ROKURO YAMAMOTO

Sur les bases nouvelles de la sismophysique et sur la constitution interne du globe terrestre

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1924

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1924__45__1_0>

Série A, n° 965
N° d'ordre :
1792

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Rokuro YAMAMOTO (Kyoto)
Licencié ès sciences

1re THÈSE. — Sur les bases nouvelles de la sismophysique et sur la constitution interne du globe terrestre.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le avril 1924 devant la Commission d'examen.

MM. E. BOREL .... *Président.*
DRACH .... } *Examinateurs.*
MAURAIN .... }

PARIS
MASSON ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1924

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.	
Doyen	MOLLIARD, *Prof...*	Physiologie végétale.
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Profess. honoraires.	P. PUISEUX.	
	VÉLAIN.	
	BOUSSINESQ.	
	PRUVOT.	
Professeurs	E. PICARD	Analyse supér. et algèbre supérieure.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Electrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique anal. et mécan. céleste.
	HAUG	Géologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie générale.
	G. BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés)
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale
	EMILE BOREL	Calcul des probabilités et phys. mathém.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Mécanique rationnelle.
	Cl. GUICHARD	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE	Physiologie.
	GENTIL	Géographie physique.
	VESSIOT	Théorie des groupes et calc. des variat.
	COTTON	Physique générale.
	DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	C. FABRY	Physique.
	CHARLES PEREZ	Zoologie.
	LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et géolog. régionale.
	LESPIEAU	Théories chimiques.
	LEDUC	Physique théorique et phys. céleste.
	RABAUD	Biologie expérimentale.
	PORTIER	Physiologie comparée.
	DANGEARD	Botanique.
	MONTEL	Mathématiques générales.
	MAURAIN	Physique du Globe.
	WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	DUBOSCQ	Biologie maritime.
	HEROUARD	Zoologie.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC	Physique théorique et physique céleste.
	BLAISE	Chimie organique.
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	GUILLET	Physique.
	JULIA	Mathématiques générales.
	MAUGUIN	Minéralogie.
	BLARINGHEM	Botanique.
	MICHEL-LÉVY	Pétrographie.
Secrétaire	D. TOMBECK.	

A Monsieur MARCEL BRILLOUIN

ET

A Monsieur ÉMILE BOREL,

Membres de l'Institut,

en hommage respectueux et en remerciement
pour leur bienveillance qui me fut précieuse,
je dédie ce travail.

A

MON MAITRE MONSIEUR

TOSHI SHIDA

en hommage respectueux.

Que Monsieur Edouard MONOD HERZEN
et son fils, qui furent pour moi un père et un frère
trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

SUR LES BASES NOUVELLES DE LA SISMOPHYSIQUE ET SUR LA CONSTITUTION INTERNE DU GLOBE TERRESTRE

Par ROKURO YAMAMOTO

INTRODUCTION

La connaissance de la constitution interne du globe terrestre est un des problèmes les plus difficiles que les sciences naturelles aient à résoudre. Deux méthodes principales peuvent être employées dans ce but : la première est celle du géologue qui, semblable au médecin faisant un diagnostic, déduit des apparences externes de la terre des hypothèses sur sa structure profonde; l'autre est celle du sismologue. Comme le chirurgien, qui va regarder directement le siège du mal, celui-ci demande des renseignements à l'unique voyageur qui nous parvienne des profondeurs de notre planète : le tremblement de terre.

L'étude des tremblements de terre, la *sismologie*, a été, jusqu'à présent, une science d'observation pure, où l'on ne connaissait que quelques lois, plus empiriques que théoriques. Les bases théoriques de la sismologie ne sont, au fond, que des applications de la théorie de l'élasticité et c'est grâce à leur développement que la science des tremblements de terre commence à prendre place parmi les sciences physiques en tant que branche de la *physique du globe*.

Lors des secousses sismiques on appelle courbes *homo-*

séistes, ou *coséistes*, les lignes qui rejoignent les points que la secousse atteint au même instant. D'après les formules empiriques d'Omori, que nous donnerons plus tard, et les observations faites au Japon, les homoséistes forment des cercles concentriques pour chaque tremblement de terre et ces formules sont valables jusqu'à 14.000 km. de distance de l'origine. Pour chaque tremblement de terre on peut donc facilement déterminer le centre commun de ces cercles, avec une approximation suffisante. Ce point est l'*épicentre :* on peut dire que c'est un point de la surface terrestre d'où semble émaner le mouvement du sol vers tous les points de la surface ébranlée.

On admet que l'origine de l'ébranlement, l'*hypocentre*, est situé verticalement au-dessous de l'épicentre à une profondeur dépassant rarement 30 km. Mais ceci n'est qu'une approximation.

La connaissance de la profondeur du foyer est de grande importance, puisque sa situation dépend de la constitution géologique des couches voisines et que, par conséquent, il y a là deux problèmes liés. Aussi Fouqué [1] dans son étude sur le tremblement de terre a-t-il pu dire « si on pouvait la trancher sûrement, on ferait faire un tel progrès à la connaissance des phénomènes sismiques, qu'on serait en droit de se croire à la veille de pénétrer la nature intime des mystérieux agents qui en sont les instigateurs ».

Malheureusement on n'avait jusqu'ici aucune méthode pour déterminer la profondeur du foyer d'une façon sûre. Nous montrerons au cours de ce travail que ce problème peut se résoudre si l'on connaît la distribution des vitesses des ondes sismiques en fonction de la profondeur. Or cette distribution peut être déterminée par le calcul en ne faisant que deux hypothèses, très générales, sur la structure terrestre, à savoir :

[1] Fouqué, *Les tremblements de terre,* chap. V.

1° Que la constitution interne du globe varie avec la profondeur mais, de telle sorte, que chaque couche concentrique possède une structure, en général, uniforme et constante ;

2° Que les ondes sismiques obéissent aux lois de la réfraction.

De cette connaissance des vitesses et de celle de la durée du premier frémissement (fournie par les sismogrammes) nous verrons qu'on peut déduire la profondeur du foyer.

Ainsi le problème de la détermination des vitesses sismiques en fonction de la profondeur est une des questions capitales et urgentes de la sismologie actuelle. Malgré tous les efforts tentés à ce sujet au point de vue théorique on n'a pas obtenu des résultats que l'on puisse accepter avec confiance pour toutes les profondeurs jusqu'au centre de la terre. Ce fut le désir de résoudre ce problème qui fut l'origine des présentes recherches.

Le but de ce travail est de compléter, ou même parfois d'établir, sur quelques points une théorie de la distribution des vitesses des ondes sismiques qui s'oppose à celle que l'on admet généralement. J'ai eu l'occasion, lors de la grande catastrophe qui a ravagé le Japon le 1er septembre 1923, de vérifier ma formule dont la légitimité me semble établie. J'ai également recherché la profondeur de l'hypocentre et, enfin, j'ai étudié la distribution de la densité du globe terrestre, en me servant des résultats sismologiques précédents.

Cette dernière question est l'une des plus discutées depuis la fondation de la mécanique céleste et de la géodésie. Weichert a émis à ce sujet, en 1897, une théorie classique et très généralement admise, d'après laquelle la densité du globe présenterait des discontinuités dues, entre autres, à la présence d'un *noyau central en fer*. J'apporte contre cette théorie des arguments qui me paraissent décisifs au sujet de la densité, et qui s'accordent avec les travaux de l'astronome Veronnet.

Ce n'est pourtant pas dans le seul but d'établir des résultats plus précis que ceux possédés jusqu'à ce jour que j'ai entrepris ce travail. Pour lutter efficacement contre un mal il faut avant tout bien connaître ses manifestations, et tout travail pouvant, un jour, nous donner quelque moyen de protéger les hommes contre les convulsions brusques du globe, me paraît par là-même d'une utilité incontestable.

Le tremblement de terre, simple ébranlement de l'écorce terrestre, n'est qu'un incident insignifiant pour l'histoire naturelle de notre globe, mais c'est un juste sujet d'horreur et d'épouvante pour la société humaine. Ce fléau subit, que n'annonce aucun symptôme extérieur, dont rien ne fait prévoir l'imminence, saisit l'âme humaine d'un effroi que n'inspire aucun autre cataclysme. Rien de plus horrifiant que ce brusque anéantissement des cités opulentes, cette ruine des campagnes fertiles, cette fin brutale de milliers d'existences !

On se souviendra toujours des tremblements de terre de Lisbonne en 1755, de Messine en 1908 et les rescapés de la récente catastrophe du Japon n'oublieront jamais les souvenirs d'épouvante que leur a laissé ce désastre sans précédent. Lors de ces catastrophes des milliers de victimes agonisent parfois sans qu'on puisse leur porter secours, et meurent, brûlées vives, ou ensevelies dans les profondeurs des abîmes qui s'ouvrent parfois sous elles.

Les tremblements de terre s'accompagnent d'effets concomitants aussi désastreux, tels que les incendies et les raz de marées, si les territoires constituent une région littorale. Devant un assaut aussi unanime et terrifiant des forces de la nature, presque rien, à l'heure actuelle ne peut résister. L'étude des tremblements de terre n'est donc pas seulement un problème théorique de la science pure, mais c'est encore un des plus graves problèmes que puisse se poser le savant dévoué au service de l'humanité.

CHAPITRE PREMIER

Propagation des ondes sismiques.

1. — Depuis une vingtaine d'années que la sismologie est devenue une branche des sciences on lui a posé plusieurs questions importantes sur la constitution de la terre et de la matière, comme la distribution de la vitesse des ondes sismiques dans la matière terrestre, la distribution de la densité de la terre, la profondeur des tremblements de terre et les modules d'élasticité des corps solides sous de fortes pressions, etc. Toutes ces questions sont restées sans réponse jusqu'à aujourd'hui.

Le seul voyageur qui nous arrive de l'intérieur du globe est l'onde sismique, tout ce qu'on en connaît, ce sont les valeurs à la surface des paramètres qui la caractérisent, c'est-à-dire les valeurs finales de ces quantités. Admettons que les propriétés physiques de la matière terrestre varient concentriquement; nous ne supposons pas qu'il n'y ait pas de discontinuités, mais simplement, s'il y en a, elles sont en nombre fini. On peut alors ramener l'étude des ondes sismiques à celle d'une équation intégrale.

Supposons que la terre soit un ellipsoïde de révolution dont l'aplatissement au pôle est à peu près 1/300 et dont la densité moyenne soit 5,56 bien que la densité de la matière superficielle varie de 2,8 à 3 ; on doit donc supposer la terre plus dense à mesurer qu'on s'approche du centre du globe.

Pour faciliter l'étude théorique de la question proposée ci-dessus, j'admets avec les sismologues actuels, que la terre est constituée par des couches sphériques concentriques dont la densité varie concentriquement ; ce qui suppose la terre hétérogène. On peut en ce cas considérer que ses modules d'élasticité dépendent seulement de deux modules λ et μ (on suppose que chaque couche terrestre infiniment mince est homogène et isotrope) variant avec le lieu et la distance au centre du point considéré. J'admets ceci parce que l'observation sismique nous montre que les ébranlements se propagent avec deux vitesses différentes et que par conséquent on peut considérer la terre comme un corps solide élastique hétérogène, bien qu'elle ne soit pas parfaitement élastique.

2. — On peut considérer que la densité est une fonction de la distance r du centre à laquelle on se trouve. En ce qui concerne la pression p en un point intérieur, à une distance r du centre, même si l'on fait les hypothèses suivantes : la terre est une masse fluide sphérique homogène, sans mouvement de rotation et sa surface est une surface de densité constante, on trouve, en employant les équations d'équilibre de l'hydrostatique [1]

$$p = 1 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{D}\frac{r^2}{H}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \text{atmosphères}$$

où

$$\rho = 5{,}56, \qquad D = 13{,}6, \qquad H = 0{,}76^{\text{m}}, \qquad r_0 = 6370000^{\text{m}}$$

on calcule ainsi que la pression au centre est de $1{,}7 \times 10^6$ atmosphères, cela prouve qu'alors même qu'on supposerait la terre fluide et formée d'une seule substance, de la lave en fusion par exemple, malgré le faible coefficient de compressibilité des liquides, il faudrait tenir compte de la compression.

Si on admet la loi de la densité terrestre de Roche, par exemple :

$$\rho = \rho_0\left(1 - \mu\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

(1) TISSERAND, *Mécanique céleste*, tome II, p. 92.

ou ρ_0 est la densité à la surface et μ une constante égale à 0,764, on aurait pour la pression au centre (1)

$$p_{\text{centre}} = 2,9 \times 10^6 \text{ atmosphères.}$$

E. Wiechert (2) admet qu'au centre la pression terrestre est de 3×10^6 atmosphères, en supposant que le noyau est en fer. Ainsi la terre est un grand laboratoire pour la recherche des propriétés de la matière sous des pressions énormes qu'on ne peut pas facilement réaliser dans un laboratoire.

Les deux modules d'élasticité λ et μ varient avec la profondeur, par conséquent les vitesses des ondes élastiques dans le globe terrestre sont des fonctions de r seulement.

L'observation nous montre que les deux vitesses augmentent avec la profondeur, par conséquent, les ondes sismiques tournent toujours la convexité de leurs trajectoires vers le centre de la terre. Seules celles qui passent au centre ont des trajectoires rectilignes. Wiechert admet dans le mémoire déjà cité, pour vitesse des ondes la formule :

$$V = -\frac{1}{2} f r^2 + F$$

où f et F sont des constantes.

3. — Je vais admettre les deux hypothèses suivantes :

1° Les caractères physiques de la substance terrestre varient par couches concentriques, c'est-à-dire que leur variation entre deux points dépend seulement des distances de ces points au centre du globe ;

2° On peut appliquer aux ondes sismiques les lois de la réfraction, c'est-à-dire le principe de Fermat relatif au chemin optique, qui sont applicables à toutes les formes d'énergie rayonnante.

(1) Prey. Mainka-Tamas, *Einführudg in die Geophysik,* p. 173, 1922, à Berlin.

(2) E. Wiechert, Bestimmung der weges der Erdbebenwellen im Erdinnern *(Phys. Zeitschrift,* 1910).

Mais les ondes sismiques se distinguent de la lumière par une différence capitale, à savoir l'existence de deux ondes réfractées et de deux ondes réfléchies à la surface de séparation de deux milieux contigus.

Soit n l'indice de réfraction et ds l'élément de longueur géométrique le long du chemin parcouru dans chacun des milieux. Le principe de Fermat nous indique qu'après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, le chemin suivi par le rayon réel est un extrêmum par rapport aux chemins optiques voisins, c'est-à-dire que le chemin réel n'est au fond qu'une brachistochrone, on a donc

$$\delta \int nds = 0.$$

Transformons l'équation ci-dessus en coordonnées polaires (r, θ), θ désignant l'angle que fait un rayon fixe passant par le centre d'ébranlement qu'on appelle l'*hypocentre* avec le rayon vecteur d'un point du chemin sismique.

Comme n est supposé être une fonction de r seul, on a

$$\delta n = \frac{dn}{dr} \delta r$$

$$\delta ds = \frac{dr}{ds} \delta dr + r^2 \frac{d\Theta}{ds} \delta\Theta.$$

Le principe de Fermat peut s'écrire alors :

$$0 = n \left(\frac{dr}{ds} \delta r + r^2 \frac{d\Theta}{ds} \delta\Theta \right) + \int \left[\left\{ \frac{dn}{dr} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) \right\} \delta r - \frac{d}{ds} \left(nr^2 \frac{d\Theta}{ds} \right) \delta\Theta \right] ds.$$

Comme le premier terme est nul, on doit avoir séparément

$$\frac{dn}{dr} - \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) = 0, \qquad \frac{d}{ds} \left(nr^2 \frac{d\Theta}{ds} \right) = 0.$$

La deuxième équation donne

$$nr^2 \frac{d\Theta}{ds} = C^{te}$$

comme $ds^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2$, on a

$$d\Theta = \frac{c\,dr}{r\sqrt{n^2r^2 - c^2}}$$

c'est l'équation différentielle du chemin sismique que suit l'onde élastique.

Prenons comme pôle le centre de la terre. Soit i l'angle que fait en un point M du chemin, la tangente à ce chemin avec le rayon vecteur du point M, et soit i_0 l'angle i correspondant au point d'émergence ; c'est l'angle complémentaire d'émergence que, pour abréger, j'appelle l'angle de *coémergence.*

Au point le plus bas du chemin, $\frac{dr}{d\Theta} = 0$, et on a

$$n_m r_m = c$$

où l'indice m correspond au point le plus bas du chemin de l'onde. Soit ds l'élément du chemin parcouru par les ondes, on a

$$ds \times \sin i = r d\theta$$

ce qui conduit facilement à la relation suivante

$$nr \sin i = n_0 r_0 \sin i_0$$

n_0, r_0 sont les valeurs à la surface ($r_0 =$ rayon de la terre). Ainsi le principe de Fermet sur le chemin optique nous conduit à la loi à laquelle obéit la réfraction des ondes élastiques dans l'intérieur du globe terrestre. Cette formule peut s'énoncer comme il suit : *En chaque point le produit de l'indice de réfraction par le rayon vecteur et par le sinus de l'angle d'incidence est une constante.*

Posons, pour abréger

$$\frac{r}{r_0} = \rho, \qquad \frac{n}{n_0} = \nu, \qquad \sin i_0 = \sigma, \qquad \nu\rho = \varphi(\rho)$$

on trouve

$$d\theta = \frac{\sigma d\rho}{\rho\sqrt{\varphi^2(\rho) - \sigma^2}}.$$

Comme ν est inversement proportionnel à la vitesse V, $\varphi(\rho)$ peut être considérée comme une fonction de la vitesse V, seulement puisque σ est nul pour les ondes qui passent en ce point, d'après nos hypothèses. Mais $\frac{\rho}{\varphi(\rho)}$ garde toujours une valeur finie, variable seulement avec ρ, puisqu'il en est de même pour les vitesses des ondes sismiques. On verra dans la suite que $\varphi(\rho)$ est une fonction commune aux deux ondes, ce qui suppose la constance du rapport des deux modules d'élasticité : $\frac{\lambda(\rho)}{\mu(\rho)}$, en effet les sismologues admettent cette hypothèse, parce que l'observation nous y conduit. Examinons-la néanmoins.

Rapport des deux vitesses des ondes sismiques.

4. — Discutons maintenant l'hypothèse de la constance du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. Considérons deux ondes, l'une longitudinale et l'autre transversale (dont l'existence a été démontrée par l'examen des sismogrammes et, d'autre part, par l'existence de la rigidité du globe terrestre) qui suivent le même chemin. En chaque point, les rayons de courbure R_Ω, $R\omega$ sont alors les mêmes, les indices Ω et ω désignant respectivement les quantités relatives à l'onde longitudinale et à l'onde transversale, on peut déduire sans peine de la loi de réfraction

$$\frac{1}{R_\Omega} = \frac{\partial\tau}{\partial s} = \frac{1}{r_0}\frac{d \operatorname{Log} \nu_\Omega}{d\rho}\sin i, \quad \frac{1}{R\omega} = \frac{1}{r_0}\frac{d \operatorname{Log} \nu_\omega}{d\rho}\sin i$$

$d\tau$ étant l'angle de contingence de deux tangentes menées aux extrémités d'un arc infiniment petit. Comme on a supposé que les deux ondes suivent le même chemin, c'est que $R_\Omega = R_\omega$, d'où il résulte que

$$\text{Log } V_\Omega = \text{Log } V_\omega + c$$

c est une constante d'intégration, et on a

$$\frac{\Omega}{V_\Omega} = c \frac{\omega}{V\omega}$$

où Ω et ω sont les valeurs constantes des vitesses des ondes à la surface et comme c ne dépend pas de ρ, et qu'à la surface V_Ω, $V\omega$ se réduisent respectivement aux valeurs Ω et ω, on doit avoir $c = 1$, on aura donc

$$\frac{V_\Omega}{V_\omega} = \frac{\Omega}{\omega} = \text{Const.}$$

L'élément de temps dT_Ω employé pour parcourir ds peut s'écrire

$$dT_\Omega = \frac{ds}{V_\Omega} = \frac{dr}{V_\Omega \cos i}$$

en substituant à cos i sa valeur tirée de l'équation

$$nr \sin i = n_0 r_0 \sigma,$$

et en intégrant entre le point le plus bas et la surface, on a, en posant $n_0 = \frac{1}{\Omega}$

$$T_\Omega = \frac{2r_0}{\Omega} \int_{\rho_m}^{1} \frac{\varphi^2(\rho) d\rho}{\rho \sqrt{\varphi^2(\rho) - \sigma^2}} \, .$$

Soit t le temps que dure la première secousse qu'on peut mesurer facilement par l'examen de sismogrammes et

$$T\omega - T_\Omega = t.$$

La quantité $\frac{\varphi^2(\rho)}{\sqrt{\varphi^2(\rho) - \sigma^2}}$ est la même pour les deux ondes, puisque nous avons posé $\varphi_\Omega = \frac{\rho\Omega}{V_\Omega}$, $\varphi_\omega = \frac{\rho\omega}{V_\omega}$, et par hypothèse $\frac{\Omega}{V_\Omega} = \frac{\omega}{V_\omega}$, d'où $\varphi_\Omega = \varphi_\omega$, alors, comme σ est le même pour les deux ondes, on aura

$$\frac{\varphi^2_\Omega(\rho)}{\rho\sqrt{\varphi^2_\Omega(\rho) - \sigma^2}} = \frac{\varphi^2_\omega(\rho)}{\rho\sqrt{\varphi^2_\omega(\rho) - \sigma^2}}$$

par conséquent, on a

$$t = \frac{\Omega - \omega}{\omega} T_\Omega,$$

$$t = \frac{\Omega - \omega}{\Omega} T\omega.$$

Les trois quantités t, $T\omega$, T_Ω ont donc entre elles des rapports constants. Ainsi donc pour connaître le temps qui s'écoule entre l'ébranlement original et le moment de l'observation, il suffit de mesurer le temps que dure la première secousse. Il suffit, par conséquent de s'occuper d'une des ondes, par exemple de l'onde longitudinale. J'écrirai dans la suite simplement V, T au lieu d'écrire V_Ω et T_Ω, et r au lieu de ρ, c'est-à-dire que r sera

$$r = \frac{\text{distance au centre}}{\text{rayon moyen}}.$$

Alors

$$V = \frac{1}{n}, \qquad \varphi(r) = \nu r = r\frac{\Omega}{V}$$

et

$$\Theta = 2\int_{r_m}^{1} \frac{\sigma dr}{r\sqrt{\varphi^2(r) - \sigma^2}}$$

Θ étant ici l'angle compris entre les rayons vecteurs des extrémités du chemin sismique considéré ; le rayon vecteur du point le plus voisin du centre étant la bissectrice de cet angle Θ.

Comme

$$\varphi(r) = \sigma \qquad \text{pour } r = r_m$$
$$\varphi(r) = 1 \qquad \text{pour } r = 1$$

si on prend alors comme variable φ au lieu de r, on aura

$$\Theta = 2\sigma \int_\sigma^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi^2(r) - \sigma^2}} \frac{d \operatorname{Log} r}{d\varphi} . d\varphi$$

et de même

$$T = \frac{2r_0}{\Omega} \int_\sigma^1 \frac{\varphi^2(r)}{\sqrt{\varphi^2(r) - \sigma^2}} \frac{d \operatorname{Log} r}{d\varphi} . d\varphi .$$

Nous ne traiterons complètement que la première de ces équations, car les calculs relatifs à la seconde, tout en étant fort longs ne fournissent aucun renseignement que la première équation ne donne.

5. — Si on connaît Θ en fonction de σ on peut trouver r en fonction de $\varphi(r)$, et cela nous permet la vitesse V sous forme implicite par l'intermédiaire de $\varphi(r)$, posons

$$\sigma^2 = \frac{1}{x}, \qquad \varphi^2(r) = \frac{1}{\xi},$$

σ et par suite x variant suivant le lieu où l'on observe les phénomènes sismiques, on peut écrire Θ de la manière suivante

$$\Theta = 2 \int_x^1 \frac{\sqrt{\xi}\, \frac{d}{d\xi} (\operatorname{Log} r) d\xi}{\sqrt{x - \xi}} \quad \text{ou} \quad \int_1^x \frac{u(\xi)\, d\xi}{\sqrt{x - \xi}}$$

en posant

$$2\sqrt{\xi}\, \frac{d \operatorname{Log} r}{d\xi} = - u(\xi)$$

puisqu'on a supposé que φ et par conséquent ξ est une fonction de r, et inversement, la dérivée $\frac{d \operatorname{Log} r}{d\xi}$ doit être une fonction de ξ ; Θ étant supposé être fonction de σ, est aussi une fonction de x. Alors l'expression ci-dessus est bien l'équation intégrale d'Abel [1] ou l'équation de première espèce de Volterra dont le noyau est $(x-\xi)^{-\frac{1}{2}}$.

Pour éliminer la singularité du noyau pour $x=\xi$, multiplions les deux membres par le facteur $\frac{dx}{\sqrt{z-x}}$, et intégrons entre les limites 1 et z, on trouve

$$\int_1^z \frac{\Theta_1(x)\,dx}{\sqrt{z-x}} = \int_1^z \frac{dx}{\sqrt{z-x}} \int_1^x \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{x-z}}$$

ou $\Theta_1(x)$ n'est autre que la fonction obtenue en substituant à σ son expression en fonction de x dans $\Theta(\sigma)$, et, d'après la formule de Dirichlet, le second membre peut s'écrire

$$\int_1^z u(\xi)d\xi. \int_\xi^z \frac{dx}{\sqrt{(z-x)(x-\xi)}}$$

ou en posant $z-x=(z-\xi)w$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\xi^z \frac{dx}{\sqrt{(z-x)(x-\xi)}} &= \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{w(1-w)}}\\ &= -B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\\ &= -\pi\end{aligned}$$

en substituant π dans l'équation ci-dessus et après différentiation par rapport à z, on aura

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Theta_1(x)dx}{\sqrt{z-x}}$$

le premier membre est une fonction de φ, Si on remplace z

(1) Résolution d'un problème mécanique, *Œuvre complète* de N.-H. ABEL, IV, Christiania, 1839.

par $\frac{1}{\varphi^2}$ et x par $\frac{1}{\sigma^2}$ tenant compte de ce que $\sigma = 1$ pour $x = 1$ et $\sigma = \varphi$ pour $x = z$, on aura

$$\frac{1}{\varphi}\,\frac{d\,\mathrm{Log}\,r}{d\varphi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial z}\int_1^{\varphi}\frac{\varphi\Theta(\sigma)\,d\sigma}{\sigma^2\sqrt{\sigma^2-\varphi^2}}\,.$$

Enfin en différentiant paramétriquement deux fois par rapport à φ, on arrivera à la formule plus simple

$$\frac{r'\varphi}{r} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_1^{\varphi}\frac{\Theta(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-\varphi^2}}\,.$$

C'est l'équation intégrale fondamentale à laquelle la fonction φ doit satisfaire, si on connaît Θ en fonction de σ, c'est-à-dire si on sait calculer l'angle au centre Θ par une fonction du sinus de l'angle de coémergence.

6. — Pour être tout à fait rigoureux, considérons les conditions d'existence de l'équation proposée.

Supposons d'abord que Θ peut être exprimé par une série infinie procédant suivant les puissances de σ, convergente uniformément et absolument dans l'intervalle $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. On désignera par $\Theta_1(x)$, la fonction obtenue en remplaçant σ^2 par $\frac{1}{x}$ dans $\Theta(\sigma)$. Voici alors les trois conditions toujours réalisées dans la pratique où l'on peut exprimer $\Theta(\sigma)$ par une série en $a_n\sigma^n$ d'après l'observation et avec un nombre de termes de $\Theta(\sigma)$ aussi grand qu'on veut, que doit remplir Θ :

1° $\Theta_1(x)$ est continue dans l'intervalle $1 \leqslant x \leqslant \infty$ correspondant à $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$;

2° $\frac{d\Theta_1(x)}{dx}$ est finie et déterminée s'il y a des discontinuités, elles sont en nombre fini ;

3° $\Theta_1(x) = 0$ pour $x = 1$.

La dernière condition est évidente, puisque $x = 1$ correspond à $\sigma = 1$ et cela correspond à l'onde sismique émergeant parallèlement à la surface terrestre en un lieu qui n'est autre que l'épicentre, on doit donc avoir en ce point $\Theta_1(1)=0$. Remarquons que ces conditions ne supposent rien sur la constitution interne du globe terrestre, c'est-à-dire qu'elles sont indépendantes de cette constitution.

D'autre part, nous pouvons écrire l'équation $\Theta_1(x)$:

$$\Theta_1(x) = 2\int_x^1 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{x-s}} \frac{d \operatorname{Log} r}{ds} ds = \int_1^x \frac{u(s)ds}{\sqrt{x-s}},$$

où on a posé comme plus haut

$$-u(s) = 2\sqrt{s} \frac{d \operatorname{Log} r}{ds}.$$

Avec ces trois conditions, la théorie de l'équation intégrale du premier espace de Volterra, ayant un noyau singulier d'Abel dit que :

Si la fonction $\Theta_1(x)$ satisfait aux trois conditions ci-dessus dans l'intervalle de 0 à 1.

L'équation l'intégrale

$$\Theta_1(x) = \int_x^1 \frac{u(s)ds}{\sqrt{z-s}}$$

a une solution continue et une seule, donnée par la formule

$$u(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_1^{\xi} \frac{\Theta_1(x)dx}{\sqrt{\xi - x}}$$

et cette équation n'est autre chose, à une transformation près, que de l'équation déterminant φ donnée plus haut. Ainsi l'existence de la solution de l'équation intégrale est rigoureusement démontrée.

Si on exprime $\Theta(\sigma)$ par

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sigma^m,$$

alors la condition $\Theta_1(1) = 0$ devient

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m = 0$$

cette condition est nécessaire pour l'existence de la solution de l'équation intégrale. Mais pour qu'on puisse déterminer une vitesse de l'onde sismique, finie et non nulle partout à l'intérieur du globe une autre condition est nécessaire ; il faut que le premier des a_m, c'est-à-dire a_0 soit égal à π; alors la condition générale d'existence est

$$\pi = \sum_{m=1}^{\infty} a_m = 0.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante. C'est dans sa détermination précise que réside l'essence de ce premier travail.

Les sismologues calculent T en fonction de Θ ou de Δ, longueur de l'arc de grand cercle terrestre allant de l'épicentre au lieu d'observation, au moyen d'un développement

$$T = A.\Delta + A_2\Delta^2 + \ldots$$

où les coefficients sont déterminés par l'observation.

Les sismologues ont déjà mis en doute [1] la validité des formules ainsi obtenues pour des valeurs de Δ dépassant une certaine distance. Je montrerai plus loin que ce doute est fondé et quelle en est la raison.

Ainsi la détermination de la forme $V(r)$ de la vitesse des ondes sismiques est ramenée à un problème simple d'intégration. Il ne reste plus qu'à chercher Θ ou T en fonction de σ en tenant compte de l'observation et de ce que la fonc-

[1] GALITZIN-HECKER, *Vortesungen über seismometrie*, p. 118 ; CH. MAURAIN, *Physique du globe*, pp. 52, 53 ; WALKER, *Modern seismologie*, chap. VII.

tion $\frac{V}{\varphi(r)}$ doit être telle qu'elle soit déterminée et finie pour toutes les valeurs de r de 1 à o.

7. — Dans le chapitre précédent je me suis proposé d'établir que la loi de propagation des ondes sismiques élastiques dans l'intérieur du globe terrestre est donnée par l'intermédiaire d'une fonction auxiliaire φ par la formule $\left(V_\Omega = \frac{\Omega r}{\varphi},\ V_\omega = \frac{\omega r}{\varphi}\right)$:

$$r'_\varphi = \frac{r}{\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_1^\varphi \frac{\Theta(\sigma)d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-\varphi^2}}$$

ou

$$r'_\varphi = \frac{1}{\pi}\frac{r}{\varphi^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_1^\varphi \frac{T\sigma d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-\varphi^2}}$$

suivant qu'on se sert de la fonction Θ ou de la fonction T, $\varphi(r)$ étant la même fonction pour les deux ondes sismiques, c'est-à-dire pour les ondes longitudinales et pour les ondes transversales.

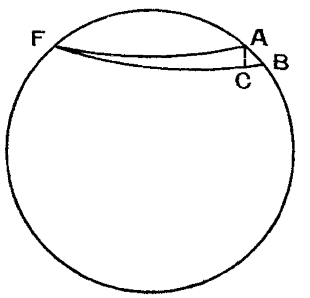


Fig. 1.

Avant d'entreprendre l'intégration nous allons préciser ce que c'est que σ.

Soit F l'Hypocentre ou Foyer, supposé à la surface du globe, d'un séisme, et FA, FB deux chemins successifs infiniment voisins des ondes sismiques. Alors la distance mesurée en arc de grand cercle AB, n'est autre que l'accroissement d'arc, désignons-la par $d\Delta$, si e_0 est l'angle d'émergence en B, on déduit facilement que :

$$\sigma = \sin i_0 = \cos e_0 = \frac{BC}{AB} = \frac{VdT}{d\Delta}\ .$$

Soit a le rayon de la terre

$$\Delta = a\Theta$$

on en conclut que

$$\sigma = \frac{\Omega}{a} \frac{dT_\Omega}{d\Theta} = \frac{\omega}{a} \frac{dT_\omega}{d\Theta},$$

suivant qu'on considère des ondes longitudinales ou transversales. Pour éviter toute confusion je ne considère que l'une d'elle, par exemple l'onde longitudinale, puisqu'on peut traiter les deux cas tout à fait de la même manière.

8. — Pour effectuer l'intégration de l'expression précédente il faut connaître tout d'abord la quantité Θ en fonction de σ, ou T en fonction de Θ ou de σ. On a fait jusqu'ici plusieurs tentatives pour exprimer la relation entre T et Θ. M. Bateman a adopté pour P la formule suivante [1] :

$$T = -0{,}4 + 6{,}1 \left(\frac{\Theta^0}{30}\right) - 5. \left(\frac{\Theta^0}{30}\right)^2$$

qui, suivant lui, s'accorde le mieux avec les valeurs observées par Milne ; il a obtenu le résultat suivant :

$$\operatorname{Log} \rho = \frac{\pi}{36} \left[\beta \cos_{-1} h \frac{\beta}{\eta} - \sqrt{\beta^2 - \eta^2}\right]$$

ou

$$\rho = \frac{r}{r_0}, \quad \eta = \frac{\rho}{V(\rho)}$$

ν_0 est le rayon terrestre moyen et ν la distance du centre d'un point de l'intérieur de la terre, $V(\rho)$ désigne la vitesse de l'onde et $\frac{1}{\beta}$ est la valeur de la vitesse des ondes à la surface, qu'il considère être égale à 9,1 km. par seconde. Bateman a

(1) The solution of the integral equation connecting the velocity of propagation of an Earthquakewave in the interior of the Earth with the time which the distance takes to travel to the different station on the Earth's surface (*Phil. Mag.*, 1910).

calculé pour plusieurs profondeurs les valeurs de V et de η et il a obtenu le tableau suivant :

Il faut remarquer que, dans ces résultats, la vitesse $V(\rho)$ passe par une valeur maximum $V = 11{,}98$ km. par seconde pour $\rho = 0{,}0528$ et que si on continue à calculer V pour des valeurs décroissantes de η, c'est-à-dire en se rapprochant du centre, nous aurons pour V des valeurs de plus en plus petites et enfin au centre $\rho = 0$ ($\eta = 0$ correspond à $\rho = 0$) on aurait une vitesse nulle.

ρ	$\nu(e)$	η
1	9,1	1
0,906	10,3	$\frac{4}{5}$
0,893	10,84	$\frac{3}{4}$
0,738	11,2	$\frac{3}{5}$
0,660	11,77	$\frac{1}{2}$
0,498	11,78	$\frac{3}{15}$
0,367	11,92	$\frac{7}{25}$
0,2887	11,96	$\frac{9}{41}$
0,1381	11,97	$\frac{19}{181}$
0,0528	11,78	$\frac{49}{1200}$
0,0259	11,68	$\frac{99}{4901}$

M. Wiechert, dans son mémoire déjà cité (1), a repris la formule de Bateman en supprimant le terme constant, ce qui est raisonnable, puisqu'on doit avoir $\Theta = 0$ lorsque $T = 0$.

(1) WIECHERT, Bestimmung des Weges der Erdbelenwellen, *Physikalische Zeitschrift*, 1900.

Si on suppose que l'hypocentre est près de la surface, et qu'on observe d'une distance assez grande pour qu'on puisse négliger la profondeur du foyer, et que l'on pose

$$\begin{aligned} T &= 0{,}203\,\Delta - 0{,}00557\,\Delta^2 \\ &= m\Delta - n\Delta^2 \end{aligned}$$

où Δ représente la distance du lieu d'observation à l'épicentre en degré, on a ainsi avec Wiechert l'équation implicite suivante pour déterminer V :

$$\mathrm{Log}\,\frac{\overline{r}}{r} = \frac{1}{360}\,\frac{m}{n}\,q - \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{Vr}\right)^2}$$

$$\cos q = \frac{Vr}{V_0}\ ,$$

V_0 représente la valeur de la vitesse à la surface et $\overline{r}$ le rayon de la terre. Cette expression ne donne pas pour Vr une valeur finie au centre, car on voit facilement que si on admet que la valeur de V au centre est Vr, le second membre est une quantité finie, tandis que le premier membre devient infini pour $r = 0$.

Admettre que la vitesse des ondes sismiques au centre du globe est nulle ou infinie, c'est admettre que ce centre est privé de matière, qu'il s'y trouve une cavité, par exemple, ou bien que la matière qui s'y trouve possède une élasticité infinie et une densité finie. Or, rien ne nous autorise, parmi les propriétés de la matière, à faire de telles suppositions.

L'hypothèse de l'existence d'une cavité au centre du globe n'est même pas compatible avec l'hypothèse de Wiechert car, d'après lui, le centre du globe est un noyau de fer de densité ordinaire. Ce qui est incompatible avec les résultats déduits de sa propre formule.

Les formules ainsi établies ne pourront donc s'appliquer que pour des profondeurs assez limitées. Mais on ne possède aucun moyen de déterminer jusqu'à quelles profondeurs elles sont valables. Et les résultats déduits de cette méthode ne peuvent concorder avec les données d'observation que dans une région très limitée près de l'épicentre. C'est pourquoi on ne possédait, jusqu'à présent, aucun moyen de déterminer la vitesse des ondes sismiques à une profondeur quelconque.

9. — La détermination de la relation entre T et Δ était un des problèmes les plus importants pour les sismologues, parce que si on connaît avec exactitude la fonction T on en déduit la distribution des vitesses sismiques et même l'angle d'émergence. C'est dans ce but que M. E. Wiechert a pris pour représenter $V(r)$ une fonction du second degré de v, savoir

$$V(r) = F - \frac{1}{2} f r^2$$

où F et f sont les deux constantes. Cela suppose que le chemin suivi est circulaire.

Wiechert a ainsi obtenu pour la « Lanfzeit Kurve » (1) la formule

$$\sin h \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{c^2 - 1} \frac{V_0}{r\pi} T \right) = \sqrt{c^2 - 1} \sin \frac{\Delta}{2r} .$$

M. Shida a donné dans son cours de la Faculté des sciences de Kioto, une formule expérimentale de la distribution des vitesses. Il admet que, près de la surface, la vitesse des ondes varie linéairement avec la distance du centre suivant la loi

$$V = p(1 - qr)$$

où q est une quantité constante qui est liée à l'indice de réfraction n par la formule

$$n = \frac{1 - q}{1 - qr}$$

en choisissant les constantes $p.q$ convenablement, cette loi

(1) Wiechert, *loc. cit.*

des vitesses ne peut s'appliquer qu'à des distances correspondant à un angle au centre inférieur 36°23', ce qui correspond à 4045 km. de distance de l'origine (1). La relation à laquelle satisfont θ et l'angle d'émergence ε :

$$\Theta = -i + \frac{2\overline{qr}}{\sqrt{2\overline{qr} - 1}} \operatorname{arc\,tang} \left\{ \sqrt{2\overline{qr} - 1} \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Le même savant a proposé également deux autres lois appelées, par suite de leurs formes analytiques : parabolique et elliptique.

La loi parabolique est exprimée par la formule

$$V = V_0 (1 + \sigma \sqrt{1 - r})$$

où V_0 est la valeur de la vitesse à la surface et σ est une constante. La relation correspondante entre Θ et r est

$$\theta = -i + \frac{c\sigma(q-p)}{\rho\gamma} F(k, \Theta).$$

Je ne fais que mentionner la loi elleptique qui, avec une légère modification de forme et un choix judicieux des constantes, s'accorde assez bien avec la formule générale que nous obtiendrons tout à l'heure.

10. — Considérons maintenant l'équation intégrale

$$r'_\varphi = \frac{1}{\pi} r \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_1^\varphi \frac{\Theta(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \varphi^2(r)}}$$

ou

$$r'_\varphi = \frac{1}{\pi} \frac{r}{\varphi^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_1^\varphi \frac{T\sigma d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \varphi^2(r)}}$$

suivant qu'on utilise la fonction $\Theta(\sigma)$ ou la fonction $T(\sigma)$.

(1) Nous l'avons vérifié au moyen de la courbe III B donnée plus loin.

En pratique, il y a une infinité de manières de représenter Θ ou T en fonction de σ (ou T en fonction de σ ou de Θ) en se servant des données de l'observation. Mais il nous faut éviter l'écueil dont nous avons parlé, et qui consiste à obtenir des vitesses nulles ou infinies au centre du globe. Il faut donc chercher d'abord quelle est la condition nécessaire et suffisante pour éviter cette invraisemblance. C'est à quoi répond le présent théorème :

Pour que l'intégrale

$$r'_\varphi = \frac{1}{\pi} r \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_1^\varphi \frac{\Theta(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \varphi^2(r)}}$$

puisse fournir une valeur finie et déterminée pour $V(r)$, c'est-à-dire pour que la quantité $\frac{r}{\varphi(r)}$ ait une valeur finie et déterminée partout, à l'intérieur du globe et à la surface même, il faut et il suffit que $\Theta = \pi$ pour $\sigma = 0$.

Ce théorème est évident de façon intuitive, puisque pour une onde passant par le centre de la terre on aurait $\sigma = 0$, et réciproquement, et que, en ce cas $\Theta(\sigma)$ doit être égal à π, cela résulte de notre hypothèse de la formation concentrique du globe.

11. — Supposons que Θ peut s'exprimer par une série entière en σ, absolument convergente [1] dans l'intervalle 0,1 limites comprises, cela est admissible, puisque σ, le sinus de l'angle de coémergence, varie entre 0 et 1 et que pour toutes ses valeurs $\Theta(\sigma)$ doit être une quantité finie et déterminée, comprise entre 0 et π, on peut donc poser

$$\Theta(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sigma^m.$$

[1] En raison de la symétrie de la sphère par rapport à ses diamètres, il nous suffira de considérer un hémisphère, l'intervalle de variation de Θ est donc $0 \leqq \Theta(\sigma) \leqq \pi$.

Les coefficients a_m peuvent se déterminer de manière que la quantité $\frac{r}{\varphi(r)}$ soit finie et déterminée (non nulle) partout et qu'on soit en harmonie avec les résultats des observations. On peut intégrer Θ terme à terme.

Considérons alors l'intégrale

$$I_m = \int_1^{\varphi} \frac{\sigma^m d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \varphi^2(r)}}$$

(ou φ peut être considéré comme une constante pendant l'intégration) et l'intégration par partie donne

$$I_m = \frac{m-1}{m} \varphi^2(r)\, I_{m-2} - \frac{\sqrt{1-\varphi^2(1)}}{m}.$$

Nous allons calculer I_m pour les premières valeurs de l'indice, cela nous sera utile plus tard. Nous poserons $\varphi(r) = \varphi$

$$I_0 = \int_1^{\varphi} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \varphi^2}} = \text{Log}\, \frac{\varphi}{1 + \sqrt{1-\varphi^2}}$$

$$I_1 = -\sqrt{1-\varphi^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\varphi^2 \,\text{Log}\, \frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}} - \frac{\sqrt{1-\varphi^2}}{2}$$

$$I_3 = \frac{(1+2\varphi^2)\sqrt{1-\varphi^2}}{3}$$

$$I_4 = \frac{1.3}{2.4}\varphi^4 \,\text{Log}\, \frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}} - \frac{1.3}{2.4}\varphi^2\sqrt{1-\varphi^2} - \frac{1}{4}\sqrt{1-\varphi^2}$$

Le terme général d'indice $2m$ peut s'écrire

$$I_{2m} = \frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots 2m} \left\{ \varphi^{2m} \,\text{Log}\, \frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}} - \left[\varphi^{2m-2} + \frac{1.2}{1.3}\varphi^{2m-6} + \ldots + \frac{1.2\ldots(2m-2)}{1.3\ldots(2m-1)}\right]\sqrt{1-\varphi^2} \right\}$$

posons pour abréger

$$A_{2m} = \varphi^{2m-2} + \frac{1.2}{1.3}\varphi^{2m-4} + \ldots + \frac{1.2\ldots(2m-2)}{1.3\ldots(2m-1)}$$

et en remarquant que

$$\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots\quad 2m} = \frac{\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)}$$

on aura alors

$$I_{2m} = \frac{\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)}\left[\varphi^{2m}\,\mathrm{Log}\frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}} - A_{2m}(\varphi)\sqrt{1-\varphi^2}\right]$$

on a évidemment

$$(I_{2m})_{\varphi=1} = 0,$$

$$(I_{2m})_{\varphi=0}\,\frac{1}{2m}\,.$$

Nous allons montrer que ceci est encore vrai pour les indices impairs I_{2m+1}, on a en effet

$$I_{2m+1} = -\frac{2^{m-1}\Pi^2(m)}{\Pi(2m+1)}(1+2\varphi^2)B_{2m+1}(\varphi)\sqrt{1-\varphi^2}$$

où on a posé

$$B_{2m+1}(\varphi)^{2m-2} + \frac{3}{4}\varphi^{2m-4} + \frac{3.5}{4.6}\varphi^{2m-6} + \ldots + \frac{3.5\,..\,(2m-1)}{4.6\ldots\quad 2m}$$

et

$$(I_{2m+1})_{\varphi=0} = -\frac{1}{2m+1}\,,$$

$$(I_{2m+1})_{\varphi=1} = 0$$

on aura donc, quel que soit le nombre m pair ou impair

$$(I_m)_{\varphi=0} = -\frac{1}{m}$$

$$(I_m)_{\varphi=1} = 0$$

et enfin on a l'intégrale suivante

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_1^{\varphi} \frac{\Theta(\sigma)d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-\varphi^2}} = a_0 \operatorname{Log} \frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}} \\ \displaystyle + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a_{2m}\Pi(2m)}{2^m\Pi^2(m)} \left[\varphi^{2m} \operatorname{Log} \frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}} - A_{2m}(\varphi)\sqrt{1-\varphi^2}\right] \\ \displaystyle - \sqrt{1-\varphi^2} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{2m+1}2^{2m-1}\Pi^2(m)}{\Pi(2m+1)} \, . \, B_{2m+1}(\varphi).(1+2\varphi^2)\end{array}\right.$$

on peut écrire, en intégrant l'équation qui détermine r'_{φ}

$$\operatorname{Log} r = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}}\right)^{a_0} \times e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m I_m}\right] + C.$$

Comme la constante d'intégration C ne dépend pas de r, en faisant $r=1$, et par suite $\varphi(r)=1$, on aura $C=0$, on en conclut

$$r = \left(\frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}}\right)^{\frac{a_0}{\pi}} \times e^{\frac{1}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m I_m} .$$

Nous verrons par la suite que le premier coefficient a_0 de $H(\sigma)$ joue un rôle capital dans la détermination précise des vitesses sismiques.

Comme r tend vers zéro en même temps que φ, au centre du globe :

$$\lim_{\varphi=0}\left(\frac{r}{\varphi(r)}\right) = \frac{\varphi(r)^{\frac{a_0}{\pi}}}{2} \times e^{-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m}}$$

puisque $(I_m)_{\varphi=0} = -\frac{1}{m}$, ce qui a été démontré plus haut.

Comme la somme de la série des coefficients, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ est finie et déterminée, il en sera de même pour $-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m}$, par conséquent le deuxième facteur qui intervient dans le second membre de l'égalité précédente est une quantité finie et déterminée. Pour que le premier facteur soit déterminé et fini (non nul), il faut et il suffit donc qu'on ait

$$\frac{a_0}{\pi} - 1 = 0$$

ou

$$a_0 = \pi$$

ce qu'il fallait démontrer. On aura ainsi pour la vitesse de l'onde sismique au centre du globe terrestre

$$\Omega\left(\frac{\nu}{\varphi(r)}\right)_{\varphi \to 0} = \frac{\Omega}{2} . e^{-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m}}$$

où Ω est la valeur de la vitesse des ondes sismiques longitudinales à la surface terrestre. On voit que le second membre est bien une quantité déterminée et finie, non nulle. Pour l'onde transversale il n'y a qu'à substituer ω à Ω. Nous verrons bientôt la valeur de $-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m}$ si on la détermine au moyen des observations de l'angle d'émergence faites par Bendorff.

J'ai obtenu en prenant pour $H(\sigma)$ les quatre premiers termes :

$$\text{Vitesse au centre} = 2{,}5558\ \Omega$$

et en prenant les cinq premiers termes :

$$\text{Vitesse au centre} = 2{,}5481\ \Omega$$

où les valeurs de Ω et ω sont, d'après Wiechert-Zöppritz

$$\Omega = 7{,}17 \frac{\text{km.}}{\text{sec.}} \quad \text{et} \quad \omega = 4{,}01 \cdot \frac{\text{km.}}{\text{sec.}} .$$

Ainsi j'ai pour la vitesse de l'onde longitudinale une valeur finie ne dépassant pas $18{,}3251 \frac{\text{km.}}{\text{sec.}}$ et l'approximation ainsi obtenue en prenant les quatre ou cinq premiers termes de la série de $\Theta(\sigma)$ suffit. On verra facilement que cette méthode d'approximation pourrait être poussée aussi loin qu'on le voudrait sans rencontrer de difficultés. Mais d'après le caractère de la courbe représentant V en fonction de r il nous semble suffisant de prendre cinq termes dans le développement de $\Theta(\sigma)$. Nous verrons plus loin quel est l'aspect de la courbe $V(r)$, qui a trait à l'une des questions les plus importantes pour l'étude de la physique du globe.

Discussion de la formule générale.

Ecrivons encore l'expression de r en fonction de φ

$$r = \frac{\varphi}{1 + \sqrt{1 - \varphi^2}} \left(\frac{\varphi}{1 + \sqrt{1 - \varphi^2}} \right)^{\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m} \Pi(2m)}{2^{2m} \Pi^2(m)} \varphi^{2m}}$$

$$\times e^{-\frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \varphi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m} \Pi(2m)}{2^{2m} \Pi^2(m)} A_{2m}(\varphi)}$$

$$\times e^{-\frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \varphi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m+1} 2^{2m-1} \Pi^2(m)}{\Pi(2m+1)} B_{2m+1}(\varphi)(1 + 2\varphi^2)}$$

où on a posé pour abréger

$$A_{2m}(\varphi)=\varphi^{2m-2}+\frac{1.2}{1.3}\varphi^{2m-4}+\frac{1.2.4}{1.3.5}\varphi^{2m-6}+\ldots+\frac{1.2.4\ldots(2m-2)}{1.3.5\ldots(2m-1)},$$

$$B_{2m+1}(\varphi=\varphi^{2m-2}+\frac{3}{4}\varphi^{2m-4}+\frac{3.5}{4.6}\varphi^{2m-6}+\ldots+\frac{3.5\ldots(2m-1)}{4.6\ldots\quad 2m},$$

$$\frac{\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)}=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots\quad 2m}.$$

$$\frac{2^{2m-1}\Pi^2(m)}{\Pi(2m+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{2.4.6\ldots\quad 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

On peut écrire, en développant une fonction

$$(1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}\ (\varphi^2<1)$$

en une série de puissances positives (¹)

$$(1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)}\varphi^{2m}$$

En désignant par p la valeur du maximum absolu des coefficients d'indice pair a_{2m}, on a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{2m}\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2 m}\varphi^{2m}<p(1-\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}+p.$$

Dans le cas où $\varphi=1$, on peut facilement étudier ce que devient r. En effet, quand φ atteint sa limite supérieure 1, r devient aussi égal à 1.

D'autre part, pour évaluer les coefficients a_m approximativement, on peut poser (¹)

$$\Theta(\sigma)=\pi+\Psi(\sigma)\ \text{arc sin}\ \sigma$$

$\Psi(\sigma)$ est une fonction à déterminer de manière à satisfaire aux résultats des observations.

Soit

$$\Psi(\sigma)=a+b\sigma+c\sigma^2.$$

(¹) Rieman-Weber, *Die partiellen Differential-Gleichangen*, I, p. 272; Canchy, *Œuvres*, IIᵉ série, X.

Pour calculer les coefficients a, b, c, je vais me servir du tableau suivant dressé d'après les données de Benndorf (1) :

$\Theta(\sigma)$	σ	σ^2	σ arc sin σ	σ^2 arc sin σ
0,3139	0,8746	0,7650	0,9311	0,8144
0,3297	0,7771	0,6039	0,6917	0,5375
0,3767	0,5592	0,3127	0,3318	0,1856
0,4395	0,5150	0,2653	0,2786	0,1435
1,1774	0,4384	0,1922	0,1989	0,0872
1,2559	0,3584	0,1284	0,1314	0,0471
1,3344	0,2924	0,0855	0,0868	0,0254
1,4128	0,2588	0,0670	0,0696	0,0175
1,4915	0,2079	0,0432	0,0435	0,0091
2,1978	0,1736	0,0302	0,0303	0,0053

on trouve

$$a = -1{,}5466, \qquad b = -3{,}1466, \qquad c = -1{,}7130$$

en substituant ces valeurs dans $\Psi(\sigma)$, on obtient

$$a_{2m} = -\frac{3\Pi(2m-2)}{2^{2m-2}\Pi(m-1)} \times \frac{1}{2m-1}$$

$$a_{2m+1} = \left(\frac{1{,}17130\,(2m-2)}{(2m-3)^2} - \frac{1{,}5466}{2m-1}\right)\frac{\Pi(2m-2)}{2^{2m-2}\Pi^2(m-1)}$$

on a évidemment $\left|\dfrac{a_{2m+1}}{a_{2m}}\right| < 1$.

Si on écrit la somme des deux puissances de e, en ne considérant que le premier terme de la série, on aura

(1) En effet, dans une sphère solide, homogène et isotrope, l'onde élastique, soit longitudinale, soit transversale, se partage en ligne droite dans tous les sens, et on aura par suite $\Theta = \pi - 2$ arc sin σ et le terme général de la série étant $\dfrac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\dfrac{\sigma^{2n-1}}{2n-1}$, la série est absolument convergente.

$$- \frac{1}{\pi} a_1 \sqrt{1-\varphi^2} - \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\varphi^2} \sum_{m=1}^{\infty}$$

$$\left(\frac{a_{2m}\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} A_{2m} + \frac{a_{2m+1} 2^{2m-1}\Pi^2(m)}{\Pi(2m+1)} B_{2m+1}(1+2\varphi^2) \right),$$

$$\frac{\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} A_{2m}(\varphi) = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots\ 2m}$$

$$\left(\varphi^{2m-2} + \frac{1.2}{1.3} \varphi^{2m-4} + \ldots + \frac{1.2\ldots\ (2m-2)}{1.3.5\ldots(2m-1)} \right),$$

$$\frac{2^{2m-1}\Pi^2(m)}{\Pi(2m+1)} B_{2m+1}(\varphi) = \frac{1}{2} \times \frac{2.4.6\ldots\ 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)}$$

$$\left(\varphi^{2m-2} + \frac{3}{4} \varphi^{2m-4} + \frac{3.5}{4\ 6} \varphi^{2m-6} + \ldots + \frac{3.5\ldots(2m-1)}{4.6\ldots\ 2m} \right),$$

on a évidemment

$$\frac{\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} A_{2m} < \varphi^{2m-2} + \varphi^{2m-4} + \ldots$$

$$+ \varphi^2 + \frac{1}{2m} < (m-1)\varphi^2 + \frac{1}{2m}$$

puisqu'on a $\varphi \leqslant 1$.

La valeur maxima de $\varphi^2\sqrt{1-\varphi^2}$ est égale à $\frac{3464}{9}$, et moindre que $\frac{1}{2}$; on peut donc écrire

$$\frac{a_{2m}\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} A_{2m} \sqrt{1-\varphi^2}$$

$$< \frac{|a_{2m}|(m-1)}{2} + \frac{|a_{2m}|}{2m} < \frac{m}{2} |a_{2m}| \ (m > 1).$$

Comme tous les a_{2m} sont du même signe (négatif), on a

$$a_{2m} \left(\frac{m-1}{2} + \frac{1}{2m} \right) \frac{\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} < \frac{a_{2m}\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} A_{2m} \sqrt{1-\varphi^2}$$

ou

$$\frac{m}{2} a_{2m} \frac{\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} < \frac{a_{2m}\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} A_{2m} \sqrt{1-\varphi^2}$$

et on trouve

$$\frac{m}{2} a_{2m} < \frac{a_{2m}\Pi(2m)}{2^{2m}\Pi^2(m)} A_{2m}\sqrt{1-\varphi^2} < \frac{m}{2} |a_{2m}|$$

on peut démontrer la convergence de la série $\sum \frac{m}{2} |a_{2m}|$, et, par suite, de la série qui dépend de A_{2m}.

De la même façon, on peut établir les limites entre lesquelles est compris le deuxième terme de la série, terme dépendant de B_{2m+1}. On établit également la convergence de la série relative à ces quantités B_{2m+1}. Ainsi l'existence de la formule générale de $u = \frac{r}{\varphi}$ est établie.

J'appelle cette fonction u, fonction implicite de r, *fonction sismique*, et les propriétés de la courbe $u(r)$ jouent un rôle capital en sismologie parce qu'elles dépendent principalement de la constitution du globe : distribution de la densité terrestre, profondeur du foyer du tremblement de terre, etc.

La vitesse des ondes sismiques au centre du globe est donnée par

$$\Omega u_{\text{centre}} = \frac{1}{2}\Omega . e^{-\frac{1}{\pi}\sum \frac{a_m}{m}}$$

ou

$$\Omega = 7,17 \frac{\text{km.}}{\text{sec.}} \text{ pour l'onde longitudinale.}$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer les coefficients a_m de manière à satisfaire aux observations.

Pour cela, je vais me servir des observations faites par Benndorf (1) et Geiger (2).

(1) *Loc. cit.*
(2) Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern, *Physikalische Zeitschrift*, 1910.

CHAPITRE II

Détermination de l'épicentre et de la vitesse des ondes sismiques.

Le Japon a subi, depuis les plus anciens temps, les ravages des tremblements de terre. Après la grande catastrophe des provinces Mino et Owari, le 28 octobre 1891, le gouvernement du Japon a organisé une commission d'étude des tremblements de terre. Omori, qui était directeur de la commission, a publié après plusieurs années d'observations une méthode pratique pour la détermination de l'épicentre. La méthode repose sur cette remarque d'Omori qu'à une constante près, la durée du frémissement préliminaire et la distance de la station à l'épicentre du tremblement de terre varient proportionnellement. Il en déduit les formules empiriques suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Delta = 6{,}860\,t + 8{,}1 & \Delta < 20 \\ \Delta = 7{,}270\,t + 38 & 100 < \Delta < 900 \\ \Delta = 6{,}540\,t + 720 & 2000 < \Delta < 14000 \end{array}$$

où Δ désigne la distance du lieu d'observation à l'épicentre en kilomètres, et t est la durée totale, en secondes, des frémissements préliminaires. Ainsi on a trois formules différentes suivant la distance de la station à l'épicentre. Avec ces formules il vaut mieux considérer que l'hypocentre est toujours situé près de la surface puisque si le foyer était très profondément situé, il y a lieu de croire que la relation qui lie Δ et t serait plus compliquée que celle d'Omori.

Ces formules empiriques, bien qu'elles soient en défaut pour les valeurs de Δ comprises entre 20 et 100 et entre 900 et 2000 ont été vérifiées pendant vingt années et se sont trouvées en harmonie avec les observations du Japon. Ainsi on a lieu de croire que les *homoséistes* (1) sont des cercles concentriques ayant l'épicentre comme centre commun.

La connaissance de l'angle d'émergence d'un séisme en plusieurs stations nous permet de calculer les coefficients qui composent la série représentant Θ.

Benndorf a obtenu l'angle d'émergence de onze séismes enregistrés à Göttingen en 1900 (2) :

Nr	Date de seisme	Δ	Angle d'émergence en degré	Θ	σ	σ^2	σ^3
1	1900 VII 13	2.000	29	0,3139	0,8746	0,7650	0,6691
2	VIII 24	2.100	39	0,3297	0,7771	0,6039	0,4694
3	VIII 28	2.400	56	0,3767	0,5592	0,3127	0,1749
4	VIII 27	2 800	59	0,4395	0,5150	0,2653	0,1366
5	VIII 29	7.500	64	1,1774	0,4383	0,1922	0,0842
6	VIII 29	8.000	69	1,2559	0,3584	0,1284	0,0460
7	IX 1	8.500	73	1,3344	0,2924	0,0855	0,0250
8	VIII 5	9.000	75	1,4128	0,2588	0,0670	0,0173
9	VIII 20	9.500	78	1,4914	0,2079	0,0432	0,0090
10	VII 29	11.400	78	1,7896	0,2079	0,0432	0,0090
11	VIII 29	14.000	80	2,1987	0,1736	0,0302	0,0052

Je vais calculer d'abord la vitesse V des ondes sismiques en prenant les quatre premiers termes de $\Theta(\sigma)$

$$\Theta(\sigma) = \pi + \sum_{1}^{3} a_m \sigma^m$$

(1) F. Omori, *Publications of the Earthquake Investigation committe in Foreign Language*, no 13, 1903, pp. 86-90. — On the relation between de Duration of the preliminary tremors and the epicentral distance for new Earthquakes *(Bulletin of the Imperial Earthquake investigation committe*, vol. IX, no 1, 1918, pp. 33-99).

(2) Ueber die Art der Fortplanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen in Erdinnern *(Mitth. d. Erdbeben. Commission der kaiserlichen Akademic der Wissenschaften in Wien*, no XXIX, 1905).

avec la condition

$$\pi + \sum_1^3 a_m = 0.$$

En substituant $\Theta(\sigma)$ dans l'équation fondamentale et en intégrant, on aura

$$\text{Log}\, r = \frac{1}{\pi}\left(\pi I_0 + \sum_1^3 a_m I_m\right).$$

La constante d'intégration est nulle, comme nous l'avons déjà démontré.

Les quatre intégrales I_0, I_1, I_2, I_3, ont les formes suivantes :

$$I_0 = \text{Log}\frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}},$$

$$I_1 = -\sqrt{1-\varphi^2}.$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\varphi^2\, \text{Log}\frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}} - \frac{\sqrt{1-\varphi^2}}{2},$$

$$I_3 = -\frac{1+2\varphi^2}{3}\sqrt{1-\varphi^2}.$$

En substituant ces intégrales dans l'expression ci-dessus,

$$r = \left(1+\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}\right)^{1+\frac{a_2}{2\pi}\varphi^2} e^{-\frac{1}{\pi}\left[a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3(1+2\varphi^2)}{3}\right]\sqrt{1-\varphi^2}}.$$

D'autre part, l'observation nous donne (d'après les résultats de Benndorf) :

$$\frac{a_2}{2\pi} = 1{,}5139, \quad a_1 + \frac{a_2}{2} = -1{,}903\,\pi, \quad \frac{a_3}{3} = -0{,}4412\,\pi$$

et enfin

$$r = \left(\frac{\varphi}{1 + \sqrt{1 - \varphi^2}}\right)^{1 + 1,5139\varphi^2} \times e^{(1,6315 + 0,8824\varphi^2)\sqrt{1-\varphi^2}}.$$

La valeur de u au centre est

$$u_{\text{centre}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{\pi}\sum \frac{a_m}{m}} = \frac{1}{2} \cdot e^{1,6315} = 2,5558.$$

φ	ρ	u	φ	ρ	u	φ	ρ	u
0,02	0,0510	2,5489	0,60	0,8711	0,8711	0,94	0,9916	1,0549
0,04	0,1013	2,5330	0,70	0,9176	1,3108	0,95	0,9937	1,0460
0,06	0,1506	2,5101	0,80	0,9541	1,1928	0,96	0,9955	1,0376
0,08	0,1986	2,4825	0,82	0,9604	1,1712	0,97	0,9961	1,0269
0,10	0,2451	2,4570	0,84	0,9665	1,1506	0,98	0,9987	1,0191
0,20	0,4510	2,2550	0,86	0,9723	1,1305	0,99	0,9996	1,0097
0,30	0,6083	2,0247	0,88	0,9778	1,1111	1,00	1,0000	1,0000
0,40	0,7250	1,8125	0,90	0,9829	1,0921			
0,50	0,8089	1,6178	0,92	0,9875	1,0734			

pour obtenir une formule plus précise on calcule $\Theta(\sigma)$ jusqu'à la quatrième puissance de σ

$$\theta(\sigma) = \pi + \sum_{1}^{4} a_m \sigma^m$$

les valeurs des coefficients a_m sont alors

$$a_1 = -2,4044\,\pi, \quad a_2 = 1,1748\,\pi, \quad a_3 = 1,5771\,\pi, \quad a_4 = -1,3475\,\pi$$

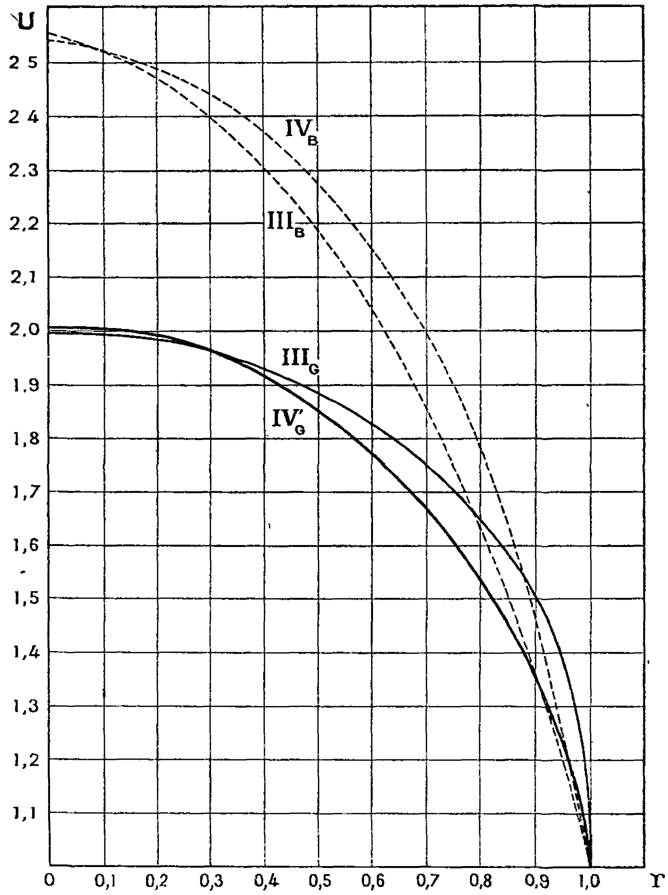
et

$$u_{\text{centre}} = \frac{1}{2}\, e^{1,6285} = 2,5481.$$

L'expression de r est :

$$r = \left(\frac{\varphi}{1 + \sqrt{1 - \varphi^2}}\right)^{1 + 0,5874.\varphi^2 - 0,5053.\varphi^2} \times e^{(1,6285 - 0,5451.\varphi^2)\sqrt{1-\varphi^2}}.$$

Nous désignons les deux courbes $u(r)$ par III_B, IV_B. Ces deux résultats semblent donner des valeurs trop grandes



Variation de U en fonction de r

Fig. 2.

pour qu'on les considère comme provenant d'observations bien précises.

φ	r	u	φ	r	u
0,1	0,2476	2,4760	0,6	0,8930	1,4883
0,2	0,4629	2,3145	0,7	0,9301	1,3280
0,3	0,6322	2,1074	0,8	0,9584	1,1980
0,4	0,7549	1,8872	0,9	0,9814	1,0904
0,5	0,8383	1,6765	1,0	1,0000	1;0000

Si on se sert des résultats donnés par Geiger ([1]) pour des distances allant de 500 à 13000 km., de 1000 km. en 1000 km. on trouve la formule suivante :

$$r = \left(\frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}}\right)^{1+0{,}09824\,\varphi^2-0{,}30370.\varphi^4} e^{(1{,}39453-0{,}59670.\varphi^2)\sqrt{1-\varphi^2}}$$

et pour

$$u_{\text{centre}} = \frac{1}{2}\, e^{1{,}39453} = 2{,}0165$$

alors la vitesse de l'onde longitudinale au centre est deux fois plus grande que celle qu'elle possède à la surface. Désignons cette courbe $u = \frac{r}{\varphi}$ par IV'_G. Voici le tableau des valeurs correspondantes de $r=0$ à $r=1$:

φ	p	u	φ	p	u
0,00	0,0000	2,0165	0,60	0,8599	1,4331
0,10	0,19905	1,9905	0,70	0,9166	1,3095
0,20	0,3839	1,9196	0,80	0,9638	1,2048
0,30	0,5451	1,8170	0,90	0,9851	1,0945
0,40	0,6779	1,6947	1,00	1,0000	1,0000
0,50	0,7819	1,5638			

Enfin nous nous servirons des résultats donnés par Geiger.

(1) *Physikalische Zeitschrift*, 1910.

Voici le tableau des quantités qu'il a été nécessaire de calculer :

Δ	Θ	σ	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	$(\Theta-\pi)\ \sigma$	$(\Theta-\pi)\ \sigma^2$	$(\Theta-\pi)\ \sigma^3$
0	0	1	1	1	1	1	1	−3,0873	−3,0348	−2,9814
500	0,0785	0,9827	0,9657	0,9490	0,9326	0,9167	0,9006	−3,0101	−2,9580	−2,9069
1.000	0,1570	0,9354	0,8745	0,8185	0.7656	0,7162	0.6699	−2,7918	−2,6100	−2,4429
1.500	0,2355	0,8693	0,7557	0,6569	0,5711	0.4964	0,4315	−2 5263	−2,1961	−1,9090
2 000	0,3140	0,7960	0,6363	0,5043	0,4015	0.3196	0,2544	−2,2508	−1,7992	−1,4260
2.500	0,3925	0,7233	0,5232	0,3784	0,2737	0,1980	0,1432	−1,9884	−1,4383	−1,0403
3.000	0,4710	0,6554	0,4295	0,2815	0,1845	0,1209	0,0793	−1,7503	−1,1470	−0,7518
3 500	0,5495	0,5980	0 3576	0.2138	0,1279	0,0765	0,0457	−1,5501	−0,9269	−0,5542
4 000	0,6279	0,5477	0,3000	0,1681	0,0900	0,0493	0,0270	−1,3768	−0,7541	−0,4226
4.500	0,7064	0,4997	0,2497	0,1248	0,0629	0,0312	0,0156	−1,2169	−0,6081	−0,3039
5.000	0,7849	0,4570	0,2088	0,0954	0,0436	0,0199	0,0091	−1,0770	−0 4921	−0,2248
5.500	0,8634	0,4274	0,1827	0,0781	0,0334	0,0143	0,0061	−0,9737	−0,4162	−0,1779
6.000	0,9419	0,4260	0,1815	0,0773	0,0329	0,0140	0,0060	0,9371	−0,3992	−0,1700
6.500	1,0204	0,4228	0,1788	0,0756	0,0320	0,0135	0,0057	−0,8968	−0,3793	−0,1604
7.000	1,0989	0,4179	0,1746	0,0730	0,0305	0,0127	0,0053	−0,8536	−0,3567	−0,1491
7.500	1,1774	0,4116	0,1694	0,0697	0,0287	0,0118	0,0049	−0,8085	−0,3327	−0,1369
8.000	1,2259	0,4037	0,1630	0,0658	0,0266	0,0107	0,0043	−0,7613	−0,3074	−0,1241
8 500	1,3344	0,3948	0,1559	0,0615	0,0243	0.0096	0,0038	−0,7135	−0,2817	−0,1111
9.000	1,4129	0,3847	0,1480	0,0569	0,0219	0,0084	0.0032	−0,6650	−0,2558	−0,0984
9.500	1,4914	0,3737	0,1397	0,0522	0,0195	0,0073	0.0027	−0,6167	−0,2305	−0,0861
10.000	1,5699	0,3616	0,1306	0.0473	0,0171	0,0062	0,0022	−0,5683	−0,2053	−0,0743
10.500	1,6484	0,3492	0,1219	0,0426	0,0149	0,0052	0,0018	−0,5214	−0,1820	−0,0636
11.000	1,7268	0,3356	0,1126	0,0378	0,0127	0,0043	0,0014	−0,4748	−0,1593	−0,0535
11.500	1,8053	0,3210	0,1030	0,0331	0,0106	0,0034	0,0011	−0,4290	−0,1376	−0,0442
12.000	1,8838	0,3053	0,0932	0,0285	0,0087	0,0027	0,0008	−0,3840	−0,1172	−0,0385
12.500	1,9623	0,2893	0,0837	0,0242	0,0070	0,0020	0,0006	−0,3413	−0,0987	−0.0285
13 000	2,0408	0,2732	0,0746	0,0204	0,0056	0,0015	0,0004	−0,3007	−0,0821	−0,0225

j'obtiens alors

$$a_1 = -1{,}58623\,\pi, \qquad a_2 = 0{,}03236\,\pi, \qquad a_3 = 0{,}55387.$$

$$u = \frac{1}{1+\sqrt{1-\varphi^2}}\left(\frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}}\right)^{0{,}01618\,.\,\varphi^2} \times e^{(1{,}38543\ -\ 0{,}36925\,\varphi^2)\sqrt{1-\varphi^2}}$$

en faisant successivement $\varphi = 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots$, on a le tableau suivant :

φ	ρ	u	φ	ρ	u
0	0,0000	1,9938	0,6	0,90212	1,50353
0,1	0,19812	1,9812	0,7	0,95838	1,36911
0,2	0,38639	1,93195	0,8	0,98920	1,23650
0,3	0,55619	1,85396	0,9	0,99990	1,1110
0,4	0,70101	1,75252	1,0	1,0000	1,0000
0,5	0,81658	1,63316			

L'influence du coefficient a sur la valeur de r et, par suite sur celle de u est très considérable, quand φ tend vers 1 ; et la moindre inexactitude dans les données permettant de calculer σ donne naissance à de grandes variations de r. Bien que notre dernière formule soit en défaut au voisinage de la surface terrestre, elle semble être la plus précise dans toute autre région.

CHAPITRE III

Précision de la formule.

Vérification de la formule par le tremblement de terre du 1er septembre 1923 au Japon.

Le grand tremblement de terre a commencé à $11^h 58^m 25^s$, le 1er septembre 1923, à l'épicentre, d'après les données de l'observatoire météorologique océanique de Kobé.

$$\text{Epicentre : latitude} \ldots \quad \varphi_0 = 34^0 57' \text{ N.}$$
$$\text{longitude} \ldots \quad \lambda_0 = 139^0 20' \text{ E.}$$

et l'heure d'arrivée du premier frémissement à l'observatoire du parc Saint-Maur à Paris est $13^h 11^m 23^s$ le 1er septembre, la valeur de φ et λ à l'observatoire de Paris étant

$$\lambda_p = 0^0 9^m 20^s{,}93 \text{ E.} \qquad \text{ou} \qquad 2^0 30^m 14{,}78''$$
$$\varphi_p = 48^0 50' 11'' \text{ N.}$$

La distance anglaise Θ séparant Paris de l'épicentre, comptée sur le grand cercle de la surface terrestre allant de Paris à l'épicentre est donnée par

$$\cos \Theta = \sin 34^0 57' \sin 48^0 50' 11'' + \cos 34^0 57' \cos 48^0 50' 11'' \cos (139^0 20' - 2^0 30' 15'')$$

de là résulte

$$\Theta = 87^0 50' 2{,}3''.$$

En admettant comme valeur moyenne du rayon de la terre 6370 km., on aura pour la distance

$$\Delta = 9765 \text{ km.}$$

par suite.

$$\Theta = \frac{9765}{6370} = 1{,}533.$$

Les valeurs de φ et de u correspondant à cette valeur de Θ sont, d'après le tableau donné plus haut

$$\varphi = 0{,}3675, \qquad u = 1{,}7960 \qquad \text{et} \qquad r = u\varphi = 0{,}66.$$

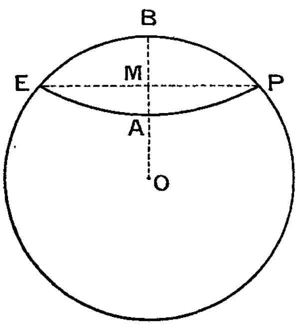


Fig. 3.

Soient E l'épicentre, P Paris, la courbe EAP le chemin parcouru par le séisme allant de E à P.

La valeur de $r = 0{,}66$ est la distance du point A le plus bas du chemin sismique.

On peut négliger la profondeur de l'hypocentre si le lieu d'observation est assez éloigné de l'épicentre. On a alors comme valeurs numériques

$$\begin{aligned}
OM &= 6\,370 \cos 43°55'1'' &&= 4\,587 \text{ km.}\\
MP &= 6\,370 \sin 43°55'1'' &&= 4\,418 \quad »\\
OA &= 6\,370 \times 0{,}66 &&= 4\,204 \quad »\\
BM &= &&= 178{,}3 \quad »\\
AM &= &&= 383 \quad »
\end{aligned}$$

Pour évaluer la longueur de l'arc EAP de l'orbite du séisme allant de E à P, considérons un cercle passant par les trois points E, A, P. Le chemin vrai suivi par l'onde sismique n'est pas un arc de cercle, mais en le remplaçant par un arc du cercle nous aurons une première approximation.

Le rayon R_s du cercle considéré plus haut passant par les trois points E, A, P, est

$$Rs = \frac{AM^2 + Mp^2}{2AM} = 25677 \text{ km.}$$

Soit 2Ψ l'angle sous lequel l'arc EAP est vu du centre du cercle, on a

$$R_s \sin \Psi = PM$$

on trouve

$$\Psi = 9^\circ 54' 30''$$

et

$$\text{l'arc EAP} = 8880{,}5 \text{ km}.$$

Le temps qui s'écoule entre E et P est de 778 secondes (pour l'onde longitudinale) et on a comme vitesse moyenne dans cet intervalle

$$\frac{8880{,}5}{778} = 11{,}414$$

de $r = 0{,}66$ à 1, la valeur moyenne de u est à peu près $u = 1{,}584$, en admettant cette valeur moyenne on trouve pour la valeur de la vitesse des ondes longitudinales à la surface au lieu des $7174 \frac{\text{km.}}{\text{sec.}}$ de Zöppriz et Geiger :

$$\frac{11{,}414}{1.584} = 7{,}205 \frac{\text{km.}}{\text{sec.}}$$

l'erreur commise serait donc de

$$\frac{7{,}205 - 7{,}174}{7{,}174} = 0{,}0043.$$

Ainsi l'erreur commise semble moindre que un centième de la valeur observée bien que la valeur de u soit incertaine près de la surface. La précision de la formule est ainsi établie.

Remarque. — D'après l'hypothèse de ce mémoire on a pour plus de simplicité négligé l'ellepticité du globe, on a commis ainsi $\frac{1}{300}$ d'erreur sur la mesure de la distance et, d'autre part, on a commis quelque erreur sur la mesure σ pour la même raison. La précision de la valeur u serait donc limitée à quelques centièmes.

CHAPITRE IV

Compléments.

I. — Rigidité de la couche extérieure du globe terrestre

Supposons qu'en chaque point de l'intérieur du globe, à la distance r du centre, la rigidité μ soit une fonction de r telle que

$$\mu(r) = V^2(r)\rho(r)$$

où $V(r) = \omega u(r)$ est la vitesse sismique des ondes transversales et $\rho(r)$ représente la densité du globle au point considéré, ω et u ont la même signification comme nous l'avons déjà expliqué.

Calculons d'abord u en fonction explicite de r. Ici, pour faciliter l'intégration, posons

$$u = 2{,}0165 + Ar + Br^2 + Cr^2.$$

Pour calculer les trois constantes A, B et C, considérons u comme donné par la courbe IV'_G, en faisant alors varier φ de 0,1 jusqu'à 1, on obtient les valeurs correspondantes de r. Voici le tableau qui résulte de ces calculs :

φ	r	r^2	r^3	$(2{,}0165-u)r$	$(2{,}0165-u)r^3$	$(2{,}0165-u)r^3$
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,19905	0,03962	0,00789	0,00517	0,00103	0,00020
0,2	0,38392	0,14739	0,05658	0,03720	0,01428	0,00548
0,3	0,54511	0,29714	0,16198	0,10875	0,05928	0,03232
0,4	0,67789	0,45953	0,31152	0,21814	0,14787	0,10025
0,5	0,78189	0,61135	0,47800	0,35396	0,27676	0,21639
0,6	0,85988	0,73939	0,63579	0,50165	0,43136	0,37092
0,7	0,91665	0,84024	0,77023	0,64807	0,59405	0,54455
0,8	0,96384	0,92899	0,89540	0,78235	0,75406	0,72679
0,9	0,98505	0,97032	0,95583	0,90821	0,89463	0,88127
1,0	1,00000	1,00000	1,00000	1,01650	1,01650	1,01650

on trouve alors

$$A = 0{,}85513, \qquad B = 2{,}25036, \qquad C = 2{,}41173.$$

D'après les résultats obtenus plus haut sur la distribution de la vitesse u, la courbe u ne présentant aucun point singulier, il sera naturel de considérer que la distribution de la densité du globe est elle-même continue. Je vais alors me servir pour déterminer ρ de la formule adoptée par M. Alex. Veronnet [1], formule qui est compatible avec les données astronomiques et géodésiques :

$$\rho = 11{,}234\,(1 - 0{,}516\,r^2)^2.$$

D'autre part, la fonction de u sera la même pour les deux ondes, longitudinale et transversale, jusqu'à une certaine profondeur. En effet, les données fournies par Geiger [2] sur l'angle d'émergence des deux ondes sont les mêmes jusqu'à 3000 km. de distance de l'épicentre. Alors u doit avoir la même valeur pour les deux ondes jusqu'à une profondeur de $\frac{1}{6}$ du rayon de la terre, à peu près. Roche [3] a attribué à la couche extérieure du globe une épaisseur égale à $\frac{1}{9}$ du rayon. Si on adopte cette hypothèse, on peut calculer la rigidité moyenne de la couche extérieure.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \omega^2 u^2(r)\rho(r) \\ &= \omega^2 \times 11{,}234\,(1 - 0{,}516\,r^2)^2 u^2(r) \end{aligned}$$

posons

$$(1 - 0{,}516\,r^2)^2 \times u^2(r) = F(r)$$

(1) *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et Figure exacte de la terre*, 1912.

(2) WIECHERT-GEIGER, *loc. cit.*

(3) Sur l'aplatissement terrestre et la distribution de la matière à l'intérieur du globe, *Compte rendu*, Montpellier, 1880.

et

$$\begin{aligned} F(r) = & \ 4{,}06627 \\ & - 3{,}44862\, r \\ & + 5{,}61026\, r^2 \\ & - 10{,}01587\, r^3 \\ & + 0{,}15055\, r^4 \\ & + 2{,}23692\, r^5 \\ & - 1{,}05498\, r^6 \\ & + 7{,}58705\, r^7 \\ & - 3{,}55597\, r^8 \\ & - 2{,}88997\, r^9 \\ & + 1{,}54862\, r^{10} \end{aligned}$$

On aura pour la rigidité moyenne de la couche extérieure de la terre

$$\mu_m = \omega^2 = 11{,}234 \times \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} \int_{\frac{8}{9}}^{1} F(r) dr$$

$$= 5{,}9667 \times 10^{11} \text{ c. g. s.}$$

où

$$\omega = 4{,}01 \times 10^5.$$

Cette valeur de μ_m est en très bon accord avec la valeur $5{,}9 \times 10^{11}$ donnée par M. Shida (1) à la suite d'observations faites à Kyoto en 1912.

II. — Recherche de la profondeur de l'hypocentre

Supposons qu'on ait obtenu une formule, ou une valeur, comportant une certaine erreur vérifiée pour plusieurs valeurs de r (et je crois que ce sera possible dans l'avenir). Alors on peut désigner par $T(\sigma)$ la courbe donnant T en fonction de σ, cosinus de l'angle d'émergence.

(1) On the elasticity of the earth and the earth's crust *(Memories of the college of science and engineering*, Kyoto, imp. univers., vol. IV, 1912).

On a d'abord

$$\sigma = \frac{\Omega}{r_0} \frac{dT}{d\Theta}$$

où r_0 est le rayon de la terre. Et, en nous servant de la courbe IV'$_G$:

$$\frac{\Omega}{r_0} T = \int_{\Theta}^{0} \sigma d\Theta = \int_{r}^{1} \sigma \sum_{1}^{4} m(a_m \sigma^{m-1}) d\sigma$$

r est, comme plus haut, le rapport de la distance d'un point à l'intérieur du globe au rayon de la terre.

En effectuant l'intégration, on obtient

$$T = -\frac{r_0}{\Omega} \left(\sum_{1}^{4} \frac{m a_m \sigma^{m+1}}{m+1} - \sum_{1}^{4} \frac{m a_m}{m+1} \right)$$

$-\sum \frac{m a_m}{m+1}$ est une quantité positive et $\frac{r_0}{\Omega} \left(-\sum_{1}^{4} \frac{m a_m}{m+1} \right)$ représente le temps nécessaire à l'onde pour aller d'un point de la surface du globe jusqu'aux antipodes de ce point.

Par la courbe IV'$_G$ on a

$$a_1 = -5{,}4699, \quad a_2 = 0{,}6173, \quad a_3 = 4{,}2275, \quad a_4 = -2{,}5165$$

et

$$-\sum \frac{m a_m}{m+1} = 1{,}166$$

on a, par conséquent, comme temps d'arrivée aux antipodes :

$$T_{\text{antip.}} = \frac{6370}{7{,}17} \times 1{,}166 = 17{,}3 \text{ minutes.}$$

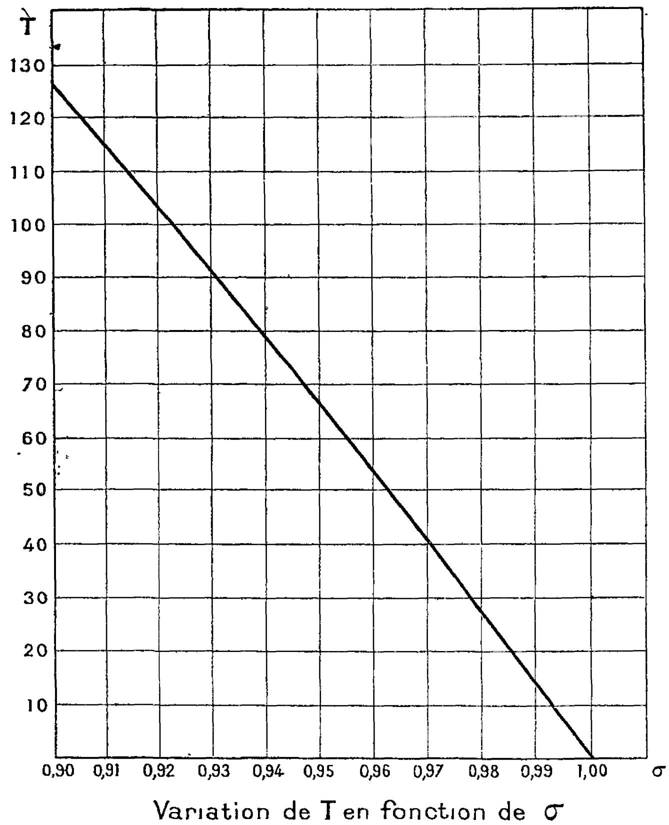
Benndorf évalue ce temps à $T_{\text{antip.}} = 17{,}6$ minutes (1).

(1) Benndorf, *loc. cit.*

En faisant varier σ de o jusqu'à 1, on peut construire la courbe $T(\sigma)$

$$\frac{\Omega}{r_0} T = 1{,}16600 - 2{,}73493\,\sigma^2 + 0{,}41151\,\sigma^3 + 3{,}17060\,\sigma^4 - 2{,}01317\,\sigma^5$$

σ	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
T (en secondes)	126,31	114,8	103,2	91,3	79,2	66,9	54,2	41,2	27,9	14,2



Variation de T en fonction de σ

Fig. 4.

Comme si le lieu d'observation est assez loin de l'épicentre, la profondeur du foyer influe peu sur le résultat de l'observation, on peut considérer que l'observation doit être faite en des régions assez voisines de l'épicentre, si l'on veut qu'elle puisse servir à déterminer la profondeur du foyer.

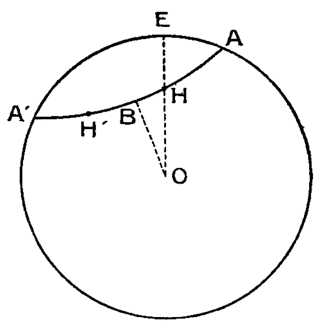


Fig. 5.

Soit H l'hypocentre, ou foyer, E l'épicentre et A une station d'où l'on observe le phénomène.

Le temps nécessaire à l'onde pour aller de H en A est

$$T_\Omega = \frac{r_0}{\Omega} \int_r^1 \frac{\varphi^2 d\sigma}{r\sqrt{\varphi^2 - \sigma^2}}.$$

En A et A′ les angles d'émergence (et les σ) sont les mêmes, mais les valeurs de T y sont différentes.

Nous désignons par T'_Ω la valeur de T correspondant à HA′.

Comment peut-on distinguer T_Ω et T'_Ω ? C'est-à-dire : comment peut-on les distinguer et les évaluer, en connaissant σ et T, et par là savoir si le foyer correspondant est au point B le plus bas de la trajectoire, ou loin de ce point ? La réponse est la suivante :

Au moyen du tableau donné plus haut, si on connaît σ on en déduit T, T étant le temps nécessaire au parcours du chemin total AA′ et alors

$$T_\Omega + T'_\Omega = T.$$

Cela posé, supposons qu'on observe le phénomène d'une assez faible distance de l'épicentre. Si φ est compris entre $\varphi = 0{,}95$ et $\varphi = 1$, $\frac{\varphi^2}{r}$ est une quantité comprise entre 0,913 et 1. Si on remplace φ par r on a une formule approximative donnant T_Ω

$$T_\Omega = \frac{r_0}{\Omega} \int_r^1 \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \varphi^2}}$$

et l'erreur commise sur T_Ω ne dépassera pas $\frac{1}{10}$.

Nous supposons qu'on ait mesuré σ avec précision et que les valeurs correspondantes de T ont été fournies par le tableau.

L'équation donne une même valeur pour T_Ω et T'_Ω, mais l'observation indique des valeurs différentes. Car si H et H' sont des points de la trajectoire symétriques par rapport à OB, de H à B, r diminue et de B à H', au contraire, r croît, mais comme ces deux points sont situés symétriquement sur le même chemin, l'intégrale donne zéro comme valeur du temps correspondant au trajet HBH'.

L'observateur qui est en A' obtiendra non pas T_Ω, mais $T - T'_\Omega$ ou T'_Ω est le temps mesuré par l'observateur qui est en A'. Donc, suivant que T_Ω sera plus petit que $\frac{T}{2}$ ou plus grand, on obtiendra T_Ω ou $T - T_\Omega$.

En intégrant l'équation approchée que nous avons donnée, on obtient

$$\frac{\Omega}{r_0} T_\Omega = \int_r^1 \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} = \sqrt{1 - \sigma^2} - \sqrt{r^2 - \sigma^2}$$

soit e l'angle d'émergence, on a

$$\sqrt{1 - \sigma^2} = \cos e$$

on a alors

$$r^2 - \sigma^2 = \left(\cos e - \frac{\Omega}{r_0} T_\Omega\right)^2$$

après réduction, on aura, en remarquant que $\sigma^2 + \cos e^2 = 1$

$$(1 - r)(1 + r) = 2 \cos e \frac{\Omega}{r_0} T_\Omega - \frac{\Omega}{r_0^2} T_\Omega^2.$$

La faiblesse de la profondeur permet de remplacer $1 + r$ par 2, et $r_0(1 - r)$ n'est autre que la profondeur de l'hypocentre : désignons-la par h, on a enfin

$$h = \cos e . \Omega T_\Omega - \frac{\Omega^2}{r_0} T_\Omega^2.$$

D'autre part, on peut facilement déterminer les instants d'arrivée des deux phases préliminaires sur les sismogrammes, ce qui permet de mesurer sans difficulté $T_\omega - T_\Omega = t$, de plus, comme

$$\frac{T_\Omega}{T_\omega} = \frac{\omega}{\Omega}$$

on aura

$$T_\Omega = \frac{\omega}{\Omega - \omega} t \quad \text{ou} \quad \frac{4{,}01}{3{,}16} t.$$

Il ne reste qu'à déterminer l'angle d'émergence avec la plus grande précision possible.

CONCLUSIONS

De l'ensemble de cette étude résultent deux faits principaux :

1° La variation de vitesse des ondes sismiques est faible au centre du globe, mais considérable à la surface ;

2° La courbe $u(r)$ n'a de point singulier dans aucune région ; donc u varie de façon continue avec la profondeur.

Il résulte de là que rien ne nous permet de conclure à une discontinuité de la matière terrestre pour une certaine profondeur, et ceci, tout en utilisant les mesures d'*observation* données, recueillies soit par Benndorf, soit par Wiechert-Geiger. E. Wiechert [1] a étudié, en 1897, la question de la densité du globe, au moyen de données astronomiques et sismiques ; il a cru alors pouvoir proposer une théorie suivant laquelle la terre posséderait un noyau de fer, recouvert par une couche moins dense ayant comme épaisseur $\frac{1}{5}$ du rayon terrestre. Il en résulterait une discontinuité pour la distribution de la densité, et les recherches des sismologues modernes tendraient à confirmer cette théorie. Mais ces recherches sont, toutes, entachées d'erreurs capitales au point de vue théorique.

La première consiste à avoir admis des hypothèses incompatibles : en effet, ils ont admis la légitimité de la loi de la réfraction, et, en même temps, voulaient déterminer tous les coefficients du développement de T en fonction Δ (ou, ce qui revient au même, ceux du développement de Θ en fonction de σ) [2] uniquement par l'observation. Or, nous avons démontré que le premier terme du développement est déjà exactement déterminé par les lois de la réfraction.

La seconde erreur est relative à la précision des formules. En effet, si on veut calculer T en fonction de Δ, on est amené à une expression telle que

$$T = A_1\Delta + A_2\Delta^2 + \dots \tag{1}$$

en sachant que σ, T et Δ sont liés par l'équation

$$\sigma = K\frac{dT}{d\Delta}$$

où K est une constante, la vitesse à la surface, c'est-à-dire que

$$\sigma = K(A_1 + 2A_2\Delta + \dots) \tag{2}$$

(1) Ueber die Massenvertheilung im Innern der Erde *(Göttingen Nachrichten*, 1897).

(2) Voir chapitre II.

et c'est la valeur de Δ en fonction de σ, déduite de cette expression, qu'il faut porter dans la série (1). Mais il est impossible de calculer $\Delta = f(\sigma)$ au moyen de l'équation (2) où celle-ci est d'un degré supérieur au quatrième, ce qui limite déjà le degré d'approximation qu'on peut espérer atteindre par cette méthode.

On voit donc qu'une théorie telle que celle de Wiechert était fondée sur des bases insuffisantes. La théorie de la discontinuité interne du globe semble tout au moins prématurée au point de vue de la sismologie théorique. Déjà depuis longtemps on avait remarqué en mécanique céleste que la loi de variation de la densité à l'intérieur du globe, qui était généralement admise, était difficile à concilier avec les phénomènes de précession et de nutation [1]. Or, une étude de M. Alex. Veronnet [2] montre que les données astronomiques et géodésiques peuvent être conciliées si on admet une variation continue de la densité à l'intérieur du globe. Les conclusions de notre étude sont donc en parfait accord avec celle de cet éminent astronome.

[1] M. Hamy, *Etude sur la figure des corps célestes*, 1887 ; H. Poincaré, Sur la figure de la terre, *Comptes rendus*, 1887, p. 67.

[2] Rotation de l'ellipsoide hétérogène et figure exacte de la terre, *Journal de mathématique* et sa *Thèse*, 1912.