vers le point O , tous les points d'intersection des tangentes fixes *non homologues* tendent aussi (dans le cas général) vers O , tandis que les points d'intersection des tangentes *homologues* tendent vers des points limites distincts du point O (dans le cas général).

Il s'ensuit que *l'ensemble des $(s - k)(s - k - 1)$ points d'intersection de tangentes fixes non homologues des faisceaux Q_k et Q'_k appartient à l'ensemble des $(s - k - 1)$ tangentes fixes du faisceau osculateur Q_{k+1} .*

En supposant toujours ce cas général, considérons deux tangentes *homologues* (fig. 2) : OA , appartenant au faisceau osculateur Q_k et $O'A$, appartenant à Q'_k . Leur point d'intersection A est supposé à la distance *non* infiniment petite de O et O' (c. à d. OA et $O'A$ ne tendent pas vers zéro quand $\varepsilon = OO'$ tend vers zéro), tandis que le point B (le point d'intersection des tangentes *non homologues* : OB et $O'A$) est supposé infiniment voisin de O et O' . Menons la droite $O'B' \parallel OA$. Il est évident dans ces conditions que $\angle B'O'B = \angle OAO' = \alpha$ est un angle infiniment petit. Considérons le triangle $O'BB'$ qui est

semblable au triangle OBA. Nous avons donc $\frac{BB'}{O'B} = \frac{OB}{AB}$; OB étant infiniment petit et AB n'étant pas infiniment petit, il s'ensuit que *BB' est une quantité infiniment petite d'ordre supérieur à celui de O'B*. Donc, en négligeant les infiniment

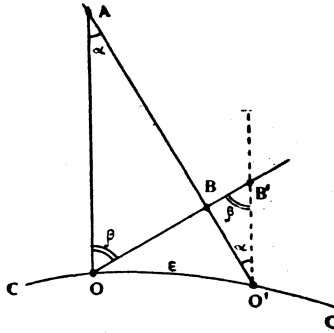


Fig. 2.

petits d'ordre supérieur, dans la recherche de points d'intersection de tangentes non homologues de ces deux faisceaux, nous pouvons supposer que les tangentes principales fixes du faisceau Q'_k sont parallèles aux tangentes homologues du faisceau Q_k ; mais, dans ce cas, puisque les $s - k$ points d'intersection de tangentes homologues sont placés sur la droite de l'infini, $(s - k)(s - k - 1)$ points d'intersection de tangentes non homologues sont nécessairement placés sur la même courbe d'ordre $s - k - 1$. En effet : nous pouvons considérer l'ensemble de $s - k$ tangentes fixes du faisceau Q_k comme une courbe d'ordre $s - k$, ainsi que l'ensemble de $s - k$ tangentes du faisceau Q'_k ; mais d'après le théorème connu de Gergonne ⁽¹⁾, quand $s - k$ points d'intersection de 2 courbes d'ordre $s - k$ appartiennent à une droite, les autres

⁽¹⁾ *Annales de Mathématiques*, t. 17, 1827.

$(s - k)(s - k - 1)$ points appartiennent nécessairement à une courbe d'ordre $s - k - 1$.

Il est évident, d'après le précédent que la courbe limite d'ordre $s - k - 1$ à laquelle appartiennent les $(s - k)(s - k - 1)$ points d'intersection de tangentes fixes non homologues des faisceaux Q_k et Q'_k est l'ensemble de $s - k - 1$ tangentes fixes du faisceau osculateur d'ordre Q_{k+1} . Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME N° 3. — *Soit donné un faisceau continu (1) des courbes, dont la courbe générique (λ^0) admet un point (x^0, y^0) mobile, multiple d'ordre s . L'ensemble de $(s - k)(s - k - 1)$ points d'intersection de tangentes principales fixes non homologues de deux systèmes osculateurs d'ordre k dans (λ^0) et dans $(\lambda^0 + d\lambda)$ est placé sur une courbe Γ d'ordre $(s - k - 1)$. Quand $d\lambda$ tend indéfiniment vers zéro, la courbe Γ tend indéfiniment vers l'ensemble de tangentes principales fixes du système osculateur d'ordre $(k + 1)$ dans (λ^0) .*

Nous avons démontré ce théorème pour le cas particulier où la courbe (λ^0) du faisceau donné est une courbe générique de ce faisceau ; mais il est évident que le théorème est aussi en vigueur quand (λ^0) est une courbe particulière, admettant *génériquement* le point multiple d'ordre s . En effet, les équations (5) définissant les tangentes fixes dans (x^0, y^0) des systèmes osculateurs dans (λ^0) ne dépendent pas du fait que la courbe (λ^0) soit générique ou particulière, pourvu que le point (x^0, y^0) soit *génériquement* multiple. Mais tout cela peut être précisé encore, comme il suit.

16. — Dans le raisonnement du § précédent, pour déterminer les tangentes principales fixes dans (x^0, y^0) du système osculateur d'ordre $k + 1$ dans (λ^0) , il nous suffisait de considérer deux systèmes osculateurs d'ordre k infiniment voisins, en supposant que les *tangentes fixes homologues de ces deux sys-*

tèmes sont parallèles entre elles. Donc il est tout à fait évident que quand les tangentes fixes dans (x^0, y^0) du système osculateur d'ordre k dans (λ^0) sont données (fig. 3), l'ensemble des tangentes fixes dans (x^0, y^0) du système osculateur d'ordre $k + 1$ dans (λ^0) ne dépend que de la direction du lieu OO' de

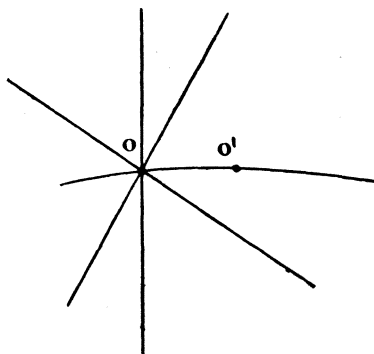


Fig. 3.

points multiples de courbes du faisceau donné, et réciproquement : quand en outre des tangentes fixes dans (x^0, y^0) du système osculateur d'ordre k dans (λ^0) , sont données celles du système osculateur d'ordre $(k + 1)$, la direction du lieu OO' est parfaitement déterminée.

Pour vérifier cela analytiquement, considérons un système continu à deux paramètres des courbes, dont la courbe générique admet un point (ξ, η) multiple d'ordre s et mobile sans restriction des directions en voisinage du point (x^0, y^0) du plan. Nous pouvons donc choisir comme paramètres de ce système les coordonnées ξ et η de ce point multiple mobile. Soit alors :

$$(11) \quad F(x, y, \xi, \eta) = 0$$

l'équation de ce système.

Considérons la courbe $\xi = x^0, \eta = y^0$; son équation est :

$$(12) \quad F(x, y, x^0, y^0) = 0.$$

Développons la partie gauche de cette équation en voisinage du point (x^0, y^0) . Puisqu'il est le point multiple d'ordre s , nous obtenons :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, y, x^0, y^0) &= \frac{1}{s!} \left[\frac{\partial^s F(x^0, y^0, x^0, y^0)}{\partial x^s} (x - x^0)^s \right. \\ &+ \binom{s}{1} \frac{\partial^s F(x^0, y^0, x^0, y^0)}{\partial x^{s-1} \partial y} (x - x^0)^{s-1} (y - y^0) + \dots \\ &\left. + \frac{\partial^s F(x^0, \dots, y^0)}{\partial y^s} (y - y^0)^s \right] + \dots = 0, \end{aligned} \right.$$

où nous avons posé :

$$\frac{\partial^s F(x^0, y^0, x^0, y^0)}{\partial x^{s-p} \partial y^p} = \left[\frac{\partial^s F(x, y, \xi, \eta)}{\partial x^{s-p} \partial y^p} \right]_{\substack{x=\xi=x^0 \\ y=\eta=y^0}}.$$

Considérons dans l'identité (13) les x^0, y^0 comme paramètres variables, c. à. d. substituons à leur place les variables ξ, η respectivement, en supposant :

$$(14) \quad \xi^0 = x^0; \quad \eta^0 = y^0.$$

Nous obtenons ainsi l'équation de notre système dans la forme suivante :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, y, \xi, \eta) &= \frac{1}{s!} \left[\frac{\partial^s F(\xi, \eta, \xi, \eta)}{\partial x^s} (x - \xi)^s + \dots \right. \\ &\left. + \frac{\partial^s F(\xi, \eta, \xi, \eta)}{\partial y^s} (y - \eta)^s \right] + \dots = 0. \end{aligned} \right.$$

En dérivant la partie gauche, nous obtenons identiquement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-1}{(s-1)!} \left[\frac{\partial^s F(\xi, \eta, \xi, \eta)}{\partial x^s} (x - \xi)^{s-1} \right. \\ &+ \binom{s-1}{1} \frac{\partial^s F(\xi, \dots, \eta)}{\partial x^{s-1} \partial y} (x - \xi)^{s-2} (y - \eta) + \dots \\ &\left. + \frac{\partial^s F(\xi, \dots, \eta)}{\partial y^s} (y - \eta)^{s-1} \right] + \dots; \end{aligned}$$

ou :

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(x, y, \xi, \eta)}{\partial(-\xi)} = \frac{\partial F(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \\ + \text{les termes d'ordre supérieur à } s-1 \text{ en } (x-\xi), (y-\eta). \end{array} \right.$$

De même :

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(x, y, \xi, \eta)}{\partial(-\eta)} = \frac{\partial F(x, y, \xi, \eta)}{y\partial} \\ + \text{les termes d'ordre supérieur à } s-1 \text{ en } (x-\xi), (y-\eta). \end{array} \right.$$

De la même manière, nous obtenons la formule générale :

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^p F(x, y, \xi, \eta)}{\partial x^k \partial y^l \cdot \partial(-\xi)^m \cdot \partial(-\eta)^{p-k-l-m}} = \frac{\partial^p F(x, y, \xi, \eta)}{\partial x^{k+m} \partial y^{p-k-m}} \\ + \text{les termes d'ordre supérieur à } s-p \text{ en } (x-\xi) \text{ et } (y-\eta). \end{array} \right.$$

Donc, pour $p = s$ et pour $x = \xi$ et $y = \eta$ nous avons :

$$(19) \quad \boxed{\frac{\partial^s F(\xi, \eta, \xi, \eta)}{\partial x^k \partial y^l \cdot \partial(-\xi)^m \cdot \partial(-\eta)^{s-k-l-m}} = \frac{\partial^s F(\xi, \eta, \xi, \eta)}{\partial x^{k+m} \cdot \partial y^{s-k-m}}.}$$

Cela étant, considérons un faisceau continu, appartenant au système (11) et déterminé par l'équation (11) et les équations :

$$(20) \quad \xi = \xi(t); \quad \eta = \eta(t)$$

avec la condition :

$$(21) \quad \xi(t^0) = x^0; \quad \eta(t^0) = y^0.$$

Développons (20) en voisinage du point (x^0, y^0) ; nous avons :

$$(22) \quad \xi - x^0 = \sum_j a_j^0 (t - t^0)^j; \quad \eta - y^0 = \sum_j b_j^0 (t - t^0)^j,$$

où nous avons posé :

$$(23) \quad a_j^0 = \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j \xi(t)}{dt^j} \right]_{t=t^0}; \quad b_j^0 = \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j \eta(t)}{dt^j} \right]_{t=t^0}.$$

Donc, l'équation de notre faisceau est :

$$(24) \quad F[x, y, \xi(t), \eta(t)] = \Phi(x, y, t) = 0.$$

Considérons le faisceau osculateur d'ordre k dans (t^0) , qui est :

$$(25) \quad \Phi(x, y, t^0) + \frac{\partial \Phi(x, y, t^0)}{\partial t} (t - t^0) + \dots + \frac{(t - t^0)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \Phi(x, y, t^0)}{\partial t^k} = 0.$$

Nous savons déjà que les $k - s$ tangentes principales fixes de ce faisceau sont celles de la courbe :

$$(26) \quad \frac{\partial^k \Phi(x, y, t^0)}{\partial t^k} = 0.$$

D'après (24) et (15), nous pouvons donc écrire leur équation dans la forme suivante :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial x^{s-k}} (X - x^0)^{s-k} + \binom{s-k}{1} \cdot \frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial x^{s-k-1} \partial y} (X - x^0)^{s-k-1} (Y - y^0) + \dots \right. \\ \left. + \frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial y^{s-k}} (Y - y^0)^{s-k} \right] = 0, \end{array} \right.$$

où nous avons posé

$$(28) \quad F^0 = [F(x, y, \xi, \eta)]_{\substack{x = \xi = x^0 \\ y = \eta = y^0}}.$$

Considérons les coefficients de l'équation (27) successivement pour $k = 1, 2, \dots, s - 1$.

Pour $k = 1$; nous avons, d'après (24) et (22) :

$$\frac{\partial^s F^0}{\partial t \cdot \partial x^{s-1}} = \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial \xi} a_1^0 + \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial \eta} b_1^0.$$

Mais, en tenant compte de l'identité (19), nous avons :

$$\frac{\partial^s F^0}{\partial t \cdot \partial x^{s-1}} = - \left(\frac{\partial^s F^0}{\partial x^s} a_1^0 + \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial y} b_1^0 \right)$$

de cette façon nous obtenons le tableau suivant :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^s F^0}{\partial t \cdot \partial x^{s-1}} = - \left(\frac{\partial^s F^0}{\partial x^s} a_1^0 + \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial y} b_1^0 \right); \\ \frac{\partial^s F^0}{\partial t \cdot \partial x^{s-2} \partial y} = - \left(\frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial y} a_1^0 + \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-2} \partial y^2} b_1^0 \right); \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

En posant $k = 2$ nous obtenons :

$$(29_2) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^s F^0}{\partial t^2 \cdot \partial x^{s-2}} &= - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial x^{s-1}} a_1^0 + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial x^{s-2} \cdot \partial y} b_1^0 \right] \\ &= \frac{\partial^s F^0}{\partial x^s} a_1^{0^2} + 2 \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial y} a_1^0 \cdot b_1^0 + \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-2} \cdot \partial y^2} b_1^{0^2} ; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial^s F^0}{\partial t^2 \cdot \partial y^{s-2}} &= - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial x \cdot \partial y^{s-2}} a_1^0 + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial y^{s-1}} b_1^0 \right] \\ &= \frac{\partial^s F^0}{\partial x^2 \partial y^{s-2}} a_1^{0^2} + 2 \frac{\partial^s F^0}{\partial x \partial y^{s-1}} a_1^0 \cdot b_1^0 + \frac{\partial^s F^0}{\partial y^s} b_1^{0^2} ; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

D'une façon générale :

$$(29_k) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^s F^0}{\partial t^k \partial x^p \partial y^{s-p-k}} &= (-1)^k \left[\frac{\partial^s F^0}{\partial x^{p+k} \partial y^{s-p-k}} a_1^{0^k} \right. \\ &\quad \left. + \binom{k}{1} \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{p+k-1} \partial y^{s-p-k+1}} a_1^{0^{k-1}} b_1^0 + \dots + \frac{\partial^s F^0}{\partial x^p \cdot \partial y^{s-p}} b_1^{0^k} \right]. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons ainsi que les coefficients de l'équation (27) des tangentes fixes du faisceau osculateur sont parfaitement déterminés quand on connaît les coefficients $\frac{\partial^s F^0}{\partial x^i \partial y^{s-i}}$ de l'équation de tangentes principales de la courbe (ℓ^0) dans (x^0, y^0) et en outre, quand on connaît dans (x^0, y^0) la direction :

$$(30) \quad \left[\frac{d\eta}{d\xi} \right]_{\substack{\xi = x^0 \\ \eta = y^0}} = \frac{b_1^0}{a_1^0}$$

du lieu (20) de points multiples.

C. Q. F. D.

17. — Soient Ξ, H les coordonnées courantes de la tangente en (x^0, y^0) au lieu (20) du point multiple mobile de la courbe mobile du faisceau (24). Il est évident qu'alors $(\Xi - x^0)$ et $(H - y^0)$ sont proportionnelles aux a_1^0 et b_1^0 . En tenant compte de ce fait, donnons un nouvel aspect à l'équation (27) de tangentes principales fixes du faisceau osculateur. Portons

pour cela dans (27) les expressions (29_k), en donnant à l'indice p successivement les valeurs $p = s, s - 1, \dots, 0$ et remplaçons ensuite les quantités a_i^0, b_i^0 , par leurs proportionnelles $(\Xi - x^0)$ et $(H - y^0)$.

Nous obtenons alors :

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^s F^0}{\partial x^s} (\Xi - x^0)^k + \binom{k}{1} \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial y} (\Xi - x^0)^{k-1} (H - y^0) + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial y^k} (H - y^0)^k \right] (X - x^0)^{s-k} \\ & + \binom{s-k}{1} \left[\frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-1} \partial y} (\Xi - x^0)^k + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^s F^0}{\partial x^{s-k-1} \partial y^{k+1}} (H - y^0)^k \right] (X - x^0)^{s-k-1} (Y - y^0) + \dots \\ & \quad \left. + \left[\frac{\partial^s F^0}{\partial x^k \partial y^{s-k}} (\Xi - x^0)^k + \dots + \frac{\partial^s F^0}{\partial y^s} (H - y^0)^k \right] (Y - y^0)^{s-k} = 0, \right. \end{aligned} \right.$$

ce qui nous montre que le groupe de $s - k$ directions $(X - x^0, Y - y^0)$ est un groupe polaire d'ordre k de la direction $(\Xi - x^0, H - y^0)$ par rapport au groupe fondamental de s directions de tangentes principales de la courbe (t^0) ; c. à d. nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 4. — *Soit donné sur le plan un système continu des courbes, dont la courbe générique C admet dans (x^0, y^0) un point mobile, multiple d'ordre s . Alors, dans le faisceau des droites passant par le point (x^0, y^0) , le groupe de $(s - k)$ tangentes principales fixes dans (x^0, y^0) d'un des faisceaux osculateurs d'ordre k en C , n'est qu'un groupe polaire d'ordre k de la tangente dans (x^0, y^0) au déplacement correspondant (à ce faisceau osculateur) du point multiple mobile (x^0, y^0) par rapport au groupe de tangentes principales de la courbe C en (x^0, y^0) .*

En tenant compte des propriétés connues des polaires, nous pouvons tirer immédiatement de ce théorème fondamental les conséquences suivantes.

THÉORÈME N° 5. — *Dans les conditions du théorème précé-*

dent, le groupe des $(s - k)$ tangentes principales fixes dans (x^0, y^0) du faisceau osculateur d'ordre k en C constitue un covariant simultané du groupe fondamental de s tangentes principales en (x^0, y^0) de la courbe C et de la tangente en (x^0, y^0) au déplacement correspondant du point multiple (x^0, y^0) .

THÉORÈME N° 6 (LOI DE RÉCIPROCITÉ). — Quand dans les conditions du théorème n° 4, la direction m est une des directions de tangentes principales fixes du faisceau osculateur d'ordre k en C , correspondant au déplacement dans la direction n du point multiple (x^0, y^0) de la courbe C , alors réciproquement, le faisceau osculateur d'ordre $(s - k)$ en C , correspondant au déplacement dans la direction m du point multiple (x^0, y^0) , admet n comme une des directions de ces tangentes principales fixes en (x^0, y^0) .

THÉORÈME N° 7. — Dans les circonstances du théorème n° 4 la condition nécessaire et suffisante pour que la direction m du déplacement du point multiple mobile (x, y) de la courbe C soit confondue avec une des directions des tangentes principales fixes du faisceau osculateur en C correspondant (de n'importe quel ordre) est, que la direction m soit une des directions des tangentes principales en (x^0, y^0) de la courbe C elle-même.

THÉORÈME N° 8. — Quand dans les conditions du théorème n° 4, entre les directions de tangentes principales dans (x^0, y^0) de la courbe C , il existe une direction m , multiple d'ordre n , alors m est aussi la direction multiple d'ordre $(n - k)$ d'une des tangentes principales fixes de tous les faisceaux osculateurs d'ordre k en C , correspondant au déplacement du point multiple (x^0, y^0) de C dans les directions distinctes de m .

Du théorème n° 5, il résulte :

THÉORÈME N° 9. — La relation énoncée dans le théorème n° 4, entre la direction de la tangente au lieu des points multiples et les tangentes principales fixes des faisceaux osculateurs de

différents ordres, est une propriété intrinsèque, indépendante du choix des paramètres.

Démonstration. — Pour démontrer le théorème n° 4, nous avons considéré le système à deux paramètres donné par l'équation :

$$(11) \quad F(x, y, \xi, \eta) = 0,$$

où ξ et η étaient les valeurs des coordonnées du point multiple mobile.

Supposons maintenant que sur les paramètres ξ, η on a effectué une transformation, déterminée par les équations :

$$(32) \quad \begin{cases} \xi = \bar{\xi}(\lambda_1, \lambda_2) \\ \eta = \bar{\eta}(\lambda_1, \lambda_2), \end{cases}$$

avec les conditions :

$$(32') \quad x^0 = \bar{\xi}(\lambda_1^0, \lambda_2^0), \quad y^0 = \bar{\eta}(\lambda_1^0, \lambda_2^0);$$

$$(32'') \quad \left[\frac{D(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{D(\lambda_1, \lambda_2)} \right]_{\substack{\lambda_1 = \lambda_1^0 \\ \lambda_2 = \lambda_2^0}} \neq 0.$$

Substituons (32) dans (15). Nous obtenons :

$$(33) \quad F(x, y, \xi, \eta) \equiv \Phi(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

Considérons alors le faisceau (20), appartenant au système (33). D'une part nous avons obtenu les équations (29) du précédent. D'autre part, nous avons identiquement :

$$\frac{\partial^s \Phi^0}{\partial^k t \cdot \partial x^m \cdot \partial y^{s-k-m}} = \frac{\partial^s F^0}{\partial^k t \cdot \partial x^m \cdot \partial y^{s-k-m}}$$

et cela démontre la proposition.

18. — Considérons maintenant les systèmes des surfaces.
Soit :

$$(24) \quad F(x, y, z, \lambda) = 0$$

l'équation d'un faisceau continu, dont la surface générique (λ^0) admet dans (x^0, y^0, z^0) un contact d'ordre s avec la surface fixe :

$$(35) \quad z - z^0 = f(x, y).$$

Nous savons déjà (d'après les théorèmes n° 8 et n° 2 du chapitre I) que dans ce cas, toutes les surfaces du faisceau osculateur d'ordre k en (λ^0) admettent dans (x^0, y^0, z^0) un contact d'ordre $s - k$ (au moins) avec la surface (35). Supposons que le point (x^0, y^0, z^0) est un point *ordinaire* des surfaces (35) et (λ^0) et qu'en outre, le plan :

$$(36) \quad z = z^0$$

est le plan tangent des surfaces (35) et (λ^0) dans (x^0, y^0, z^0) .

En résolvant (34) par rapport à $z - z^0$, donnons à l'équation du faisceau (34) la forme suivante :

$$(34') \quad z - z^0 - P(x, y, \lambda) = 0.$$

Alors, l'équation du faisceau osculateur d'ordre k en (λ^0) prendra la forme suivante :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} z - z^0 - Q(x, y, \lambda^0, \lambda) = z - z^0 - P(x, y, \lambda^0) \\ - \frac{\partial P(x, y, \lambda^0)}{\partial \lambda} \cdot (\lambda - \lambda^0) - \dots - \frac{(\lambda - \lambda^0)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k P(x, y, \lambda^0)}{\partial \lambda^k} = 0. \end{array} \right.$$

Considérons l'ensemble des surfaces, appartenant au faisceau (37) et ayant dans (x^0, y^0, z^0) exactement un contact d'ordre $(s - k)$ avec la surface (35). Soit (λ) une telle courbe. Il est certain qu'alors, la ligne d'intersection de ces deux surfaces : (35) et (λ) admet dans (x^0, y^0, z^0) un point multiple d'ordre $(s - k + 1)$. Cherchons ces tangentes principales dans (x^0, y^0, z^0) . Remarquons d'ailleurs que le point (x^0, y^0, z^0) étant supposé comme le point ordinaire de la surface (35), toutes ces $s - k + 1$ tangentes principales seront placées dans le plan tangent (36). Donc, nous pouvons considérer (36) comme

une des deux équations de cet ensemble des $s - k + 1$ tangentes. Pour trouver la seconde équation de cet ensemble, considérons l'équation :

$$(38) \quad Q(x, y, \lambda^0, \lambda) - f(x, y) = 0.$$

Cette équation étant une combinaison linéaire des équations (35) et (37), la surface cylindrique déterminée par (38), passe évidemment par la ligne d'intersection des surfaces (35) et (λ) . Développons alors l'identité :

$$(39) \quad Q(x^0 + dx, y^0 + dy, \lambda^0, \lambda) - f(x^0 + dx, y^0 + dy) = 0,$$

en supposant que le point $(x^0 + dx, y^0 + dy, z^0)$ appartient à la surface cylindrique (38). Développons (39) au $s - k + 2^e$ ordre près, en tenant compte du fait que dans le point (x^0, y^0, z^0) toutes les surfaces du faisceau osculateur d'ordre $(k - 1)$ en (λ^0) de (34) admettent avec (35) un contact d'ordre $s - k + 1$ (au moins) etc. Nous obtenons :

$$\frac{(\lambda - \lambda^0)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[\frac{\partial^{s-k+1} P^0}{\partial x^{s-k+1}} dx^{s-k+1} + \dots + \frac{\partial^{s-k+1} P^0}{\partial y^{s-k+1}} dy^{s-k+1} \right] = 0.$$

Donc, la seconde équation de tangentes principales est :

$$(40) \quad \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[\frac{\partial^{s-k+1} P^0}{\partial x^{s-k+1}} [X - x^0]^{s-k+1} + \dots + \frac{\partial^{s-k+1} P^0}{\partial y^{s-k+1}} [Y - y^0]^{s-k+1} \right] = 0,$$

où P^0 désigne $P(x^0, y^0, \lambda^0)$.

On voit que les équations (36) et (40), déterminant l'ensemble de tangentes principales, sont indépendantes de (λ) , c. à d. que les tangentes principales restent les mêmes pour toutes les surfaces du faisceau osculateur (37) qui ont en (x^0, y^0, z^0) un contact exactement d'ordre $(s - k)$ avec la surface (35). Il s'en suit donc le théorème suivant :

THÉOREME N° 10. — Soit qu'une surface générique (λ^0) d'un faisceau continu (34) des surfaces admette dans le point (x^0, y^0, z^0) un contact d'ordre s avec la surface fixe (35) donnée. De toutes

les surfaces d'un système osculateur d'ordre k en (λ^0) considérons celles qui ont dans (x^0, y^0, z^0) un contact exactement d'ordre $(s - k)$ avec la surface (35). Toutes les lignes d'intersection de chaque surface de cette espèce avec (35) admettent dans (x^0, y^0, z^0) les mêmes $(s - k + 1)$ tangentes principales fixes.

Pour un faisceau algébrique d'ordre m nous avons immédiatement :

THÉORÈME N° 11. — *Soit que dans les conditions du théorème précédent, le faisceau (34) est un faisceau algébrique d'ordre m et soit $s \geq m$. De toutes les surfaces de ce faisceau, considérons celles qui ont dans (x^0, y^0, z^0) un contact exactement d'ordre $(s - m)$ avec (35). Toutes les lignes d'intersection de chaque surface de cette espèce avec la surface (35) admettent dans (x^0, y^0, z^0) les mêmes $s - m + 1$ tangentes fixes.*

Nous avons un théorème analogue pour les faisceaux de grade m .

En considérant l'équation (40), nous voyons qu'elle est tout à fait analogue à (5); donc, en appliquant sur (40) le même raisonnement que nous avons appliqué sur (5), nous obtiendrons pour le cas considéré des systèmes de surfaces et leurs lignes d'intersection, les théorèmes analogues aux théorèmes n°s 3-9 du précédent.

Alors, notre théorème fondamental n° 4 appliqué au cas considéré ici, doit être envisagé comme une généralisation du théorème suivant qui fut énoncé par M. CARTAN dans son cours de l'année dernière :

THÉORÈME DE M. CARTAN. — *Soit S une surface mobile, admettant dans le point mobile (x^0, y^0, z^0) un contact d'ordre s avec la surface fixe Σ . La ligne caractéristique de S admet dans (x^0, y^0, z^0) un point multiple d'ordre s . En outre, les s tangentes principales dans (x^0, y^0, z^0) de cette caractéristique forment un groupe premier polaire de la direction du déplacement infiniment*

petit correspondant de (x^0, y^0, z^0) sur Σ par rapport au groupe des $(s + 1)$ directions de tangentes principales en (x^0, y^0, z^0) de la ligne d'intersection des surfaces S et Σ .

Il est en effet évident que la ligne caractéristique de S appartient à toutes les surfaces du faisceau osculateur d'ordre 1 en S , correspondant au déplacement considéré du point (x^0, y^0, z^0) du contact. Donc, nous obtenons le théorème de M. CARTAN, en posant $k = 1$ dans le théorème n° 4, appliqué au cas considéré des surfaces.

19. — Considérons enfin les faisceaux des courbes sur le plan. Soit :

$$(41) \quad F_1(x, y, \xi) = 0$$

l'équation d'un faisceau continu, dont la courbe générique (ξ^0) admet dans son point ordinaire (ξ^0, η^0) un contact d'ordre s avec la courbe fixe :

$$(42) \quad y - \eta^0 = f(x)$$

Nous avons choisi pour le paramètre ξ du faisceau (41) l'abscisse du point de contact (ξ^0, η^0) , ce qui est en général bien possible.

En résolvant (41) par rapport à $y - \eta^0$, donnons à l'équation du faisceau la forme suivante :

$$(43) \quad F(x, y, \xi) = y - \eta^0 - P(x, \xi) = 0.$$

Alors, l'équation du faisceau osculateur d'ordre k en (ξ^0) prendra la forme suivante :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} y - \eta^0 - Q(x, \xi^0, \xi) = y - \eta^0 - P(x, \xi^0) \\ - (\xi - \xi^0) \cdot \frac{\partial P(x, \xi^0)}{\partial \xi} - \dots - \frac{(\xi - \xi^0)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k P(x, \xi^0)}{\partial \xi^k} = 0. \end{array} \right.$$

Envisageons l'ensemble des courbes appartenant au faisceau (44) et ayant dans (ξ^0, η^0) exactement un contact d'ordre

$s - k$ avec la courbe (42). Soit (ξ) une telle courbe. Considérons l'équation :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(x, \xi^0, \xi) - f(x) = [P(x, \xi^0) - f(x)] \\ + \frac{\partial P(x, \xi^0)}{\partial \xi} (\xi - \xi^0) + \dots + \frac{(\xi - \xi^0)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k P(x, \xi^0)}{\partial \xi^k} = 0 \end{array} \right.$$

qui n'est qu'une combinaison linéaire des équations (42) et (44). Donc, les x satisfaisant à l'équation (45), satisferont aussi aux équations (44) et (42) simultanément. D'autre part, (45) étant la différence des abscisses de deux courbes qui ont dans (ξ^0, η^0) un contact d'ordre $s - k$, le développement de (45) en puissances de $(x - \xi^0)$ doit commencer par les termes d'ordre $s - k + 1$ (au moins). D'une manière analogue au cas des surfaces, nous trouvons facilement que les termes d'ordre $s - k + 1$ en $(x - \xi^0)$ ne peuvent contenir que le dernier terme de l'équation (45) ; par suite, nous trouvons :

$$(46) \quad \frac{\partial^k P(x, \xi^0)}{\partial \xi^k} = \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left[\frac{\partial^{s-k+1} P^0}{\partial x^{s-k+1}} \cdot \frac{(x - \xi^0)^{s-k+1}}{(s - k + 1)!} + \dots \right].$$

Dérivons l'identité (46) par rapport à ξ . Nous obtenons :

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{k+1} P(x, \xi^0)}{\partial \xi^{k+1}} = - \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left[\frac{\partial^{s-k+1} P^0}{\partial x^{s-k+1}} \cdot \frac{(x - \xi^0)^{s-k}}{(s - k)!} + \dots \right] = - \frac{\partial^{k+1} P(x, \xi^0)}{\partial \xi^k \partial x} \\ + \text{les termes d'ordre supérieur à } s - k \text{ en } (x - \xi^0). \end{array} \right.$$

En appliquant l'opération de dérivation plusieurs fois, on obtient facilement :

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{p+1} P(x, \xi^0)}{\partial (-\xi)^k \cdot \partial x^{p-k+1}} = \frac{\partial^{p+1} P(x, \xi^0)}{\partial x^{p-k+1}} \\ + \text{les termes d'ordre supérieur à } s - p \text{ en } (x - \xi^0). \end{array} \right.$$

C'est-à-dire pour $p = s$ et $x = \xi^0$ nous avons :

$$(49) \quad \boxed{\frac{\partial^{s+1} P^0}{\partial (-\xi)^k \cdot \partial x^{s-k+1}} = \frac{\partial^{s+1} P^0}{\partial x^{s+1}}.}$$

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉOREME N° 13. — *Soit donné un faisceau continu des courbes, dont la courbe générique (ξ^0) admet dans le point (ξ^0, η^0) un contact d'ordre s avec la courbe fixe (42), le point (ξ^0, η^0) étant supposé ordinaire de chacune de ces deux courbes. Alors, dans le développement (46) pour toutes les valeurs de k entre 1 et $s + 1$ (les limites inclus), le coefficient du premier terme est le même : $\frac{\partial^{s+1}P^0}{\partial x^{s+1}}$ (à un signe près).*

Il est évident que l'équation (49) est un covariant simultané des variables x et ξ , mais supposons un changement de variables, effectué sur le paramètre ξ seulement, c'est-à-dire supposons la substitution :

$$(50) \quad \xi = \xi(x) = \xi^0 + a_1(x - \alpha^0) + a_2(x - \alpha^0)^2 + \dots; \quad (\text{avec } a_1 \neq 0),$$

d'où on tire :

$$(51) \quad \xi(\alpha^0) = \xi^0, \quad \text{ou, en résolvant : } \alpha^0 = \alpha(\xi^0).$$

Portons (51) dans $P(x, \xi^0)$; nous obtenons :

$$(52) \quad P(x, \xi^0) = P[x, \xi(\alpha^0)] \equiv Q(x, \alpha^0).$$

Tandis que, d'une façon analogue, pour l'équation du faisceau osculateur d'ordre k , nous obtiendrons, au lieu de (45) :

$$(45') \quad y - Q(x, \alpha^0) - \frac{\partial Q(x, \alpha^0)}{\partial \alpha} (x - \alpha^0) - \dots - \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k Q(x, \alpha^0)}{\partial \alpha^k} (x - \alpha^0)^k = 0.$$

Développons l'expression $\frac{\partial^k Q(x, \alpha^0)}{\partial \alpha^k}$ au voisinage du point de contact : $x = \xi^0$.

Nous avons :

$$(46') \quad \frac{\partial^k Q(x, \alpha^0)}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} [Q(\xi^0, \alpha^0) + \frac{\partial Q(\xi^0, \alpha^0)}{\partial x} (x - \xi^0) + \dots],$$

ce qui nous donne (d'une manière analogue à ce qui précède) :

$$(46'') \quad \frac{\partial^k Q(x, \alpha^0)}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \left[\frac{\partial^{s-k+1} Q(\xi^0, \alpha^0)}{\partial x^{s-k+1}} \cdot \frac{(x - \xi^0)^{s-k+1}}{(s - k + 1)!} + \dots \right].$$

Mais, d'après l'identité (52), nous avons :

$$\frac{\partial' P(x, \xi^0)}{\partial x'} = \frac{\partial' Q(x, \alpha^0)}{\partial x'}.$$

Donc :

$$(53) \quad \frac{\partial' Q(\xi^0, \alpha^0)}{\partial x'} = \frac{\partial' P^0}{\partial x'}.$$

Dès lors, (46^{re}) devient :

$$(46'') \quad \frac{\partial^k Q(x, \alpha^0)}{\partial x^k} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left[\frac{\partial^{s-k+1} P^0}{\partial x^{s-k+1}} \cdot \frac{(x - \xi^0)^{s-k+1}}{(s - k + 1)!} + \dots \right].$$

La dérivation de cette expression et des expressions analogues nous donne évidemment :

$$(48') \quad \frac{\partial^{p+1} Q(x, \alpha^0)}{\partial (-\alpha)^k \cdot \partial x^{p-k+1}} = \frac{\partial^{p+1} Q(x, \alpha^0)}{\partial x^{p+1}} \left(\frac{d\xi^0}{d\alpha} \right)^k = \frac{\partial^{p+1} P(x, \xi^0)}{\partial x^{p+1}} \left(\frac{d\xi^0}{d\alpha} \right)^k,$$

plus les termes d'ordre supérieur à $s - p$ en $(x - \xi^0)$.

Et enfin (pour $p = s$ et $x = \xi^0$) :

$$(49'') \quad \frac{\partial^{s+1} Q(\xi^0, \alpha^0)}{\partial (-\alpha)^k \cdot \partial x^{s-k+1}} = \frac{\partial^{s+1} Q(\xi^0, \alpha^0)}{\partial x^{s+1}} \left(\frac{d\xi^0}{d\alpha} \right)^k.$$

Il est évident que la substitution linéaire (similité) :

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\left(\frac{d\xi^0}{d\alpha} \right)} = \frac{\alpha}{a_1},$$

rend l'équation (49^{re}) invariante ; c'est-à-dire nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 14. — *Si la courbe générique (λ^0) du faisceau continu (1) admet dans (x^0, y^0) un contact d'ordre s avec la courbe fixe C [le point (x^0, y^0) étant le point ordinaire de ces deux courbes], alors a une transformation similaire près (effectuée sur λ ou sur x), nous avons l'équation suivante :*

$$(54) \quad \boxed{\frac{\partial^{s+1} Q(x^0, \lambda^0)}{\partial (-\lambda)^k \cdot \partial x^{s-k+1}} = \frac{\partial^{s+1} Q(x^0, \lambda^0)}{\partial x^{s+1}}},$$

où k est un nombre entier positif et $0 < k \leq s + 1$.

20. — Considérons maintenant un autre cas des systèmes de surfaces.

Soit :

$$(55) \quad F(x, y, z, \lambda) = 0$$

l'équation d'un faisceau continu des surfaces, dont la surface (λ^0) admet dans (x^0, y^0, z^0) *génériquement* un point multiple d'ordre s . Le faisceau osculateur d'ordre k dans (λ^0) est :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(x, y, z, \lambda^0, \lambda) = F(x, y, z, \lambda^0) + \dots \\ + \frac{(\lambda - \lambda^0)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k F(x, y, z, \lambda^0)}{\partial \lambda^k} = 0. \end{array} \right.$$

D'une manière analogue à celle du § 15, nous trouvons l'équation :

$$(57) \quad \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[\frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial x^{s-k}} (X - x^0)^{s-k} + \dots + \frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial z^{s-k}} (Z - z^0)^{s-k} \right] = 0$$

du cône tangent principal dans (x^0, y^0, z^0) à toutes les surfaces du faisceau (56), admettant en (x^0, y^0, z^0) un point multiple d'ordre $(s - k)$ exactement.

Il en résulte immédiatement la généralisation respective des théorèmes n° 1 et n° 2 de ce chapitre. Egalemeⁿt immédiate est la généralisation du théorème n° 3. Nous obtiendrons ainsi :

THÉORÈME N° 3 bis. — Soit donné un faisceau continu (55) des surfaces, dont la surface générique (λ^0) admet un point mobile (x^0, y^0, z^0) , multiple d'ordre s . Considérons deux systèmes osculateurs d'ordre k : en (λ^0) et en $(\lambda^0 + d\lambda)$. La ligne d'intersection des deux cônes tangents principaux de ces deux systèmes se décompose en deux parties : celle de l'intersection des génératrices homologues et celle de l'intersection des génératrices non homologues. La dernière détermine uniformément une surface algébrique d'ordre $s - k - 1$. Quand $d\lambda$ tend vers zéro, cette surface algébrique tend vers le cône tangent

principal dans (x^0, y^0, z^0) du système osculateur d'ordre $(k + 1)$ dans (λ^0) .

Démonstration. — Nous savons déjà que l'équation du cône tangent principal dans (x^0, y^0, z^0) à toutes les surfaces du faisceau osculateur d'ordre k dans (λ^0) est :

$$(57) \quad \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[\frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial x^{s-k}} (X - x^0)^{s-k} + \dots + \frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial z^{s-k}} (Z - z^0)^{s-k} \right] = 0,$$

où :

$$(58) \quad F^0 = F(x^0, y^0, z^0, \lambda^0).$$

Quand λ^0 varie et devient $\lambda^0 + d\lambda$, les coordonnées du point multiple deviendront $x^0 + dx, y^0 + dy, z^0 + dz$. On voit bien que la *partie principale* de la variation de la partie gauche de l'équation (57) est :

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} - (s - k) \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[\frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial x^{s-k}} (X - x^0)^{s-k-1} dx + \dots \right. \\ \left. + \frac{\partial^{s-k} F^0}{\partial z^{s-k}} (Z - z^0)^{s-k-1} dz \right]. \end{array} \right.$$

Mais (59) est justement la variation de la partie gauche de (57), quand le cône subit une translation déplaçant son sommet de (x^0, y^0, z^0) en $(x^0 + dx, y^0 + dy, z^0 + dz)$. Alors, en s'arrêtant aux parties principales des infiniment petits, nous pouvons considérer le déplacement du cône comme une translation.

Pour déterminer la ligne d'intersection de ces deux cônes, employons la méthode de la géométrie descriptive : coupons-les par les plans auxiliaires passant simultanément par les deux sommets de ces cônes. Nous obtenons ainsi deux espèces de points d'intersection : 1) Les points à l'infini (les points d'intersection des génératrices parallèles). 2) Les points en général infiniment voisins de (x^0, y^0, z^0) — ce sont les points d'intersection de génératrices *non* parallèles situées dans le

même plan auxiliaire. (Les points exceptionnels sont placés dans les plans tangents aux cônes auxiliaires). Finalement nous obtenons deux lignes d'intersection : une à l'infini et l'autre, dont les points génériques sont infiniment voisins de (x^0, y^0, z^0) . Le théorème devient ainsi évident.

Considérons dans l'espace à 3 dimensions une surface mobile S , admettant un point (ξ, η, ζ) multiple d'ordre s , mobile sans restriction des directions en voisinage du point (x^0, y^0, z^0) . Nous pouvons alors présenter les positions de cette surface mobile, comme un système continu à trois paramètres indépendants et même choisir comme paramètres trois coordonnées (ξ, η, ζ) du point multiple mobile. Soit alors :

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

l'équation de ce système.

En employant un raisonnement analogue à celui du § 17, nous arriverons d'abord à établir l'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^s F(\xi, \eta, \zeta, \xi, \eta, \zeta)}{\partial x^k \cdot \partial y^l \cdot \partial z^m \cdot \partial (-\xi)^n \cdot \partial (-\eta)^p \cdot \partial (-\zeta)^{s-k-l-m-n-p}} \\ &= \frac{\partial^s F(\xi, \eta, \zeta, \xi, \eta, \zeta)}{\partial x^{k+n} \cdot \partial y^{l+p} \cdot \partial z^{s-k-n-l-p}} \end{aligned}$$

et ensuite les théorèmes analogues aux théorèmes n^{os} 4-10 qui sont, d'ailleurs tous, les conséquences du théorème fondamental n^o 4. A ce théorème n^o 4, dans le cas considéré des systèmes des surfaces, correspond le théorème suivant :

THÉORÈME N^o 4 bis. — *Soit donné dans l'espace à 3 dimensions un système continu des surfaces dont la surface générique S admet dans (x^0, y^0, z^0) un point mobile, multiple d'ordre s . Alors, le cône tangent principal du faisceau osculateur d'ordre k dans S , correspondant au déplacement du point multiple (x^0, y^0, z^0) dans la direction $(d\xi, d\eta, d\zeta)$, n'est que le cône polaire d'ordre k de la droite $\frac{X-x^0}{d\xi} = \frac{Y-y^0}{d\eta} = \frac{Z-z^0}{d\zeta}$*

(tangente à ce déplacement) par rapport au cône tangent principal dans (x^0, y^0, z^0) à la surface S .

Donc, en coupant cette figure par un plan ne passant pas par le point (x^0, y^0, z^0) , nous obtenons sur ce plan une courbe C_s d'ordre s [intersection avec le cône tangent principal dans (x^0, y^0, z^0) à la surface S], un point O (l'intersection avec la droite $\frac{X - x^0}{d\xi} = \frac{Y - y^0}{d\eta} = \frac{Z - z^0}{d\zeta}$) et la polaire P_{s-k} d'ordre k du point O par rapport à la courbe C_s [l'intersection avec le cône tangent principal du faisceau osculateur d'ordre k en S , correspondant au déplacement dans la direction $(d\xi, d\eta, d\zeta)$ du point multiple (x^0, y^0, z^0)].

Il est évident qu'outre les théorèmes analogues aux théorèmes n^{os} 6-10 du précédent, on peut tirer ici plusieurs autres conséquences en utilisant les propriétés bien connues des courbes polaires.

21. — Revenons aux systèmes des courbes sur le plan et considérons maintenant le cas réciproque.

Soit donné de nouveau un faisceau continu des courbes par son équation :

$$(1) \quad F(x, y, \lambda) = 0.$$

L'équation du faisceau osculateur d'ordre k en (λ^0) serait alors :

$$(2) \quad F(x, y, \lambda^0) + \dots + \frac{(\lambda - \lambda^0)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k F(x, y, \lambda^0)}{\partial \lambda^k} = 0.$$

Supposons que pour $k = s - 1$ toutes les courbes du faisceau (2) admettent dans (x^0, y^0) un contact ordinaire (au moins); cela entraîne les équations :

$$(60) \quad \frac{\partial^s F^0}{\partial \lambda^{s-1} \partial x} dx + \frac{\partial^s F^0}{\partial \lambda^{s-1} \partial y} dy = 0; \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \partial x} dx + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \partial y} dy = 0; \dots$$

Supposons, en outre, que toutes les courbes du faisceau de

même ordre ($s - 1$) osculateur en $\lambda^0 + d\lambda$ passent par le point $(x^0 + \partial x, y^0 + \partial y)$, où :

$$(61) \quad [dx, dy] = \left| \frac{dx}{\partial x} \frac{dy}{\partial y} \right| \neq 0.$$

Cette dernière supposition entraîne évidemment :

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{\partial^{s-1} F(x^0 + \partial x, y^0 + \partial y, \lambda^0 + d\lambda)}{\partial \lambda^{s-1}} = 0; \\ \frac{\partial^{s-2} F(x^0 + \partial x, y^0 + \partial y, \lambda^0 + d\lambda)}{\partial \lambda^{s-2}} = 0; \dots \end{cases}$$

En développant les (62) au 2^e ordre près et en tenant compte des égalités :

$$(63) \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-1}} = 0; \quad \frac{\partial^{s-2} F^0}{\partial \lambda^{s-2}} = 0; \dots,$$

nous obtenons :

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \cdot \partial x} \partial x + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \cdot \partial y} \partial y = 0; \\ \frac{\partial^{s-2} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \cdot \partial x} \partial x + \frac{\partial^{s-2} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \cdot \partial y} \partial y = 0; \dots \end{cases}$$

Il résulte immédiatement des équations (64) et (60), en tenant compte de la condition (61), les égalités suivantes :

$$(65) \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \partial y} = 0; \dots$$

ce qui montre que toutes les courbes du faisceau osculateur d'ordre $s - 2$ en (λ^0) ont dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre 2 (au moins).

Ajoutons maintenant à nos hypothèses une nouvelle hypothèse : supposons que toutes les courbes du faisceau osculateur d'ordre $s - 2$ en (λ^0) ont dans (x^0, y^0) les mêmes tangentes principales fixes et qu'en outre, toutes les courbes du faisceau de même ordre ($s - 2$) osculateur en $(\lambda^0 + d\lambda)$, admettent dans $(x^0 + \partial x, y^0 + \partial y)$ un point double.

Nous avons alors d'une part les équations suivantes :

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-2} \partial y^2} dy^2 = 0; \\ \frac{\partial^{s-2} F^0}{\partial \lambda^{s-4} \partial x^2} dx^2 + \dots \text{etc.} \end{array} \right.$$

Tandis que, d'autre part, en développant au 2^e ordre près les équations suivantes (qui sont les conséquences évidentes de notre dernière hypothèse) :

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{s-2} F(x^0 + \delta x, y^0 + \delta y, \lambda^0 + d\lambda)}{\partial \lambda^{s-4} \partial x} = 0; \\ \frac{\partial^{s-2} F(x^0 + \delta x, y^0 + \delta y, \lambda^0 + d\lambda)}{\partial \lambda^{s-4} \partial y} = 0; \dots, \end{array} \right.$$

nous obtenons facilement :

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-3} \partial x^2} \delta x + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-3} \partial x \partial y} \delta y = 0; \\ \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-3} \partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-3} \partial y^2} \delta y = 0; \dots \end{array} \right.$$

En comparant les deux premières équations de (68) avec la première de (66), nous voyons que la condition de leur compatibilité :

$$(69) \quad \left| \begin{array}{ccc} dx^2 & 2dx dy & dy^2 \\ \delta x & \delta y & 0 \\ 0 & \delta x & \delta y \end{array} \right| = [dx, dy]^2 = 0$$

n'est pas remplie, en tenant compte de (61). Nous avons donc nécessairement :

$$(70) \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-3} \partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-3} \partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^{s-1} F^0}{\partial \lambda^{s-3} \partial y^2} = 0.$$

De même nous obtenons aussi :

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{s-2} F^0}{\partial \lambda^{s-4} \partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^{s-2} F^0}{\partial \lambda^{s-4} \partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^{s-2} F^0}{\partial \lambda^{s-4} \partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^{s-3} F^0}{\partial \lambda^{s-6} \partial x^2} = 0; \dots \end{array} \right.$$

ce qui montre que toutes les courbes du faisceau osculateur d'ordre $(s - 3)$ en (λ^0) ont dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre trois (au moins).

En prolongeant ainsi le raisonnement et en ajoutant chaque fois l'hypothèse auxiliaire à propos des tangentes fixes, nous obtenons à la fin que la courbe :

$$F(x, y, \lambda^0) = 0$$

admet dans (x^0, y^0) génériquement un point multiple d'ordre s . On a démontré ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME N° 15 (RÉCIPROQUE). — *Soit donné un faisceau continu (1) des courbes. Considérons les systèmes osculateurs dans (λ^0) et $(\lambda^0 + d\lambda)$. Quand toutes les courbes du système osculateur d'ordre $(s - 1)$ en (λ^0) admettent un contact dans (x^0, y^0) , tandis que celles du faisceau osculateur de même ordre $(s - 1)$ en $(\lambda^0 + d\lambda)$ passent par le point :*

$$(x^0 + \delta x, y^0 + \delta y) \quad \text{et} \quad [dx, dy] = \left| \frac{dx dy}{\delta x \delta y} \right| \neq 0,$$

alors nécessairement toutes les courbes du faisceau osculateur d'ordre $(s - 2)$ en (λ^0) admettent dans (x^0, y^0) un point double (au moins). Si en outre, les tangentes principales en (x^0, y^0) de toutes ces courbes sont fixes, tandis que toutes les courbes du faisceau de même ordre $(s - 2)$ osculateur en $(\lambda^0 + d\lambda)$ admettent dans $(x^0 + \partial x, y^0 + \partial y)$ un point double, alors nécessairement toutes les courbes du faisceau osculateur d'ordre $(s - 3)$ en (λ^0) admettent dans (x^0, y^0) un point triple (au moins) etc. En prolongeant ainsi le raisonnement et en ajoutant toujours l'hypothèse auxiliaire sur les tangentes principales fixes et sur le point multiple $(x^0 + \partial x, y^0 + \partial y)$ du faisceau osculateur en $(\lambda^0 + d\lambda)$, nous obtenons à la fin que la courbe $F(x, y, \lambda^0) = 0$ admet génériquement dans (x^0, y^0) un point multiple d'ordre s .

22. — Supposons maintenant le cas où toutes les courbes d'un faisceau donné par l'équation :

$$(1) \quad F(x, y, \lambda) = 0$$

admettent un contact d'ordre $s - 1$ à l'origine. En résolvant l'équation (1) par rapport à y , nous pouvons écrire encore l'équation du faisceau (1) dans la forme suivante :

$$(72) \quad y = f_1(x) + \varphi_1(x, \lambda),$$

où $f_1(x)$ est l'ensemble de termes jusqu'au degré $s - 1$ en x , tandis que $\varphi_1(x, \lambda)$ ne contient que des termes du degré plus élevé. Plus généralement, on peut donner au faisceau (1) la forme suivante :

$$(73) \quad [y - f(x)]\psi(\lambda) + \Omega(x, y, \lambda) = 0,$$

où le développement de $\Omega(x, y, \lambda)$ en puissances de x, y commence par les termes du degré s . En effet, il est évident que toutes les courbes du faisceau (73) admettent à l'origine un contact d'ordre $s - 1$ (au moins) avec la courbe :

$$(74) \quad y = f(x) = a_1x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Considérons le faisceau osculateur du (73) d'ordre $s - 1$ en (λ^0) ; son équation est :

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} & [y - f(x)]\psi(\lambda^0) + (\lambda - \lambda_0)\psi'(\lambda^0) + \dots + \\ & + \frac{(\lambda - \lambda_0)^{s-1}}{(s-1)!} \psi^{(s-1)}(\lambda^0) \end{aligned} \right\} + \Omega(x, y, \lambda^0) + \dots = 0.$$

Il est évident d'après (75) que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $F(x, y, \lambda^0) = 0$ admette à l'origine un point génériquement multiple d'ordre s est que l'équation :

$$(76) \quad \psi(\lambda) = 0$$

admette la solution λ^0 multiple d'ordre $s - 1$. En effet, dans ce cas toutes les expressions : $\psi'(\lambda^0), \psi''(\lambda^0), \dots, \psi^{(s-2)}(\lambda^0)$ dispa

raissent. Donc, toutes les courbes de tous les faisceaux osculateurs en (λ^0) jusqu'à l'ordre $s - 2$ admettent à l'origine un point multiple d'ordre s , tandis que l'équation du faisceau osculateur d'ordre $s - 1$ prend la forme :

$$(77) \quad [y - f(x)]\psi^{(s-1)}(\lambda^0) \frac{(\lambda - \lambda_0)^{s-1}}{(s-1)!} + \Omega(x, y, \lambda^0) + \dots = 0,$$

ce qui nous montre que toutes ces courbes ont un contact à l'origine. Donc, toutes les conditions pour que l'origine soit un point génériquement multiple d'ordre s pour la courbe (λ^0) de notre faisceau sont satisfaites. Au contraire, si, par exemple, $\psi^{(s-2)}(\lambda^0) \neq 0$, la courbe du faisceau osculateur d'ordre $s - 2$ n'admet plus nécessairement un point double à l'origine et cette dernière ne peut plus être un point génériquement multiple d'ordre s de (λ^0) (nous supposons que $a_1 \neq 0$ dans l'équation (74)). Donc, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 16. — *Quand toutes les courbes d'un faisceau continu des courbes admettent dans l'origine un contact d'ordre $(s - 1)$, on peut toujours donner à l'équation de ce faisceau la forme (73). Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (λ^0) de ce faisceau admette génériquement un point multiple d'ordre s à l'origine est que (λ^0) soit la racine multiple d'ordre $(s - 1)$, de l'équation (76).*

En particulier, pour un point double ($s = 2$), il suffit que (λ^0) soit une racine ordinaire de (76).



CHAPITRE V

23. — Nous allons à présent étudier spécialement les faisceaux algébriques dont la courbe générique admet un point multiple d'ordre s , *mobile en dehors de la base du faisceau*. Nous avons déjà vu (théorème n° 8 du chapitre II, p. 31) que si m est l'ordre du faisceau donné, s ne peut dépasser m .

Commençons notre étude par le cas où $s = m$. D'une manière plus générale, considérons un faisceau d'indice m des courbes, ce qui signifie d'après De Jonquières ⁽¹⁾ que par chaque point générique du plan, il passe m courbes appartenant à ce faisceau. Démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 1. — *Pour que la courbe générique, appartenant à un faisceau d'indice m admette un (au moins) point multiple d'ordre m , mobile en dehors de la base de ce faisceau, il est nécessaire que ce soit un faisceau rationnel, qui peut alors prendre la forme suivante :*

$$(1) \quad \varphi_0(x, y) + \lambda \varphi_1(x, y) + \dots + \frac{\lambda^m}{m!} \varphi_m(x, y) = 0.$$

En outre, il est nécessaire que toutes les expressions $\varphi_i(x, y)$ soient linéairement indépendantes entre elles.

Démonstration. — Nous pouvons déterminer analytiquement un faisceau d'indice m , en prenant l'équation :

$$(2) \quad \mu_0 \varphi_0(x, y) + \mu_1 \varphi_1(x, y) + \dots + \mu_N \varphi_N(x, y) = 0$$

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques, série II, t. 6 (1861).*

d'un système linéaire des courbes (à N dimensions) et le système des équations :

$$(3) \quad \mu_i = \mu_i(\lambda) \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

du faisceau d'indice m , appartenant au système (2).

Considérons l'espace Σ_N à N dimensions, dont les coordonnées homogènes d'un point sont $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N)$. Il est évident que le système (3) déterminera dans Σ_N une courbe C^m algébrique d'ordre m . Pour que la courbe générique du faisceau donné admette un point multiple mobile en dehors de la base, il est nécessaire d'après le théorème n° 7 du chapitre II (p. 30) que l'espace d'appartenance de la courbe C^m de Σ_N ait au moins m dimensions. Mais, d'autre part, il est certain que l'espace d'appartenance d'une courbe algébrique d'ordre m est au plus à m dimensions et dans ce dernier cas, la courbe C^m est nécessairement rationnelle (c'est-à-dire du genre zéro) ⁽¹⁾. On peut alors, en effectuant une transformation linéaire convenable sur les μ_i (suivi ou non d'un changement de paramètre λ), transformer le système (3) en système suivant ⁽²⁾ :

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 1; \quad \mu_1 = \lambda; \quad \mu_2 = \frac{\lambda^2}{2!}; \quad \dots; \quad \mu_m = \frac{\lambda^m}{m!}; \\ \mu_{m+1} = \dots = \mu_N = 0; \end{array} \right.$$

l'équation du faisceau prendra donc la forme (1). Puisque, en outre, aux courbes :

$$(4) \quad \varphi_0(x, y) = 0; \quad \varphi_1(x, y) = 0; \quad \varphi_2(x, y) = 0; \dots$$

correspondent dans Σ_N , d'après (2), les points suivants :

$$(1, 0, 0, \dots); \quad (0, 1, 0, \dots), \quad (0, 0, 1, \dots); \dots$$

⁽¹⁾ Voir, par exemple, l'ouvrage cité plus haut (p. 27) de F. Severi, page 112.

⁽²⁾ Voir, par exemple, l'ouvrage cité plus haut (p. 37) d'Enriques-Chisini, t. 2, p. 673.

déterminant l'espace d'appartenance de la courbe C^m , il est évident que les parties gauches des équations (4) doivent être linéairement indépendantes. Le théorème est ainsi complètement démontré.

De tous les faisceaux d'indice m il ne nous reste donc qu'à considérer les faisceaux (rationnels) d'ordre m .

24. — Jusqu'à présent, nous avons considéré les faisceaux des courbes quelconques. Envisageons maintenant *les faisceaux des courbes algébriques*. Soit donné :

$$(5) \quad F(x, y, \lambda) = 0$$

l'équation d'un tel faisceau d'ordre m . La courbe générique (λ^0) de ce faisceau est supposée d'ordre n . Elle a, en outre, le point (x^0, y^0) multiple d'ordre m . Quand (λ^0) varie, le point (x^0, y^0) décrit une courbe R . Supposons, en outre, que la courbe R n'admet aucun point de la base du faisceau (5). Nous dirons dans ce cas que le point multiple est mobile *entièrement* hors de la base du faisceau.

Nous savons (théorème n° 3 du chapitre II, p. 26) que dans le cas considéré le point (x^0, y^0) de (λ^0) est un point *génériquement* multiple d'ordre m . D'autre part, il est certain que par un point quelconque du plan (x^0, y^0) n'appartenant pas à la base du faisceau (5) d'ordre m , il passe exactement m courbes (distinctes ou confondues, réelles ou imaginaires) du faisceau (5). Si par un point quelconque il passe $m + 1$ courbes du faisceau (5), toutes les courbes de ce faisceau passeront nécessairement par ce point ; c'est-à-dire qu'un tel point appartient à la base du faisceau (5). En tenant compte de ce fait, considérons le point (x^0, y^0) du plan (x, y) . Puisque ce point est un point *génériquement* multiple de la courbe (λ^0) , nous avons :

$$(6) \quad F^0 = 0; \quad \frac{\partial F^0}{\partial \lambda} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial^{m-1} F^0}{\partial \lambda^{m-1}} = 0,$$

ce qui nous montre que $\lambda = \lambda^0$ est une solution multiple d'ordre m de l'équation :

$$(7) \quad F(x^0, y^0, \lambda) = 0.$$

Il résulte de ce qui précède qu'il ne passe qu'une seule courbe (λ^0) du faisceau (1) par le point (x^0, y^0) . D'après notre hypothèse la courbe générique (λ^0) du faisceau (5) est une courbe algébrique d'ordre n . Supposons maintenant que le lieu R de points multiples est une courbe d'ordre k . Alors, la courbe (λ^0) doit couper le lieu R encore dans $nk - 1$ points autres que (x^0, y^0) . Soient $(x^1, y^1), \dots, (x^{nk-1}, y^{nk-1})$ ces points. Envisageons le point (x^1, y^1) . Il passe par ce point la courbe (λ^0) et encore, peut-être, une autre courbe, soit (λ^1) , admettant en (x^1, y^1) génériquement un point multiple d'ordre m ; c'est-à-dire, λ^1 doit être la solution multiple d'ordre m de l'équation :

$$F(x^1, y^1, \lambda) = 0.$$

Mais du fait que cette équation d'ordre m en λ admet déjà une solution $\lambda = \lambda^0$ et que le point (x^1, y^1) n'appartient pas à la base du faisceau (1), il résulte nécessairement :

$$\lambda^1 = \lambda^0.$$

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME N° 2. — *La courbe d'ordre n générique d'un faisceau algébrique d'ordre m ne peut avoir que p points multiples d'ordre m , mobiles entièrement en dehors de la base, ou p est soumise à la condition suivante :*

(8)

$$pm = nk$$

et k est l'ordre du lieu du point multiple mobile.

En développant le faisceau (5) en voisinage de $\lambda^0 = 0$, nous obtenons :

$$(5') \quad F(x, y, \lambda) = \varphi_0(x, y) + \lambda \varphi_1(x, y) + \dots + \frac{\lambda^m}{m!} \varphi_m(x, y) = 0,$$

où nous avons posé :

$$\left[\frac{\partial^k F(x, y, \lambda^0)}{\partial \lambda^k} \right]_{\lambda^0=0} = \varphi_k(x, y).$$

Supposons en outre (ce qui, d'ailleurs, est toujours possible d'obtenir par une transformation convenable des coordonnées) que l'origine $(0, 0)$ est un des points génériquement multiples d'ordre m de la courbe $\lambda^0 = 0$ et que l'axe $y = 0$ est tangent à l'origine $(0, 0)$ au lieu R de points multiples du faisceau (5). Nous supposons donc que $(0, 0)$ est un point ordinaire de R . Nous désignerons encore par $\varphi_k^r(x, y)$ l'ensemble des termes d'ordre r en x, y de la fonction $\varphi_k(x, y)$, c'est-à-dire nous avons *identiquement* :

$$\varphi_k(x, y) \equiv \varphi_k^r(x, y) + \varphi_k^{r+1}(x, y) + \dots + \varphi_k^{r+i}(x, y).$$

Nous pouvons même déterminer le nombre r , c'est-à-dire le degré le plus petit de x et y dans la fonction $\varphi_k(x, y)$. En effet, d'après l'équation (5) du chapitre précédent (p. 36), l'équation :

$$\varphi_k^r(x, y) = 0$$

représente l'ensemble des $m - k$ tangentes principales fixes en $(0, 0)$ du faisceau osculateur d'ordre k en $\lambda^0 = 0$. Il s'en suit, que $r = m - k$. Donc :

$$\varphi_k(x, y) = \varphi_k^{m-k}(x, y) + \varphi_k^{m-k+1}(x, y) + \dots + \varphi_k^m(x, y); \quad (k=0, 1, \dots, m).$$

Soit :

$$(9) \quad \varphi_0^m(x, y) = A_0 x^m + \binom{m}{1} A_1 x^{m-1} y + \dots + \binom{m}{1} A_{m-1} x y^{m-1} + A_m y^m.$$

Alors, puisque nous avons supposé que l'axe des x (c'est-à-dire la droite $y = 0$) est tangente en $(0, 0)$ au lieu R , il résulte du théorème n° 4 du chapitre précédent (p. 48) (cette pro-

les points ordinaires du lieu R, toutes les tangentes principales dans (x^0, y^0) , $(x^1, y^1), \dots$ de la courbe (λ^0) sont nécessairement distinctes de tangentes en les mêmes points (respectivement) au lieu R. Au contraire, la condition nécessaire pour que le point (x^0, y^0) de la courbe R soit un point de la base du faisceau (5) est qu'une des tangentes principales dans (x^0, y^0) de la courbe (λ^0) soit confondue avec la tangente dans (x^0, y^0) au lieu R de points multiples.

Ce théorème est, d'ailleurs, en accord avec le théorème n° 7 du chapitre précédent (p. 49).

Exemple. — Considérons deux faisceaux linéaires des droites :

$$(12) \quad \varphi_1 + \lambda \varphi_2 = 0 \quad \varphi_3 + \lambda \varphi_4 = 0,$$

les φ étant les fonctions linéaires de x et y . La courbe produite par ces deux faisceaux est, évidemment, une conique R, passant par les 2 points des bases (x^1, y^1) et (x^2, y^2) de ces 2 faisceaux ; mais considérons le faisceau d'ordre 2, déterminé par l'équation :

$$(13) \quad (\varphi_1 + \lambda \varphi_2)(\varphi_3 + \lambda \varphi_4) = \varphi_1 \varphi_3 + \lambda(\varphi_1 \varphi_4 + \varphi_2 \varphi_3) + \lambda^2 \varphi_2 \varphi_4 = 0.$$

La courbe générique du faisceau (13) est évidemment décomposée en 2 droites (d_1, d_2) passant par 2 points de base : (x^1, y^1) et (x^2, y^2) . Le point double de la courbe générique décrit la conique mentionnée R, passant par les points (x^1, y^1) et (x^2, y^2) . Il résulte du théorème n° 3, que dans les points (x^1, y^1) et (x^2, y^2) et seulement dans ces 2 points, la tangente de la conique R est confondue avec une des 2 droites mobiles $(d_1$ et $d_2)$ de la courbe (λ) . Nous retrouvons ainsi le résultat classique de la théorie de la génération des coniques par deux faisceaux projectives des droites.

Supposons maintenant dans le cas $m > s$ que *chaque* intersection de la courbe générique (λ^0) avec le lieu R de points multiples est un point multiple d'ordre s . Envisageons un de

ces points multiples, soit le point (x^0, y^0) . Supposons comme auparavant que (λ^0) est la solution multiple d'ordre s de l'équation (7). Mais, puisque $m > s$, il s'ensuit qu'il doit exister encore une autre solution, soit (λ^1) , de l'équation (7). Donc, la courbe (λ^1) du faisceau (5) passe aussi par le point (x^0, y^0) et d'après notre hypothèse, elle doit avoir aussi dans (x^0, y^0) génériquement un point multiple d'ordre s . Ce qui veut dire que la solution (λ^1) , de l'équation (7) doit être aussi une solution multiple d'ordre s (au moins). En prolongeant ce raisonnement, nous constatons que chaque racine de l'équation (7) doit être multiple d'ordre s (au moins). D'autre part, nous savons déjà que la multiplicité de la racine (λ^0) de l'équation (7) est exactement égale à s quand toutes les tangentes principales dans (x^0, y^0) de la courbe (λ^0) du faisceau (5) sont distinctes de la tangente dans (x^0, y^0) au lieu R de point multiples. Donc, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME N° 4. — *Soit donné un faisceau algébrique d'ordre m , dont la courbe générique admet dans chaque point d'intersection avec une courbe fixe R un point multiple d'ordre s , cette courbe fixe R n'appartenant pas à la base du faisceau donné. Si, en général, toutes les tangentes principales dans le point multiple de la courbe mobile sont distinctes de la tangente à la courbe fixe R dans le même point, l'ordre m doit être multiple de s , c'est-à-dire :*

$$(14) \quad \boxed{m = qs,}$$

ou m, q, s , sont des nombres entiers positifs.

25. — Supposons maintenant que la courbe générique (λ^0) du faisceau algébrique (5) d'ordre m admet dans le point mobile (x^0, y^0) ordinaire un contact d'ordre $m - 1$ avec la courbe fixe R . Un raisonnement tout à fait analogue à celui

de la démonstration du théorème n° 1 nous démontre le théorème suivant :

THÉOREME N° 5. — *Pour que la courbe générique appartenant à un faisceau d'indice m admette en dehors de la base de ce faisceau un contact d'ordre $m - 1$ avec une courbe fixe, il est nécessaire que ce soit un faisceau rationnel qui peut alors prendre la forme*

$$(1) \quad \varphi_0(x, y) + \lambda \varphi_1(x, y) + \dots + \frac{\lambda^m}{m!} \varphi_m(x, y) = 0.$$

En outre, il est nécessaire que toutes les expressions $\varphi_i(x, y)$ soient linéairement indépendantes entre elles.

Tandis que d'une manière analogue à la démonstration du théorème n° 2, nous obtenons encore le théorème suivant :

THÉOREME N° 6. — *Soit donné un faisceau (5) algébrique d'ordre m des courbes algébriques d'ordre n , dont la courbe générique (λ^0) admet dans ses p points ordinaires (x^1, y^1) , (x^2, y^2) , $\dots$, (x^p, y^p) , un contact d'ordre $(m - 1)$ avec la courbe fixe R algébrique d'ordre k et soit que R ne passe par aucun point de la base du faisceau (5). Alors, nécessairement nous avons la condition suivante :*

(8)

$$pm = nk.$$

D'une manière analogue à la démonstration du théorème n° 4, on démontre :

THÉOREME N° 7. — *Etant donné un faisceau algébrique d'ordre m des courbes, dont la courbe générique (λ^0) , dans chaque point commun avec une courbe fixe R , admet avec cette courbe un contact d'ordre s , m doit être multiple de $s + 1$; c. à d. :*

(15)

$$m = q(s + 1),$$

où, m, q, s sont des nombres entiers positifs.

Revenons de nouveau au cas précédent d'un faisceau algébrique d'ordre m , dont la courbe générique admet un contact d'ordre $m - 1$, avec la courbe fixe R . Soit (5) l'équation de ce faisceau. Supposons que la courbe $\lambda^0 = 0$ générique de ce faisceau admet à l'origine un contact d'ordre $m - 1$ avec la courbe fixe :

$$(16) \quad f(x, y) = 0.$$

Effectuons sur (5) le changement de paramètre, en substituant :

$$(17) \quad \lambda = \lambda(\xi) \quad \text{avec} \quad \lambda^0 = \lambda(0),$$

où ξ est l'abscisse du point de contact. Supposons en outre que :

$$(18) \quad \left[\frac{d\lambda}{d\xi} \right]_{\lambda=\lambda_0} \neq 0, \neq \infty.$$

Soit alors :

$$(19) \quad F(x, y, \lambda) \equiv \Phi(x, y, \xi) = 0.$$

En résolvant (19) par rapport à y et en développant en voisinage de $\xi = 0$, nous obtenons :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(x, y, \xi) \equiv y - P(x, 0) - \xi \cdot \frac{\partial P(x, 0)}{\partial \xi} - \dots \\ - \frac{\xi^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n P(x, 0)}{\partial \xi^n} - \dots = 0. \end{array} \right.$$

Développons l'expression $\frac{\partial^k P(x, 0)}{\partial \xi^k}$ en voisinage de l'origine. D'après (46) du chapitre précédent (p. 55), nous avons :

$$\frac{\partial^k P(x, 0)}{\partial \xi^k} = \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left[\frac{\partial^{s-k+1} P(0, 0)}{\partial x^{s-k+1}} \cdot \frac{x^{s-k+1}}{(s-k+1)!} + \dots \right]$$

et d'après (49) du même chapitre (p. 55) :

$$\frac{\partial^k P(x, 0)}{\partial \xi^k} = (-1)^k \cdot \frac{\partial^{s+1} P(0, 0)}{\partial x^{s+1}} \cdot \frac{x^{s-k+1}}{(s-k+1)!} + \dots$$

Donc :

$$(21) \quad \frac{\partial^{s+1} P(x, 0)}{\partial \xi^{s+1}} = (-1)^{s+1} \cdot \frac{\partial^{s+1} P(0, 0)}{\partial x^{s+1}} + \dots$$

Dès lors, pour que la courbe $\xi = 0$ admette à l'origine un contact d'ordre $s + 1$ avec la courbe fixe (16), il faut et il suffit que $\frac{\partial^{s+1} P(0, 0)}{\partial x^{s+1}}$ soit nul, ce qui entraîne :

$$\frac{\partial^{s+1} P(0, 0)}{\partial \xi^{s+1}} = 0.$$

Donc aussi :

$$(22) \quad \frac{\partial^{s+1} Q(0, 0, 0)}{\partial \xi^{s+1}} = 0.$$

Cela nous montre que l'équation :

$$(20') \quad Q(0, 0, \xi) = 0$$

admet une racine $\xi = 0$ multiple d'ordre $s + 2$. Il s'ensuit que l'équation :

$$(19') \quad \Phi(0, 0, \xi) = 0$$

qui est équivalente à (20'), l'admet aussi, c. à d. :

$$\frac{\partial^{s+1} \Phi(0, 0, 0)}{\partial \xi^{s+1}} = 0.$$

Maïs alors, d'après la condition (18), nous avons aussi :

$$\frac{\partial^{s+1} F(0, 0, \lambda^0)}{\partial \lambda^{s+1}} = 0.$$

Puisque le faisceau (5) est supposé algébrique d'ordre m , il s'ensuit le théorème suivant :

THÉORÈME N° 8. — *Soit donné un faisceau algébrique (5) d'ordre m des courbes, dont la courbe générique (λ^0) admet dans ses points $(x^0, y^0), \dots$ ordinaires un contact d'ordre $(m-1)$ avec une courbe fixe R (ces points aussi étant supposés ordinaires de R). Pour que le point (x^0, y^0) n'appartienne pas à la*

base de ce faisceau, il est nécessaire que l'ordre du contact entre (λ^0) et R dans (x^0, y^0) ne soit pas plus grand que $(m - 1)$. Au contraire, pour que (x^0, y^0) soit le point de la base, il est nécessaire que cet ordre soit égal à m (au moins).

D'une manière analogue, on pourrait considérer le cas d'un faisceau algébrique des courbes, où la courbe générique (λ^0) admet en un point (x^0, y^0) ordinaire d'une courbe fixe R, un point multiple d'ordre s et en outre, une des branches de (λ^0) admet dans (x^0, y^0) un contact d'ordre $m - s - 1$ avec R.

26. — Considérons maintenant les faisceaux d'ordre 2, dont la courbe générique admet les points doubles mobiles entièrement en dehors de la base.

Il est certain que l'ordre de l'enveloppe d'un faisceau d'ordre 2 de courbes d'ordre n , ne peut pas dépasser $2n$ et que les points doubles décrivent une courbe qui doit être comptée deux fois dans l'enveloppe (dans le cas de tangentes principales distinctes). Il est alors évident d'après le théorème n° 2 :

THÉORÈME N° 9. — *Quand la courbe générique d'un faisceau d'ordre 2 de courbes d'ordre n admet p points doubles mobiles entièrement en dehors de la base, p est soumise à la condition suivante :*

$$(23) \quad 2p = nk$$

(où k est l'ordre du lieu des points mobiles) et l'ordre de l'enveloppe de ce faisceau est égal à $2(n - k)$.

Soit la courbe générique du faisceau d'ordre 2 de courbes d'ordre mn décomposée en m parties, chacune d'ordre n sans points doubles. Dès lors, il y a $\frac{n^2m(m-1)}{2}$ points d'intersection. Donc, dans la formule (23) il faut poser $p = \frac{n^2m(m-1)}{2}$ et on obtient pour k (puisque l'ordre de la courbe est $= mn$) :

$$(24) \quad k = n(m - 1) ;$$

il s'ensuit que l'ordre / de l'enveloppe de ce faisceau est :

$$(25) \quad f = 2mn - 2k = 2n,$$

ce qui veut dire que l'ensemble de toutes les parties de toutes les courbes du faisceau appartient à un même faisceau d'ordre 2. Nous avons donc le théorème suivant :

THÉOREME N° 10. — *Quand la courbe générique d'un faisceau d'ordre 2 sans base, de courbes d'ordre mn est décomposée en m parties, chacune d'ordre n sans points doubles, l'ensemble de points d'intersection de ces parties décrit une courbe d'ordre $n(m - 1)$, tandis que l'ensemble de toutes les parties de toutes les courbes du faisceau donné appartient à un même faisceau d'ordre 2.*

Dans le cas particulier, où $n = 1$, nous avons :

THÉOREME N° 11. — *Quand la courbe générique d'un faisceau d'ordre 2 sans base, de courbes d'ordre n est décomposée en n droites, l'ensemble de points d'intersection de ces droites décrit une courbe d'ordre $n - 1$, tandis que toutes les droites de toutes les courbes du faisceau donné appartiennent à un même faisceau d'ordre 2 des droites.*

On obtient ainsi une configuration de n droites et $\frac{n(n-1)}{2}$ points; suivant une désignation admise dans la théorie des configurations, nous pouvons la présenter par le symbole :

$$(26) \quad \left[n_{(n-1)}, \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)_2 \right].$$

Considérons l'équation tangentielle d'un faisceau d'ordre 2 sans base, décomposé en configuration mobile (26). Il est évident que son équation serait identique à l'équation ponctuelle de la configuration mobile corrélatrice de (26), c. à d. de $\frac{n(n-1)}{2}$ droites tangentes à la même courbe de la classe $n - 1$ et de n points situés sur une conique. Par chaque point de la

configuration il passe $n - 1$ droites. Il est aussi évident (d'après les théorèmes précédents) que c'est un faisceau algébrique d'ordre $n - 1$. On obtient ainsi la démonstration de l'existence des ensembles continus des configurations réciproques, formant les faisceaux d'ordre $n - 1$. Le célèbre hexagramme de Pascal ($15_2, 6_5$) est une configuration de ce type. Donc, chaque configuration de Pascal ($15_2, 6_5$) peut être considérée comme un élément du faisceau d'ordre 5 de telles configurations.

Il existe ici un cas particulier : ce sont les polygones de Poncelet. Par exemple, l'hexagone de Poncelet. Son réciproque est l'hexagramme de Pascal tel que 6 de ses côtés consécutifs sont circonscrits à une conique. Il est facile de voir que la courbe de la classe 5, enveloppe des 15 droites de l'hexa-

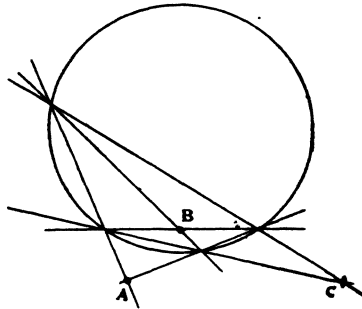


Fig. 4.

gramme de Pascal, est dégénérée ici en 2 coniques et un point fixe (point de Brianchon). L'ensemble continu des configurations du type réciproque à (26) pour le cas le plus simple ($n = 4$) a été particulièrement étudié par Steiner. Il a démontré que 4 points triples de la configuration :

(27)

($6_2, 4_3$)

peuvent se déplacer le long de la conique (fig. 4), les points diagonaux A, B, C restant fixes. Mais il n'a pas remarqué que ce n'est qu'un cas particulier des faisceaux d'ordre 3 des configurations, où l'équation du faisceau est décomposée en trois facteurs linéaires. On peut, en effet, prendre comme exemple le faisceau :

$$(28) \quad F(x, y, \lambda) \equiv [x^2 - \lambda(x^2 + y^2)][(y^2 - 1) + \lambda][x^2 - \lambda] = 0.$$

C'est un faisceau des configurations du type (27) ; les 4 points triples sont mobiles le long du cercle $x^2 + y^2 = 1$, tandis que les points diagonaux fixes sont $(0, 0)$, $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$.

Tous les autres peuvent être obtenus de (28) en effectuant une homographie sur x , y et λ .

Mais on peut trouver encore plusieurs autres faisceaux analogues et non décomposés, où les droites de la configuration mobile décrivent toujours la courbe de 3^{me} classe. Voici un exemple. L'équation :

$$(29) \quad \begin{cases} (4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1) - 4xy(x^2 - y^2)\lambda \\ + [(x^2 - y^2)^2 - 2x^2 - 2y^2 - 1]\lambda^2 = 0 \end{cases}$$

nous donne un faisceau d'ordre 2 des quadrilatères de Poncelet,

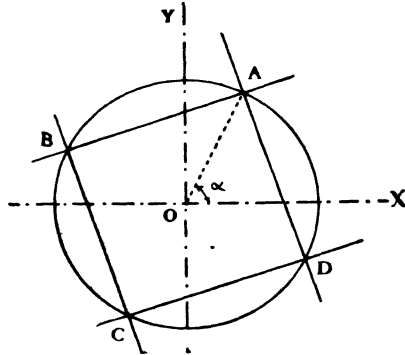


Fig. 5.

dont les sommets sont mobiles le long du cercle $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 5), ($\lambda = \tan 2\alpha$), tandis que deux autres points d'intersec-

tion AD, BC et AB, CD sont mobiles le long de la droite de l'infini.

Considérons la configuration mobile, réciproque à cette dernière, c'est-à-dire le faisceau déterminé par la même équation (29) considérée comme équation tangentielle. Évidemment c'est aussi un système de configurations (27) analogues à celles de Steiner, mais ici 4 droites décrivent la même conique C, tandis que 2 autres se coupent dans un point fixe A. Son équation ponctuelle sera donc décomposée seulement en 2 facteurs, dont un est du second ordre, c'est-à-dire qu'elle aura la forme suivante :

$$(30) \quad F(x, y, \lambda) \equiv (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(\varphi_3 + \lambda\varphi_4 + \lambda^2\varphi_5) = 0.$$

Enfin, il est facile de démontrer l'existence des faisceaux de la forme indécomposable :

$$(31) \quad F(x, y, \lambda) \equiv \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \lambda^3\varphi_3 = 0,$$

où 6 droites de la configuration mobile enveloppent une courbe de 3^e classe non dégénérée.

Au lieu de démontrer cela, démontrons l'existence de la configuration réciproque : configuration de 4 droites mobiles, tangentes à une conique fixe, dont 6 points d'intersection décrivent une cubique arbitraire (non dégénérée). Cela doit nous donner un faisceau d'ordre 2, généralisant dans un certain sens, les polygones de Poncelet, c'est-à-dire nous voulons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME N° 12. — *On peut toujours former un faisceau algébrique d'ordre 2 de configurations $(4_3, 6_2)$, dont 6 sommets décrivent une cubique donnée.*

Démonstration. — Soit donné sur le plan $P(u, v)$ un système linéaire à 2 paramètres des coniques-enveloppes (c'est à-dire nous supposons que u, v sont les coordonnées tangentielles) ; soit son équation :

$$(32) \quad \varphi_0 + \varphi_1\lambda_1 + \varphi_2\lambda_2 = 0.$$

Considérons un autre plan $\Pi(\lambda_1, \lambda_2)$, dont les coordonnées non homogènes sont les valeurs (λ_1, λ_2) des paramètres du système (32). Donc, nous avons une correspondance biunivoque entre les courbes du système (32) et les points du plan Π . Il est certain que l'ensemble de coniques dégénérées en deux points est un ensemble à un paramètre et que ces coniques dégénérées décrivent sur P une cubique C_3 , d'ailleurs arbitraire. D'autre part, il est certain que sur le plan Π correspond à cet ensemble de coniques dégénérées une autre cubique K_3 (la courbe discriminante). Cela étant, considérons sur le plan Π une droite Δ pivotante autour du point Γ fixe, n'appartenant pas à la courbe discriminante K_3 . A la droite Δ correspond sur le plan P un faisceau linéaire des coniques, appartenant au système (32). Au point Γ fixe de la droite Δ correspond sur le plan P une conique-enveloppe fixe G non dégénérée. Aux trois points α, β, γ d'intersection de Δ avec la cubique K_3 correspondent sur P trois paires de points $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ appartenant à la cubique C_3 (les couples conjugués) et alignées trois par trois sur 4 tangentes à la conique fixe G (car les coniques dégénérées $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ et la conique fixe G appartiennent au même faisceau linéaire tangentiel). Au pivotement de la droite Δ autour du point fixe Γ correspond sur le plan P le mouvement de la configuration $(4_3, 6_2)$, dont 4 droites sont toujours tangentes à la conique fixe G et dont 6 sommets se meuvent le long de la cubique arbitraire C_3 . Puisque par chaque point du plan P on peut mener 2 tangentes à la conique fixe G , il est évident que l'équation dans les coordonnées ponctuelles de cette configuration mobile doit être d'ordre 2 par rapport au paramètre. Du fait que chaque droite du plan P coupe la cubique fixe C_3 dans 3 points, il résulte que la même équation dans les coordonnées tangentielles doit être d'ordre 3 par rapport au paramètre. Le théorème est donc démontré.

Avant de prolonger l'étude des configurations mobiles formant les faisceaux d'ordre 2, arrêtons-nous particulièrement sur les configurations $\left[n_{n-1}, \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)_2 \right]$ et considérons les faisceaux de ces configurations d'un point de vue plus général. Nous appellerons brièvement une telle configuration la configuration $K(n)$.

27. — Soit donné sur le plan une courbe algébrique C de la classe m . Soit A un groupe de n points sur C . En menant dans chaque point du groupe A une tangente à C , nous obtenons ainsi évidemment une configuration $K(n)$. Supposons que le groupe A appartient à une série linéaire g_n^1 appartenant à la courbe C . Démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME N° 13. — *Soit donné une courbe C de la classe m et d'ordre n (les tangentes multiples de C sont supposées de contacts distincts) et une série linéaire g_n^1 sur C . En menant les tangentes à C dans chaque point d'un groupe A des points appartenant à g_n^1 , nous obtenons une configuration $K(n)$. L'ensemble de toutes les $K(n)$, correspondant à tous les groupes de g_n^1 , forme un faisceau algébrique d'ordre m , tandis que le lieu des sommets de toutes ces $K(n)$ est une courbe d'ordre :*

$$\boxed{X = \frac{(2n - m)(m - 1)}{2}.} \quad (\text{cas général})$$

Démonstration. — Soit :

$$(33) \quad f_0(x, y) + \lambda f_1(x, y) = 0$$

l'équation du faisceau linéaire découpant sur C la série g_n^1 . Menons par un point (x^0, y^0) générique du plan, m tangentes à la courbe C (suivant la classe de cette courbe.) Nous obtenons ainsi m points de contact. Chaque point de contact déter-

mine une valeur correspondante de λ de l'équation (33). Puisque le point (x^0, y^0) est générique, toutes ces m valeurs de λ sont distinctes. Mais, chaque valeur de λ détermine un groupe de la série g_n^1 et par conséquent une $K(n)$. Il s'ensuit que notre faisceau continu des configurations $K(n)$, déterminé par la série g_n^1 est d'indice m . Démontrons maintenant que ce faisceau est un faisceau rationnel, c. à d. qu'il est non seulement d'indice m , mais aussi d'ordre m . Etablissons pour cela une correspondance biunivoque entre les configurations $K(n)$ de notre faisceau et les points d'un espace Σ , d'une manière analogue à celle que nous avons fait dans le § 23 (page 68). Alors, à l'ensemble des $K(n)$ appartenant à notre faisceau d'indice m , correspondra dans Σ une courbe R^m d'ordre m . Prenons d'autre part deux points quelconques P_0 et P_1 et considérons la droite P_0P_1 , dont chaque point peut être déterminé par la valeur correspondante de λ de l'équation (33). On peut écrire symboliquement :

$$(34) \quad P = P_0 + \lambda P_1.$$

Donc, nous avons d'une part une correspondance biunivoque entre les points d'une droite et les $K(n)$ de notre faisceau. D'autre part, nous avons une correspondance biunivoque entre les mêmes $K(n)$ et les points de la courbe R^m de l'espace Σ . Il résulte une correspondance biunivoque entre les points de R^m et les points de la droite, ce qui veut dire que la courbe R^m est une courbe unicursale et que le faisceau des $K(n)$ est d'ordre m . Notre proposition est donc démontrée. Pour calculer l'ordre X du lieu des points doubles de $K(n)$ mobile, rappelons-nous le théorème dû à M. Saltel ⁽¹⁾.

THÉOREME DE M. SALTTEL. — *Le degré N de la courbe enveloppe du système des courbes du degré n , déterminé par l'équation :*

$$(1) \quad \varphi_0(x, y) + \lambda \varphi_1(x, y) + \dots + \frac{\lambda^m}{m!} \varphi_m(x, y) = 0,$$

(1) *Comptes rendus*, t. 83, p. 608.

est :

(34)

$$N = 2n(m - 1).$$

Appliquons ce théorème à notre cas, où l'enveloppe complète est décomposée en deux courbes : en enveloppe proprement dite, dont l'ordre est $m(m - 1)$ (dans le cas général de la courbe C de la classe m) et en lieu de points doubles, dont l'ordre X , comme il est certain, doit être compté deux fois. Donc, nous avons :

$$2X + m(m - 1) = 2n(m - 1).$$

D'où :

(35)

$$X = \frac{(2n - m)(m - 1)}{2}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

REMARQUE. — Il résulte de la formule (35) l'inégalité suivante :

$$(36) \quad n > \frac{m}{2}$$

qui existe pour une courbe générale de la classe m .

Démontrons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME N° 14. — *Pour que deux configurations $K(n)$ arbitraires, circonscrites à la même courbe algébrique C de la classe m (avec les contacts distincts des tangentes multiples) puissent toujours déterminer un faisceau algébrique d'ordre m des $K(n)$, circonscrites à C , il faut et il suffit que le genre de C soit égal à zéro.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu qu'une g_n^1 détermine un faisceau algébrique d'ordre m des $K(n)$. Il est évident que réciproquement : un faisceau algébrique d'ordre m des $K(n)$ détermine une série linéaire g_n^1 sur C . Donc, pour démontrer

notre théorème, il faut et il suffit de démontrer que deux groupes A et B de n points chacun, pris arbitrairement sur C, puissent déterminer une série linéaire g_n^1 ; mais il est certain (Voir, par exemple, le livre mentionné de Enriques-Chisini, Volume III, p. 142) que la dimension de la série complète g_n^{n-p} d'ordre n sur une courbe de genre p est égale à $n - p$. Donc, quand $p = 0$ et seulement dans ce cas, la série complète d'ordre n a aussi la dimension $= n$. Il est évident que dans ce cas, deux groupes arbitraires A et B déterminent toujours une série linéaire g_n^1 . Le théorème est ainsi démontré.

En revenant au cas des coniques ($m = 2$), nous retrouvons :

$$(37) \quad X = n - 1$$

et nous obtenons, en outre, le théorème suivant :

THÉORÈME N° 15. — *Etant données arbitrairement deux configurations $K(n)$ circonscrites à une même conique, $n(n - 1)$ sommets de ces deux configurations sont placés sur une même courbe d'ordre $n - 1$.*

En posant $n = 6$ et en effectuant une corrélation du plan, nous obtenons :

THÉORÈME N° 16. — *30 droites appartenant à deux hexagrammes de Pascal, prises arbitrairement sur une même conique, sont tangentes à la même courbe de la classe 5.*

Il est facile de voir que le lieu des points doubles n'est pas une courbe arbitraire d'ordre $n - 1$. Calculons pour cela la dimension D de tels lieux sur le plan. La dimension R de toutes les g_n^1 sur une courbe C du genre zéro est évidemment égale à celle de l'ensemble des droites dans un espace S_n à n dimensions (puisque la série complète g_n^n est à n dimensions), c'est-à-dire nous avons :

$$(38) \quad R = 2(n - 1).$$

Il s'ensuit :

$$(39) \quad D = 2(n - 1) + 5;$$

tandis que la dimension D' de toutes les courbes d'ordre $X = n - 1$, est :

$$(40) \quad D' = \frac{(n - 1)(n + 2)}{2}.$$

Donc, nous avons :

$$(41) \quad \begin{cases} D \geq D' & \text{quand } X < 4; \\ D < D' & \text{» } X \geq 4 \text{ (}^1\text{)}. \end{cases}$$

Nous pouvons généraliser le problème d'un autre point de vue. Bornons-nous, pour la simplicité, sur le cas de coniques. Soit donnée une conique C . Considérons une série linéaire g_n^q de la dimension q , appartenant à cette conique. Soit :

$$(42) \quad \varphi_0(x, y) + \lambda_1 \varphi_1(x, y) + \dots + \lambda_q \varphi_q(x, y) = 0$$

l'équation du système linéaire des courbes découpant sur C notre série g_n^q . Substituons dans (42) :

$$(43) \quad \lambda_k = \lambda^k. \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

Nous obtenons ainsi une série algébrique γ_n^q d'ordre q , représentant évidemment un faisceau algébrique d'ordre $2q$ des configurations $K(n)$ circonscrites à la conique C . Nous avons déjà montré plus haut que le lieu L de leurs sommets décrit une courbe de l'ordre $X = q(n - 1)$. Calculons la dimension D de tous les lieux L . Il faut d'ailleurs prendre une conique (3 conditions). Calculons la dimension des γ_n^q d'ordre q sur une conique

(¹) Ce travail était en cours d'impression, quand M. CARTAN m'a indiqué que les théorèmes n^{os} 15 et 16 de ce chapitre étaient déjà énoncés en 1901 par M. WEILL dans le *Bull. de la Soc. Math. de France*, 29, p. 26-29. D'autre part, j'ai trouvé ces théorèmes énoncés une seconde fois en 1924 par M. BERTRAND GAMBIER dans les *Comptes Rendus*, 179, p. 745.

(sur une courbe unicursale). Considérons pour cela comme auparavant le groupe de n points de la conique C , comme le point d'un espace S_n à n dimensions. La série algébrique γ_n^1 présente alors dans S_n une courbe normale déterminée par $q + 1$ points indépendants (appartenant à un S_q de S_n). En calculant la dimension Γ de courbes γ_n^1 dans S_n d'après la méthode exposée dans Enriques et Chisini (vol. 1, p. 145), nous obtenons :

$$\Gamma = n(q + 1) - (q + 1) = (q + 1)(n - 1).$$

Il s'ensuit donc que la dimension D du lieu L d'ordre X des sommets de la configuration mobile est déterminée par :

$$(44) \quad D = (q + 1)(n - 1) + 5$$

conditions.

On voit facilement que dans ce cas aussi les inégalités (41) ont lieu, quelque soient q et n .

Étudions la même question, en employant une autre méthode (cette méthode est due à M. CARTAN qui me l'a communiquée dans une lettre).

Soit donné un faisceau d'ordre 2 des droites. Au moyen d'une homographie convenable on peut lui donner la forme suivante :

$$(45) \quad y = ax + a^2.$$

Soit donnée d'autre part l'équation :

$$(46) \quad f(x) + \lambda g(x) = 0,$$

f et g étant deux polynômes du degré n . Il est évident que pour chaque valeur de λ les équations (45) et (46) déterminent l'ensemble de n droites de la configuration mobile formant un faisceau d'ordre 2. Cherchons le lieu des sommets. Tout point double appartient à deux tangentes à la conique α_1 et α_2 — racines d'une équation :

$$(47) \quad f(x) + \lambda^0 g(x) = 0;$$

on a donc :

$$\frac{f(\alpha_1)}{g(\alpha_1)} = \frac{f(\alpha_2)}{g(\alpha_2)},$$

ou :

$$(48) \quad \frac{f(\alpha_1)g(\alpha_2) - f(\alpha_2)g(\alpha_1)}{\alpha_1 - \alpha_2} = 0.$$

Le 1^{er} membre est un polynome entier d'ordre $n - 1$ en $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$. Or, si la conique est l'enveloppe de (45), on a pour les coordonnées du point d'intersection des tangentes α_1 et α_2 :

$$(49) \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -x; \quad \alpha_1\alpha_2 = -y.$$

Nous retrouvons ainsi encore une fois que le lieu des points doubles de la configuration mobile $K(n)$ est d'ordre $n - 1$.

Montrons à présent (en suivant toujours les indications de M. CARTAN) qu'en général, ce lieu L est une courbe sans points doubles.

En effet, pour que le lieu L ait un point double, il faut que, si :

$$(50) \quad F(x, y) = 0$$

est son équation, on ait $F'_x = 0$; $F'_y = 0$, ou encore, en posant (49), on ait :

$$(51) \quad F'_{\alpha_1} = 0; \quad F'_{\alpha_2} = 0.$$

Or,

$$(52) \quad F = \frac{f(\alpha_1)g(\alpha_2) - f(\alpha_2)g(\alpha_1)}{\alpha_1 - \alpha_2};$$

on obtient :

$$(53) \quad f'(\alpha_1) \cdot g(\alpha_2) - f(\alpha_2) \cdot g'(\alpha_1) = 0;$$

$$(54) \quad f(\alpha_1)g'(\alpha_2) - f'(\alpha_2)g(\alpha_1) = 0.$$

On doit donc avoir :

$$(55) \quad \frac{f(\alpha_1)}{g(\alpha_1)} = \frac{g(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)} = \frac{f'(\alpha_1)}{g'(\alpha_1)} = \frac{g'(\alpha_2)}{f''(\alpha_2)}.$$

Autrement dit, la courbe qui représente la variation de la fonction rationnelle :

$$(56) \quad \beta = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)},$$

doit avoir une tangente double parallèle à 0α , ce qui est exceptionnel.

C. Q. F. D.

L'étude plus détaillée de ces faisceaux $K(n)$ doit être intéressante. L'utilisation des espaces à plusieurs dimensions facilitera beaucoup la question. Donnons un exemple : M. Richmond ⁽¹⁾ a déduit très simplement toutes les propriétés de l'hexagramme de Pascal, en considérant la figure formée par six points placés dans l'espace à 4 dimensions (l'hexastigme). J'ai montré la méthode naturelle et simple du passage de l'hexagramme à l'hexastigme ⁽²⁾. Soit :

$$(57) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique de l'hexagramme. Considérons les coefficients variables $(A, B, \dots, F)$, comme coordonnées *tangentes* homogènes dans un espace E_5 à 5 dimensions et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$ les coordonnées *ponctuelles* dans le même espace. Il est évident qu'aux points du plan de l'hexagramme correspondent biunivoquement dans E_5 les points d'une variété W_2 à 2 dimensions, déterminée par le système des équations suivantes :

$$(58) \quad \alpha_1^2 = \alpha_1; \quad \alpha_5^2 = \alpha_3; \quad \alpha_1\alpha_5 = \alpha_2.$$

Considérons l'hyperplan H , déterminé par les coordonnées $(A, B, \dots, F)$. L'intersection de H avec la variété W_2 nous donne la courbe C qui est la représentation de la conique (57) de l'hexagramme. En prenant sur cette courbe C 6 points

⁽¹⁾ *Quart. Journ. of pure and applied Math.*, t. 31, 1900, p. 125-160 ; *Mathematische Annalen*, t. 53, 1900, p. 161-176.

⁽²⁾ *Bulletin de l'Université de Tiflis*, t. 1, 1920, p. 140.

quelconques indépendants, on arrive à l'hexastigme de Richmond. En coupant l'hexastigme par les espaces linéaires de 3, 2 et 1 dimensions, on obtient aisément toutes les droites de Pascal, points de Kirkmann, de Steiner etc...

Maintenant, on peut considérer l'hexastigme d'un aspect nouveau : on peut le considérer comme l'élément d'un faisceau d'ordre 5 (ou multiple de 5), ayant en même temps l'équation tangentielle d'ordre 2 (ou multiple de 2). On voit ainsi que pendant le mouvement de six sommets de l'hexastigme le long de la courbe C , 15 faces tridimensionnelles de l'hexastigme enveloppent une hypersurface de H « réglée » et de la classe 5 ; etc. On peut déduire ainsi toutes les courbes décrites ou enveloppées sur le plan par tous les points et droites remarquables de l'hexagramme.

28. — D'une manière analogue on pourrait aussi effectuer l'étude des faisceaux d'ordre 3 des configurations avec points triples mobiles. Toutefois, ici différents cas sont possibles, parce que le nombre de points triples sur une courbe d'ordre n décomposée en droites peut être différent (tandis que le nombre de points doubles est constant et égal à $\frac{n(n-1)}{2}$).

Nous supposons d'une manière générale les configurations :

$$(59) \quad (n_k, p_m)$$

mobiles sur le plan entièrement en dehors de la base, le long de la courbe C d'ordre k , en décrivant un faisceau algébrique. Nous supposons, en outre, que (59) mobile ne coupe C que dans ses sommets. Il résulte de ce qui précède que l'équation ponctuelle d'un tel faisceau doit être d'ordre qm (multiple de m) tandis que l'équation tangentielle doit être en même temps d'ordre qk . On peut utiliser pour ce cas le symbole : le faisceau d'ordre $(m, k)_q$.

THÉORÈME GÉNÉRAL. — Une configuration (n_k, p_m) mobile sur le plan et décrivant par ses p sommets une courbe d'ordre k (dont elle ne coupe que dans ses sommets) entièrement en dehors de la base, forme un faisceau d'ordre $(m, k)_q$, tandis que ses droites enveloppent une courbe de la classe qm ; en outre on a l'équation fondamentale précédente :

(8)

$$pm = nk.$$

Revenons au faisceau d'ordre 3 des courbes. La formule (8) nous donne ici :

(60)

$$3p = nk.$$

Soit la courbe générique du faisceau d'ordre 3 des courbes d'ordre mn décomposée en m parties (chacune d'ordre n sans ou avec les points doubles) et formant la configuration des points triples. Par exemple : soit la configuration de trois courbes appartenant à un même faisceau linéaire, c. à d. soit $m = 3$ et $p = n^2$; on a alors une configuration :

(61)

$$[(3n)_n, (n^2)_3].$$

Supposons qu'on peut former un faisceau d'ordre 3 dans lequel n^2 points de (61) décrivent une courbe d'ordre n .

Ne considérons que le cas particulier de cette configuration où chaque courbe de la configuration (61) elle-même est décomposée en n droites.

Nous appellerons, pour abrégé, une telle configuration, la configuration $St(3n)$. Ces configurations (et leurs corrélatives) furent découvertes et étudiées par M. Steinitz ⁽¹⁾, qui a montré qu'à chaque courbe de troisième classe est circonscrite une infinité à 2 dimensions de $St(3n)$. Mais il n'a pas remarqué que ces configurations peuvent former les faisceaux d'ordre 3

⁽¹⁾ Arch. f. Math. u. Phys., (3) 16 (1910), p. 297, 304-306.

(ou multiple de 3). Rappelons brièvement le principe de M. Steinitz. Soient (dans les coordonnées tangentielles) :

$$(62) \quad x = p'(u); \quad y = p''(u)$$

les équations paramétriques de la courbe K_3 de 3^e classe (la forme connue canonique de Weierstrass de l'équation de la courbe générale de la 3^e classe). Soient, en outre, ω_1 et ω_2 les demi-périodes de la fonction elliptique p de Weierstrass. Alors, chaque triple des valeurs u_1, u_2, u_3 , telle que :

$$(63) \quad u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \quad (\text{Mod. } 2\omega_1, 2\omega_2)$$

détermine sur le plan (x, y) trois droites concourantes.

Supposons que Δ est un tel nombre que n est le plus petit entier qui donne :

$$(64) \quad n\Delta \equiv 0 \quad (\text{Mod. } 2\omega_1, 2\omega_2).$$

Cela étant, $3n$ droites suivantes :

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1, \quad u_1 + \Delta, \dots, u_1 + (n-1)\Delta; \\ u_2, \quad u_2 + \Delta, \dots, u_2 + (n-1)\Delta; \\ u_3, \quad u_3 + \Delta, \dots, u_3 + (n-1)\Delta \end{array} \right.$$

déterminent une configuration $St(3n)$. En effet, il est évident que 3 droites :

$$(66) \quad u_1 + k\Delta; \quad u_2; \quad u_3 - k\Delta$$

concourent. Donc, en variant k entre 0 et $n-1$, nous obtenons que sur la droite u_2 se placent n points triples du système (65). Puisque la droite u_2 n'est pas une droite exceptionnelle du système (65), la proposition est démontrée.

Pour revenir à notre méthode, remarquons d'abord que la configuration $St(3n)$ n'est qu'un cas particulier de la configuration $K(3n)$ du précédent (comme d'ailleurs toutes les configurations des droites sur le plan), où $3n^2$ points doubles [de l'en-

semble de tous les $\frac{3n(3n-1)}{2}$ sommets de $K(3n)$ sont dégénérés en n^2 points triples. Il reste donc encore :

$$(67) \quad \frac{3n(3n-1)}{2} - 3n^2 = \frac{3n(n-1)}{2}$$

points doubles non dégénérés. Pour démontrer l'existence des faisceaux algébriques d'ordre 3, dont chaque courbe réalise une configuration $St(3n)$, on n'a qu'à remarquer que l'équation :

$$(68) \quad au_1 + bu_2 + cu_3 + d = 0$$

détermine avec (63) un faisceau d'indice 3 des $St(3n)$, admettant les points triples mobiles en dehors de la base. On peut aussi arriver au même résultat, en suivant de nouveau la méthode communiquée par M. CARTAN. Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, $\Delta = \frac{2\omega_1}{n}$ et considérons deux fonctions elliptiques du 3^e ordre $f(u)$ et $g(u)$, ayant un pôle triple à l'origine ($u=0$), et se rapportant aux périodes $\frac{2\omega_1}{n}$ et $2\omega_3$; l'équation :

$$(69) \quad f(u) + \lambda g(u) = 0$$

donnera quelque soit le paramètre λ , un faisceau d'ordre 3 répondant à la question. $f(u)$ et $g(u)$ sont du reste des fonctions elliptiques d'ordre $3n$ aux périodes $2\omega_1, 2\omega_3$. C. Q. F. D.

Ajoutons encore qu'il est facile de calculer l'ordre du lieu des points doubles. Le faisceau des $St(3n)$ étant d'ordre 3, son équation tangentielle doit être d'ordre n , ce qui nous montre que le lieu des points triples est une courbe d'ordre n . Cela étant, rappelons-nous la formule (35).

D'après cette formule l'ordre X du lieu L des points doubles d'une $K(3n)$ mobile, circonscrite à une courbe C de la classe 3 (sans points d'inflexion) et formant un faisceau d'ordre 3 est :

$$(35'') \quad X = 6n - 3.$$

Dans notre cas, le lieu L est dégénéré en 2 courbes : le lieu L_3 des n^2 points triples et le lieu L_2 des $\frac{3n(n-1)}{2}$ points doubles. Soient X_3 et X_2 les ordres des L_3 et L_2 respectivement. Alors, nous avons évidemment :

$$(70) \quad 2X = 6L_3 + 2L_2.$$

Mais $L_3 = n$; donc :

$$(71) \quad L_2 = 3(n-1).$$

Par exemple, quand $n = 2$, alors $L_2 = 3$, $L_3 = 2$. Nous revenons ainsi au cas considéré plus haut (voir p. 82 et le théorème n° 12) où 4 sommets d'un tétragone complet inscrit dans une conique, se meuvent en formant un faisceau d'ordre 3. Nous voyons maintenant que 3 points diagonaux décrivent alors une cubique.

Revenons au cas général des configurations $St(3n)$.

Puisque la configuration $St(3n)$ n'est qu'un cas particulier de $K(3n)$, il résulte qu'un faisceau d'ordre 3 des $St(3n)$ détermine sur la courbe-enveloppe C^3 de la troisième classe une série g'_n . D'autre part, d'après le mode de construction des $St(3n)$, il est évident que chaque $St(3n)$ peut être considérée comme un élément du faisceau d'ordre 3. Il existe ∞^2 des $St(3n)$ circonscrites à une C^3 donnée. Donc, l'ensemble des $St(3n)$ détermine sur C^3 une série linéaire g^2_{3n} , ce qui veut dire que chaque paire des $St(3n)$ circonscrites à une même C^3 , détermine une série g^1_{3n} sur C^3 . Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME N° 17. — *$2n^2$ points triples de deux configurations $St(3n)$ circonscrites à une même courbe de la troisième classe, sont placés sur une même courbe d'ordre n .*

Le théorème n° 17 est intéressant du fait que c'est pour la première fois qu'on démontre l'existence des ensembles continus des configurations sur une courbe d'ordre plus élevé

que 3, tandis que jusqu'à présent l'opinion générale était que dans la théorie des configurations, la cubique jouait un rôle exceptionnel. Dans son article sur les configurations, M. Steinitz dit ⁽¹⁾ : « ...sei bemerkt, dass für die ebenen Konfigurationen der Zusammenhang mit Kurven dritter Ordnung von Bedeutung ist ». En effet, on connaît de nombreuses configurations existantes et mobiles le long de la cubique, tandis qu'on ne connaissait pas de propriétés analogues par rapport aux courbes du degré plus élevé. Mais il est bien probable que c'est seulement par suite de la simplicité comparative du calcul qu'on ne connaît que les configurations de la cubique, tandis que les courbes du degré plus élevé possèdent, peut-être, les configurations plus nombreuses encore, seulement, pour les construire il faut résoudre les équations algébriques du degré élevé ou opérer avec les fonctions abéliennes qu'on ne connaît pas assez.

⁽¹⁾ *Enzykl. der Mathematischen Wissenschaften*, B III¹, Heft 4, p. 486.
