

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

TH. GOT

**Questions diverses concernant certaines formes quadratiques ternaires indéfinies et les groupes fuchsien arithmétiques qui s'y rattachent**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1914

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1913\\_\\_1\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1913__1__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

*Doyen*..... P. APPELL, *Prof.* Mécanique analytique et Mécanique céleste.

*Doyen honoraire*... G. DARBOUX. — Géométrie supérieure.

*Professeurs honor.* } Ch. WOLF.  
J. RIBAN.

*Professeurs*.....

LIPPMANN.....	Physique.
BOUTY.....	Physique.
BOUSSINESQ.....	Physique math. et calcul des probabilités.
PICARD.....	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
Y. DELAGE.....	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
Gaston BONNIER.	Botanique.
DASTRE.....	Physiologie.
KÖENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
VÉLAIN.....	Géographie physique.
GOURSAT.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
HALLER.....	Chimie organique.
JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
WALLERANT.....	Minéralogie.
ANDOYER.....	Astronomie.
PAINLEVÉ.....	Mécanique rationnelle.
HAUG.....	Géologie.
HOUSSAY.....	Zoologie.
H. LE CHATELIER.	Chimie.
Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
Mme P. CURIE...	Physique générale.
CAULLERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
G. URBAIN.....	Chimie.
Emile BOREL....	Théorie des fonctions.
MARCHIS.....	Aviation.
Jean PERRIN....	Chimie-physique.
G. PRUVOT.....	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
MATRUCHOT.....	Botanique.
H. ABRAHAM.....	Physique.
CARTAN.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
Cl. GUICHARD...	Mathématiques générales.
MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
N.....	Application de l'analyse à la géométrie.
N.....	Histologie.

*Professeurs-adj.*...

PUISEUX.....	Mécanique et astronomie.
LEDUC.....	Physique.
MICHEL.....	Minéralogie.
HÉROUARD.....	Zoologie.
Léon BERTRAND..	Géologie.
Rémy PERRIER..	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
COTTON.....	Physique.
LESPIEAU.....	Chimie.
GENTIL.....	Pétrographie.
SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
PÉREZ.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).

*Secrétaire*..... D. TOMBECK.

N° D'ORDRE :

**1532.**

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

**PAR M. TH. GOT,**

Ancien ingénieur de la Marine. — Agrégé des Sciences mathématiques.

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — QUESTIONS DIVERSES CONCERNANT CERTAINES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES  
INDÉFINIES ET LES GROUPES FUCHSIENS ARITHMÉTIQUES QUI S'Y RATTACHENT.

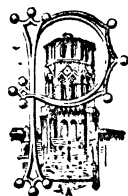
2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Soutenues le **1913**, devant la Commission d'examen.

---

MM. E. PICARD,	<i>Président.</i>
CARTAN,	} <i>Examineurs.</i>
G. HUMBERT,	



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS (SQUARE DU MUSÉE)

---

1913



A  
MON PÈRE

---

A LA MÉMOIRE  
DE  
MA MÈRE



A

MESSIEURS E. PICARD ET G. HUMBERT

MEMBRES DE L'INSTITUT

*Hommage reconnaissant.*





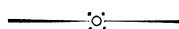
# QUESTIONS DIVERSES

CONCERNANT

## CERTAINES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES INDÉFINIES

ET LES

### GROUPES FUCHSIENS ARITHMÉTIQUES QUI S'Y RATTACHENT



#### INTRODUCTION.

Les groupes fuchsiens associés aux groupes reproductifs des formes quadratiques ternaires indéfinies ont une importance particulière, car ils ont conduit Poincaré à donner le premier exemple de fonctions fuchsiennes jouissant d'un théorème de transformation qui généralise le théorème d'addition des fonctions elliptiques ainsi que l'équation modulaire. Certains de ces groupes fuchsiens *arithmétiques* (dénomination de Poincaré) jouent un rôle essentiel dans la théorie des fonctions abéliennes doublement singulières si remarquables de M. G. Humbert : les groupes fuchsiens des courbes hyperabéliennes correspondantes sont en effet certains sous-groupes des groupes fuchsiens arithmétiques dérivant de formes

$$z^2 = \varphi(x, y)$$

où  $\varphi$  est positive. Certaines variétés de ces groupes ont été étudiées par M. Fricke. L'objet principal de ce travail est d'en faire une étude plus générale au point de vue de la détermination pratique. Mais je me restreins aux groupes sans substitutions paraboliques, c'est-à-dire à ceux pour lesquels la forme ne peut représenter rationnellement zéro : cette condition revient, d'après un critérium de Legendre, à ce que  $\varphi$  ne soit pas résidu quadratique du discriminant.

Je supposerai connus les principaux résultats d'Hermite sur les formes quadratiques ternaires indéfinies, le Mémoire de Poincaré, *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique* (J. de Math., 1887), et les points principaux de la théorie des groupes

fuchsien, tels qu'ils sont exposés dans le *Traité des fonctions automorphes* de MM. Fricke et Klein, notamment l'interprétation non euclidienne de la géométrie projective; enfin, les théorèmes d'Arnold Meyer sur les formes de même genre.

Le problème principal est celui de la recherche des substitutions génératrices du groupe fuchsien, car c'est seulement par elles que sa structure peut être mise en évidence sans trop de complications. Aussi les procédés à employer pour cette recherche constituent-ils la plus grande partie de notre travail. Elle revient à la détermination d'un domaine fondamental; mais pour obtenir ce dernier, c'est si l'on raisonne sur les formes que les calculs sont le plus simples.

La *première partie* de la Thèse se rapporte précisément à divers procédés destinés à simplifier cette recherche. Je montre que les formules données par Hermite pour les substitutions semblables, tout en étant, en général, d'un emploi compliqué, peuvent être utilisées assez facilement pour le cas particulier *des substitutions elliptiques et des symétries*: les formules du tome LXXVIII du *Journal de Crelle*, relatives aux substitutions de période *deux*, m'ont notamment servi constamment. Je montre ensuite l'application du théorème d'Arnold Meyer pour l'emploi des critères de Poincaré relatifs aux substitutions elliptiques, en prenant pour exemple les formes  $z^2 - \zeta(x, y)$  à discriminant *premier*. Je termine cette partie en montrant que la méthode de Poincaré pour la réduction des substitutions elliptiques s'applique aux symétries et conduit à un résultat qui ressort aussi des formules d'Hermite. (N<sup>os</sup> 1 à 13.)

*Deuxième partie.* — Les seuls procédés mis en œuvre actuellement, à ma connaissance, pour la détermination d'un domaine fondamental, étaient la *réduction continue* et l'*extension du groupe fuchsien par symétries*.

Le premier a été mené pour la première fois à bonne fin par M. Selling (*J. de Crelle*, t. LXXVII), d'après les principes d'Hermite, mais avec des conditions de réduction plus pratiques. Toutefois, sa représentation géométrique était, au contraire, plus compliquée que celle qui ressort naturellement du Mémoire d'Hermite et dont l'ouvrage de Fricke et Klein montre l'avantage. Mais comme le travail de Selling est antérieur à la découverte des groupes fuchsien par Poincaré, et que les indications, d'ailleurs très claires, de Fricke et Klein, sont peut-être un peu sommaires pour les applications, j'ai cru devoir en donner dans la *deuxième partie* un nouvel exposé rapide. Je traite en détail<sup>(1)</sup> deux formes de discriminants 5 et 21 pour essayer de bien faire comprendre le mécanisme de la méthode, comme M. Picard l'a fait autrefois pour les formes d'Hermite à indéterminées conjuguées. J'ai d'ailleurs calculé la plupart des substitutions qui se rencontrent fréquemment: elles font l'objet des tableaux I à VI. J'ai également déterminé les conditions nécessaires

et suffisantes pour que les formes  $az^2 - \varphi(x, y)$  soient réduites, et la nature du champ de réduction. On verra par la longueur de la réduction de la forme de discriminant 21, pour laquelle je n'ai même pas reproduit les calculs, que la méthode de réduction continue devient rapidement impraticable, sitôt qu'on a à faire à un discriminant qui n'est pas très petit. (N<sup>os</sup> 14 à 30.)

*Troisième partie.* — *L'extension du groupe par symétrie*, imaginée par Klein dans ses travaux sur la fonction modulaire, conduit, dans un grand nombre de cas, de la manière la plus rapide et la plus élégante, au domaine fondamental des groupes de Poincaré : tous les exemples donnés dans les *Fonctions automorphes* ont été calculés ainsi. Avant de l'employer pour les formes  $z^2 - \varphi$ , j'ai établi pour ces dernières les formules de substitutions semblables qui correspondent à celles de cet ouvrage pour les formes  $px^2 - qy^2 - rz^2$ . L'application de la méthode m'a conduit à introduire avec avantage les substitutions *gauches* ; on peut ainsi, avec les mêmes formules générales, étendre le groupe fuchsien directement, si le groupe reproductif contient des symétries ; mais c'est la symétrie  $\zeta' = -\zeta$  qui intervient, au lieu de  $\zeta' = -\zeta_0$ . La correspondance ainsi établie entre les axes de symétrie dans la conique et les circonférences de symétrie des deux espèces dans le plan analytique, permet de conclure à la non-existence de domaines fondamentaux limités par une infinité de circonférences de symétrie, contrairement à une assertion contenue dans les *Fonctions automorphes*. Cette partie se termine par l'application de cette méthode aux formes déjà traitées par la réduction continue. (N<sup>os</sup> 31 à 41.)

*Quatrième partie.* — Un troisième procédé de détermination du domaine fondamental est celui du *rayonnement* : Fricke, qui l'a imaginé, a tiré un excellent parti de la notion du polygone normal auquel il conduit. Or, cette méthode, restée théorique jusqu'ici, du moins à ma connaissance, s'applique très facilement aux formes  $z^2 - \varphi$ . C'est ce que je montre dans la quatrième partie, en traitant complètement une forme de discriminant  $\Delta = 29$ . (N<sup>os</sup> 42 à 47.)

*Cinquième partie.* — Un appendice (n<sup>os</sup> 48 à 52) est relatif au théorème d'A. Meyer, dont j'ai simplifié la démonstration dans des cas très larges.

En somme, ce travail ne contient ni principes nouveaux ni méthodes nouvelles, et l'on trouvera peut-être exagérée la place occupée par des questions de détails et les calculs, surtout étant donné le petit nombre d'exemples nouveaux apportés. Si j'ai insisté sur la comparaison des procédés et sur certaines simplifications, c'est dans l'espoir de rendre moins pénible le calcul effectif de nouveaux groupes : il y aurait

---

(1) Ce que n'a pas fait Selling, qui se borne à donner la figure résumant les résultats.

en effet intérêt à posséder des exemples plus nombreux et plus variés, et on n'y arrivera qu'en abordant des discriminants plus compliqués.

Les procédés que je développe dans la méthode du *rayonnement* sont sans doute susceptibles d'être complétés. J'espère pouvoir y revenir et en tirer des applications aux fonctions abéliennes singulières, qui entraient dans le plan primitif de mon travail : c'est en effet précisément l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1$$

de la méthode du *rayonnement* qui intervient dans les *transformations singulières*. Cette méthode jouerait aussi un rôle dans l'étude de cette équation, considérée comme généralisant l'équation de Fermat :

$$x^s - Dy^s = 1.$$

Qu'il me soit permis en terminant d'exprimer ma gratitude à l'égard de M. G. Humbert, à qui je dois l'idée première de ce travail, et de M. Picard, pour le bienveillant intérêt avec lequel il l'a suivi.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

### Questions diverses relatives aux substitutions semblables.

#### *Application des formules d'Hermite à la détermination des substitutions elliptiques.*

[1] Je me propose de déduire des formules d'Hermite, pour les substitutions semblables d'une forme quadratique ternaire indéfinie, les conditions que doit remplir cette forme pour avoir dans son groupe reproductif des substitutions *elliptiques* et les classer suivant la nature de ces dernières. Les résultats ainsi obtenus sont moins complets que ceux tirés par Poincaré de sa méthode de réduction des substitutions; mais comme je suis conduit à préciser la forme des expressions d'Hermite pour les substitutions elliptiques, ce qui peut avoir son utilité, les considérations qui m'y ont conduit ne sont peut-être pas elles-mêmes sans quelque intérêt.

Voici la forme donnée par Bachmann aux expressions d'Hermite, la substitution étant  $(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \beta_1 x + \text{etc.})$  et la forme  $f = \begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$  :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P\alpha_1 = p^2 - F(q, r, s) + 2p(hr - ks) + qF'_q, \\ P\alpha_2 = & 2p(gr - bs) + rF'_q, \\ P\alpha_3 = & 2p(cr - gs) + sF'_q; \\ P\beta_1 = & 2p(as - hq) + qF'_r, \\ P\beta_2 = p^2 - F(q, r, s) + 2p(ks - gq) + rF'_r, \\ P\beta_3 = & 2p(hs - cq) + sF'_r; \\ P\gamma_1 = & 2p(kq - ar) + qF'_s, \\ P\gamma_2 = & 2p(bq - kr) + rF'_s, \\ P\gamma_3 = p^2 - F(q, r, s) + 2p(gq - hr) + sF'_s. \end{array} \right.$$

$p, q, r, s$  sont quatre entiers premiers entre eux vérifiant l'équation

$$(2) \quad p^2 + F(q, r, s) = P$$

où  $F$  désigne l'adjointe de  $f$  et  $P$  un diviseur positif ou négatif du quadruple  $4D$  du discriminant. Seules sont à conserver les solutions rendant entières les valeurs des  $\alpha, \beta, \gamma$ , données par les formules (1).

[2] Déterminons la forme particulière des expressions précédentes pour les substitutions *elliptiques*. Ce sont celles dont l'invariant I, c'est-à-dire la somme des éléments de la diagonale principale, a, d'après Poincaré, les valeurs suivantes :

$$\text{Périodes :} \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6.$$

$$I = \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2.$$

La valeur de I étant ici  $\frac{3p^2 - F}{P}$ , on en déduit les conditions suivantes :

$$\text{Périodes :} \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6.$$

$$p^2 = \quad 0, \quad \frac{P}{4}, \quad \frac{P}{2}, \quad \frac{3P}{4}.$$

$$F = \quad P, \quad \frac{3P}{4}, \quad \frac{P}{2}, \quad \frac{P}{4}.$$

P doit toujours être un diviseur de 4D (v. Bachmann). Mais dans le cas de  $p=0$ , il est même nécessaire que P divise 2D. Puis les valeurs trouvées ci-dessus exigent :

Pour la période *trois* : P divisible par 4, soit  $P=4P'$ , et P' diviseur carré parfait de D.

Pour la période *quatre* : P divisible par 2, soit  $P=2P'$ , et P' diviseur carré parfait de 2D.

Pour la période *six* : P divisible par 12, soit  $P=12P'$ , donc<sup>(1)</sup>  $D=3D'$ , P' diviseur carré de D'.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des substitutions de périodes *deux*, *trois*, *quatre* ou *six* est donc que les équations correspondantes

$$F = P, \quad F = 3P', \quad F = P', \quad F = 3P'$$

aient des solutions entières, rendant la substitution entière.

Dans le cas simple où le déterminant est sans facteur carré, P' doit être égal à 1 si le déterminant est impair, et, s'il est impairement pair, P' doit être égal à 1 ou encore, pour la période *quatre* seulement, à 4.

Bornons-nous au cas de D impair. Les conditions nécessaires et suffisantes pourront s'énoncer comme suit :

*Période deux* : Il faut et il suffit que l'adjointe F puisse représenter un diviseur de D ou le double d'un diviseur de D.

(1) On retrouve ainsi un résultat de Poincaré.

*Période trois* : Il faut et il suffit que l'adjointe puisse représenter le nombre *trois*, avec  $q, q', q''$  impairs.

*Période quatre* : Il faut et il suffit que l'adjointe puisse représenter le nombre *un*.

*Période six* : Il faut et il suffit que le déterminant soit divisible par *trois* et que l'adjointe puisse représenter le nombre *trois*.

Le fait que les conditions sont nécessaires résulte de ce qui précède, et, qu'elles suffisent pour rendre la substitution entière, résulte de Bachmann (*Quadratischen Formen*, chap. IV).

*Emploi du théorème d'Arnold Meyer dans les critères de Poincaré.*

[3] Les conditions précédentes s'obtiennent plus directement que celles de Poincaré; mais, en revanche, ces dernières sont plus simples et plus précises. Comme elles reviennent à voir si la forme donnée est ou non équivalente à un certain nombre de formes de types canoniques, les théorèmes d'Arnold Meyer sur l'équivalence des formes de même genre trouvent ici une application.

Je supposerai, pour traiter en détail un exemple, que la forme est du type

$$f = x^2 - \varphi(y, z)$$

où  $\varphi$  est une forme binaire positive, proprement primitive et de déterminant premier impair; soit :

$$\varphi = by^2 + 2gyz + cz^2, \quad \Delta = bc - g^2 = \Pi.$$

[4] *Substitutions de période deux*. — La forme  $f$  est du type inaltéré par la substitution

$$S_4^{(1)} = (x, -y, -z)$$

de période *deux*. Cherchons à quelles conditions elle admet aussi des substitutions de la classe de

$$S'_4 = (x, x-y, x-z).$$

Il faut et il suffit pour cela qu'elle soit équivalente à une forme :

$$f_0 = a_0 x^2 - (2k_0 + g_0) y^2 + 2g_0 yz - (2h_0 + g_0) z^2 + 2k_0 xy + 2h_0 xz.$$

En égalant les déterminants, on a :

$$(2a_0 + h_0 + k_0)(2h_0 k_0 + g_0 h_0 + g_0 k_0) = \Pi.$$

---

(<sup>1</sup>) Je conserve pour ces substitutions les notations du Mémoire de Poincaré.



Désignant par  $\varepsilon$  l'unité positive ou négative, on peut avoir les deux solutions :

$$(I) \quad \begin{cases} 2a_0 + h_0 + k_0 = \Pi\varepsilon, \\ 2h_0k_0 + g_0h_0 + g_0k_0 = \varepsilon; \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} 2a_0 + h_0 + k_0 = \varepsilon, \\ 2h_0k_0 + g_0h_0 + g_0k_0 = \Pi\varepsilon. \end{cases}$$

On voit de suite qu'il faut  $g_0$  et  $h_0 + k_0$  impairs. Puis, d'après Poincaré (*loc. cit.*), on a le droit de supposer la forme

$$(2k_0 + g_0)y^2 - 2g_0yz + (2h_0 + g_0)z^2$$

réduite avec les conditions

$$(III) \quad |g_0| \leq |2k_0 + g_0| \leq |2h_0 + g_0|.$$

A la solution (I) répondent les formes<sup>(1)</sup> :

$$f_0 = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon\Pi + \varepsilon_1 - \varepsilon_2(\varepsilon + 1)}{2}, & -\varepsilon_2, & -\varepsilon_2(2\varepsilon + 1) \\ \varepsilon_1, & \varepsilon\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}, & \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Elles ont pour adjointes :

$$F_0 = \begin{pmatrix} 2\varepsilon, & \frac{\varepsilon - \varepsilon_2(2 + \varepsilon)\Pi}{2}, & \frac{\varepsilon - \varepsilon_2\Pi}{2} \\ \frac{\varepsilon - \varepsilon_1\Pi}{2}, & \varepsilon, & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Pour que  $f$  et  $f_0$  soient équivalentes, il suffit<sup>(2)</sup> qu'elles appartiennent au même genre, et comme elles sont proprement primitives, ainsi que leurs adjointes, et de déterminant impair, la seule condition est que les nombres représentés par les adjointes  $F$ ,  $F_0$  aient les mêmes caractères quadratiques par rapport aux facteurs premiers du déterminant. Elle se réduit ici à

$$\left(\frac{F}{\Pi}\right) = \left(\frac{F_0}{\Pi}\right).$$

L'adjointe de  $f$  étant

$$F = \begin{pmatrix} \Pi, & -c, & -b \\ g, & o, & o \end{pmatrix},$$

la condition ci-dessus revient à

$$\left(\frac{-c}{\Pi}\right) = \left(\frac{2\varepsilon}{\Pi}\right).$$

<sup>(1)</sup>  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \pm 1$  ; mais  $\varepsilon_2 = +1$  seulement, si  $\varepsilon = +1$ , pour que  $f_0$  soit indéfinie.

<sup>(2)</sup> Arnold MEYER, *Inauguraldissertation*, Zurich, 1871.

A la solution (II) répondent des formes réduites en nombre limité, ayant pour adjointes :

$$F_0 = \begin{pmatrix} 2\varepsilon\Pi, & \frac{\varepsilon(\Pi - 2k_0 + g_0)}{2}, & \frac{\varepsilon(\Pi - 2h_0 + g_0)}{2} \\ \frac{\varepsilon(\Pi - g_0)}{2}, & \Pi\varepsilon, & \Pi\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Des deux nombres impairs

$$F_0(0, 1, -1) = -\varepsilon(h_0 + k_0),$$

$$F_0(0, 1, 1) = \varepsilon(2\Pi - h_0 - k_0 + 2g_0),$$

l'un au moins n'est pas divisible par  $\Pi$ , et la condition d'équivalence de  $f$  et  $f_0$  sera par suite

$$\left(\frac{-\varphi}{\Pi}\right) = \left(\frac{-\varepsilon(h_0 + k_0)}{\Pi}\right),$$

si  $h_0 + k_0$  n'est pas divisible par  $\Pi$ , et, dans le cas contraire,

$$\left(\frac{-\varphi}{\Pi}\right) = \left(\frac{2\varepsilon g_0}{\Pi}\right).$$

Il n'y aura d'ailleurs qu'un nombre limité d'essais à effectuer,  $g_0$ ,  $h_0$ ,  $k_0$  étant limités par (II) et (III); en particulier  $|g_0| \leq \Pi$ .

En résumé :

THÉORÈME. — Pour qu'une forme  $x^2 - \varphi(y, z)$  de déterminant  $\Pi$  admette des substitutions de la classe de  $(x, x - y, x - z)$ , il faut et il suffit que l'on ait  $\left(\frac{-\varphi}{\Pi}\right)$  égal soit à  $\left(\frac{2\varepsilon}{\Pi}\right)$ , soit à  $\left(\frac{-\varepsilon(h_0 + k_0)}{\Pi}\right)$ , soit à  $\left(\frac{2\varepsilon g_0}{\Pi}\right)$ , les nombres  $h_0 + k_0$  et  $g_0$ , non divisibles par  $\Pi$ , étant définis par :

$$2a_0 + h_0 + k_0 = \varepsilon,$$

$$2h_0k_0 + g_0h_0 + g_0k_0 = \Pi\varepsilon,$$

$$|g_0| \leq |2k_0 + g_0| \leq |2h_0 + g_0|.$$

[5] Substitutions de période trois. — Pour que  $f$  admette des substitutions de période trois, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à une forme  $f_0$  de l'un des types

$$f_0 = a_0x^2 + 2g_0(y^2 + yz + z^2),$$

$$f_0 = a_0x^2 + 2g_0(y^2 + yz + z^2 - xy - xz),$$

$$f_0 = a_0x^2 + 2g_0(y^2 + yz + z^2 - 2xy - 2xz),$$

qui sont respectivement inaltérées par les substitutions

$$\begin{aligned} S_3 &= (x, -y - z, y), \\ S'_3 &= (x, x - y - z, y), \\ S''_3 &= (x, 2x - y - z, y). \end{aligned}$$

Le déterminant de la première est  $3a_0g_0^2$ ; il ne peut être égal à  $\Pi$  que si  $\Pi = 3$ , et alors il faut  $a_0 = 1$ ,  $g_0 = -1$  (et non  $a_0 = 1$ ,  $g_0 = 1$ , ni  $a_0 = -1$ ,  $g_0 = \varepsilon$ ), en vertu de la loi d'*inertie* des formes quadratiques. Mais pour le déterminant 3 il n'y a qu'une classe de formes  $\varphi$ , la principale; la forme  $f$  n'est pas du genre principal et n'est donc pas équivalente à  $f_0 = \begin{pmatrix} 1, & -2, & -2 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$  qui en fait partie.

Le déterminant de la seconde est  $3a_0g_0^2 - 2g_0^3$ , il faut donc  $g_0 = \varepsilon$ ,  $a_0 = \frac{\Pi + 2\varepsilon}{3}$ ,  $\varepsilon$  étant  $+1$  ou  $-1$ , suivant que  $\Pi - 1$  ou  $\Pi + 1$  est divisible par 3. La forme  $f_0$  est alors :

$$f_0 = \begin{pmatrix} \frac{\Pi + 2\varepsilon}{3}, & 2\varepsilon, & 2\varepsilon \\ \varepsilon, & -\varepsilon, & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Elle a pour adjointe :

$$F_0 = \begin{pmatrix} 3, & \frac{2\varepsilon\Pi + 1}{3}, & \frac{2\varepsilon\Pi + 1}{3} \\ \frac{1 - \varepsilon\Pi}{3}, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle représente le nombre impair 3, premier à  $\Pi$ . Pour que  $f$  et  $f_0$  soient équivalentes, la condition nécessaire et suffisante est donc :

$$\left(\frac{-\varphi}{\Pi}\right) = \left(\frac{3}{\Pi}\right).$$

Le déterminant de la troisième est  $3a_0g_0^2 - 8g_0^3$ ; il faut donc  $g_0 = \varepsilon$ ,  $a_0 = \frac{\Pi + 8\varepsilon}{3}$ ,  $\varepsilon$  étant déterminé de la même façon que ci-dessus. On a :

$$\begin{aligned} f_0 &= \begin{pmatrix} \frac{\Pi + 8\varepsilon}{3}, & 2\varepsilon, & 2\varepsilon \\ \varepsilon, & -2\varepsilon, & -2\varepsilon \end{pmatrix}, \\ F_0 &= \begin{pmatrix} 3, & \frac{2\varepsilon\Pi + 4}{3}, & \frac{2\varepsilon\Pi + 4}{3} \\ \frac{4 - \varepsilon\Pi}{3}, & 2, & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  et  $f_0$  soient équivalentes est encore

$$\left(\frac{-\varphi}{\Pi}\right) = \left(\frac{3}{\Pi}\right).$$

En résumé :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une forme  $x^3 - \varphi(y, z)$  — où  $\varphi$  proprement primitive — de déterminant premier  $\Pi$  admette des substitutions elliptiques de période trois, est que  $\Pi$  soit différent de 3 et que l'on ait  $\left(\frac{-\varphi}{\Pi}\right) = \left(\frac{3}{\Pi}\right)$  : elle admet alors des substitutions de même classe que  $(x, x - y - z, y)$  et  $(x, 2x - y - z, y)$ , mais n'en admet pas de la classe  $(x, -y - z, y)$ .*

[6] *Substitutions de période quatre.* — La condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  admette des substitutions de période quatre est qu'elle soit équivalente à une forme  $f_0$  de l'un des types

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0 x^3 + b_0 (y^3 + z^3), \\ f_0 &= a_0 x^3 - 2h_0 (y^3 + z^3 - xy - xz), \end{aligned}$$

respectivement inaltérées par les substitutions

$$\begin{aligned} S_4 &= (x, -z, y), \\ S'_4 &= (x, x - z, y). \end{aligned}$$

La première a pour déterminant  $a_0 b_0^2$ , il faut donc  $a_0 = \Pi$ ,  $b_0 = -1$ ; la forme correspondante

$$f_0 = \Pi x^3 - (y^3 + z^3)$$

a pour adjointe

$$F_0 = x^3 - \Pi (y^3 + z^3).$$

Elle représente 1; pour que  $f$  et  $f_0$  soient équivalentes, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{-\varphi}{\Pi}\right) = 1.$$

Quant à la seconde forme, elle a pour déterminant  $4h_0^2(a_0 + h_0)$ ; il ne peut être égal à  $\Pi$ . Donc :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une forme  $x^3 - \varphi(y, z)$  — où  $\varphi$  proprement primitive — et de déterminant premier  $\Pi$  admette des substitutions de période quatre, est que l'on ait  $\left(\frac{-\varphi}{\Pi}\right) = 1$ ; ces substitutions sont de la classe de  $(x, -z, y)$ .*

[7] *Substitutions de période six.* — Pour que  $f$  admette des substitutions de période *six*, c'est-à-dire de la classe de

$$S_2 = (x, -z, y + z),$$

elle doit être équivalente à une forme

$$f_0 = a_0 x^2 + 2g_0(y^2 + yz + z^2).$$

Mais on a vu, à propos des substitutions de période *trois*, que c'était impossible. Donc :

THÉORÈME. — Une forme  $x^2 - \varphi$ , — ou  $\varphi$  proprement primitive — et de déterminant premier, n'admet pas de substitutions elliptiques de période six.

### *Points fixes de substitutions elliptiques.*

[8] D'une façon générale, une substitution étant donnée par le tableau de coefficients

$$\begin{array}{ccc} u_1 & v_1 & w_1, \\ u_2 & v_2 & w_2, \\ u_3 & v_3 & w_3; \end{array}$$

on obtient immédiatement les coordonnées de son point fixe relatif au multiplicateur  $\rho = 1$  en résolvant les équations compatibles :

$$\begin{aligned} (u_1 - 1)x + v_1 y + w_1 z &= 0, \\ u_2 x + (v_2 - 1)y + w_2 z &= 0, \\ u_3 x + v_3 y + (w_3 - 1)z &= 0. \end{aligned}$$

Comme on a le moyen de déterminer les coefficients  $u, v, w$  de toute substitution elliptique, on peut donc considérer le problème de la détermination de leurs points fixes comme résolu. Mais pour la détermination du domaine fondamental, il y aurait évidemment intérêt à obtenir plus directement les coordonnées de ces points fixes, et c'est ce que nous allons essayer de faire.

[9] *Substitutions de période deux.* — Soit C le point fixe, intérieur à la conique

$$f(x, y, z) = 0.$$

La substitution laisse fixe point par point la polaire  $\Delta$  de C et conserve la conique. C'est, au point de vue pseudo-géométrique, une rotation de centre C et d'angle  $\pi$ ,

c'est-à-dire, en géométrie ordinaire, une homologie involutive de pôle C et d'axe  $\Delta$ . Nous allons déterminer les coefficients de cette transformation homographique en fonction des coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  du point fixe C.  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  étant les coordonnées d'un point quelconque M et de son transformé M',  $\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z'$  et  $\lambda x - \lambda' x', \lambda y - \lambda' y', \lambda z - \lambda' z'$  seront celles de deux points divisant harmoniquement MM'. Écrivons que l'un est le point C et que l'autre est sur la polaire de C. On a :

$$\begin{aligned} \lambda x + \lambda' x' &= \alpha, & \lambda y + \lambda' y' &= \beta, & \lambda z + \lambda' z' &= \gamma, \\ (\lambda x - \lambda' x')f'_\alpha + (\lambda y - \lambda' y')f'_\beta + (\lambda z - \lambda' z')f'_\gamma &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda'} &= \frac{\Sigma x' f'_\alpha}{\Sigma x f'_\alpha} = \frac{P'}{P}; \\ \frac{Px' + P'x}{\alpha} &= \frac{Py' + P'y}{\beta} = \frac{Pz' + P'z}{\gamma}. \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne aisément :

$$\begin{aligned} \varphi x' &= [x f'_\alpha - f(x, \beta, \gamma)]x + \alpha f'_\beta y + \alpha f'_\gamma z, \\ \varphi y' &= \beta f'_\alpha x + [\beta f'_\beta - f(x, \beta, \gamma)]y + \beta f'_\gamma z, \\ \varphi z' &= \gamma f'_\alpha x + \gamma f'_\beta y + [\gamma f'_\gamma - f(x, \beta, \gamma)]z. \end{aligned}$$

Ces relations suffisent au point de vue géométrique; mais il faut, de plus, que la substitution soit *unimodulaire* et *entière*. La première condition entraîne, d'après un calcul simple,

$$\varphi = f(x, \beta, \gamma).$$

Pour la seconde, il faut évidemment  $\alpha, \beta, \gamma$  rationnels; mais on peut les supposer entiers et premiers entre eux, car les expressions de  $x', y', z'$  sont *homogènes de degré zéro* en  $x, y, z$ . Dès lors, il y a des entiers  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , tels que l'on ait

$$\alpha \alpha_0 + \beta \beta_0 + \gamma \gamma_0 = 1$$

et pour que les coefficients de la substitution, à savoir

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} -1 + \frac{\alpha f'_\alpha}{f}, & \frac{\alpha f'_\beta}{f}, & \frac{\alpha f'_\gamma}{f}, \\ \frac{\beta f'_\alpha}{f}, & -1 + \frac{\beta f'_\beta}{f}, & \frac{\beta f'_\gamma}{f}, \\ \frac{\gamma f'_\alpha}{f}, & \frac{\gamma f'_\beta}{f}, & -1 + \frac{\gamma f'_\gamma}{f} \end{array} \right.$$

soient entiers, il est donc nécessaire et suffisant que  $\frac{f'_\alpha}{f}, \frac{f'_\beta}{f}, \frac{f'_\gamma}{f}$  le soient.

Or, pour que les congruences homogènes et linéaires

$$(C) \quad f'_\alpha \equiv f'_\beta \equiv f'_\gamma \equiv 0 \pmod{f}$$

soient résolubles,  $\alpha, \beta, \gamma$  premiers entre eux, il faut que leur déterminant soit divisible par le module; ce déterminant est huit fois le déterminant D de la forme; mais, comme 2 se trouve en facteur dans les premiers membres de chacune des congruences, il faut même que 2D soit divisible par  $f$ .

*Symétries.* — Le calcul précédent donne en même temps les *symétries*, car la seule différence est que le point C est alors *extérieur* à la conique.

En résumé :

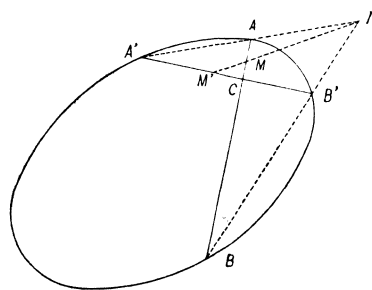
**THÉORÈME.** — *Les coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  des points fixes de substitutions de période deux — rotations ou symétries — sont celles des solutions entières des équations.*

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = n$$

( $n$  diviseur, positif ou négatif, de 2D) qui vérifient les congruences (C).

**REMARQUE.** — Nous avons ainsi retrouvé par une autre méthode les formules données par Hermite au *Journal de Crelle* (tome LXXVIII).

[10] *Substitutions de période trois, etc.* — Un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire pour les substitutions de période deux s'applique à celles de



période trois, quatre ou six. Par exemple, pour la période trois, on procéderait de la manière suivante pour exprimer que le point C est point fixe : M et M' étant un point quelconque et son transformé, on écrirait que l'angle MCM' est, *en géométrie hyperbolique*, égal à  $\frac{2\pi}{3}$ , puis que la longueur, *non euclidienne*, des segments CM et CM' est la même : cette dernière condition exprime simplement que MM' va passer par le point de concours

des cordes AA', BB'. Mais je ne m'attarderai pas à ce calcul, pas plus qu'à ceux qu'on pourrait faire dans le même but en exprimant les coordonnées des points fixes à l'aide des équations

$$(u_1 - 1)x + v_1y + w_1z = 0$$

et les analogues, les  $u, v, w$  étant donnés par les formules d'Hermite.

[11] REMARQUE. — Je ferai seulement une deuxième remarque au sujet des substitutions elliptiques. Si l'on désigne par

$$\psi_i(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

l'équation que doivent vérifier les coordonnées d'un point fixe relatif à la période  $i$ , toutes les solutions acceptables de cette équation se déduiront, à l'aide des formules d'Hermite, d'un nombre limité de solutions fondamentales, nombre égal à celui des substitutions canoniques de période  $i$ .

### *Réduction des symétries.*

[12] Les substitutions semblables *gauches* peuvent être *réduites* par la méthode employée par Poincaré pour les substitutions droites. Deux substitutions,  $S$  et  $S'$ , seront dites de même classe, si l'une est la transformée de l'autre par une substitution  $T$  :

$$S' = T^{-1}ST.$$

D'après cela,  $S$  et  $S'$  sont de même espèce, que  $T$  soit droite ou gauche : le déterminant de  $S'$  est en effet le même que celui de  $S$ , vu la relation ci-dessus. Les substitutions gauches sont celles dont le déterminant est égal à  $-1$ . Il en résulte que le déterminant de la substitution associée<sup>(1)</sup>

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$$

est égal à  $-1$ . L'équation aux multiplicateurs a toujours une de ses racines égale à  $-1$ . En exprimant qu'il y a une racine double égale à  $1$ , on obtient la condition qui caractérise une *symétrie* pseudo-géométrique, c'est-à-dire une homographie involutive laissant fixe individuellement tous les points d'une droite qui rencontre la conique; cette condition est :

$$\alpha + \delta = 0.$$

Elle revient à dire que l'invariant de la substitution doit être égal à  $+1$ .

Ceci posé,  $S$  étant une symétrie, il existe trois entiers  $u, v, w$ , premiers entre eux, tels que la fonction linéaire

$$ux + vy + wz$$

---

(1) Cf. pour les notations : POINCARÉ, *Les fonctions fuchsienues et l'arithmétique*.



est reproduite, changée de signe, par la substitution S; d'où l'existence d'une substitution unimodulaire

$$T = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$$

telle que la transformée de S par  $T^{-1}$  soit de la forme

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & a & b \\ \mu & c & d \end{vmatrix},$$

substitution dans laquelle, par ce qui précède,  $ad - bc = 1$  et  $a + d = 2$ .

Une réduction ultérieure conduit au type

$$S' = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \mu & \nu & 1 \end{vmatrix}.$$

Il suffit d'employer pour la transformation une substitution convenable du type  $(x, \varphi y + \sigma z, \tau y + \theta z)$ . Car, d'abord, une telle transformation conserve le type précédent, puis la forme

$$\psi(y, z) = cy^2 + (d - a)yz - bz^2$$

étant inaltérée par la substitution  $(ay + bz, cy + dz)$ ; il est naturel de considérer  $S'$  comme réduite, si  $\psi$  l'est. Or, le discriminant de  $\psi$

$$(d - a)^2 + 4bc = (d + a)^2 - 4(ad - bc)$$

est nul, d'après ce qui précède;  $\psi$  est un carré parfait, on dira qu'elle est réduite quand elle s'écrit  $cy^2$ , c'est-à-dire quand on aura :

$$b = 0, \quad d = a = 1.$$

On a donc le type  $S'$  (en écrivant  $\nu$  au lieu de  $c$ ).

Mais nous allons voir qu'une réduction plus grande est encore possible.

Déterminons en effet les formes inaltérées par  $S'$ . L'identification des coefficients d'une telle forme  $f = \begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$  à ceux de sa transformée, montre que  $\nu$  doit être nul<sup>(1)</sup> et que  $\lambda$  et  $\mu$  doivent vérifier les relations

$$\begin{aligned} c\mu + g\lambda &= 2h, \\ g\mu + b\lambda &= 2k \end{aligned}$$

---

(1) Donc  $\psi$  identiquement nulle.

ou que

$$\lambda = \frac{2(ck - gh)}{bc - g^2}, \quad \mu = \frac{2(bh - ck)}{bc - g^2},$$

c'est-à-dire, avec les notations habituelles, il faut que les coefficients  $2H$  et  $2K$  de l'adjointe soient divisibles par  $A$ . De plus, pour avoir une véritable symétrie, il faut que l'axe,  $x = 0$ , coupe la conique en des points réels, c'est-à-dire que l'on ait :

$$A = bc - g^2 < 0.$$

On pourrait donc énoncer le :

THÉORÈME. — *Pour qu'une forme quadratique ternaire indéfinie, non annulable, admette des symétries, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à une forme  $f = \begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$  ayant pour adjointe une forme  $F = \begin{pmatrix} A, B, C \\ G, H, K \end{pmatrix}$  dans laquelle  $A$  soit négatif et divise  $2H$  et  $2K$ .*

Mais on peut préciser encore, en observant que deux substitutions  $S'$  que nous désignerons en abrégé par  $(\lambda, \mu)$  et  $(\lambda', \mu')$  sont de même classe, dès que

$$(\lambda, \mu) \equiv (\lambda', \mu') \pmod{2}.$$

Elles peuvent alors, en effet, se transformer l'une en l'autre par une substitution du type

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

il suffit de prendre :

$$u = \frac{\lambda' - \lambda}{2}, \quad v = \frac{\mu' - \mu}{2}.$$

Les classes de symétries sont ainsi réduites aux types  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ . Mais ces quatre peuvent eux-mêmes se réduire au premier et au dernier type, car le second et le troisième se déduisent l'un de l'autre par la permutation de  $y$  et  $z$ , et le dernier est transformé du second par la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

CONCLUSION. — *Il y a seulement deux classes de symétries; elles peuvent être représentées par les types :*

$$S_0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S'_0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

La première est signalée dans le Mémoire de Poincaré; c'est, au signe près, la substitution  $S_4$ : les formes qu'elle laisse invariables sont celles du type

$$(1) \quad ax^2 + by^2 + 2gyz + cz^2;$$

si  $bc - g^2$  est positif,  $S_0$  et  $S_4$  sont elliptiques; si  $bc - g^2$  est négatif, ce sont des symétries.

Les formes inaltérées par la seconde<sup>(1)</sup> sont celles du type

$$(2) \quad ax^2 + (2k - g)y^2 + (2h - g)z^2 + 2gyz + 2hzx + 2kxy$$

et cette substitution  $S'_0$  est une substitution elliptique ou une symétrie suivant que  $(2h - g)(2k - g) - g^2$  est positif ou négatif.

Donc, en résumé :

THÉORÈME. — *Pour qu'une forme quadratique ternaire indéfinie, non annulable, admette des symétries dans son groupe reproductif, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à l'une des formes (1) ou (2), dans lesquelles la forme binaire en  $y, z$  soit indéfinie.*

[13] Un nombre limité d'essais suffira donc pour montrer si le groupe d'une forme renferme des symétries. On procédera d'une manière tout à fait analogue à celle de Poincaré pour  $S_4$  et  $S'_4$ ; toute la différence consiste en ce que les formes binaires à considérer sont ici *indéfinies* au lieu d'être *définies*.

Une forme (1) ou (2) une fois obtenue, il suffira, pour reconnaître si elle est ou non équivalente à la forme donnée, d'appliquer les théorèmes d'Arnold Meyer.

J'ai fait cette recherche pour les formes  $x^2 - \varphi(y, z)$  de discriminant impair inférieur à 100, en utilisant le tableau des classes de formes binaires établi par Cayley (*Journal de Crelle*, t. LX), et le résultat est que pour tous ces discriminants il y a des symétries<sup>(2)</sup>.

(1)  $S'_0$  est, au signe près, la  $S'_4$  de Poincaré. Cette identité de  $S_0, S'_0$  avec  $S_4, S'_4$  pouvait être conclue, *a priori*, des formules d'Hermite pour les substitutions de période deux.

(2) J'ai depuis démontré que le fait est général pour tous les discriminants impairs. La démonstration figurera dans un travail ultérieur.

La remarque suivante fournit d'ailleurs la réponse plus rapidement dans un grand nombre de cas. D'après le paragraphe 9, *il suffit*, pour l'existence des symétries, que l'une des équations

$$f(x, \beta, \gamma) = -1, \qquad f(x, \beta, \gamma) = -2$$

ait des solutions entières, car alors les congruences C sont vérifiées. Dans le cas actuel, il suffit donc que  $\varphi(y, z)$  puisse représenter des nombres  $x^2 + 1$  ou  $x^2 + 2$  et même, plus généralement, que ces nombres puissent être représentés par une forme quelconque du même genre que  $\varphi$ . Or, pour les petits discriminants, il est très fréquent qu'un genre représente 2, 3, 5 ou 6, qui sont précisément des nombres du type précédent.

M. Selling a indiqué dans son Mémoire un grand nombre de cas d'existence des symétries, mais il n'a pas prouvé que son énumération fût complète. Il serait aisé de montrer qu'elles se ramènent toutes à  $S_0$  et  $S'_0$ .

---

## DEUXIEME PARTIE.

### Principes de la méthode de réduction continue d'Hermite Selling. Exemples numériques.

---

[14] Soit  $f(x, y, z)$  une forme quadratique ternaire indéfinie réductible au type  $X^2 - Y^2 - Z^2$ . Considérons  $x, y, z$  comme coordonnées trilinéaires d'un point du plan et supposons le triangle de référence choisi de telle sorte que l'équation

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0,$$

soit celle d'une ellipse.  $f$  sera positif à l'intérieur de la conique et les coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  d'un point quelconque intérieur pourront être assujetties à la condition

$$(2) \quad f(\alpha, \beta, \gamma) = 1.$$

Désignons par  $\bar{f}(x, y, z)$  la forme

$$(3) \quad \bar{f} = \frac{1}{2}(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - f(x, y, z).$$

L'équation  $\bar{f} = 0$  est celle d'une conique bitangente à  $f = 0$ , la corde des points de contact est la droite

$$xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma = 0$$

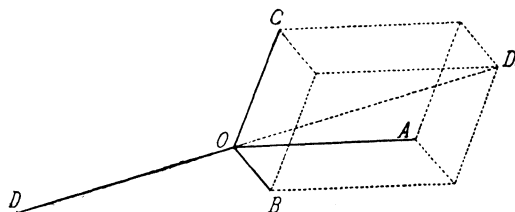
polaire P du point  $\alpha, \beta, \gamma$  par rapport à  $f = 0$ . Ce point étant supposé intérieur à l'ellipse sera donc intérieur à  $\bar{f} = 0$ , pour que l'intersection de P soit imaginaire aussi bien avec l'une qu'avec l'autre. Mais  $\bar{f}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ ;  $\bar{f}$  positif pour un point intérieur, et aussi pour les points extérieurs à l'ellipse  $f = 0$ , est donc nécessairement une ellipse imaginaire.  *$\bar{f}$  est donc une forme définie positive pour tout point  $\alpha, \beta, \gamma$  intérieur à l'ellipse  $f = 0$ .*

Ceci posé, supposons qu'on ait fixé certaines conditions d'inégalités à vérifier par les coefficients des formes positives pour qu'elles soient *réduites* : on dira, avec Hermite, que la *forme indéfinie  $f$  est réduite, s'il existe dans l'ellipse un point  $\alpha, \beta, \gamma$  pour lequel la forme définie  $\bar{f}(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma)$  est réduite.*

[15] Rappelons les conditions trouvées par Selling pour la réduction des formes positives :

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \\ \bar{g}, \bar{h}, \bar{k} \end{pmatrix} (x, y, z).$$

Considérons trois vecteurs  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  de même origine et dont les longueurs et les angles mutuels sont définis par les relations



$$\begin{aligned} \overline{OA}^2 &= \bar{a}, & \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \cos(\overline{OB}, \overline{OC}) &= \bar{g}, \\ \overline{OB}^2 &= \bar{b}, & \overline{OC} \cdot \overline{OA} \cdot \cos(\overline{OC}, \overline{OA}) &= \bar{h}, \\ \overline{OC}^2 &= \bar{c}, & \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos(\overline{OA}, \overline{OB}) &= \bar{k}. \end{aligned}$$

Ces relations sont résolubles, car  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  sont positifs, et les formes  $(\bar{b}, \bar{g}, \bar{c})$ ,  $(\bar{c}, \bar{h}, \bar{a})$ ,  $(\bar{a}, \bar{k}, \bar{b})$  étant définies, car autrement  $\bar{f}$  serait indéfinie, il en résulte que

$$\frac{\bar{g}}{\sqrt{\bar{b}\bar{c}}}, \quad \frac{\bar{h}}{\sqrt{\bar{c}\bar{a}}}, \quad \frac{\bar{k}}{\sqrt{\bar{a}\bar{b}}},$$

sont compris entre  $-1$  et  $+1$ .

$\bar{f}(x, y, z)$  est égal au carré du vecteur  $x \cdot \overline{OA} + y \cdot \overline{OB} + z \cdot \overline{OC}$ . Si l'on donne à  $x$ ,  $y$ ,  $z$  toutes les valeurs entières possibles, les extrémités de tous ces vecteurs sont les sommets d'un réseau de parallélépipèdes de côtés équipollents à  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ . Faire une substitution entière unimodulaire sur les variables, c'est remplacer le trièdre  $OABC$  par un autre  $OA'B'C'$  ayant pour points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  des points du réseau. Le volume des parallélépipèdes correspondants est le même.

Considérons maintenant, avec Selling, le vecteur  $OD$  qui fait équilibre aux vecteurs  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ . On a quatre trièdres et chacun d'eux représente une forme, abstraction faite de l'ordre des arêtes; six formes, si on en tient compte. Dans leurs coefficients s'introduisent seulement quatre éléments nouveaux, la longueur  $OD$  et les angles de  $OD$  avec  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ . On pose :

$$\begin{aligned} \overline{OD}^2 &= \bar{d}, \\ \overline{OA} \cdot \overline{OD} \cdot \cos(\overline{OA}, \overline{OD}) &= \bar{t}, \\ \overline{OB} \cdot \overline{OD} \cdot \cos(\overline{OB}, \overline{OD}) &= \bar{m}, \\ \overline{OC} \cdot \overline{OD} \cdot \cos(\overline{OC}, \overline{OD}) &= \bar{n}. \end{aligned}$$

D'où, en projetant sur OA, OB, OC, OD successivement,

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{a} + \bar{k} + \bar{h} + \bar{l} = 0, \\ \bar{k} + \bar{b} + \bar{g} + \bar{m} = 0, \\ \bar{h} + \bar{g} + \bar{c} + \bar{n} = 0, \\ \bar{l} + \bar{m} + \bar{n} + \bar{d} = 0. \end{cases}$$

De là ou de la figure, on conclut :  $\bar{d} = \bar{f}(1, 1, 1)$ .

[16] *Conditions de réduction.* — Ceci posé, on dit, avec Selling, que le système de vecteurs en équilibre OA, OB, OC, OD est RÉDUIT, quand aucun de leurs six angles mutuels n'est aigu : les formes correspondantes sont dites réduites dans les mêmes conditions, qui reviennent à

$$(2) \quad \bar{g} \leq 0, \quad \bar{h} \leq 0, \quad \bar{k} \leq 0, \quad \bar{l} \leq 0, \quad \bar{m} \leq 0, \quad \bar{n} \leq 0.$$

Le théorème fondamental de Selling par lequel le choix de ces conditions se justifie est le suivant :

THÉORÈME. — Dans le réseau parallélépipédique, il existe toujours un système réduit et un seul d'origine O.

Je renvoie, pour la démonstration, à la Thèse de M. Charve. Les principes en sont les suivants : tant que l'un des coefficients ( $\bar{g}$ , ...,  $\bar{l}$ , ...) est positif, on peut, par une substitution convenable, diminuer la somme  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$ , qui doit cependant rester positive; ensuite, si un système est réduit, toute substitution autre qu'une permutation des vingt-quatre formes associées augmente la somme précédente.

On utilise avec avantage dans cette démonstration et dans beaucoup de calculs de substitutions une façon d'écrire la forme symétrique par rapport aux quatre vecteurs. D'abord, elle s'écrit évidemment :

$$(3) \quad \bar{f} = -\bar{g}(y-z)^2 - \bar{h}(z-x)^2 - \bar{k}(x-y)^2 - \bar{l}x^2 - \bar{m}y^2 - \bar{n}z^2,$$

et pour avoir la symétrie il suffit d'introduire quatre nouvelles variables X, Y, Z, T, en posant

$$x = X - T, \quad y = Y - T, \quad z = Z - T,$$

d'où :

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{F}(X, Y, Z, T) = & -\bar{g}(Y-Z)^2 - \bar{h}(Z-X)^2 \\ & -\bar{k}(X-Y)^2 - \bar{l}(X-T)^2 - \bar{m}(Y-T)^2 - \bar{n}(Z-T)^2. \end{aligned}$$

Si une substitution

$$(5) \quad \begin{cases} x = u_1x_1 + u_2y_1 + u_3z_1, \\ y = v_1x_1 + v_2y_1 + v_3z_1, \\ z = w_1x_1 + w_2y_1 + w_3z_1 \end{cases}$$

change  $\bar{f}$  en  $\bar{f}'$ , elle changera  $\bar{F}$  en  $\bar{F}'$  si l'on pose encore  $x = X - T$ , ...,  $x_1 = X_1 - T_1$  et s'écrira

$$(6) \quad \begin{cases} X = u_1X_1 + u_2Y_1 + u_3Z_1 + u_4T_1, \\ Y = v_1X_1 + v_2Y_1 + v_3Z_1 + v_4T_1, \\ Z = w_1X_1 + w_2Y_1 + w_3Z_1 + w_4T_1, \\ T = 0, \end{cases}$$

$u_4, v_4, w_4$  vérifiant les relations

$$(7) \quad \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0, \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0. \end{cases}$$

Comme  $F$  ne contient  $T$  que par les différences  $X - T, Y - T, Z - T$ , on pourrait remplacer la dernière ligne par

$$T = t_1X_1 + t_2Y_1 + t_3Z_1 + t_4T_1,$$

en diminuant de  $t_1$ , etc., tous les coefficients de la même colonne; mais cette modification a peu d'intérêt: il suffit de s'en tenir à la seconde forme de substitution, dans laquelle on pourra même sous-entendre la dernière ligne ( $T = 0$ ).

Une application est relative aux substitutions qui résultent pour les variables des permutations des quatre vecteurs. La substitution identique étant, en effet, représentée par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

elles répondent simplement à toutes les permutations des quatre colonnes de ce tableau (combinées si l'on veut avec un changement de signe pour conserver le signe du déterminant). J'ai réuni dans le tableau I la liste de ces substitutions en y joignant les permutations correspondantes des coefficients de la forme. Comme ces substitutions reviennent souvent pour la transformation de substitutions relatives à un ordre donné de coefficients, il est avantageux de ne pas avoir à chercher.



[17] On a, dans la réduction continue, à réduire des formes positives dont les coefficients sont fonctions de variables continues (les coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  du point intérieur à l'ellipse). Il est donc nécessaire de déterminer les substitutions à employer pour réduire de nouveau une forme lorsque, par suite de la variation des paramètres, une ou plusieurs des conditions de réduction cessent d'être remplies. J'ai indiqué d'après Selling, dans les tableaux IV et V, les substitutions à employer dans les différents cas ou, du moins, les types dont se déduisent tous les autres. J'ometts les démonstrations et je me borne à donner, comme exemple, la vérification relative à la substitution à employer pour réduire de nouveau la forme lorsque  $\bar{g}$  s'annule et devient positif; c'est  $(x, x - z, y)$  et on déduit aisément de (4) les nouvelles valeurs de  $\bar{g}, \bar{h}$ , etc. :

$$-\bar{g}, \quad \bar{m} + \bar{g}, \quad \bar{h} + \bar{g}, \quad \bar{l} - \bar{g}, \quad \bar{n} + \bar{g}, \quad \bar{k} + \bar{g};$$

elles sont toutes négatives si  $\bar{g}$  est positif et suffisamment petit.

Je rappelle aussi le résultat élégant auquel M. Charve est parvenu par l'analyse des substitutions : *deux substitutions seulement  $(z, x, y)$  et  $(x, x - z, y)$  sont nécessaires et suffisantes pour la réduction de toute forme ternaire.*

[18] Passons maintenant à la réduction continue et reprenons les notations du n° 14. Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  un point M, dont les coordonnées vérifient (2). Si la forme associée  $\bar{f}$  n'est pas déjà réduite, il existera une substitution T qui la réduira, et  $\bar{f}'T$  sera aussi réduite. Lorsque le point M varie, il faut, pour que la forme  $\bar{f}'T$  reste réduite, qu'il ne sorte pas d'un certain champ défini par les inégalités de la réduction.  $\bar{f}$  étant, pour plus de simplicité, déjà réduite, ou T la substitution identique, ces inégalités sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'_{\beta}f'_{\gamma} - g &\leq 0, & \frac{1}{2}f'_{\gamma}f'_{\alpha} - h &\leq 0, & \frac{1}{2}f'_{\alpha}f'_{\beta} - k &\leq 0; \\ \frac{1}{2}f'_{\alpha}\Sigma f'_{\alpha} + l &\geq 0, & \frac{1}{2}f'_{\beta}\Sigma f'_{\alpha} + m &\geq 0, & \frac{1}{2}f'_{\gamma}\Sigma f'_{\alpha} + n &\geq 0. \end{aligned}$$

En égalant à zéro les premiers membres rendus homogènes au moyen de  $f(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ , on a les équations de six coniques et le champ de réduction est limité par des arcs de ces coniques. Selling démontre qu'aucun champ ne peut être limité par une seule conique. Il distingue les points d'intersection en deux classes, suivant que les coefficients qui s'annulent sont ou non ceux de deux différences portant sur les quatre variables (dans la forme 4 du numéro précédent) et il appelle les premiers *points de fissure*, les seconds *points de croisement*.

Les frontières aboutissant à l'un des premiers cessent de l'être au delà; celles qui aboutissent à l'un des seconds continuent au delà.

Soit, par exemple, le point I à l'intersection de  $\bar{h}=0$ ,  $\bar{m}=0$ ,  $\bar{f}$  étant supposée réduite dans le voisinage de I à l'intérieur de l'angle AIB. La substitution

$$(-y+z, -x+z, -x)$$

produit sur les coefficients  $\bar{g}, \dots, \bar{l}, \dots$  la substitution

$$\bar{l} + \bar{h}, \bar{m} - \bar{h}, \bar{h} + \bar{k}, \bar{n} + \bar{h}, -\bar{h}, \bar{g} + \bar{h}$$

et la nouvelle forme est réduite<sup>(1)</sup> dans l'angle — traversé par BI prolongé — formé par AI avec IC ( $\bar{m} - \bar{h} = 0$ ) — dont le prolongement traverse AIB : les frontières AI, BI, CI s'arrêtent au point I.

Soit, d'autre part, le point I à l'intersection de  $\bar{h}=0$ ,  $\bar{k}=0$ ,  $\bar{f}$  réduite au voisinage de I à l'intérieur de AIB. La substitution

$$(x, y - z, y)$$

produit sur les coefficients  $\bar{g}, \dots, \bar{l}, \dots$  la substitution

$$\bar{m} + \bar{k}, -\bar{k}, \bar{h} + \bar{k}, \bar{l} + \bar{k}, \bar{n} - \bar{k}, \bar{g} + \bar{k}$$

et la nouvelle forme est réduite — au voisinage de I — dans l'angle BIC ayant pour côtés IB et IC ( $\bar{h} + \bar{k} = 0$ ), ce dernier ne traversant pas AIB. La même substitution faite une fois de plus donne

$$\bar{n} + \bar{h}, -(\bar{h} + \bar{k}), \bar{h}, \bar{l} + \bar{k} + (\bar{h} + \bar{k}), \bar{g} - \bar{h}, \bar{m} + \bar{k} + (\bar{h} + \bar{k}),$$

c'est-à-dire une forme réduite dans l'angle CID, ID est le prolongement de AI. D'ailleurs, en effectuant encore une fois la substitution, on aurait

$$\bar{g}, -\bar{h}, -\bar{k}, \bar{l} + 2(\bar{h} + \bar{k}), \bar{m} + 2\bar{k}, \bar{n} + 2\bar{h}$$

réduite dans DIE opposé par le sommet à AIB, ce qu'on aurait obtenu de suite en appliquant à  $\bar{f}$  la substitution  $(x, -y, -z) = (x, y - z, y)^3$ .

Le cube de la substitution relative à un point de fissure et la sixième puissance de celle d'un point de croisement sont la substitution identique.

Lorsque plus de deux coefficients s'annulent en un point, ou plus d'un le long

(<sup>1</sup>) Au voisinage de I.

d'une ligne, les substitutions ne sont plus les mêmes; on les obtient aisément par un passage à la limite comme Selling ou par les raisonnements de M. Charve, auquel nous renvoyons.

J'ai réuni dans les tableaux II et III toutes les substitutions relatives aux points de croisement et de fissure ordinaires; les autres se trouvent dans V ou s'en déduisent.

[19] Le résultat le plus important de l'analyse de Selling pour la réduction continue est que les *coordonnées des points de croisement sont assujetties à certaines inégalités d'où résulte, si les coefficients sont entiers, l'existence d'un nombre LIMITÉ de réduites équivalentes*, résultat démontré pour la première fois par Hermite avec des conditions de réduction toutes différentes.

Calculons en effet les coefficients  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{g}$  d'une forme  $\bar{f}$  en un point de croisement  $\bar{h} = \bar{k} = 0$ . On a, en posant pour abrégér

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'_\alpha &= p, & \frac{1}{2}f'_\beta &= q, & \frac{1}{2}f'_\gamma &= r, \\ \bar{a} &= 2p^2 - a, & \bar{b} &= 2q^2 - b, & \bar{c} &= 2r^2 - c; \\ \bar{g} &= 2qr - g, & 0 &= 2rp - h, & 0 &= 2pq - k; \end{aligned}$$

et la relation  $f(\alpha, \beta, \gamma) = 1$  devient, par une transformation connue, F et  $\Delta$  désignant l'adjointe et le discriminant de  $f$ :

$$F(p, q, r) = \Delta.$$

On en tire, par une élimination facile<sup>(1)</sup>, les valeurs ci-après, où A est le coefficient  $bc - g^2$  de l'adjointe :

$$(1) \quad \bar{a} = \sqrt{\frac{a\Delta}{A}}, \quad \bar{b} = \frac{h^2}{a + \bar{a}} - b, \quad \bar{c} = \frac{h^2}{a + \bar{a}} - c, \quad \bar{g} = \frac{hk}{a + \bar{a}} - g;$$

Pour que ces valeurs soient réelles, ainsi que  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et, par suite,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , il faut et il suffit,  $\Delta$  étant positif, que l'on ait

$$(2) \quad 0 < aA \leq \Delta.$$

La forme  $\left(\frac{\bar{a}}{\bar{g}}, \bar{b}, \bar{c}\right)$  étant réduite, il en est de même de  $(\bar{b}, \bar{g}, \bar{c})$  et réciproquement<sup>(2)</sup>.

(1) En utilisant, si l'on veut, le fait que,  $\bar{f} + f$  étant un carré, tous les mineurs de son discriminant sont nuls.

(2) Pour les formes binaires positives, les conditions de réduction de Selling sont :

$$(-\bar{g}, \bar{b} + \bar{g}, \bar{c} + \bar{g}) \geq 0.$$

Si l'on fait une substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

les coefficients  $a_i$  et  $A_i$  de la nouvelle forme et de son adjointe sont :

$$a_i = f(x_i, \beta_i, \gamma_i), \quad A_i = F(\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$$

( $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$  désignant les mineurs relatifs à  $x_i, \beta_i, \gamma_i$ ).

Chaque fois que les inégalités

$$(3) \quad 0 < f(x_i, \beta_i, \gamma_i) F(\lambda_i, \mu_i, \nu_i) \leq \Delta$$

seront vérifiées, la substitution donnera un nouveau point de croisement  $\bar{h}_i = \bar{k}_i = 0$  et un seul.

Ceci posé,  $a$  et  $A$  sont limités par les inégalités (2) et  $b, g, c, h, k$  le sont ensuite par  $bc - g^2 = \Lambda$  et les conditions de réduction de la forme  $(\bar{b}, \bar{g}, \bar{c})$ . Comme il y a toujours un point de croisement au moins par champ, sauf dans certains champs exceptionnels n'ayant que des points de fissure, mais qui se trouvent alors, en nombre limité, entourés par des champs ordinaires, on voit que la limitation précédente entraîne celle du nombre des formes réduites de *discriminant* et, *a fortiori*, de *classe* donnés.

[20] Après avoir énuméré en détail les divers procédés de calcul à employer dans la méthode de réduction continue, je rappellerai sommairement, d'après M. Picard (*Sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées* : Annales de l'École normale, 1884), le mécanisme de cette réduction. Supposons, pour plus de simplicité, la forme  $f$  (et, par suite, un système de vingt-quatre formes associées) réduite; lorsque le point M (voir n° 18) franchit une frontière du champ de réduction, il faut faire sur  $f$ , pour la réduire de nouveau, une certaine substitution à laquelle correspond un nouveau champ adjacent au premier. Parmi tous les champs adjacents, conservons seulement ceux dont les systèmes associés diffèrent du système initial. Puis, opérons de même pour chacun de ces champs nouveaux, en conservant ceux des champs adjacents qui répondent à des systèmes associés autres que tous les précédents et ainsi de suite. Cette série d'opérations a une fin, puisque le nombre des réduites est limité. Soit  $P_0$  le polygone total, d'un seul tenant, formé par l'ensemble des champs conservés.

En franchissant un des côtés  $ab$  de  $P_0$ , on entre dans un champ  $p$  associé à un système déjà obtenu, ayant par suite déjà un champ de réduction  $p_0$  dans  $P_0$ .  $S_0$  et  $S$  étant les substitutions correspondantes,  $fS_0 = fS$ ;  $S_0^{-1}S$  est une substitution semblable de  $fS_0$ ; elle change  $p_0$  en  $p$ , donc un côté  $a_0b_0$  de  $p_0$  en le côté  $ab$  de  $p$ ;

$a_0 b_0$  appartiendra en général au contour de  $P_0$ , car au champ  $p'$  adjacent à  $p$  le long de  $ab$ , et par suite *intérieur* à  $P_0$ , répond par la substitution inverse un champ  $p'$  adjacent à  $p_0$  le long de  $a_0 b_0$  :  $p'_0$  et  $p'$ , correspondant à un même système réduit, ne peuvent être tous deux intérieurs à  $P_0$ , par définition même de ce dernier, à moins de coïncider;  $p'_0$  est donc, en général, *extérieur*, et  $a_0 b_0$  côté de  $P_0$ . Dans le cas d'exception,  $S^{-1}S_0$  change  $p'$  en lui-même. En résumé, chaque côté  $ab$  de  $P_0$  donne une substitution semblable  $S_0 S^{-1}$  de  $f$ ; cette substitution change  $P_0$  en un polygone  $P$  qui ne peut avoir en commun avec lui qu'un ou plusieurs champs de leur périphérie. On peut continuer ainsi indéfiniment, les polygones obtenus se rapprochent indéfiniment du contour de l'ellipse. Dans chaque cas particulier on trouvera ainsi, après des calculs plus ou moins longs, un certain nombre minimum de substitutions semblables, dont toutes les autres seront des produits : ce seront les substitutions génératrices du groupe reproductif.

La substitution semblable qui, dans le cas exceptionnel rencontré, change en lui-même le champ  $p'$ , après *retournement*, est une symétrie, au sens de la géométrie hyperbolique;  $p'$  est traversé par un axe de symétrie.

Il serait maintenant aisé d'étudier les substitutions elliptiques en se basant sur les réduites et d'arriver à la même classification que Poincaré. On partirait de la remarque suivante : *un point fixe de substitution elliptique, ne pouvant être intérieur au polygone fondamental, ne peut être intérieur à un champ de réduction que si ce dernier est traversé par un axe de symétrie* (sur lequel se trouvera le point fixe). Le nombre des cas à étudier se trouve ainsi limité.

[21]      *Tableau des vingt-quatre permutations de Selling. (Tableau I.)*

Indices.	Variables.	Coefficients.
1, 2, 3, 4,	$x, y, z,$	$a, b, c, d; \quad g, h, k; \quad l, m, n.$
1, 3, 2, 4,	$-x, -z, -y,$	$a', c, b, d; \quad g, k, h; \quad l, n, m.$
2, 1, 3, 4,	$-y, -x, -z,$	$b, a, c, d; \quad h, g, k; \quad m, l, n.$
2, 3, 1, 4,	$y, z, x,$	$c, a, b, d; \quad k, g, h; \quad n, l, m.$
3, 2, 1, 4,	$-z, -y, -x,$	$c, b, a, d; \quad k, h, g; \quad n, m, l.$
3, 1, 2, 4,	$z, x, y,$	$b, c, a, d; \quad h, k, g; \quad m, n, l.$
4, 2, 3, 1,	$x, x-y, x-z,$	$d, b, c, a; \quad g, n, m; \quad l, k, h.$
4, 3, 2, 1,	$-x, -x+z, -x+y,$	$d, c, b, a; \quad g, m, n; \quad l, h, k.$
2, 4, 3, 1,	$-x+y, -x, -x+z,$	$d, a, c, b; \quad h, n, l; \quad m, k, g.$
2, 3, 4, 1,	$x-y, x-z, x,$	$d, a, b, c; \quad k, m, l; \quad n, h, g.$
3, 2, 4, 1,	$-x+z, -x+y, -x,$	$d, b, a, c; \quad k, l, m; \quad n, g, h.$
3, 4, 2, 1,	$x-z, x, x-y,$	$d, c, a, b; \quad h, l, n; \quad m, g, k.$

Indices.	Variables.	Coefficients.
1, 4, 3, 2,	$-x+y, y, y-z,$	$a, d, c, b; \quad n, h, l; \quad k, m, g.$
1, 3, 4, 2,	$x-y, -y+z, -y,$	$a, d, b, c; \quad m, k, l; \quad h, n, g.$
4, 1, 3, 2,	$-y, x-y, -y+z,$	$b, d, c, a; \quad n, g, m; \quad k, l, h.$
4, 3, 1, 2,	$y, y-z, -x+y,$	$c, d, b, a; \quad m, g, n; \quad h, l, k.$
3, 4, 1, 2,	$-y+z, -y, x-y,$	$c, d, a, b; \quad l, h, n; \quad g, m, k.$
3, 1, 4, 2,	$y-z, -x+y, y,$	$b, d, a, c; \quad l, k, m; \quad g, n, h.$
1, 2, 4, 3,	$-x+z, -y+z, z,$	$a, b, d, c; \quad m, l, k; \quad h, g, n.$
1, 4, 2, 3,	$x-z, -z, y-z,$	$a, c, d, b; \quad n, l, h; \quad k, g, m.$
2, 1, 4, 3,	$y-z, x-z, -z,$	$b, a, d, c; \quad l, m, k; \quad g, h, n.$
2, 4, 1, 3,	$-y+z, z, -x+z,$	$c, a, d, b; \quad l, n, h; \quad g, k, m.$
4, 2, 1, 3,	$-z, y-z, x-z,$	$c, b, d, a; \quad m, n, g; \quad h, k, l.$
4, 1, 2, 3,	$z, -x+z, -y+z,$	$b, c, d, a; \quad n, m, g; \quad k, h, l.$

[22] *Substitutions qui permutent circulairement les réduites autour des points de croisement.* (Tableau II.)

Croisement et sens de rotation.	Substitutions correspondantes.	Coefficients de la nouvelle forme $a, b, c, g, h, k.$
$g \rightarrow h,$	$x-y, x, z,$	$a+b+2k, a, c, -h, g+h, -a-k.$
$h \rightarrow g,$	$y, -x+y, z,$	$b, a+b+2k, c, g+h, -g, -b-k.$
$g \rightarrow k,$	$x-z, y, x,$	$a+c+2h, b, a, -k, -a-h, g+k.$
$k \rightarrow g,$	$z, y, -x+z,$	$c, b, a+c+2h, g+k, -c-h, -g.$
$g \rightarrow m,$	$z, -x+y+z, -x+z,$	$b+c+2g, b, d^{(1)}, -m, m+n, -b-g.$
$m \rightarrow g,$	$x-z, y-z, x,$	$a+c+2h, b, a+b+2k, -b-k, l-g, g+k.$
$g \rightarrow n,$	$y, -x+y, -x+y+z,$	$b+c+2g, d, c, -n, -c-g, m+n.$
$n \rightarrow g,$	$x-y, x, -y+z,$	$a+b+k, a+c+2h, c, -c-k, g+h, l-g.$
$h \rightarrow k,$	$x, y-z, y,$	$a, b+c+2g, b, -b-g, -k, h+k.$
$k \rightarrow h,$	$x, z, -y+z,$	$a, c, b+c+2g, -c-g, h+k, -h.$
$h \rightarrow l,$	$x-y+z, z, -y+z,$	$a, a+c+2h, d, l+n, -l, -a-h.$
$l \rightarrow h,$	$x-z, y-z, y,$	$a, b+c+2g, a+b+2k, m-h, -a-k, h+k.$
$h \rightarrow n,$	$x-y, x, x-y+z,$	$d, a+c+2h, c, -c-h, -n, l+n.$
$n \rightarrow h,$	$y, -x+y, -x+z,$	$b+c+2g, a+b+2k, c, g+h, -c-g, m-h.$
$k \rightarrow l,$	$x+y-z, y-z, y,$	$a, d, a+b+2k, l+m, -a-k, -l.$
$l \rightarrow k,$	$x-y, z, -y+z,$	$a, a+c+2h, b+c+2g, n-k, h+k, -a-h.$
$k \rightarrow m,$	$x-z, x+y-z, x,$	$d, b, a+b+2k, -b-k, l+m, -m.$

(<sup>1</sup>)  $d = a + b + c + 2g + 2h + 2k.$

Croisement et sens de rotation.	Substitutions correspondantes.	Coefficients de la nouvelle forme $a, b, c, g, h, k.$
$m \Rightarrow k,$	$z, -x+y, -x+z,$	$b+c+2g, b, a+c+2h, g+k, n-k, -b-g.$
$l \Rightarrow m,$	$y, -x+y+z, z,$	$a, a+b+2k, b+c+2g, h-m, -b-g, -b-k.$
$m \Rightarrow l,$	$x-y+z, x, z.$	$a+b+2k, a, a+c+2h, -a-h, g-l, -a-k.$
$l \Rightarrow n,$	$z, y, -x+y+z,$	$c, b+c+2g, a+c+2h, k-n, -c-h, -c-g.$
$n \Rightarrow l,$	$x+y-z, y, x,$	$a+c+2h, a+b+2k, a, -a-k, -a-h, g-l.$
$m \Rightarrow n,$	$x, z, x-y+z,$	$a+c+2h, c, b+c+2g, -c-g, k-n, -c-h.$
$n \Rightarrow m,$	$x, x+y-z, y,$	$a+b+2k, b+c+2g, b, -b-g, -b-k, h-m.$

[23] *Permutations circulaires des réduites autour des points de fissure.*

(Tableau III.)

Sens de rotation.	Substitutions $x, y, z.$	Nouveaux coefficients $a, b, c, g, h, k.$
$g \Rightarrow l,$	$x-y-z, x-y, -y,$	$a+b+2k, d, a, -l, -a-k, l+m.$
$l \Rightarrow g,$	$y-z, -z, -x+y,$	$c, a+c+2h, a+b+2k, l-g, g+h, -c-h.$
$h \Rightarrow m,$	$-z, -x+y-z, y-z,$	$b, b+c+2g, d, m+n, -m, -b-g.$
$m \Rightarrow h,$	$-y+z, -x+z, -x,$	$b+c+2g, a, a+b+2k, -a-k, m-h, h+k.$
$k \Rightarrow n,$	$-x+z, -x, -x-y+z,$	$d, c, a+c+2h, -c-h, n+l, -n.$
$n \Rightarrow k,$	$-y, x-z, x-y,$	$b+c+2g, a+c+2h, b, g+k, -b-g, n-k.$

[24] *Substitutions à employer pour réduire de nouveau une forme  $\bar{f}$ , lorsqu'on traverse un côté du champ de réduction, sur lequel un seul des coefficients  $\bar{g}, \bar{h}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$  est nul. (Tableau IV.)*

Côté traversé.	Substitutions $x, y, z.$	Nouveaux coefficients $a, b, c, g, h, k.$
$\bar{g},$	$x, x-z, y,$	$a+b+2k, c, b, -g, -b-k, g+h.$
$\bar{h},$	$z, y, -x+y,$	$c, b+c+2g, a, h+k, -h, -c-g.$
$\bar{k},$	$-y+z, x, z,$	$b, a, a+c+2h, -a-h, g+k, -k.$
$\bar{l},$	$-x+y+z, -x+y, -x+z,$	$d, a+b+2k, a+c+2h, g-l, l+n, l+m.$
$\bar{m},$	$x-y, x-y+z, -y+z,$	$a+b+2k, d, b+c+2g, m+n, h-m, m+l.$
$\bar{n},$	$x-z, y-z, +x+y-z,$	$a+c+2h, b+c+2g, d, n+m, n+l, k-n.$

[25] *Substitutions à employer si plusieurs coefficients  $\bar{g}, \bar{h}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ , s'annulent sur un côté<sup>(1)</sup>. (Tableau V.)*

1°  $\bar{g} = \bar{l} = 0$ . Si  $\bar{g} - \bar{l}$  passe d'une valeur négative à une valeur positive, on emploiera  $(x, x - z, y)$ .

Si  $\bar{g} - \bar{l}$  passe d'une valeur positive à une négative, on emploiera

$$(x - y - z, x - y, -y).$$

2°  $\bar{g} = \bar{h} = 0$ . On emploiera  $(-z, -x, y)$ .

3°  $\bar{g} = \bar{h} = \bar{k} = 0$ . Si  $\bar{h} - \bar{k}$  et  $\bar{g} - \bar{k}$  passent d'une valeur négative à une positive, on fera  $(y, x - z, -x)$ . Comme il y a toujours deux différences de deux quantités et d'une troisième positives, il suffira, si ce ne sont pas les précédentes, de faire une permutation pour se ramener à ce cas.

[26] *Champs bornés ou traversés par des axes de symétrie. (Tableau VI.)*

1°  $g = h = 0, \bar{g} = \bar{h} = 0$  sur un côté (rectiligne à cause de  $g = h = 0$ ). La substitution  $(-x, -y, z)$  (de la classe  $S_0$ ) reproduit la forme et échange les champs de réduction de part et d'autre de l'axe de symétrie ( $\bar{g} = \bar{h} = 0$ ).

2°  $a = b, g = h$ . La forme reste inaltérée par

$$(y - z, x - z, -z)$$

et le champ de réduction est symétrique par rapport à  $x + y - z = 0$ .

3°  $g = 0, h = n$ . La forme reste inaltérée par

$$(-x, -y, -x + z)$$

et le champ est limité par l'axe de symétrie  $x - z = 0$ .

Tous les autres cas se ramènent aux précédents par des permutations.

*Condition pour qu'une forme  $ax^3 - (by^3 + 2gyz + cz^3) = ax^3 - \varphi(y, z)$  soit réduite.*

[27] Pour appliquer la méthode de réduction continue, il y a avantage à partir d'une forme déjà réduite. La condition que doit remplir pour être réduite une forme du type  $f = ax^3 - \varphi(y, z)$  dont nous nous occupons est la suivante : *il faut et il suffit que la forme  $\varphi$  le soit*. Démontrons-le pour une  $\varphi$  positive ( $a$  étant alors positif pour que  $f$  soit indéfinie).

---

(<sup>1</sup>) Ce cas étant moins fréquent que les autres, j'indique seulement un type de chaque substitution, les autres s'en déduiront aisément par permutation.



La forme  $\bar{f}$  définie associée est

$$\bar{f} = \frac{1}{2} (x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma)^2 - f(x, y, z),$$

$\alpha, \beta, \gamma$  vérifiant l'équation

$$f(x, \beta, \gamma) = +1^{(1)}.$$

Les inégalités de réduction sont pour la forme  $f$ :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} g + \frac{1}{2} \varphi'_\beta \varphi'_\gamma \leq 0, \quad -ax \varphi'_\gamma \leq 0, \quad -ax \varphi'_\beta < 0. \\ -a + ax(2ax - \varphi'_\beta - \varphi'_\gamma) \geq 0, \quad +b + g - \frac{1}{2} \varphi'_\beta (2ax - \varphi'_\beta - \varphi'_\gamma) \geq 0. \\ +c + g - \frac{1}{2} \varphi'_\gamma (2ax - \varphi'_\beta - \varphi'_\gamma) \geq 0. \end{array} \right.$$

Pour la forme définie  $\varphi$ , ce sont<sup>(2)</sup>  $(-g, b + g, c + g) \geq 0$ .

Ces dernières sont *nécessaires* pour les inégalités (1). En effet,  $\alpha, \beta, \gamma$  étant partout au second degré, on peut supposer, par exemple,  $\alpha$  positif. Les 2°, 3° et 4° inégalités (1) exigent alors

$$\varphi'_\beta \geq 8, \quad \varphi'_\gamma \geq 0, \quad \varphi'_\beta + \varphi'_\gamma - 2ax \leq 0,$$

et, par suite, les 1°, 5° et 6° exigent

$$g \leq 0, \quad b + g \geq 0, \quad c + g \geq 0.$$

Elles sont *suffisantes*. Car pour vérifier alors le système (1), il suffit de prendre  $\beta$  et  $\gamma$  suffisamment petits et  $\varphi'_\beta, \varphi'_\gamma \geq 0$ .

*Remarque.* — Les conditions de Gauss pour une forme définie réduite sont

$$-b < 2g \leq b \leq c.$$

De deux formes réduites opposées, celle où  $g$  est négatif est donc *a fortiori* réduite au sens de Selling.

*Champ de réduction.* — Il est limité par les frontières  $\bar{h} = 0, \bar{k} = 0, \bar{l} = 0$ ; les deux premières sont des droites, la deuxième une ellipse,

$$\begin{aligned} \bar{h} = 0, \quad g\beta + c\gamma &= 0; \\ \bar{k} = 0, \quad b\beta + g\gamma &= 0; \\ \bar{l} = 0, \quad b\beta^2 + 2g\beta\gamma + c\gamma^2 - 2ax[(b + g)\beta + (g + c)\gamma] + ax^2 &= 0. \end{aligned}$$

On trouve en effet, d'après les formules du n° 19, que les intersections de ces trois frontières sont points de croisement, et il n'y en a pas d'autre, ni de points de fissure.

(<sup>1</sup>) En posant  $\beta : \alpha = Y, \gamma : \alpha = Z, f(1, Y, Z) = 0$  représente une ellipse, à l'intérieur de laquelle le point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  reste contenu.

(<sup>2</sup>) Voir Selling, § 1.

[28] Pour une forme  $\varphi$  indéfinie, le raisonnement précédent ne s'applique plus; la seconde partie du théorème seule est vraie, d'après les conditions ci-après que j'ai trouvées pour l'existence des divers points de croisement et de fissure<sup>(1)</sup> :

Points de croisement.

$$(\bar{g}, \bar{h}) \quad \text{ou} \quad (\bar{g}, \bar{k}) \quad bc < 0.$$

$$(\bar{h}, \bar{k}) \quad bc \quad \text{ou} \quad b(b+c+2g) \quad \text{ou} \quad c(b+c+2g) < 0.$$

$$(\bar{g}, \bar{m}) \quad g > 0 \quad \text{et soit} \quad b > 0, \quad c < 0, \quad c+g < 0, \quad a < a'',$$

$$\text{soit} \quad b > 0, \quad c < 0, \quad c+g > 0, \quad \sigma < 0, \quad a < \frac{\Lambda^2}{g\sigma},$$

$$\text{soit} \quad b < 0, \quad b+g > 0, \quad c+g > 0, \quad ag\sigma < \Lambda^2, \quad a < a' \text{ et } -\frac{b\Lambda}{g^2}$$

$$(\bar{g}, \bar{n}) \quad \text{conditions à déduire des précédentes par permutation.}$$

$$(\bar{h}, \bar{l}) \quad g > 0, \quad b+g > 0, \quad c+g < 0, \quad -(b+g) \left[ 1 + \frac{g(c+g)}{\Lambda} \right] < a < 0.$$

$$(\bar{k}, \bar{l}) \quad \text{conditions analogues.}$$

$$(\bar{h}, \bar{n}) \quad cs < 0.$$

$$(\bar{k}, \bar{m}) \quad bs < 0.$$

$$(\bar{l}, \bar{m}) \quad \begin{cases} g > 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } b > 0, \quad c+g < 0, \quad a'' < a < -(b+g) \left[ 1 + \frac{g(c+g)}{\Lambda} \right], \\ \text{et} & \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } b < 0, \quad c+g > 0, \quad -s < a < 0, \\ b+g > 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } b < 0, \quad c+g < 0, \quad -(b+g) \left[ 1 + \frac{g(c+g)}{\Lambda} \right] < a < 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases} \end{cases}$$

$$(\bar{l}, \bar{n}) \quad \text{mêmes conditions après permutation.}$$

$$(\bar{m}, \bar{n}) \quad b+g > 0, \quad c+g > 0, \quad b+c < 0, \quad a < -s \quad \text{et} \quad \frac{\Lambda^2}{g\sigma}.$$

Dans ces inégalités,  $a'$  et  $a''$  représentent les racines ( $a' < a''$ ) de

$$g^2 x^2 + \Lambda(b+2g)x + \Lambda(b+g)^2 = 0.$$

Points de fissure.

$$(\bar{h}, \bar{m}) \quad bs < 0.$$

$$(\bar{k}, \bar{n}) \quad cs < 0.$$

$$(\bar{g}, \bar{l}) \quad \text{Des conditions } \textit{suffisantes} \text{ se déduisent aisément, par exclusion, des inégalités relatives aux points de croisement, ou encore du procédé de Selling (IV, b); les conditions } \textit{nécessaires} \text{ paraissent, au contraire, difficiles à établir.}$$

<sup>(1)</sup> On a posé

$f = ax^2 + by^2 + 2gyz + cz^2, \quad a < 0, \quad g^2 - bc = \Lambda > 0, \quad s = b + c + 2g, \quad \sigma = 2bc + bg + cg.$

La discussion de toutes ces inégalités montre que pour que la forme soit réduite, *il suffit* que l'on ait

$$bc \text{ ou } bs \text{ ou } cs \text{ négatif;}$$

ce sont précisément (Selling, II) les conditions de réduction de la forme binaire indéfinie  $\varphi(y, z)$ ; mais ces conditions ne sont pas nécessaires.

#### EXEMPLES NUMÉRIQUES.

[29] Réduction continue de la forme :  $f_4 = z^4 - 2x^4 + 2xy - 3y^4$  ( $\Delta = 5$ ).

$f$  est réduite, les conditions du n° 27 étant vérifiées. Les 10 coefficients du système des 24 réduites associées sont<sup>(1)</sup> :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & +1 \\ & -3 & 0 & 2 \\ & & +1 & -1 \\ & & & -2 \end{vmatrix}.$$

Vu  $h = 0$ ,  $k = l$ ,  $f_4$  est inaltérée par

$$(x - \gamma, \quad -\gamma, \quad -z)$$

et la limite  $\bar{h} = 0$  du champ de réduction est *axe de symétrie* (n° 26).

Le champ a été déterminé (n° 27), il est limité par  $\bar{g} = 0$ ,  $\bar{h} = 0$ ,  $\bar{n} = 0$ , c'est-à-dire, comme la forme associée est

$$\bar{f}_4 = 2x^4 - 2xy + 3y^4 - z^4 + 2[(2\alpha - \beta)x + (-\alpha + 3\beta)y - \gamma z]^2$$

par

$$\begin{aligned} 2\gamma(\alpha - 3\beta) &= 0, \\ -2\gamma(2\alpha - \beta) &= 0, \\ 1 + 2\gamma(\alpha + 2\beta - \gamma) &= 0. \end{aligned}$$

La dernière équation doit être rendue homogène à l'aide de la relation toujours vérifiée par  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$$f_4(\alpha, \beta, \gamma) = 1.$$

(1) En groupant, comme Selling, dans le tableau  $\begin{vmatrix} a & k & h & l \\ & b & g & m \\ & & c & n \\ & & & d \end{vmatrix}$  les coefficients de la forme  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & k \end{pmatrix}$  et les nombres  $l, m, n, d$  liés à ces derniers par les équations (1) du n° 15.

Pour la représentation géométrique, nous prendrons pour coordonnées rectangulaires

$$X = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad Y = \frac{\beta}{\gamma}.$$

De sorte que le champ n° 1 (voir planche I) est limité par

$$\begin{aligned} (\bar{g}) \quad & X - 3Y = 0, \\ (\bar{h}) \quad & 2X - Y = 0, \\ (\bar{n}) \quad & 2X^2 - 2XY + 3Y^2 - 2X - 4Y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Les trois sommets sont des points de croisement.

Déterminons les réduites contiguës, en commençant par le point  $(\bar{g}, \bar{h})$  :  $X = Y = 0$ . D'après le tableau II, nous employons  $h \Rightarrow g$  (et non pas  $g \Rightarrow h$ , car nous savons qu'il n'y aura pas à dépasser  $\bar{h} = 0$ ); c'est

$$\begin{aligned} & (y, -x+y, z), \\ f_1(y, -x+y, z) &= z^2 - 3x^2 + 4xy - 3y^2 = f_2. \end{aligned}$$

Le tableau de coefficients du système associé est donc :

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ & -3 & 0 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & -1 \end{vmatrix}.$$

Vu  $a_1 = b_1$ ,  $g_1 = h_1$ ,  $f_1$  se reproduit par

$$(-y, -x, -z),$$

et, par suite (n° 26), le champ de réduction est symétrique; pour avoir l'axe de symétrie, il n'y a qu'à prendre le transformé par la substitution qui change  $f_2$  en  $f_1$  de l'axe relatif à la symétrie  $(y, x, z)$ , c'est-à-dire  $x - y = 0$ . Cet axe est donc :

$$(x - y) - x = -y = 0.$$

C'est une nouvelle droite à ne pas dépasser dans la réduction. L'intersection O de ces deux droites  $2x - y = 0$ ,  $y = 0$ , *conjuguées* par rapport à l'ellipse, est donc un point fixe elliptique de période *deux* (et non *quatre* ou *six*). La symétrie relative à  $y = 0$  est d'ailleurs

$$(y, -x+y, z)(y, x, z)(x-y, x, z) = (x-y, -y, z).$$

Enfin les frontières du champ de  $f_2$  s'obtiennent sans nouveau calcul par le numéro 27, si l'on tient compte en outre de ce que l'équation de la troisième frontière passant par un point de croisement  $\bar{g} = 0$ ,  $\bar{h} = 0$ , est  $\bar{g} + \bar{h} = 0$ .

On aura donc ici les limites :

$$\begin{aligned} (\overline{g}) \quad & X + 2Y = 0, \\ (\overline{h}) \quad & X - 3Y = 0, \\ (\overline{n}) \quad & 2X^2 - 2XY + 3Y^2 - 4X + 2Y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Passons au point de croisement  $(\overline{g}, n)$  du premier champ. D'après le tableau II, employons :

$$(y, -x+y, -x+y+z).$$

Nous obtenons les quatre nouvelles réduites  $f_3, f_4, f_5, f_6$  que nous écrivons ci-dessous, avec en regard les tableaux des dix coefficients des systèmes associés :

$$\begin{aligned} f_3 = -2x^2 - 2y^2 + z^2 + 2yz - 2zx + 2xy & \begin{vmatrix} -2 & +1 & -1 & +2 \\ & -2 & +1 & 0 \\ & & +1 & -1 \\ & & & -1 \end{vmatrix}, \\ f_4 = +x^2 - y^2 + z^2 + 2yz - 4zx - 2xy & \begin{vmatrix} +1 & -1 & -2 & +2 \\ & -1 & +1 & +1 \\ & & +1 & 0 \\ & & & -3 \end{vmatrix}, \\ f_5 = +2x^2 - 3y^2 + z^2 - 4zx + 2xy & \begin{vmatrix} +2 & +1 & -2 & -1 \\ & -3 & 0 & +2 \\ & & +1 & +1 \\ & & & -2 \end{vmatrix}, \\ f_6 = -2x^2 - 2y^2 + z^2 - 2yz - 2zx + 6xy & \begin{vmatrix} -2 & +3 & -1 & 0 \\ & -2 & -1 & 0 \\ & & +1 & +1 \\ & & & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le champ de réduction de  $f_3$  aura un axe de symétrie pour une de ses frontières, vu  $m_3 = 0, g_3 = k_3$ . Cet axe est donné par

$$\overline{m}_3 = 0.$$

La forme associée  $\overline{f}_3 = \overline{f}_1(y, -x+y, -x+y+z)$  étant

$$\overline{f}_3 = -f_3 + 2[(\alpha - 3\beta + \gamma)x + (\alpha + 2\beta - \gamma)y - \gamma z]^2,$$

on a :

$$\overline{m}_3 = -2(\alpha + 2\beta - \gamma)(2\alpha - \beta - \gamma).$$

Mais c'est le premier facteur, qui donne l'axe de symétrie,

$$X + 2Y - 1 = 0;$$

car, pour un point de  $2x - \beta - \gamma = 0$ , on a  $\bar{n}_3 = +1$ , et  $f_3$  n'est pas réduite en ce point.

On connaît en outre les frontières passant par les points de croisement aux extrémités du côté  $\bar{g}_3 = 0$ ; ce sont respectivement  $\bar{g}_1 + \bar{n}_1 = 0$  et  $\bar{h}_1 + \bar{n}_1 = 0$ , c'est-à-dire les ellipses

$$\bar{n}_3 \quad 2X^2 - 2XY + 3Y^2 - 4X + 2Y - 1 = 0,$$

prolongement d'une des frontières du champ (2), et

$$\bar{h}_3 \quad 2X^2 - 2XY + 3Y^2 + 2X - 6Y + 1 = 0.$$

On sait que, sur la première, c'est  $\bar{n}_3$  qui s'annule; sur la seconde, c'est  $\bar{h}_3$ , comme on le voit d'après  $\bar{f}_3$ .

D'après le numéro 19, cherchons s'il y a sur ces frontières d'autres points de croisement.

Sur  $\bar{n}_3 = 0$ , on a le point  $\bar{m}_3 = \bar{n}_3 = 0$ , car on a

$$0 < d_3(b_3c_3 - g_3^2) < \Delta,$$

et la forme  $(\bar{b}_3, \bar{g}_3, \bar{c}_3)$  est réduite, comme le montrent les valeurs des coefficients<sup>(1)</sup>

$$\bar{b}_3 = 2, \quad \bar{c}_3 = \frac{1}{-1 + \sqrt{\frac{5}{3}}} - 1, \quad \bar{g}_3 = 1,$$

qui vérifient bien

$$(-\bar{g}_3, \bar{b}_3 + \bar{g}_3, \bar{c}_3 + \bar{g}_3) > 0.$$

Sur  $\bar{h}_3 = 0$ , au contraire, il n'y a pas de point de croisement autre que  $\bar{h}_3 = \bar{g}_3 = 0$ ; formons en effet les produits

$$a_3(b_3c_3 - g_3^2), \quad a_3(c_3d_3 - n_3^2), \quad c_3(a_3d_3 - l_3^2);$$

le premier est positif, mais supérieur au discriminant; le dernier est négatif; le second remplit bien les conditions d'inégalité

$$0 < a_3(c_3d_3 - n_3^2) \leq \Delta.$$

(1) Pour les calculer, il suffit de permuter les indices 1 et 4, c'est-à-dire  $a$  et  $d$ , ou la première et la dernière colonne du tableau, puis on applique les formules du numéro 19.

Mais la forme  $(\bar{c}_3, \bar{n}_3, \bar{d}_3)$  n'est pas réduite, comme le montrent

$$\begin{aligned}\bar{c}_3 &= \frac{h_3^2}{a_3 + \sqrt{\frac{a_3 \Delta}{c_3 d_3 - n_3^2}}} - c_3 = \frac{1}{-2 + \sqrt{5}} - 1, \\ \bar{d}_3 &= \frac{l_3^2}{a_3 + \sqrt{\frac{a_3 \Delta}{c_3 d_3 - n_3^2}}} - d_3 = \frac{4}{-2 + \sqrt{5}} + 1, \\ \bar{n}_3 &= \frac{h_3 l_3}{a_3 + \sqrt{\frac{a_3 \Delta}{c_3 d_3 - n_3^2}}} - n_3 = \frac{-2}{-2 + \sqrt{5}} - 1,\end{aligned}$$

valeurs d'où résulte

$$\bar{c}_3 + \bar{n}_3 = \frac{-1}{-2 + \sqrt{5}} - 2 < 0.$$

Puisqu'il n'y a pas d'autre point de croisement sur  $\bar{h}_3 = 0$ , il y a nécessairement le point de fissure  $\bar{h}_3 = \bar{m}_3 = 0$ , c'est le point d'intersection avec  $X + 2Y - 1 = 0$ . Le champ est alors complètement délimité. Pour achever ce qui le concerne, il reste à calculer la symétrie relative à l'axe

$$X + 2Y - 1 = 0.$$

En transformant la symétrie relative à  $g = 0$ ,  $h = n$ , par une permutation d'indices, on trouve pour la symétrie de  $f_3$

$$(-x, -x + y - z, -z),$$

d'où résulte celle de  $f_4$  par

$$\begin{aligned}(y, -x + y, -x + y + z)(-x, -x + y - z, -z)(y, -x + y, -x + y + z)^{-1} \\ = (2y - z, x + y - z, x + 2y - 2z).\end{aligned}$$

Ayant développé en détail les calculs relatifs à ce champ, je serai bref pour les autres.

*Champ 4.* — Forme associée :

$$\bar{f}_4 = -f_4 + 2[-(\alpha + 2\beta - 2\gamma)x + (2\alpha - \beta - \gamma)y - \gamma z]^2.$$

Une seule frontière nouvelle :

$$\bar{k}_4 = 0, \quad 6X^2 + 4XY - Y^2 - 10X + 3 = 0,$$

coupant  $\bar{g}_4 = 0$  (point de croisement) et  $\bar{n}_4 = 0$  (point de fissure).

*Champ 5.* — Forme associée :

$$\bar{f}_5 = -f_5 + 2[-(2\alpha + \beta - 2\gamma)x + (\alpha - 3\beta)y - \gamma z]^2.$$

Une seule frontière nouvelle :

$$\bar{l}_s = 0, \quad 6X^2 + 4XY - Y^2 - 8X - 6Y + 3 = 0,$$

coupant  $\bar{n}_s = 0$  (croisement) et  $\bar{g}_s = 0$  (fissure).

Champ 6. — Forme associée :

$$\bar{f}_s = -f_s + 2[-(\alpha - 3\beta - \gamma)x - (\alpha + 2\beta - \gamma)y - \gamma z]^2.$$

Une seule frontière nouvelle, sur laquelle s'annulent les deux coefficients  $\bar{l}_s$  et  $\bar{m}_s$ ; comme en outre  $l_s = m_s = 0$ , c'est un axe de symétrie :

$$2X - Y - 1 = 0.$$

La symétrie correspondante pour  $f_s$  se déduit de celle indiquée au n° 26 pour  $\bar{g} = \bar{h} = 0$  avec  $g = h = 0$ ; en permutant les troisième et quatrième variables, c'est

$$(x - 2z, y - 2z, -z).$$

Comme on a

$$f_s = f_1(y, -x + y, -x + y + z)^4 = f_1(-y, x - y, -x + y + z),$$

la symétrie relative à  $f_s$  est

$$\begin{aligned} & (-y, x - y, -x - y + z)(x - 2z, y - 2z, -z)(-y, x - y, -x - y + z)^{-4} \\ & = (-3x + 2y + 2z, y, -4x + 2y + 3z). \end{aligned}$$

Le champ est d'ailleurs symétrique par rapport à l'axe  $Y = 0$ . Les deux droites  $Y = 0$  et  $2X - Y - 1 = 0$  étant conjuguées, leur point d'intersection est point fixe de substitution elliptique de période deux.

Après avoir déterminé tous les champs qui entourent les sommets  $(\bar{h}, \bar{g})$  et  $(\bar{g}, \bar{n})$  du champ 1, il nous reste à déterminer ceux qui entourent le sommet  $(\bar{n}, \bar{h})$ , ou du moins, puisque déjà deux champs consécutifs 1 et 3 sont déterminés autour de ce point, à déterminer le champ suivant, limité d'un côté à l'axe de symétrie  $2X - Y = 0$ , qu'il est inutile de dépasser.

Employons la substitution  $h \rightleftharpoons n$ , c'est-à-dire

$$(x - y, x, x - y + z);$$

en l'appliquant une fois à  $f_1$ , on retomberait sur le système 3; en l'appliquant deux fois, on obtient :

$$f_7 = f_1(-y, x - y, x - 2y + z) = -2x^2 + y^2 + z^2 - 4yz + 2zx.$$



Le tableau des dix coefficients du système est :

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & -2 \end{vmatrix}$$

La forme associée est :

$$\bar{f}_7 = -f_7 + 2[(-\alpha + 3\beta - \gamma)x - (\alpha + 2\beta - 2\gamma)y - \gamma z]^2.$$

Par suite des égalités  $n_7 = 0$ ,  $l_7 = m_7$  et de  $a_7 = d_7$ ,  $b_7 = d_7$ ,  $k_7 = n_7$ ,  $h_7 = m_7$ , une frontière  $\bar{n}_7 = 0$  du champ est axe de symétrie, c'est  $2X + Y = 0$ , et un autre axe traverse le champ, c'est  $X + 2Y - 1 = 0$ . Leur intersection est le point de fissure  $\bar{k}_7 = \bar{n}_7$ ; les deux dernières limites symétriques des limites déjà connues  $\bar{h}_7 = 0$ ,  $\bar{n}_7 = 0$ , par rapport à  $X + 2Y - 1 = 0$ , sont, d'après  $\bar{f}_7$  :

$$\begin{aligned} \bar{k}_7 &= 0, & X - 3Y + 1 &= 0, \\ \bar{m}_7 &= 0, & 2X^2 + 8XY - 7Y^2 - 8X + 4Y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les droites  $2X - Y = 0$ ,  $X + 2Y - 1 = 0$  ne sont pas conjuguées; leur point d'intersection, point fixe de substitution elliptique, de période autre que *deux* par conséquent, ne peut être, d'après la figure, que celui d'une substitution de période *trois*.

Il ne reste plus de vide, à l'intérieur du quadrilatère formé par les axes de symétrie rencontrés, qu'un angle adjacent aux champs 4 et 5. En appliquant à  $f_4$  la substitution

$$(x, -y + z, x - y)$$

relative au point de fissure  $(\bar{n}, \bar{k})$ , on a :

$$f_8 = -2x^3 + 2y^3 - z^3 + 2xy \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ & 2 & 0 & -3 \\ & & -1 & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix}.$$

La forme associée est :

$$\bar{f}_8 = -f_8 + 2[-(x + 2\beta - \gamma)x - (2x - \beta - 2\gamma)y + (2\alpha - \beta - \gamma)z]^2.$$

Toutes les frontières du champ sont connues : en dehors de celles des champs 4 et 5, ce sont les axes de symétrie  $X + 2Y - 1 = 0$  ( $\bar{h} = 0$ ) et  $2X - Y - 1 = 0$  ( $\bar{h}$  et  $\bar{g} = 0$ ), dont l'existence apparaît d'ailleurs à l'examen du tableau des coefficients. Ces axes, étant conjugués, se coupent en un point fixe de substitution de période *deux*.

La réduction continue est ainsi terminée et on possède les substitutions génératrices du groupe reproductif; c'est le groupe formé par les quatre symétries :

$$S_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

axe  $Y=0$ ;

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

axe  $2X - Y = 0$ ;

$$S_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix},$$

axe  $X + 2Y - 1 = 0$ ;

$$S_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix},$$

axe  $2X - Y - 1 = 0$ .

Sur la figure ont été ajoutés les premiers polygones obtenus par réflexion sur les axes de symétrie.

Si l'on veut avoir le sous-groupe des substitutions *droites* seules, celui qui a pour groupe isomorphe un groupe fuchsien ( $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ ), il faut prendre deux de ces polygones congruents par symétrie pour avoir le domaine fondamental, par exemple OABC et OEDC.

Les substitutions génératrices sont alors celles des points fixes elliptiques O, C formant chacun un cycle : A, qui forme cycle avec E, et B formant cycle avec D. Ces substitutions sont le produit des symétries relatives aux axes qui se coupent au point fixe. Ce sont :

$$V_1 = S_1 S_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$V_2 = S_2 S_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$V_3 = S_3 S_4 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$V_4 = S_4 S_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Entre elles existe la relation évidente :

$$V_1 V_2 V_3 V_4 = 1.$$

$V_1, V_3, V_4$  sont de période *deux*,  $V_2$  de période *trois*.

Les angles non euclidiens A, B, D, E sont égaux à  $\frac{\pi}{2}$ , l'angle C à  $\frac{2\pi}{3}$ .

**[30] Réduction continue de la forme  $f_1 = z^3 - 5x^3 + 4xy - 5y^3$  ( $\Delta = 21$ ).**

Je me borne à indiquer, pour chaque réduite, le tableau des coefficients du système associé, la forme associée, les équations des limites du champ et la substitution faisant passer d'une réduite à la suivante. On suivra l'enchaînement des réduites sur la planche II.

$$f_1 = z^3 - 5x^3 + 4xy - 5y^3 \quad \left| \begin{array}{cccc} -5 & 2 & 0 & 3 \\ & -5 & 0 & 3 \\ & & 1 & -1 \\ & & & -5 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_1 = -f_1 + 2[(5\alpha - 2\beta)x + (-2\alpha + 5\beta)y - \gamma z]^3;$$

$$\bar{g}_1 = 0, \quad 2X - 5Y = 0; \quad \bar{h}_1 = 0, \quad 5X - 2Y = 0;$$

$$\bar{n}_1 = 0, \quad 5X^3 - 4XY + 5Y^3 - 6X - 6Y + 1 = 0.$$

Vu  $a_1 = b_1, g_1 = h_1, f_1$  admet la symétrie

$$(y, x, z)$$

d'axe

$$X - Y = 0.$$

*Réduites autour du point de croisement  $\bar{g}_1 = \bar{h}_1 = 0$ .*

*Substitution  $(x - y, x, z)$ .*

$$f_2 = f_1(x - y, x, z) = -6x^3 - 5y^3 + z^3 + 6xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -6 & +3 & 0 & +3 \\ & -5 & 0 & +2 \\ & & 1 & -1 \\ & & & -4 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_2 = -f_2 + 2[3(\alpha + \beta)x + (2\beta - 5\alpha)y - \gamma z]^3;$$

$$\bar{g}_2 = \bar{h}_2 = 0; \quad \bar{h}_2 = 0, \quad X + Y = 0;$$

$$\bar{n}_2 = 0, \quad 5X^3 - 4XY + 5Y^3 + 4X - 10Y + 1 = 0.$$

Vu  $h_2 = 0$  et  $k_2 = l_2, f_2$  admet la symétrie  $(-x + y, +y, +z)$ , d'où résulte, par transformation, pour  $f$ , la symétrie

$$(-y, -x, z)$$

d'axe

$$X + Y = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{h}_1 = \bar{n}_1 = 0$ .

Substitution  $(x - y, x, x - y + z)$ .

$$f_3 = f_1(x - y, x, x - y + z) = -5x^3 - 4y^3 + z^3 - 2yz + 2zx + 4xy$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 & 2 \\ & -4 & -1 & 3 \\ & & 1 & -1 \\ & & & -4 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_3 = -f_3 + 2[(3\alpha + 3\beta - \gamma)x - (5\alpha - 2\beta - \gamma)y - \gamma z]^2;$$

$$\bar{h}_3 = \bar{n}_1 = 0; \quad \bar{n}_3 = \bar{n}_2 = 0;$$

$$\bar{g}_3 = 0, \quad 5X^3 - 4XY + 5Y^3 - 10X + 4Y + 1 = 0.$$

$$f_4 = f_3(x - y, x, x - y + z) = -4x^3 - 2y^3 + z^3 - 4yz + 2zx + 2xy$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ & -2 & -2 & 3 \\ & & 1 & 0 \\ & & & -5 \end{vmatrix},$$

$$f_4 = -f_4 + 2[(-2\alpha + 5\beta - \gamma)x + (-3\alpha - 3\beta + 2\gamma)y - \gamma z]^2;$$

$$\bar{h}_4 = \bar{n}_3 = 0; \quad \bar{n}_4 = \bar{h}_1 = 0;$$

$$\bar{g}_4 = 0, \quad 5X^3 - 4XY + 5Y^3 - 3X - 3Y + 1 = 0;$$

$$\bar{h}_4 = 0, \quad 17X^3 - 22XY - 25Y^3 - 2X + 26Y - 5 = 0.$$

$$f_5 = f_4(x - y, x, x - y + z) = -5x^3 - y^3 + z^3 - 4yz + 4xy$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 & 3 \\ & -1 & -2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & -5 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_5 = -f_5 + 2[(-5\alpha + 2\beta)x + (2\alpha - 5\beta + 2\gamma)y - \gamma z]^2;$$

$$\bar{h}_5 = \bar{n}_4 = 0; \quad \bar{n}_5 = \bar{n}_1 = 0;$$

$$\bar{m}_5 = 0, \quad 17X^3 - 22XY - 25Y^3 + 8X + 22Y - 5 = 0;$$

$$\bar{g}_5 = 0, \quad 5X^3 - 4XY + 5Y^3 + 2X - 5Y + 1 = 0.$$

$$f_6 = f_5(x - y, x, x - y + z) = -5x^3 - 4y^3 + z^3 - 2yz - 2zx + 8xy$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 & -2 \\ & -4 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & -4 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_6 = -f_6 + 2[(-3\alpha - 3\beta + \gamma)x + (5\alpha - 2\beta + \gamma)y - \gamma z]^2;$$

$$\bar{h}_6 = \bar{n}_1 = 0; \quad \bar{n}_6 = \bar{n}_2 = 0;$$

$$\bar{g}_6 = 0, \quad 5X^3 - 4XY + 5Y^3 + 10X - 4Y + 1 = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{h}_4 = \bar{g}_4 = 0$ .

Substitution  $(y, -x + y, z)$ ;

$$f_7 = f_4(y, -x + y, z) = -2x^2 - 4y^2 + z^2 - 2yz + 4zx + 2xy$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ & -4 & -1 & 4 \\ & & 1 & -2 \\ & & & -1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_7 = -f_7 + 2[(3\alpha + 3\beta - 2\gamma)x + (-5\alpha + 2\beta + \gamma)y - \gamma z]^2;$$

$$\bar{g}_7 = \bar{g}_3 = 0, \quad \bar{h}_7 = \bar{g}_4 = 0;$$

$$\bar{l}_7 = 0, \quad 7X^2 - 14XY - 35Y^2 + 4X + 32Y - 7 = 0.$$

$$f_8 = f_7(y, -x + y, z) = -4x^2 - 4y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 6xy$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ & -4 & 1 & 0 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 3 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_8 = -f_8 + 2[(5\alpha - 2\beta - \gamma)x + (-2\alpha + 5\beta - \gamma)y - \gamma z]^2;$$

$$\bar{h}_8 = \bar{g}_7 = 0, \quad \bar{g}_8 = \bar{n}_2 = 0;$$

$$\bar{l}_8 = 0, \quad 5X - 2Y - 1 = 0;$$

$$\bar{m}_8 = 0, \quad 2X - 5Y + 1 = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{h}_7 = \bar{l}_7 = 0$ .

Substitution  $(x - y + z, z, -y + z)$ .

$$f_9 = f_7(x - y + z, z, -y + z) = -2x^2 + 3y^2 - z^2 - 6yz + 2zx$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ & 3 & -3 & 0 \\ & & -1 & 3 \\ & & & -4 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_9 = -f_9 + 2[(3\alpha + 3\beta - 2\gamma)x + (-3\alpha - 3\beta + 3\gamma)y + (-2\alpha + 5\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\bar{h}_9 = \bar{l}_7 = 0; \quad \bar{l}_9 = \bar{k}_4 = 0; \quad \bar{m}_9 = \bar{m}_8 = 0;$$

$$\bar{g}_9 = 0, \quad X^2 + 2XY + 15Y^2 - 14Y + 3 = 0.$$

$$\bar{k}_9 = 0, \quad 3X + 3Y - 2 = 0.$$

Vu  $k_9 = 0$ ,  $h_9 = l_9$ ,  $f_9$  admet la symétrie  $(-x + z, y, z)$ , d'où, par transformation, pour  $f_4$  la symétrie suivante: posons

$$(x - y, x, x - y + z)^2 (y, -x + y, z) (x - y + z, z, -y + z) = T_9,$$

de sorte que l'on a

$$f_1 T_0 = f_0.$$

La symétrie de  $f_1$  est

$$T_0(-x+z, y, z) T_0^{-1}.$$

On trouve

$$(-2x-3y+2z, -3x-2y+2z, -6x-6y+5z)$$

d'axe

$$3X + 3Y - 2 = 0.$$

On a ainsi, avec  $X + Y = 0$  et  $X - Y = 0$ , une troisième droite qu'il est inutile de dépasser dans la réduction.

$$f_{10} = f_0(x-y+z, z, -y+z) = -2x^2 - y^2 - 4z^2 + 8yz - 2zx + 2xy \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ & -1 & 4 & -4 \\ & & -4 & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{10} = -f_{10} + 2[(3\alpha + 3\beta - 2\gamma)x + (-\alpha - 8\beta + 4\gamma)y + (-2\alpha + 5\beta - \gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{10} &= \bar{k}_4 = 0; & \bar{l}_{10} &= \bar{g}_4 = 0; \\ \bar{m}_{10} &= 0, & 10X^2 - 8XY + 10Y^2 - X - 8Y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

$$f_{11} = f_{10}(x-y+z, z, -y+z) = -2x^2 - 8y^2 + z^2 + 6yz - 4zx + 6xy \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 \\ & -8 & 3 & 2 \\ & & 1 & -2 \\ & & & -1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{11} = -f_{11} + 2[(3\alpha + 3\beta - 2\gamma)x + (-\alpha - 8\beta + 3\gamma)y + \gamma z]^2;$$

$$\bar{h}_{11} = \bar{g}_4 = 0; \quad \bar{l}_{11} = \bar{l}_7 = 0; \quad \bar{n}_{11} = \bar{g}_8 = 0;$$

$$f_{12} = f_{11}(x-y+z, z, -y+z) = -2x^2 - 5y^2 - z^2 - 2yz - 2zx + 8xy \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & -1 \\ & -5 & -1 & 2 \\ & & -1 & 3 \\ & & & -4 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{12} = -f_{12} + 2[(3\alpha + 3\beta - 2\gamma)x + (-3\alpha - 3\beta + \gamma)y + (2\alpha - 5\beta + 2\gamma)z]^2;$$

$$\bar{h}_{12} = \bar{l}_7 = 0, \quad \bar{l}_{12} = \bar{k}_4 = 0, \quad \bar{g}_{12} = \bar{m}_8 = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\overline{l}_{11} = \overline{n}_{11} = 0$ .

Substitution  $(z, y, -x + y + z)$ .

$$f_{13} = f_{11}(z, y, -x + y + z) = x^3 - y^3 - 5z^3 + 10yz + 2zx - 8xy$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & -4 & 1 & 2 \\ & -1 & 5 & 0 \\ & & -5 & -1 \\ & & & -1 \end{array} \right|,$$

$$\overline{f}_{13} = -f_{13} + 2[-\gamma x + (-\alpha - 8\beta + 4\gamma)y + (3\alpha + 3\beta - \gamma)z]^3;$$

$$\overline{l}_{13} = \overline{n}_{11} = 0, \quad \overline{n}_{13} = \overline{m}_s = 0, \quad \overline{k}_{13} = \overline{m}_{10} = 0.$$

$$f_{14} = f_{13}(z, y, -x + y + z) = -5x^3 + 4y^3 - 2z^3 - 6yz + 8zx$$

$$\left| \begin{array}{cccc} -5 & 0 & 4 & 1 \\ & 4 & -3 & -1 \\ & & -2 & 1 \\ & & & -1 \end{array} \right|,$$

$$\overline{f}_{14} = -f_{14} + 2[(-3x - 3\beta + \gamma)x + (2x - 5\beta + 3\gamma)y + (3\alpha + 3\beta - 2\gamma)z]^3;$$

$$\overline{l}_{14} = \overline{m}_s = 0; \quad \overline{n}_{14} = \overline{g}_s = 0;$$

$$\overline{g}_{14} = 0, \quad 3X^2 + 6XY + 45Y^2 - 10X - 38Y - 9 = 0;$$

$$\overline{m}_{14} = 0, \quad 13X^2 - 44XY + 55Y^2 + 20X - 50Y + 11 = 0;$$

$$\overline{k}_{14} = 0, \quad 3X + 3Y - 1 = 0.$$

$$f_{15} = f_{14}(z, y, -x + y + z) = -2x^3 - 4y^3 + z^3 - 2yz - 4zx + 10xy$$

$$\left| \begin{array}{cccc} -2 & 5 & -2 & -1 \\ & -4 & -1 & 0 \\ & & 1 & 2 \\ & & & -1 \end{array} \right|,$$

$$\overline{f}_{15} = -f_{15} + 2[(-3x - 3\beta + 2\gamma)x + (5x - 2\beta + \gamma)y - \gamma z]^3;$$

$$\overline{l}_{15} = \overline{l}_7 = 0; \quad \overline{n}_{15} = \overline{g}_s = 0; \quad \overline{g}_{15} = \overline{g}_s = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\overline{n}_{15} = \overline{g}_{15} = 0$ .

Substitution  $(x - y, x, -y + z)$ .

$$f_{16} = f_{15}(x - y, z, -y + z) = 4x^3 - 5y^3 + z^3 + 2yz - 6zx$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 4 & 0 & -3 & -1 \\ & -5 & 1 & 4 \\ & & 1 & 1 \\ & & & -4 \end{array} \right|,$$

$$\overline{f}_{16} = -f_{16} + 2[(2x - 5\beta + 3\gamma)x + (3x + 3\beta - \gamma)y - \gamma z]^3,$$

$$\bar{n}_{16} = \bar{g}_6 = 0; \quad \bar{g}_{16} = \bar{n}_4 = 0; \quad \bar{k}_{16} = \bar{k}_{14} = 0;$$

$$\bar{l}_{16} = 0, \quad 25X^2 - 62XY + 25Y^2 + 34X - 22Y + 5 = 0.$$

$$f_{17} = f_{16}(x - y, x, -y + z) = -x^2 - y^2 + z^2 + 4yz - 4zx - 4xy$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 & 5 \\ & -1 & 2 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & -5 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{17} = -f_{17} + 2[(5\alpha - 2\beta + 2\gamma)x + (-2\alpha + 5\beta - 2\gamma)y - \gamma z]^2;$$

$$\bar{n}_{17} = \bar{n}_1 = 0; \quad \bar{g}_{17} = \bar{g}_5 = 0;$$

$$\bar{k}_{17} = 0, \quad 15X^2 - 33XY + 15Y^2 + 14X - 14Y + 3 = 0.$$

$$f_{18} = f_{17}(x - y, x, -y + z) = -6x^2 - 4y^2 + z^2 + 2yz + 6xy$$

$$\begin{vmatrix} -6 & +3 & 0 & 3 \\ & -4 & -1 & 0 \\ & & -1 & -2 \\ & & & -1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{18} = -f_{18} + 2[(3\alpha + 3\beta)x + (-5\alpha + 2\beta - \gamma)y - \gamma z]^2;$$

$$\bar{n}_{18} = \bar{g}_5 = 0; \quad \bar{g}_{18} = \bar{g}_6 = 0; \quad \bar{h}_8 = \bar{h}_4 = 0;$$

$$\bar{m}_{18} = 0, \quad 5X - 2Y + 1 = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{k}_8 = \bar{g}_8$ .

Substitution  $(z, y, -x + z)$ .

$$f_{19} = f_8(z, y, -x + z) = -x^2 + 3y^2 - z^2 - 6yz + 6xy$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ & 3 & -3 & -3 \\ & & -1 & 4 \\ & & & 1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{19} = -f_{19} + 2[(2\alpha - 5\beta + 2\gamma)x + (-3\alpha - 3\beta + 3\gamma)y + (\alpha + 8\beta - 4\gamma)z]^2;$$

$$\bar{k}_{19} = \bar{g}_9 = 0; \quad \bar{n}_{19} = \bar{m}_{10} = 0; \quad \bar{l}_{19} = \bar{g}_8 = 0;$$

$$\bar{g}_{19} = 0, \quad 7X^2 - 14XY + 21Y^2 - 10X - 24Y + 7 = 0.$$

$$f_{20} = f_{19}(z, y, -x + z) = -x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2zx + 6xy$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ & 3 & 0 & -6 \\ & & -2 & 1 \\ & & & 8 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{20} = -f_{20} + 2[(-\alpha - 8\beta + 4\gamma)x + (-3\alpha - 3\beta + 3\gamma)y + (3\alpha + 3\beta - 2\gamma)z]^2,$$



$$\begin{aligned}\bar{k}_{20} &= \bar{g}_{19} = 0; & \bar{g}_{20} &= \bar{k}_9 = 0; \\ \bar{l} &= 0, & 17X^2 + 20XY + 143Y^2 - 18X - 144Y + 37 &= 0; \\ \bar{n} &= 0, & 11X^2 + 50XY + 53Y^2 - 34X - 62Y + 19 &= 0.\end{aligned}$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{n}_{19} = \bar{l}_{19} = 0$ .

Substitution  $(x + y - z, y, x)$ .

$$f_{21} = f_{19}(x + y - z, y, x) = -2x^3 + 8y^3 - z^3 - 4yz + 2zx - 2xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -2 & -1 & 1 & 2 \\ & 8 & -2 & -5 \\ & & -1 & 2 \\ & & & 1 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{21} = -f_{21} + 2[(3x + 3\beta - 2\gamma)x + (-\alpha - 8\beta + 5\gamma)y + (-2x + 5\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_{21} &= \bar{g}_2 = 0; & \bar{l}_{21} &= \bar{g}_4 = 0; & \bar{k}_{21} &= \bar{n}_{20} = 0; \\ \bar{g}_{21} &= 0, & 3X^2 - 15XY + 45Y^2 + 8X - 41Y + 9 &= 0.\end{aligned}$$

$$f_{22} = f_{21}(x + y - z, y, x) = -x^3 + 4y^3 - 2z^3 + 6yz + 2zx - 8xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & -4 & 1 & 4 \\ & 4 & 3 & -3 \\ & & -2 & -2 \\ & & & 1 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{22} = -f_{22} + 2[(x + 8\beta - 4\gamma)x + (2x - 5\beta + 3\gamma)y + (-3x - 3\beta + 2\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_{22} &= \bar{g}_4 = 0, & \bar{l}_{22} &= \bar{m}_{10} = 0; & \bar{g}_{22} &= \bar{g}_{14} = 0; \\ \bar{k}_{22} &= 0, & 8X^2 - 19XY + 50Y^2 + 5X - 44Y + 10 &= 0.\end{aligned}$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{g}_{22} = \bar{k}_{22} = 0$ .

Substitution  $(x - z, y, x)$ .

$$f_{23} = f_{22}(x - z, y, x) = -x^3 + 4y^3 - z^3 + 8yz - 2xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 2 \\ & 4 & 4 & -7 \\ & & -1 & -3 \\ & & & 8 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{23} = -f_{23} + 2[(-2x + 5\beta - 2\gamma)x + (2x - 5\beta + 3\gamma)y + (-\alpha - 8\beta + 4\gamma)z]^2;$$

$$\bar{g}_{23} = k_{22} = 0; \quad \bar{k}_{23} = \bar{m}_{14} = 0; \quad \bar{n}_{23} = \bar{l}_{20} = 0; \quad \bar{l}_{23} = g_{21} = 0;$$

$$f_{24} = f_{23}(x - z, y, x) = -2x^3 + 4y^3 - z^3 + 2yz + 2zx + 6xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -2 & 3 & 1 & 2 \\ & 4 & 1 & -8 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 7 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{24} = -f_{24} + 2[(-3x - 3\beta + 2\gamma)x + (2x - 5\beta + 3\gamma)y + (2x - 5\beta + 2\gamma)z]^2;$$

$$\overline{k}_{24} = \overline{g}_{14} = 0; \quad \overline{g}_{24} = \overline{m}_{14} = 0;$$

$$\overline{h}_{24} = 0, \quad 2X^2 + 32XY + 44Y^2 - 19X - 47Y + 13 = 0;$$

$$\overline{n}_{24} = 0, \quad 9X^2 - 66XY + 135Y^2 + 32X - 122Y + 27 = 0.$$

$$f_{25} = f_{24}(x-z, y, x) = -x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 6yz + 2zx + 8xy$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 & -4 \\ & 4 & -3 & -5 \\ & & -2 & 4 \\ & & & 5 \end{vmatrix},$$

$$\overline{f}_{25} = -f_{25} + 2[(-\alpha - 8\beta + 4\gamma)x + (2\alpha - 5\beta + 3\gamma)y + (3\alpha + 3\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\overline{k}_{25} = \overline{k}_{22} = 0; \quad \overline{g}_{25} = \overline{g}_{14} = 0;$$

$$\overline{l}_{25} = 0, \quad 6X^2 - 30XY + 90Y^2 + 11X - 80Y + 18 = 0,$$

$$f_{26} = f_{25}(x-z, y, x) = -x^2 + 4y^2 - z^2 - 8yz + 2xy$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ & 4 & -4 & -1 \\ & & -1 & 5 \\ & & & -4 \end{vmatrix},$$

$$\overline{f}_{26} = -f_{26} + 2[(2\alpha - 5\beta + 2\gamma)x + (2\alpha - 5\beta + 3\gamma)y + (\alpha + 8\beta - 4\gamma)z]^2;$$

$$\overline{k}_{26} = \overline{m}_{14} = 0; \quad \overline{g}_{26} = \overline{k}_{22} = 0; \quad \overline{m}_{26} = \overline{l}_{16} = 0;$$

$$\overline{h}_{26} = \overline{l}_{26} = 0, \quad 2X - 5Y + 2 = 0.$$

Vu  $\overline{h}_{26} = \overline{l}_{26} = 0$  sur une même frontière et  $h_{26} = l_{26} = 0$ , cette frontière est un axe de symétrie, et la forme  $f_{26}$  admet la symétrie  $(-x + 2y, y, z)$ . Désignons par  $T_{26}$  la substitution par où on passe de  $f_1$  à  $f_{26}$ . C'est :

$$= (x-y, x, x-y+z)^2 (y, -x+y, z) (x-y+z, z, -y+z) (z, y, -x+z) (x+y-z, y, x)^2 (x-z, y, x)^2$$

$$= (z, -x-y+2z, -2x-3y+4z).$$

Alors  $f_1$  admet la symétrie  $T_{26}(-x + 2y, y, z)T_{26}^{-1}$ , c'est-à-dire

$$(x, 4x - 9y + 4z, 8x - 20y + 9z).$$

Il sera inutile de dépasser  $2X - 5Y + 2 = 0$  dans la réduction.

*Réduites autour du point de croisement  $\overline{k}_{26} = \overline{m}_{26} = 0$ .*

*Substitution  $(x-z, x+y-z, x)$ .*

$$f_{27} = f_{26}(x+z, x+y-z, x) = -4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 10yz - 2zx + 2xy$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 4 \\ & 4 & -5 & 0 \\ & & 5 & 1 \\ & & & -5 \end{vmatrix},$$

$$\overline{f}_{27} = -f_{27} + 2[(5\alpha - 2\beta + \gamma)x + (2\alpha - 5\beta + 3\gamma)y + (-4\alpha + 10\beta - 5\gamma)z]^2;$$

$$\bar{h}_{27} = \bar{l}_{16} = 0; \quad \bar{m}_{27} = \bar{k}_{14} = 0;$$

$$\bar{h}_{27} = 0, \quad 45X^2 - 120XY + 45Y^2 + 58X - 40Y + 9 = 0.$$

$$f_{28} = f_{27}(x - z, x + y - z, x) = -5x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 10yz + 8zx \quad \begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 & 1 \\ & 4 & -5 & 1 \\ & & 2 & -1 \\ & & & -1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{28} = -f_{28} + 2[(3x + 3\beta - \gamma)x + (2x - 5\beta + 3\gamma)y + (-7x + 7\beta - 4\gamma)z]^2;$$

$$\bar{k}_{28} = \bar{k}_{14} = 0; \quad \bar{m}_{28} = \bar{m}_{14} = 0;$$

$$\bar{h}_{28} = 0, \quad 33X^2 - 102XY + 75Y^2 + 44X - 68Y + 15 = 0.$$

$$f_{29} = f_{28}(x - z, x + y - z, x) = -x^2 + 4y^2 - z^2 - 8yz + 4zx - 2xy \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ & 4 & -4 & 1 \\ & & -1 & +3 \\ & & & -4 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{29} = -f_{29} + 2[(-2x + 5\beta - 2\gamma)x + (2x - 5\beta + 3\gamma)y + (-5x + 2\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\bar{k}_{29} = \bar{m}_{14} = 0; \quad \bar{m}_{29} = \bar{l}_{16} = 0; \quad \bar{h}_{29} = \bar{k}_{17} = 0; \quad \bar{l}_{29} = \bar{m}_{18} = 0.$$

*Réduites autour du point de croisement  $\bar{h}_{29} = \bar{l}_{29} = 0$ .*

*Substitution  $(x - y + z, z, -y + z)$ .*

$$f_{30} = f_{29}(x - y + z, z, -y + z) = -x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 6yz - 2xz \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ & 2 & 3 & -4 \\ & & -4 & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{f}_{30} = -f_{30} + 2[(-2x + 5\beta - 2\gamma)x + (7x - 7\beta + 4\gamma)y + (-5x + 2\beta - \gamma)z]^2;$$

$$\bar{h}_{30} = \bar{m}_{18} = 0; \quad \bar{l}_{30} = \bar{g}_5 = 0; \quad \bar{k}_{30} = \bar{n}_{28} = 0;$$

$$\bar{g}_{30} = 0, \quad 55X^2 - 86XY + 13Y^2 + 54X - 30Y + 11 = 0.$$

$$f_{31} = f_{30}(x - y + z, z, -y + z) = -x^2 - 5y^2 + z^2 + 6yz - 4zx + 2xy \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ & -5 & 3 & 1 \\ & & 1 & -2 \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{f}_{31} = -f_{31} + 2[(-2x + 5\beta - 2\gamma)x + (7x - 7\beta + 3\gamma)y + \gamma z];$$

$$\begin{aligned}\bar{h}_{31} &= \bar{g}_5 = 0; & \bar{l}_{31} &= \bar{k}_{17} = 0; \\ \bar{m}_{31} &= 0, & 65X^2 - 94XY + 23Y^2 + 58X - 40Y + 13 &= 0; \\ \bar{k}_{31} &= 0, & 65Y^2 - 94XY + 23X^2 - 58Y + 40X + 13 &= 0; \\ \bar{n}_{31} &= 0, & 5X^2 - 4XY + 5Y^2 + 5X - 2Y + 1 &= 0.\end{aligned}$$

$$f_{32} = f_{31}(x-y+z, z, -y+z) = -x^3 - 4y^3 - z^3 - 4zx + 6xy \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ & -4 & 0 & 1 \\ & & -1 & 3 \\ & & & -4 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{32} = -f_{32} + 2[(-2\alpha + 5\beta - 2\gamma)x + (2\alpha - 5\beta + \gamma)y + (5\alpha - 2\beta + 2\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{h}_{32} &= \bar{k}_{17} = 0; & \bar{l}_{32} &= \bar{m}_{18} = 0; \\ \bar{g}_{32} &= 0, & 2X - 5Y + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{n}_{20} = \bar{l}_{20} = 0$ .

Substitution  $(x+y-z, y, x)$ .

$$f_{33} = f_{20}(x+y-z, y, x) = -x^3 + 8y^3 - z^3 - 4yz + 6xy \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ & 8 & -2 & -9 \\ & & -1 & 3 \\ & & & 8 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{33} = -f_{33} + 2[(2\alpha - 5\beta + 2\gamma)x + (-4\alpha - 11\beta + 7\gamma)y + (\alpha + 8\beta - 4\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_{33} &= \bar{l}_{20} = 0; & \bar{l}_{33} &= \bar{g}_{21} = 0; \\ \bar{g}_{33} &= 0, & 9X^2 + 39XY + 93Y^2 - 23X - 100Y + 27 &= 0; \\ \bar{k}_{33} &= 0, & X^2 + 16XY - 125Y^2 - 12X + 114Y - 25 &= 0.\end{aligned}$$

Le champ est symétrique par rapport à  $3X + 3Y - 2 = 0$ , et, en effet, on a :  
 $a=c, b=d, g=l, k=n$ .

$$f_{34} = f_{33}(x+y-z, y, x) = -2x^3 + 13y^3 - z^3 - 4yz + 2zx \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ & 13 & -2 & -11 \\ & & -1 & 2 \\ & & & 8 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{34} = -f_{34} + 2[(3\alpha + 3\beta - 2\gamma)x + (-2\alpha - 16\beta + 9\gamma)y + (-2\alpha + 5\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_{34} &= \bar{g}_{21} = 0; & \bar{l}_{34} &= \bar{n}_{20} = 0; & \bar{k}_{34} &= \bar{k}_9 = 0; \\ \bar{g}_{34} &= 0, & X^2 - 26XY + 85Y^2 + 14X - 77Y + 17 &= 0.\end{aligned}$$

$$f_{35} = f_{34}(x+y-z, y, x) = -x^3 + 11y^3 - 2z^3 + 4yz + 2zx - 6xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & -3 & 1 & 3 \\ & 11 & 2 & -10 \\ & & -2 & -1 \\ & & & -8 \end{array} \right|.$$

$$\bar{f}_{35} = -f_{35} + 2[(x + 8\beta - 4\gamma)x + (x - 13\beta + 7\gamma)y + (-3x - 3\beta + 2\gamma)z]^3;$$

$$\begin{aligned} \bar{n}_{35} &= \bar{n}_{20} = 0; & \bar{l}_{35} &= \bar{l}_{20} = 0; & \bar{g}_{35} &= \bar{m}_{14} = 0; \\ \bar{k}_{35} &= 0, & 13X^3 - 2XY + 223Y^3 - 6X - 216Y + 53 &= 0. \end{aligned}$$

*Réduites autour du point de croisement  $\bar{g}_{35} = \bar{k}_{35} = 0$ .*

*Substitution  $(x - z, y, x)$ .*

$$f_{36} = f_{35}(x - z, y, x) = -x^3 + 11y^3 - z^3 + 6yz - 2xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 2 \\ & 11 & 3 & -13 \\ & & -1 & -2 \\ & & & 13 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{36} = -f_{36} + 2[(-2x + 5\beta - 2\gamma)x + (x - 13\beta + 7\gamma)y + (-x - 8\beta + 4\gamma)z]^3;$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{36} &= \bar{k}_{35} = 0; & \bar{k}_{36} + \bar{n}_{24} &= 0; & \bar{l}_{36} &= \bar{g}_{34} = 0; \\ \bar{n}_{36} &= 0, & 7X^3 + 28XY + 133Y^3 - 17X - 136Y + 35 &= 0. \end{aligned}$$

$$f_{37} = f_{36}(x - z, y, x) = -2x^3 + 11y^3 - z^3 + 2yz + 2zx + 4xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -2 & 2 & 1 & -1 \\ & 11 & 1 & -14 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 16 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{37} = -f_{37} + 2[(-3x - 3\beta + 2\gamma)x + (x - 13\beta + 7\gamma)y + (2x - 5\beta + 2\gamma)z]^3;$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{37} &= \bar{n}_{24} = 0; & \bar{k}_{37} &= \bar{l}_{24} = 0; \\ \bar{l}_{37} &= 0, & 5X^3 + 122XY + 131Y^3 - 66X - 150Y + 43 &= 0 \\ \bar{n}_{37} &= 0, & 5X^3 - 88XY + 215Y^3 + 44X - 194Y + 43 &= 0. \end{aligned}$$

$$f_{38} = f_{37}(x - z, y, x) = -x^3 + 11y^3 - 2z^3 - 4yz + 2zx + 6xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & 3 & 1 & -3 \\ & 11 & -2 & -12 \\ & & -2 & 3 \\ & & & 12 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{38} = -f_{38} + 2[(-x - 8\beta + 4\gamma)x + (x - 13\beta + 7\gamma)y + (3x + 3\beta - 2\gamma)z]^3;$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_{38} &= \bar{l}_{24} = 0; & \bar{k}_{38} &= \bar{k}_{35} = 0; \\ \bar{l}_{38} &= 0, & 3X^2 - 8XY + 10Y^2 + 2X - 96Y + 23 &= 0.\end{aligned}$$

$$f_{39} = f_{39}(x - z, y, x) = -x^2 + 11y^2 - z^2 - 6yz + 2xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ & 11 & -3 & -9 \\ & & -1 & 4 \\ & & & 5 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{39} = -f_{39} + 2[(2x - 5\beta + 2\gamma)x + (x - 13\beta + 7\gamma)y + (x + 8\beta - 4\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_{39} &= \bar{k}_{35} = 0; & \bar{k}_{39} &= \bar{n}_{24} = 0; & \bar{n}_{39} &= \bar{l}_{25} = 0; \\ \bar{h}_{39} &= \bar{l}_{30} = \bar{h}_{26} = \bar{l}_{26} = 0.\end{aligned}$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{k}_{27} = \bar{h}_{27} = 0$ .

Substitution  $(x, z, -y + z)$ .

$$f_{40} = f_{40}(x, z, -y + z) = -4x^2 + 5y^2 - z^2 + 2xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -4 & 1 & 0 & 3 \\ & 5 & 0 & -6 \\ & & -1 & 1 \\ & & & 2 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{40} = -f_{40} + 2[(5x - 2\beta + \gamma)x + (4x - 10\beta + 5\gamma)y + (-2x + 5\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\bar{k}_{40} = \bar{h}_{27} = 0; \quad \bar{h}_{40} = \bar{m}_{18} = 0; \quad \bar{n}_{40} = \bar{n}_{28} = 0; \quad \bar{g}_{39} = \bar{h}_{40} = \bar{h}_{16} = \bar{l}_{26} = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{n}_{40} = \bar{h}_{40} = 0$ .

Substitution  $(y, -x + y, -x + z)$ .

$$f_{41} = f_{41}(y, -x + y, -x + z) = 4x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xz - 12xy \quad \left| \begin{array}{cccc} 4 & -6 & 1 & 1 \\ & 3 & 0 & 3 \\ & & -1 & 0 \\ & & & -4 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{41} = -f_{41} + 2[(-2x + 5\beta - 3\gamma)x + (9x - 12\beta + 6\gamma)y + (-2x + 5\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_{41} &= \bar{m}_{18} = 0; & \bar{h}_{41} &= \bar{m}_{14} = 0; & \bar{g}_{41} &= \bar{n}_{41} = \bar{h}_{26} = \bar{l}_{26} = 0; \\ \bar{m}_{41} &= 0, & 25X^2 - 48XY + 11Y^2 + 26X - 16Y + 5 &= 0.\end{aligned}$$

$$f_{42} = f_{42}(y, -x + y, -x + z) = 2x^2 - 5y^2 - z^2 + 2yz + 2zx + 4xy \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & -5 \\ & -5 & 1 & 2 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 4 \end{array} \right|.$$

$$\bar{f}_{42} = -f_{42} + 2[(-7x + 7\beta - 4\gamma)x + (7x - 7\beta + 3\gamma)y + (-2x + 5\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_{42} &= \bar{m}_{14} = 0; & \bar{h}_{42} &= \bar{n}_{28} = 0; \\ \bar{k}_{42} &= 0, & 44X^2 - 94XY + 44Y^2 + 49X - 49Y + 13 &= 0.\end{aligned}$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{h}_{43} = \bar{k}_{43} = 0$ .

Substitution  $(x, y - z, y)$ .

$$f_{43} = f_{43}(x, y - z, y) = 2x^2 - 4y^2 - 5z^2 + 8yz - 4zx + 6xy \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -2 & -3 \\ & -4 & 4 & -3 \\ & & -5 & 3 \\ & & & 3 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{43} = -f_{43} + 2[(-7\alpha + 7\beta - 4\gamma)x + (5\alpha - 2\beta + \gamma)y + (-7\alpha + 7\beta - 3\gamma)z]^2;$$

$$\bar{h}_{43} = \bar{k}_{43} = 0; \quad \bar{h}_{43} = \bar{g}_{30} = 0; \quad \bar{m}_{43} = \bar{m}_{41} = 0.$$

$$f_{44} = f_{44}(x, y - z, y) = 2x^2 - y^2 - 4z^2 - 6zx + 2xy \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -3 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & & -4 & 7 \\ & & & -7 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{44} = -f_{44} + 2[(-7\alpha + 7\beta - 4\gamma)x + (-2\alpha + 5\beta - 2\gamma)y + (-5\alpha + 2\beta - \gamma)z]^2;$$

$$\bar{k}_{44} = \bar{n}_{28} = 0; \quad \bar{h}_{44} = \bar{g}_{30} = 0; \quad \bar{g}_{44} = \bar{m}_{44} = \bar{h}_{46} = \bar{l}_{26} = 0;$$

$$\bar{l}_{44} = \bar{m}_{44} = 0, \quad 2X - 2Y + 1 = 0.$$

De  $l_{44} = m_{44} = 0$  et  $\bar{l}_{44}$  et  $\bar{m}_{44}$  nuls en même temps sur  $2X - 2Y + 1 = 0$  résulte que cette droite est axe de symétrie.  $f_{44}$  admet la symétrie  $(x - 2z, y - 2z, -z)$ . Pour calculer la symétrie correspondante pour  $f_1$  soit  $T_{44}$  la substitution qui fait passer de  $f_1$  à  $f_{44}$ ; c'est :

$$\begin{aligned} T_{44}(x - z, x + y - z, x)(x, z, -y + z)(y, -x + y, -x + z)^2(x, y - z, y)^2 \\ = (-x - z, x + y, 4x + 2y + z). \end{aligned}$$

Alors  $T_{44}(x - 2z, y - 2z, -z)T_{44}^{-1}$  est une symétrie de  $f_1$ ; c'est :

$$(-7x + 8y - 4z, 8x - 7y + 4z, 28x - 28y + 15z).$$

Il sera donc inutile de dépasser l'axe  $2X - 2Y + 1 = 0$ .

$$f_{45} = f_{45}(x, y - z, y) = 2x^2 - 5y^2 - z^2 + 2yz - 2zx - 4xy \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & -2 & -1 & 1 \\ & -5 & 1 & 6 \\ & & -1 & 1 \\ & & & -8 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{45} = -f_{45} + 2[(-7\alpha + 7\beta - 4\gamma)x + (-7\alpha + 7\beta - 3\gamma)y + (2\alpha - 5\beta + 2\gamma)z]^2;$$

$$\bar{h}_{45} = \bar{k}_{30} = 0; \quad \bar{l}_{45} = \bar{k}_{42} = 0; \quad \bar{g}_{45} = \bar{k}_{31} = 0.$$

$$f_{46} = f_{45}(x, y - z, y) = 2x^2 - 4y^2 - 5z^2 + 8yz + 4zx - 6xy \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & -3 & 2 & -1 \\ & -4 & 4 & 3 \\ & & -5 & -1 \\ & & & -1 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{46} = -f_{46} + 2[(-7\alpha + 7\beta - 4\gamma)x + (-5\alpha + 2\beta - \gamma)y + (7\alpha - 7\beta + 3\gamma)z]^2;$$

$$\bar{h}_{46} = \bar{k}_{45} = 0; \quad \bar{k}_{46} = \bar{g}_{30} = 0; \quad \bar{n}_{46} = \bar{m}_{31} = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{k}_{45} = \bar{g}_{45} = 0$ .

Substitution  $(z, y, -x + z)$ .

$$f_{47} = f_{45}(z, y, -x + z) = -x^2 - 5y^2 - z^2 - 2yz + 4zx - 2xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 2 & 0 \\ & -5 & -1 & 7 \\ & & -1 & 0 \\ & & & -7 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{47} = -f_{47} + 2[(-2\alpha + 5\beta - 2\gamma)x + (-7\alpha + 7\beta - 3\gamma)y + (-5\alpha + 2\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\bar{k}_{47} = \bar{k}_{34} = 0; \quad \bar{g}_{47} = \bar{m}_{34} = 0; \quad \bar{l}_{47} = \bar{n}_{47} = \bar{l}_{44} = \bar{m}_{44} = 0.$$

Réduites autour du point de croisement  $\bar{n}_{37} = \bar{l}_{37} = 0$ .

Substitution  $(x + y - z, y, x)$ .

$$f_{48} = f_{37}(x + y - z, y, x) = -x^2 + 13y^2 - 2z^2 + 2zx + 4xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 1 & -2 \\ & 13 & 0 & -15 \\ & & -2 & -1 \\ & & & 18 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{48} = -f_{48} + 2[(-\alpha - 8\beta + 4\gamma)x + (-2\alpha - 16\beta + 9\gamma)y + (3\alpha + 3\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\bar{n}_{48} = \bar{l}_{37} = 0, \quad \bar{k}_{48} = \bar{n}_{36} = 0, \quad \bar{g}_{48} = \bar{k}_9 = 0;$$

$$\bar{l}_{48} = 0, \quad 5X^2 + 17XY + 173Y^2 - 11X - 172Y + 43 = 0.$$

$$f_{49} = f_{48}(x + y - z, y, x) = x^2 + 16y^2 - z^2 - 2yz + 4xy \quad \left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & -1 \\ & 16 & -1 & -17 \\ & & -1 & 2 \\ & & & 16 \end{array} \right|,$$

$$\bar{f}_{49} = -f_{49} + 2[(2\alpha - 5\beta + 2\gamma)z + (-3\alpha - 24\beta + 13\gamma)y + (\alpha + 8\beta - 4\gamma)z]^2;$$



$$\begin{aligned}\bar{n}_{40} &= \bar{l}_{48} = 0; & \bar{l}_{49} &= \bar{n}_{37} = 0; \\ \bar{g}_{49} &= 0, & 11X^3 + 92XY + 389Y^3 - 50X - 400Y + 103 &= 0; \\ \bar{k}_{49} &= 0, & X^3 + 37XY - 125Y^3 - 20X + 113Y - 25 &= 0.\end{aligned}$$

$$f_{80} = f_{49}(x + y - z, y, x) = -2x^3 + 19y^3 - z^3 - 2yz + 2zx \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ & 19 & -1 & -18 \\ & & -1 & 1 \\ & & & 16 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{80} = -f_{80} + 2[(3\alpha + 3\beta - 2\gamma)x + (-\alpha - 29\beta + 15\gamma)y + (-2\alpha + 5\beta - 2\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_{80} &= \bar{n}_{37} = 0; & \bar{l}_{80} &= \bar{l}_{37} = 0; & \bar{k}_{37} &= \bar{k}_9 = 0; \\ \bar{g}_{80} &= 0, & X^3 - 110XY + 295Y^3 + 56X - 266Y + 59 &= 0.\end{aligned}$$

$$f_{84} = f_{80}(x + y - z, y, x) = -x^3 + 17y^3 - 2z^3 + 4yz + 2zx - 4xy \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ & 17 & 2 & -17 \\ & & -2 & -1 \\ & & & 16 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{84} = -f_{84} + 2[(\alpha + 8\beta - 4\gamma)z + (2\alpha - 26\beta + 13\gamma)y + (-3\alpha - 3\beta + 2\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_{84} &= \bar{l}_{37} = 0; & \bar{l}_{84} &= \bar{l}_{48} = 0; \\ \bar{k}_{84} &= 0, & 3X^3 + 6XY + 213Y^3 - 5X - 208Y + 51 &= 0.\end{aligned}$$

$$f_{88} = f_{84}(x + y - z, y, x) = -x^3 + 12y^3 - z^3 + 6yz \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ & 12 & 3 & -15 \\ & & -1 & -2 \\ & & & 16 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{88} = -f_{88} + 2[(-2\alpha + 5\beta - 2\gamma)x + (3\alpha - 18\beta + 9\gamma)y + (-\alpha - 8\beta + 4\gamma)z]^2;$$

$$\bar{n}_{88} = \bar{l}_{48} = 0; \quad \bar{l}_{88} = \bar{n}_{37} = 0; \quad \bar{g}_{88} = \bar{l}_{38} = 0; \quad \bar{h}_{88} = \bar{k}_{88} = \bar{h}_{26} = \bar{l}_{26} = 0.$$

*Réduites autour du point de croisement  $\bar{k}_{80} = \bar{g}_{80} = 0$ .*

*Substitution  $(z, y, -x + z)$ .*

$$f_{88} = f_{80}(z, y, -x + z) = -x^3 + 19y^3 - z^3 - 2yz + 2xy \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ & 19 & -1 & -19 \\ & & -1 & 2 \\ & & & 17 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{88} = -f_{88} + 2[(2\alpha - 5\beta + 2\gamma)x + (-\alpha - 29\beta + 15\gamma)y + (\alpha + 8\beta - 4\gamma)z]^2;$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{33} = \bar{g}_{30} = 0, \quad \bar{n}_{33} = \bar{k}_{31} = 0, \quad \bar{h}_{33} = \bar{l}_{33} = \bar{h}_{26} = \bar{l}_{26} = 0; \\ \bar{g}_{33} = 0, \quad 7X^3 + 70XY + 469Y^3 - 38X - 472Y + 119 = 0. \end{aligned}$$

$$f_{34} = f_{33}(z, y, -x + z) = -x^3 + 19y^3 - 2z^3 + 2zx + 2xy \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ & 19 & 0 & -20 \\ & & -2 & 1 \\ & & & 20 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{34} = -f_{34} + 2[(-\alpha - 8\beta + 4\gamma)x + (-\alpha - 20\beta + 15\gamma)y + (3\alpha + 3\beta - 2\gamma)z]^3;$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{34} = \bar{g}_{33} = 0; \quad \bar{g}_{34} = \bar{k}_9 = 0; \\ \bar{l}_{34} = 0, \quad 3X^3 + 48XY + 549Y^3 - 26X - 544Y + 135 = 0. \end{aligned}$$

Réduite suivante autour du point de fissure  $\bar{g}_{34} = \bar{l}_{34} = 0$ .

Substitution  $(x - y - z, x - y, -y)$ .

$$f_{35} = f_{34}(x - y - z, x - y, -y) = 20x^3 + 20y^3 - z^3 + 2yz - 42xy \quad \begin{vmatrix} 20 & -21 & 0 & 1 \\ & 20 & 1 & 0 \\ & & -1 & 0 \\ & & & -1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{f}_{35} = -f_{34} + 2[(-2\alpha - 37\beta + 19\gamma)x + (-\alpha + 34\beta - 17\gamma)y + (\alpha + 8\beta - 4\gamma)z]^3;$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{35} = \bar{l}_{34} = 0; \quad \bar{m}_{35} = \bar{n}_{35} = \bar{h}_{26} = \bar{l}_{26} = 0; \\ \bar{l}_{35} = 0, \quad 3X^3 + 132XY - 375Y^3 - 68X + 338Y - 75 = 0; \\ \bar{h}_{35} = \bar{n}_{35} = 0, \quad X + 8Y - 4 = 0. \end{aligned}$$

Tout l'intérieur du pentagone limité par les axes de symétrie est ainsi recouvert par les champs de réduction; la réduction continue est donc terminée, et l'on possède les substitutions génératrices du groupe reproductif, ce sont les cinq symétries :

$$\begin{aligned} S_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_3 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ -6 & -6 & 5 \end{vmatrix}, \\ \text{axe } X + Y = 0, \quad \text{axe } X - Y = 0, \quad \text{axe } 3X + 3Y - 2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -9 & 4 \\ 8 & -20 & 9 \end{vmatrix}, \quad S_5 = \begin{vmatrix} -7 & 8 & -4 \\ 8 & -7 & 4 \\ 28 & -28 & 15 \end{vmatrix}. \\ \text{axe } 2X - 5Y + 2 = 0, \quad \text{axe } 2X - 2Y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Sur la figure ont été ajoutés les polygones obtenus par réflexion sur deux des axes de symétrie.

Pour avoir le sous-groupe des substitutions *droites*, on formera le domaine fondamental avec deux polygones symétriques, par exemple OABCD et O'ABC'D'.

Les substitutions génératrices sont alors celles des points fixes elliptiques A, B formant chacun un cycle, C formant cycle avec C', D avec D' et O avec O'. Ce sont :

$$V_2 = S_2 S_3 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -6 & -6 & 5 \end{vmatrix}, \quad V_3 = S_3 S_4 = \begin{vmatrix} 2 & -13 & 6 \\ 5 & -22 & 10 \\ 10 & -46 & 21 \end{vmatrix},$$

$$V_4 = S_4 S_5 = \begin{vmatrix} -7 & 8 & -4 \\ 12 & -7 & 8 \\ 36 & -48 & 23 \end{vmatrix}, \quad V_5 = S_5 S_1 = \begin{vmatrix} -8 & 7 & -4 \\ 7 & -8 & 4 \\ 28 & -28 & 15 \end{vmatrix},$$

$$V_1 = S_1 S_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_4$  et  $V_5$  sont de période *deux*,  $V_3$  est de période *quatre*, tous les angles du polygone OABCD sont égaux à  $\frac{\pi}{2}$ , sauf B égal à  $\frac{\pi}{4}$  (en géométrie hyperbolique). Enfin, on a évidemment :

$$V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 = 1.$$


---

## TROISIÈME PARTIE.

Application de la méthode de Poincaré aux formes  $\varphi(x, y) - z^2$  <sup>(1)</sup>.

[31] Cherchons l'expression des substitutions d'un groupe fuchsien dérivé du groupe reproductif de la forme  $\varphi - z^2$ , en suivant une marche analogue à celle de Fricke pour le type  $px^2 + qy^2 - rz^2$ . On a :

$$af = (ax + ky)^2 + \Delta y^2 - az^2 = X^2 + \Delta Y^2 - aZ^2 = F(X, Y, Z) = af(x, y, z)T$$

en désignant par T la substitution

$$(T) \quad x = \frac{X - kY}{a}, \quad y = Y, \quad z = Z$$

ayant pour inverse

$$(T^{-1}) \quad X = ax + ky, \quad Y = y, \quad Z = z.$$

Toute substitution semblable entière  $s$  de  $f$  est

$$s = TST^{-1},$$

S désignant une substitution *rationnelle* correspondante, convenablement choisie, de F.

D'après Fricke et Klein (*Automorphen Functionen*, S. 534), l'expression générale de S est la suivante :

$$(S) \quad \begin{vmatrix} \alpha\delta + \beta\gamma, & \sqrt{\Delta}(x\gamma - \beta\delta), & \sqrt{a}(x\gamma + \beta\delta), \\ \frac{x\beta - \gamma\delta}{\sqrt{\Delta}}, & \frac{x^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2}{2}, & \frac{\sqrt{a}(x^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)}{2\sqrt{\Delta}}, \\ \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\sqrt{a}}, & \frac{\sqrt{\Delta}(x^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)}{2\sqrt{a}}, & \frac{x^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2}, \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

---

<sup>(1)</sup>  $\varphi$  désigne une forme définie positive  $(a, k, b)$  de discriminant  $ab - k^2 = \Delta$ .

Seulement, au lieu de nous borner, comme Fricke, aux valeurs *réelles* de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , — valeurs donnant la moitié seulement des substitutions *semblables* de  $f$ , — nous admettrons aussi les valeurs *imaginaires pures simultanées* de ces paramètres.

Le groupe automorphe cherché est donc celui des substitutions

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  choisis de manière à donner une  $s$  entière.

D'abord,  $S$  doit être rationnelle. L'examen des éléments de la diagonale principale du tableau montre que  $(x \pm \delta)^2$  et  $(\beta \pm \gamma)^2$  doivent être rationnels; nous poserons

$$(x + \delta)^2 = \frac{A_1}{A_2}, \quad (x - \delta)^2 = \frac{B_1}{B_2}, \quad (\beta - \gamma)^2 = \frac{C_1}{C_2}, \quad (\beta + \gamma)^2 = \frac{D_1}{D_2},$$

les  $A_i, B_i$ , etc., étant des entiers positifs ou négatifs, mais les quatre seconds membres étant toujours de même signe.

On en déduit

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} + \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \right) & \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \right) & \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} - \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \right) \end{pmatrix},$$

et l'on doit avoir :

$$(2) \quad \frac{1}{4} \left( \frac{A_1}{A_2} - \frac{B_1}{B_2} + \frac{C_1}{C_2} - \frac{D_1}{D_2} \right) = 1.$$

Soit  $\alpha_{ik}$  l'élément de la ligne  $i$  et de la colonne  $k$  de la substitution  $S$ , les éléments  $\alpha'_{ik}$  de  $s$  sont alors :

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_{11} - k\alpha_{21}, & \frac{k(\alpha_{11} - k\alpha_{21}) + \alpha_{12} - k\alpha_{22}}{a}, & \frac{\alpha_{13} - k\alpha_{23}}{a}, \\ \alpha_{21}, & k\alpha_{21} + \alpha_{22}, & \alpha_{23}, \\ \alpha_{31}, & k\alpha_{31} + \alpha_{32}, & \alpha_{33}. \end{cases}$$

Il faut exprimer que les  $\alpha'_{ik}$  sont entiers.

$a\alpha_{22} = a\alpha'_{22} - k\alpha'_{21}$  est entier, de même  $a\alpha_{33}$ , donc leur somme et leur différence;  $a(x^2 + \delta^2)$  et  $a(\beta^2 + \gamma^2)$ , c'est-à-dire  $\frac{a}{2} \left( \frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} \right)$  et  $\frac{a}{2} \left( \frac{C_1}{C_2} + \frac{D_1}{D_2} \right)$ , sont des entiers de même parité.

De même  $a\alpha_{11} = a\alpha'_{11} + k\alpha'_{21}$  doit être entier, c'est-à-dire que  $a(x\delta + \beta\gamma)$  doit être entier, donc aussi  $a\alpha\delta$  et  $a\beta\gamma$ , car  $\alpha\delta - \beta\gamma$  est égal à un entier (1). Ainsi

$$\frac{a}{4} \left( \frac{A_1}{A_2} - \frac{B_1}{B_2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{a}{4} \left( \frac{C_1}{C_2} - \frac{D_1}{D_2} \right)$$

sont entiers.

Par suite,  $a\frac{A_1}{A_2}$ ,  $a\frac{B_1}{B_2}$ ,  $a\frac{C_1}{C_2}$ ,  $a\frac{D_1}{D_2}$  le sont, ce qui permet de prendre tous les dénominateurs  $A_2$ ,  $B_2$ , ... égaux à  $a$ . On aura donc

$$(\alpha + \delta)^2 = \frac{A_1}{a}, \quad (\alpha - \delta)^2 = \frac{B_1}{a^2}, \quad \text{etc.}$$

Mais  $\alpha_{33} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{A_1}{a} + \frac{B_1}{a} + \frac{C_1}{a} + \frac{D_1}{a}\right)$  devant être entier, ceci joint à la condition (2) entraîne  $\frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{a} + \frac{C_1}{a}\right)$  et  $\frac{1}{2}\left(\frac{B_1}{a} + \frac{D_1}{a}\right)$  entiers. Puis, comme  $\alpha_{11} + \alpha_{22} = \alpha'_{11} + \alpha'_{22}$  est entier,  $\frac{1}{2}(\alpha + \delta)^2 - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{a} - \frac{C_1}{a}\right)$  l'est. Donc,  $\frac{A_1}{a}$  et  $\frac{C_1}{a}$  sont entiers, soient  $A'_1$  et  $C'_1$ .

Revenant au tableau des  $a_{ik}$ , les six éléments non encore considérés donnent les relations

$$(4) \quad \begin{cases} a(\alpha_{12} + \Delta\alpha_{21}) = \sqrt{\Delta B_1 D_1}, & \alpha_{12} - \Delta\alpha_{21} = -\sqrt{\Delta A'_1 C'_1}, \\ (\alpha_{13} + a\alpha_{31}) = \sqrt{A'_1 D_1}, & \alpha_{13} - a\alpha_{31} = -\sqrt{B_1 C'_1}, \\ \Delta\alpha_{23} + a\alpha_{32} = \sqrt{\Delta A'_1 B_1}, & \Delta\alpha_{23} - a\alpha_{32} = \sqrt{\Delta C'_1 D_1}, \end{cases}$$

Les premiers membres étant *rationnels* devront même être *entiers*, et les produits sous les radicaux devront être carrés parfaits. Posons

$$\Delta = \Delta' \Delta''^2$$

en désignant par  $\Delta''^2$  le plus grand diviseur carré de  $\Delta$ . Soient  $B^2$  et  $D^2$  les plus grands diviseurs carrés de  $B_1$  et  $D_1$ , et  $B_1 = B'B^2$ ,  $D_1 = D'D^2$ ; il faudra  $\Delta'B'D'$  carré, et comme les trois facteurs de ce produit sont sans facteur carré, il faut que l'on ait

$$B' = m\Delta_2, \quad D' = m\Delta_1, \quad \Delta_1\Delta_2 = \Delta'.$$

Soient de même  $A^2$  et  $C^2$  les plus grands diviseurs carrés de  $A'_1$  et  $C'_1$ , et  $A'_1 = A''A^2$ ,  $C'_1 = C''C^2$ . Il résulte des conditions (4) que  $\Delta'A''B'$ ,  $\Delta'A''C''$  et  $A''D'$  doivent être des carrés. Donc, il faut  $A'' = D'$ , car ni  $A''$  ni  $D'$  n'ont de facteurs carrés, et alors  $\Delta'A''C'' = \Delta'D'C'' = \Delta_1^2 m\Delta_2 C''$  entraîne  $C'' = m\Delta_2 = B'$ , par le même raisonnement. On a donc finalement

$$\begin{aligned} A_1 &= ma\Delta_1 A^2, & B_1 &= m\Delta_2 B^2, \\ C_1 &= ma\Delta_2 C^2, & D_1 &= m\Delta_1 D^2. \end{aligned}$$

d'où les expressions suivantes de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  :

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{m}\left(A\sqrt{\Delta_1} + B\sqrt{\frac{\Delta_2}{a}}\right), & \frac{1}{2}\sqrt{m}\left(C\sqrt{\Delta_2} + D\sqrt{\frac{\Delta_1}{a}}\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{m}\left(-C\sqrt{\Delta_2} + D\sqrt{\frac{\Delta_1}{a}}\right), & \frac{1}{2}\sqrt{m}\left(A\sqrt{\Delta_1} - B\sqrt{\frac{\Delta_2}{a}}\right) \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que ces expressions rendent  $S$ , et par suite  $s$ , rationnelles; il reste à exprimer que les coefficients de  $s$  sont entiers.

Les indéterminées  $m, A, B, C, D, \Delta_1, \Delta_2$  doivent vérifier les conditions

$$(6) \quad m(a\Delta_1 A^2 - \Delta_2 B^2 + a\Delta_2 C^2 - \Delta_1 D^2) = 4a$$

qui exprime  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , et

$$\Delta_1 \Delta_2 = \Delta'.$$

Ces indéterminées sont des entiers positifs ou négatifs, mais comme  $m, \Delta_1$  et  $\Delta_2$  ne figurent dans  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  que par les produits  $m\Delta_1, m\Delta_2$ , on ne restreindra pas la généralité en supposant  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  positifs,  $m$  pouvant être positif ou négatif; de plus,  $m$  est sans facteur carré<sup>(1)</sup>. Seules sont à conserver les solutions qui donnent des valeurs entières aux  $\alpha'_{ik}$ , dont voici les expressions :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'_{11} = m \frac{\Delta''(a\Delta_1 A^2 - \Delta_2 B^2 - a\Delta_2 C^2 + \Delta_1 D^2) - 2k(aAC + BD)}{4a\Delta''}, \\ \alpha'_{12} = m \frac{k\Delta''(\Delta_1 D^2 - \Delta_2 B^2) - k^2(aAC + BD) + \Delta(BD - aAC)}{2a^2\Delta''}, \\ \alpha'_{13} = m \frac{\Delta''(\Delta_1 AD - \Delta_2 BC) - k(AB + CD)}{2a\Delta''}, \\ \alpha'_{21} = m \frac{aAC + BD}{2\Delta''}, \\ \alpha'_{22} = m \frac{\Delta''(a\Delta_1 A^2 + \Delta_2 B^2 - a\Delta_2 C^2 - \Delta_1 D^2) + 2k(aAC + BD)}{4a\Delta''}, \\ \alpha'_{23} = m \frac{AB + CD}{2\Delta''}, \\ \alpha'_{31} = m \frac{\Delta_1 AD + \Delta_2 BC}{2}, \\ \alpha'_{32} = m \frac{\Delta' \Delta''(AB - CD) + k(\Delta_1 AD + \Delta_2 BC)}{2a}, \\ \alpha'_{33} = m \frac{a\Delta_1 A^2 + \Delta_2 B^2 + a\Delta_2 C^2 + \Delta_1 D^2}{4a}. \end{array} \right.$$

Les valeurs de  $m$  positives donnent des substitutions linéaires de  $\zeta$  à coefficients réels, c'est-à-dire des substitutions *fuchsiennes*, et correspondent à la partie du groupe reproductif de  $f$  seule considérée par Poincaré dans son Mémoire sur *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique*. Les valeurs de  $m$  négatives donnent des

---

<sup>(1)</sup> Il est utile d'observer aussi que  $m$  est premier à  $\Delta'$ , parce que  $B'$  et  $D'$  sont sans facteurs carrés.

substitutions linéaires automorphes à coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  purement imaginaires ou, ce qui revient au même, des substitutions

$$(8) \quad \zeta' = \frac{\alpha'\zeta + \beta'}{\gamma'\zeta + \delta'}$$

où l'on a :

$$(9) \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1.$$

Au point de vue géométrique, les  $m$  positifs répondent aux *déplacements* non enclidiens, les  $m$  négatifs aux *symétries, simples ou combinées avec un déplacement*.

[32] La discussion des congruences que doivent vérifier les indéterminées pour que la substitution soit entière est compliquée dans le cas d'un  $\Delta$  et d'un  $a$  quelconques.

En se bornant au cas où la forme  $\varphi$  est *primitive*, on peut, par un théorème de Dirichlet, la remplacer par une équivalente où  $a$  soit un nombre premier<sup>(1)</sup> ou le double d'un tel nombre<sup>(1)</sup>, selon que  $\varphi$  est proprement ou improprement primitive. On peut également, dans les mêmes conditions, faire  $a$  égal à  $pq$ <sup>(1)</sup> ou à  $2pq$ <sup>(1)</sup>,  $p$  et  $q$  étant premiers. Cette hypothèse est utile pour la question de l'équivalence des formes  $x^2 - \varphi$ ,  $x^2 - \varphi_1$ , où  $\varphi$  et  $\varphi_1$  sont de même genre. Je vais donc faire la discussion dans ce cas, qui comprend le premier pour  $q = 1$ , mais je me borne aux  $\varphi$  *proprement* primitives; je suppose donc  $a = pq$ .

[33] En premier lieu, je dis que  $m$  doit être premier à  $pq$ .

En effet, s'il en était autrement, supposons que  $p$  soit facteur commun à  $m$  et  $a$ . De l'équation (6) résulte alors l'impossibilité de la congruence

$$\Delta_2 B^2 + \Delta_1 D^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

car autrement le premier membre serait divisible par  $p^2$ , et le second seulement par  $p$ .

Or, pour que  $\alpha'_{12}$  (formules (7)) soit entier, il est nécessaire que soit vérifiée la congruence suivante :

$$k\Delta''(\Delta_1 D^2 - \Delta_2 B^2) - k^2 BD + \Delta BD \equiv 0 \pmod{p},$$

c'est-à-dire, comme on a

$$\begin{aligned} \Delta &= bpq - k^2 \equiv -k^2 \pmod{p}, \\ k\Delta''(\Delta_1 D^2 - \Delta_2 B^2) - 2k^2 BD &\equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

ou encore,  $k$  étant premier à  $p$ , puisque  $p$  l'est à  $\Delta$ ,

$$\Delta''(\Delta_1 D^2 - \Delta_2 B^2) \equiv 2kBD \pmod{p}.$$

(<sup>1</sup>) Tous ces nombres pouvant, de plus, être choisis premiers au discriminant.



En élevant au carré, on a

$$\Delta''^2(\Delta_1 D^2 - \Delta_2 B^2)^2 \equiv 4k^2 B^2 D^2 \equiv -4\Delta B^2 D^2 \equiv -4\Delta' \Delta''^2 B^2 D^2,$$

c'est-à-dire comme  $\Delta' = \Delta_1 \Delta_2$

$$(\Delta_1 D^2 + \Delta_2 B^2)^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

*congruence démontrée impossible.*

C. q. f. d.

Ainsi les seules valeurs possibles de  $m$ , qui doit diviser  $4a$  et ne pas contenir de facteur carré, sont  $\pm 1$  et  $\pm 2$ .

Les seuls facteurs des dénominateurs des expressions qui donnent les  $\alpha'_{ik}$  sont  $2, p, q$  et les facteurs premiers impairs de  $\Delta''$ , que nous désignerons par  $\omega_i$ . Pour discuter les congruences à vérifier suivant ces modules pour rendre les  $\alpha'_{ik}$  entiers, il n'est nécessaire de distinguer les cas de  $m = \pm 1$  et de  $m = \pm 2$  que par rapport au module 2.

*Modules  $p$  et  $q$ .* — De l'équation (6) résulte la congruence

$$(10) \quad \Delta_2 B^2 + \Delta_1 D^2 \equiv 0 \pmod{pq}.$$

Il y a quatre manières de la vérifier :

$$1^\circ B \equiv D \equiv 0 \pmod{pq};$$

$$2^\circ B \equiv D \equiv 0 \pmod{p}, \text{ et, en posant } B = pB', D = pD' \text{ (} B', D' \text{ premiers à } q \text{):}$$

$$(11) \quad \Delta_2 B'^2 + \Delta_1 D'^2 \equiv 0 \pmod{q};$$

$$3^\circ B = qB', D = qD' \text{ (} B', D' \text{ premiers à } p \text{):}$$

$$(12) \quad \Delta_2 B'^2 + \Delta_1 D'^2 \equiv 0 \pmod{p};$$

$$4^\circ B \text{ et } D \text{ premiers à } pq.$$

La congruence du second degré (10), ainsi que (11) et (12), sont possibles, car en les multipliant par  $\Delta_2 \Delta''^2$  — ce qui est permis,  $\Delta$  étant premier au module — elles reviennent à

$$(\Delta_2 \Delta'' B')^2 + \Delta D'^2 \equiv 0,$$

et pour qu'elle soit possible il faut et il suffit que  $-\Delta$  soit résidu quadratique du module, condition réalisée par  $\Delta = bpq - k^2$ .

*Avec la solution (1), tous les  $\alpha'_{ik}$  sont entiers  $\pmod{pq}$ .*

Passons à la solution (2) et cherchons d'abord à rendre  $\alpha'_{12}$  entier; le numérateur doit être divisible par  $a^2$ ; en exprimant qu'il l'est par  $a$ , on a, par un calcul précédent, la première condition

$$\Delta''(\Delta_1 D'^2 - \Delta_2 B'^2) \equiv 2kB'D' \pmod{q},$$

qui, combinée avec (11), donne

$$2kB'D' \equiv 2\Delta''\Delta_1 D'^2 \equiv -2\Delta''\Delta_2 B'^2 \pmod{q}.$$

Donc,  $B'$  et  $D'$  étant premiers à  $q$ ,

$$\Delta_2 \Delta'' B' + kD' \equiv 0 \pmod{q}.$$

On aura donc,  $B_1$  désignant un entier :

$$\Delta_2 \Delta'' B' + k D' = B_1 q.$$

Mais on a aussi, par  $\Delta = bpq - k^2$  :

$$\Delta_2 \Delta'' \Delta_1 \Delta'' + k k = bpq.$$

On déduit de ces deux équations

$$\Delta_2 \Delta'' (bp B' - \Delta_1 \Delta'' B_1) + k (bp D' - k B_1) = 0,$$

qui entraîne,  $k$  étant premier à  $\Delta_2 \Delta''$ ,

$$bp B' - \Delta_1 \Delta'' B_1 = k D_1, \quad bp D' - k B_1 = -\Delta_2 \Delta'' D_1,$$

d'où l'on tire :

$$B' = \frac{\Delta_1 \Delta'' B_1 + k D_1}{bp}, \quad D' = \frac{k B_1 - \Delta_2 \Delta'' D_1}{bp},$$

et les numérateurs peuvent être rendus simultanément divisibles par  $bp$ , car le déterminant de ces formes linéaires en  $B_1$  et  $D_1$  est  $bpq$ .

Je dis maintenant que, pour une solution  $B = p B'$ ,  $D = p D'$  de l'équation (6) ainsi déterminée,  $\alpha'_{12}$  a son numérateur divisible par  $a^2$ . D'abord, il en est ainsi de la partie  $-a(k^2 + \Delta)AC$ . Ensuite, on peut remplacer  $B$  et  $D$  par  $Bb$  et  $Db$ , car  $b$  peut être supposé premier à  $p$  et  $q$ . Puis,  $B$  et  $D$  étant divisibles par  $p$ , il suffit de vérifier la divisibilité par  $q^2$  de

$$k \Delta'' (\Delta_1 b^2 D^2 - \Delta_2 b^2 B^2) + (\Delta - k^2) b^2 B D,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} k \Delta'' \Delta_1 (k B_1 - \Delta_2 \Delta'' D_1)^2 - k \Delta'' \Delta_2 (\Delta_1 \Delta'' B_1 + k D_1)^2 + (\Delta - k^2) (\Delta_1 \Delta'' B_1 + k D_1) (k B_1 - \Delta_2 \Delta'' D_1) \\ = -4k^2 \Delta B_1 D_1 - (\Delta - k^2)^2 B_1 D_1 = -(\Delta + k^2)^2 B_1 D_1 = b^2 p^2 q^2 B_1 D_1. \end{aligned}$$

C. q. f. d.

En examinant alors tous les autres  $\alpha'_{ik}$ , on constate que tout facteur  $a$  d'un dénominateur se trouve aussi au numérateur.

La discussion est la même pour la solution 3°.

Pour la solution 4°, on trouve, par un calcul en tout semblable au précédent,

$$B = \frac{\Delta_1 \Delta'' B_1 + k D_1}{b}, \quad D = \frac{k B_1 - \Delta_2 \Delta'' D_1}{b},$$

et l'on constate la divisibilité des numérateurs des  $\alpha'_{ik}$  par les facteurs  $a$  ou  $a^2$  des dénominateurs.

*Modules  $\omega_i$  (facteurs premiers impairs de  $\Delta''$ . — Pour que le dénominateur  $\Delta''$  disparaisse dans les  $\alpha'_{ik}$ , il est nécessaire et suffisant que l'on ait :*

$$AB + CD \equiv 0, \quad pqAC + BD \equiv 0 \pmod{\Delta''}.$$

Soit  $\omega_i$  un facteur premier entrant dans  $\Delta''$  avec un exposant  $e_i$ . Les congruences précédentes sont linéaires et homogènes en  $A, D$  et en  $B, C$  et ont pour détermi-

nant  $B^2 - pqC^2$  dans le premier cas,  $D^2 - pqA^2$  dans le second. Ils ne peuvent être tous deux divisibles par  $\omega_i$ , car autrement, d'après l'équation (6),  $pq$  serait divisible par  $\omega_i$ . Donc, soit A et D, soit B et C, sont divisibles par  $\omega_i$  et même par  $\omega_i^{e_i}$ . De plus, si le facteur  $\omega_i$  divise  $\Delta_1$  ou  $\Delta_2$  (il ne peut les diviser tous deux), l'équation (6) montre que  $B^2 - pqC^2$  ou  $A^2 - pqD^2$  respectivement sont premiers à  $\omega_i$  et que par suite nécessairement A et D dans le premier cas, B et C dans le second doivent être divisibles par  $\omega_i^{e_i}$ .

*Module 2.* — Plusieurs cas sont à distinguer, suivant que  $m = \pm 1$  ou  $\pm 2$  et suivant la parité de  $\Delta'$  et  $\Delta''$ .

$$1^\circ \quad m = \pm 2.$$

I.  $\Delta$  impair ou impairement pair, donc  $\Delta''$  impair. — Les formules (7) montrent qu'il n'y a pas pour A, B, C, D d'autres conditions de parité que celles imposées par l'équation (6).

II.  $\Delta'$  impair,  $\Delta''$  pair. —  $\alpha'_{21}$ ,  $\alpha'_{23}$  et l'équation (6) montrent qu'il faut

$$A \equiv D, \quad B \equiv C \pmod{2},$$

et ces conditions sont suffisantes si  $\Delta''$  est impairement pair.

III.  $\Delta'$ ,  $\Delta''$ ,  $\Delta_1$  pairs. — En examinant  $\alpha'_{21}$ ,  $\alpha'_{23}$  et prenant l'équation (6) divisée par  $\pm 2$  comme congruence suivant le module 4, on trouve :

Si  $pq \equiv -1 \pmod{4}$ , les mêmes conditions que pour le sous-cas précédent;

Si  $pq \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $B \equiv C \equiv 0 \pmod{2}$ ,

et ces conditions sont suffisantes si  $\Delta''$  est impairement pair.

Même raisonnement si c'est  $\Delta_2$  qui est pair.

$$2^\circ \quad m = \pm 1.$$

I.  $\Delta$  impair. —  $\alpha'_{33}$  et (6) montrent que  $A \equiv C$ ,  $B \equiv D \pmod{2}$ , et  $\alpha'_{21}$  que  $A \equiv B$ , donc

$$A \equiv B \equiv C \equiv D \pmod{2},$$

et ces conditions sont suffisantes.

II.  $\Delta'$  pair,  $\Delta''$  impair,  $\Delta_1$  pair. — AB et CD doivent être pairs ( $\alpha'_{23}$  et  $\alpha'_{34}$ ), de même AC et BD ( $\alpha'_{31}$ ), donc B et C pairs et, d'après (6),  $A \equiv D \pmod{2}$ . Ces conditions sont suffisantes.

Même raisonnement pour  $\Delta_2$  pair.

III.  $\Delta'$  impair,  $\Delta''$  pair. — On voit, comme pour I, que d'abord il faut

$$A \equiv B \equiv C \equiv D \pmod{2}.$$

S'ils sont *pairs*, cela suffit dans le cas où  $\Delta''$  est impairement pair;

S'ils sont *impairs*,  $\alpha'_{23}$  et  $\alpha'_{21}$  montrent que ce cas ne peut se présenter que si  $pq \equiv -1 \pmod{4}$  et si

$$A + B + C + D \equiv 2 \pmod{4}.$$

IV.  $\Delta'$  et  $\Delta''$  *pairs*,  $\Delta_1$  *pair*. —  $\alpha'_{31}$  et (6) montrent que B et C doivent être pairs et A et D de même parité; s'ils sont impairs,  $\alpha'_{23}$  et  $\alpha'_{21}$  montrent que l'on doit avoir de plus  $B \equiv C \pmod{4}$ , et ces conditions suffisent pour  $\Delta''$  impairement pair.

[34] Le tableau ci-dessous résume la discussion :

Modules $p$ et $q$ :	Soit $B = pqB'$ , $D = pqD'$ .		
$(m = \pm 1 \text{ ou } \pm 2)$ .			
Conditions			
nécessaires et suffisantes.	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } B = pB', \quad D = pD', \quad B' = \frac{\Delta_1 \Delta'' B_1 + k D_1}{bp}, \quad D' = \frac{k B_1 - \Delta_2 \Delta'' D_1}{bp}. \\ \text{Soit } B = qB', \quad D = qD', \quad B' = \frac{\Delta_1 \Delta'' B_1 + k D_1}{bq}, \quad D' = \frac{k B_1 - \Delta_2 \Delta'' D_1}{bq}. \\ \text{Soit } B = \frac{\Delta_1 \Delta'' B_1 + k D_1}{b}, \quad D = \frac{k B_1 - \Delta_2 \Delta'' D_1}{b}. \end{array} \right.$		
Modules $\mathfrak{G}_i^{e_i}$ :	Soit $A \equiv D \equiv 0 \pmod{\mathfrak{G}_i^{e_i}}$ , soit $B \equiv C \equiv 0 \pmod{\mathfrak{G}_i^{e_i}}$ .		
$(\Delta'' = 2'' \Pi_i \mathfrak{G}_i^{e_i})$ ,	$\left( \begin{array}{l} \text{Les } 1^{\text{res}} \text{ congruences seules possibles si } \mathfrak{G}_i \text{ divise } \Delta_1; \\ \text{Les } 2^{\text{mes}} \text{ congruences seules possibles si } \mathfrak{G}_i \text{ divise } \Delta_2. \end{array} \right)$		
$(m = \pm 1 \text{ ou } \pm 2)$ .			
Module 2 :			
$(m = \pm 2)$ .			
$\Delta$ impair ou impairement pair.	Pas de conditions autres que l'équation (6).		
$\Delta'$ impair, $\Delta''$ pair.	$A \equiv D, B \equiv C \pmod{2}$ .	Suffisant si $\frac{\Delta''}{2}$ impair.	
$\Delta', \Delta''$ pairs	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 \text{ pair.} \\ \Delta_2 \text{ pair.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } pq \equiv 1 \pmod{4}, B, C \text{ pairs; si } pq \equiv -1 \pmod{4}, A - D, B - C \text{ pairs.} \\ \text{Si } pq \equiv 1 \pmod{4}, A, D \text{ pairs; si } pq \equiv -1 \pmod{4}, A - D, B - C \text{ pairs.} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suffisant} \\ \text{si } \frac{\Delta''}{2} \\ \text{impair.} \end{array} \right.$	
$(m = \pm 1)$ .			
$\Delta$ impair.	$A \equiv B \equiv C \equiv D \pmod{2}$ .	Nécessaire et suffisant.	
$\Delta$ impairement pair	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 \text{ pair.} \\ \Delta_2 \text{ pair.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A - D \equiv B \equiv C \equiv 0 \pmod{2}. \\ A \equiv D \equiv B - C \equiv 0 \pmod{2}. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right.$	
$\Delta'$ impair, $\Delta''$ pair.	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } A, B, C, D \text{ pairs, soit, si } pq \equiv 1 \pmod{4}, \text{ impairs, avec, dans ce} \\ \text{cas, } A + B + C + D \equiv 2 \pmod{4}. \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suffisant} \\ \text{si } \frac{\Delta''}{2} \\ \text{impair.} \end{array} \right.$
$\Delta', \Delta''$ pairs	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 \text{ pair.} \\ \Delta_2 \text{ pair.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } A, B, C, D \text{ pairs} \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } A, D \text{ impairs, } B, C \text{ pairs, } B \equiv C \pmod{4}. \\ \text{soit } B, C \text{ impairs, } A, D \text{ pairs, } A \equiv D \pmod{4}. \end{array} \right. \end{array} \right.$		

[35] Il reste à voir quel parti on peut tirer des formules (5) et des équations (6) du numéro 31 pour la détermination du groupe. Celle-ci dépend de celle des substitutions génératrices ou, ce qui revient au même, d'un domaine fondamental.

On ne possède pas de méthode donnant la solution complète des équations (6), que l'on peut écrire :

$$(1) \quad a\Delta_1 A^2 - \Delta_2 B^2 + a\Delta_2 C^2 - \Delta_1 D^2 = \frac{4a}{m}.$$

Mais on peut la ramener à celle des équations plus simples du type *principal*. Posons

$$\begin{aligned} D + A\sqrt{a} &= t, & B + C\sqrt{a} &= u, & \frac{4a}{m} &= -n \\ D - A\sqrt{a} &= t_0, & B - C\sqrt{a} &= u_0, \end{aligned}$$

en observant que  $a$  n'est pas un carré, autrement la forme  $f$  serait annulable. L'équation s'écrit alors :

$$(2) \quad \Delta_1 t t_0 + \Delta_2 u u_0 = n.$$

Il suffit de chercher les solutions où  $n$  est premier à l'entier quadratique  $u$ , et l'on peut faire le changement d'inconnues

$$t = su + nv, \quad t_0 = s_0 u_0 + n v_0,$$

où  $s, v$  sont de même forme que  $t, u$  (en supposant, pour simplifier,  $a$  tel que  $(1, \sqrt{a})$  soit une base du corps  $\sqrt{a}$ ). (2) s'écrit ainsi :

$$(3) \quad \frac{\Delta_1 s s_0 + \Delta_2 u u_0}{n} + \Delta_1 (s u v_0 + s_0 u_0 v) + \Delta_1 n v v_0 = 1,$$

c'est-à-dire une de ces équations d'Hermite, à indéterminées conjuguées, étudiées par M. Picard, puis par M. Bianchi; seulement le corps quadratique correspondant est réel. Sa résolution se ramène, dès qu'on connaît une solution particulière, à celle d'une équation du type *principal* :

$$(4) \quad x x_0 + \Delta y y_0 = 1 \quad (\Delta = \Delta_1 \Delta_2).$$

Il suffit en effet de poser, en écrivant, pour abréger, l'équation

$$\begin{aligned} A u u_0 + b u v_0 + b_0 u_0 v + C v v_0 &= 1, \\ u &= u'x - (b_0 u'_0 + C v'_0)y, & v &= v'x + (A u'_0 + b v'_0)y, \end{aligned}$$

$u', v'$  désignant une solution particulière de (3).

On montre alors, comme M. Picard, dans son Mémoire de 1884, dans les *Annales de l'École Normale*, que la solution de (4) revient à la détermination — évidemment compliquée — du groupe reproductif de la forme  $x x_0 + \Delta y y_0$  (avec des substitutions entières dans le corps  $\sqrt{a}$ ).

En désignant par

$$x = \xi_1 + \xi_2 \sqrt{a}, \quad y = \eta_1 + \eta_2 \sqrt{a}$$

une solution quelconque de (4), et par  $A', B', C', D'$  les valeurs de  $A, B, C, D$  correspondant à la solution particulière  $u', v'$ , on a, pour la solution générale de (1), les formules suivantes :

$$\begin{aligned} A &= A' \xi_1 + D' \xi_2 + \Delta_2(C' \eta_1 - B' \eta_2), \\ B &= B' \xi_1 + a C' \xi_2 + \Delta_1(D' \eta_1 - a A' \eta_2), \\ C &= C' \xi_1 + B' \xi_2 - \Delta_1(A' \eta_1 - D' \eta_2), \\ D &= D' \xi_1 + a A' \xi_2 - \Delta_2(B' \eta_1 - a C' \eta_2). \end{aligned}$$

[36] Pour la détermination du polygone fondamental, on dispose, lorsque le groupe fuchsien peut être étendu par la symétrie  $\zeta' = -\zeta_0$ , de l'élégante méthode de Klein. Dans le cas contraire, je montrerai que la méthode du rayonnement, imaginée par Fricke, convient très bien aux groupes qui nous occupent. Pour pouvoir ramener, dans un cas comme dans l'autre, les calculs et les constructions du plan analytique à l'intérieur de l'ellipse, où ils sont beaucoup plus simples pour les deux méthodes, je démontrerai, relativement aux symétries, la proposition suivante :

[37] *Si le groupe reproductif droit d'une forme est isomorphe à un groupe fuchsien extensible par la symétrie  $\zeta' = -\zeta_0$ , le groupe reproductif total est un groupe de symétries et réciproquement; il y a correspondance entre les axes et les circonférences de symétrie.*

En effet, la correspondance biunivoque entre le plan analytique et l'intérieur de l'ellipse  $f(x, y, z) = 0$  résulte des formules

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \frac{\xi^2 + \eta^2}{X} = \frac{\xi}{Y} = \frac{1}{Z},$$

$X, Y, Z$  désignant les premiers membres des équations de deux tangentes et de la corde de contact, par où l'équation de la conique est mise sous la forme  $XZ - Y^2 = 0$ .

Et si la division du plan analytique en domaines fondamentaux est symétrique par rapport à l'axe imaginaire, ce qui équivaut à la permutabilité du groupe à la symétrie  $\zeta' = -\zeta_0$ , la division de l'ellipse est symétrique (c'est-à-dire harmoniquement homologique) par rapport à  $Y = 0$ . Cette droite est donc l'axe d'une symétrie du groupe reproductif de la forme. D'ailleurs, il y a évidemment réciprocité.

[38] Il résulte de là que si l'on ne choisit pas pour  $Y$  un axe de symétrie, le groupe fuchsien associé, par les formules ci-dessus, au groupe reproductif, n'admet pas la symétrie  $\zeta' = -\zeta_0$ . Mais cela n'empêche pas, comme on va le voir, d'employer, pour obtenir le domaine fondamental, un procédé analogue basé sur les symétries du groupe reproductif.

Ainsi que je l'ai fait déjà remarquer, on obtient les substitutions semblables de deuxième espèce — celles qui ne répondent pas à des déplacements — en mettant, dans les formules de Poincaré,  $\alpha i, \beta i, \gamma i, \delta i$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  réels,  $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ ), au lieu de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Soient  $S$  et  $S'$  les substitutions de première et de deuxième espèce, elles répondent respectivement à des substitutions :

$$(\Sigma) \quad \zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ réels}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

$$(\Sigma') \quad \zeta' = \frac{\alpha'i\zeta + \beta'i}{\gamma'i\zeta + \delta'i} = \frac{\alpha'\zeta + \beta'}{\gamma'\zeta + \delta'}, \quad (\alpha', \beta', \gamma', \delta' \text{ réels}, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1).$$

Soit  $P$  le domaine fondamental, dans la conique, du groupe reproductif total  $G_1$  des  $S$  et des  $S'$ , et  $\Pi$  son homologue dans le demi-plan analytique imaginaire positif : l'ensemble de  $\Pi$  et de son conjugué imaginaire  $\Pi_0$  forme, dans le plan analytique entier, un domaine fondamental du groupe  $\Gamma_1$  des  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Soit  $P'$  le transformé  $PS'$  de  $P$  par une  $S'$  quelconque et soit  $\Pi' = \Pi\Sigma'$  ( $\Sigma'$  homologue de  $S'$ ) : je dis que l'ensemble de  $\Pi$  et  $\Pi'_0$  forme dans le demi-plan supérieur un domaine fondamental du groupe  $\Gamma$  des  $\Sigma$ . En effet, d'une part, deux points de ce domaine ne peuvent être équivalents par une substitution  $\Sigma$  ; d'autre part, tout point du demi-plan est équivalent à un point du domaine, car tout le demi-plan est recouvert sans plis ni trous par l'ensemble des polygones  $\Pi_i, \Pi'_{0i}$  transformés de  $\Pi$  par les  $\Sigma$  et de  $\Pi_0$  par les  $\Sigma'$ , puisque les  $P, P'$  recouvrent ainsi la conique : si le point en question tombe dans un  $\Pi_i$ , l'équivalence a lieu, car  $\Pi_i = \Pi\Sigma_i$ , et, si c'est dans un  $\Pi'_{0i}$ , comme on a  $\Pi'_{0i} = \Pi_0\Sigma'_i = \Pi_0\Sigma'^{-1}\Sigma'_i$  et que le produit de deux  $\Sigma'$  est une  $\Sigma$ , elle est encore établie.

Supposons maintenant  $P$  limité par des axes de symétrie, les symétries correspondantes sont des  $S'$  et elles ont pour homologues des  $\Sigma'$  qui laissent invariable une circonférence orthogonale à l'axe réel — ceci comme toute  $\Sigma'$ , — mais de manière à *changer chacun de ses points en l'imaginaire conjugué*, parce que la symétrie  $S'$  laisse fixe point par point la droite correspondante. Son équation sera :

$$\zeta_0 = \frac{\alpha'\zeta + \beta'}{\gamma'\zeta + \delta'}, \quad (\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1),$$

De là un procédé en tout analogue à celui de Klein.

Observons qu'il résulte des considérations précédentes que le domaine fondamental d'un groupe à symétries est toujours limité par un nombre *fini* de circonférences de symétrie, car, en vertu de la réduction continue, le domaine n'a qu'un nombre *fini* de côtés. Dans leur Traité des fonctions automorphes (p. 540), MM. Fricke et Klein indiquent la possibilité du contraire; mais ils n'ont pas vu ou du moins songé à employer la correspondance entre leurs circonférences de symétrie et les axes de symétrie dans la conique (cela ressort de la page 541), correspondance qui rend impossible le polygone limité par une infinité de circonférences de symétrie.

[39] Comme application, nous allons former le polygone fondamental des deux formes

$$\begin{aligned} z^2 - 2x^2 + 2xy - 3y^2, \\ z^2 - 5x^2 + 4xy - 5y^2, \end{aligned}$$

déjà traitées par la réduction continue. En appliquant nos formules générales, on est conduit pour la première, mais non pour la seconde, à un groupe fuchsien permutable à la symétrie de Klein; en effet, la transformation T les change respectivement en

$$\begin{aligned} (z\sqrt{2} + y\sqrt{5})(z\sqrt{2} - y\sqrt{5}) - (2x - y)^2, \\ (z\sqrt{5} + y\sqrt{21})(z\sqrt{5} - y\sqrt{21}) - (5x - 2y)^2, \end{aligned}$$

et  $2x - y = 0$  est bien un axe de symétrie dans la première conique, tandis que  $5x - 2y = 0$  ne l'est pas dans la seconde.

[40] *Forme*  $z^2 - 2x^2 + 2xy - 3y^2$  <sup>(1)</sup> ( $a = 2$ ,  $\Delta = 5$ ). — Les équations (6) sont ici

$$(1) \quad m(2\Delta_1 A^2 - \Delta_2 B^2 + 2\Delta_3 C^2 - \Delta_4 D^2) = 8.$$

Pour le groupe fuchsien,  $m = 1$  ou  $2$  seulement. Les congruences nécessaires pour rendre les  $\alpha'_{ik}$  entiers se réduisent à

$$\begin{aligned} B = 2B', \quad D = 2D', \quad A \equiv C \equiv B' - D' \pmod{2} & \quad \text{pour } m = 1, \\ A - C \equiv B \equiv D \pmod{2} & \quad \text{pour } m = 2, \end{aligned}$$

conditions toujours remplies par les solutions des équations (1).

Il y a quatre types de substitutions fuchiennes :

(1) Nos formules ont été établies pour la forme changée de signe, ce qui ne change pas les résultats.



1<sup>er</sup> type ( $m=1$ ,  $\Delta_1=1$ ,  $\Delta_2=5$ ).

$$2A^2 - 5B^2 + 10C^2 - D^2 = 8,$$

$$(\alpha, \delta) = \frac{1}{2} \left( A \pm B \sqrt{\frac{5}{2}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \pm C \sqrt{5} + \frac{D}{\sqrt{2}} \right).$$

2<sup>e</sup> type ( $m=1$ ,  $\Delta_1=5$ ,  $\Delta_2=1$ ).

$$10A^2 - B^2 + 2C^2 - 5D^2 = 8,$$

$$(\alpha, \delta) = \frac{1}{2} \left( A \sqrt{5} \pm \frac{B}{\sqrt{2}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \pm C + D \sqrt{\frac{5}{2}} \right).$$

3<sup>e</sup> type ( $m=2$ ,  $\Delta_1=1$ ,  $\Delta_2=5$ ).

$$2A^2 - 5B^2 + 10C^2 - D^2 = 4,$$

$$(\alpha, \delta) = \frac{1}{2} (A \sqrt{2} \pm B \sqrt{5}), \quad (\beta, \gamma) = \frac{1}{2} (\pm C \sqrt{10} + D).$$

4<sup>e</sup> type ( $m=2$ ,  $\Delta_1=5$ ,  $\Delta_2=1$ ).

$$10A^2 - B^2 + 2C^2 - 5D^2 = 4.$$

$$(\alpha, \delta) = \frac{1}{2} (A \sqrt{10} \pm B), \quad (\beta, \gamma) = \frac{1}{2} (\pm C \sqrt{2} + D \sqrt{5}).$$

Les *circonférences de symétrie* ont pour équation générale

$$\gamma(\xi^2 + \eta^2) + 2\alpha\xi + \beta = 0,$$

avec la condition  $\alpha = \delta$ , c'est-à-dire  $B = 0$ , donc respectivement pour les quatre types :

$$2A^2 + 10C^2 - D^2 = 8,$$

$$10A^2 + 2C^2 - 5D^2 = 8,$$

$$2A^2 + 10C^2 - D^2 = 4,$$

$$10A^2 + 2C^2 - 5D^2 = 4.$$

Mais la dernière équation est impossible, car on n'a pas  $C^2 \equiv 2 \pmod{5}$ .

Les *substitutions elliptiques* sont celles où l'on a  $(\alpha + \delta)^2 < 4$ ; donc  $A = 0$  ou  $1$  pour les types 1 et 3,  $A = 0$  pour les deux autres;  $A = 0$  correspond à des substitutions de période *deux* (l'invariant  $(\alpha + \delta)^2 - 1$  étant alors  $-1$ );  $A = 1$  à des substitutions de période *trois* pour le type 1,  $[(\alpha + \delta)^2 - 1 = 0]$ ; de période *quatre* pour le type 3,  $[(\alpha + \delta)^2 - 1 = 1]$ , mais il n'y a pas de substitution de ce type, l'équation

étant impossible pour  $A = 1$ ; de même, dans le type 1,  $A = 0$  est impossible. Il n'y aura donc que des substitutions de période *deux* ( $A = 0$ , types 2, 3, 4) et de période *trois* ( $A = 1$ , type 1); ce qu'on déduirait aussi du n° 5.

L'axe  $\xi = 0$  est circonférence du premier type ( $A = \pm 2$ ,  $C = D = 0$ ) et le point  $i$  ( $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$ ) point fixe du type 2 ( $C = -2$  et  $A = B = D = 0$ ), d'après l'expression des points fixes

$$(2) \quad \zeta = \frac{\alpha - \delta \pm i \sqrt{4 - (\alpha + \delta)^2}}{2\gamma}.$$

On va chercher les circonférences passant par  $i$ , puis sur l'une d'elles les points fixes les plus voisins de  $i$  et ainsi de suite, mais les calculs seront plus clairs en géométrie hyperbolique. (Voir planche I.)

Les points fixes de substitutions elliptiques de période *deux* et les pôles des axes de symétrie ont leurs coordonnées données par

$$(3) \quad f(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2 = n,$$

$n$  diviseur de  $2\Delta = 10$ , positif pour les premiers, négatif pour les seconds. Un axe a pour équation  $\alpha f'_\alpha + \beta f'_\beta + \gamma f'_\gamma = 0$ . Quant aux points fixes de période *trois*, on déduit de la formule (2) et des formules de correspondance entre la conique et le plan analytique, c'est-à-dire

$$(4) \quad \frac{z \sqrt{2} + y \sqrt{5}}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{2x - y}{\xi} = \frac{z \sqrt{2} - y \sqrt{5}}{1},$$

les relations suivantes entre B, C, D et les coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\frac{2x - \beta}{-B\sqrt{5}} = \frac{\beta \sqrt{5}}{D} = \frac{\gamma}{C\sqrt{5}};$$

d'où, par l'équation

$$-5B^2 + 10C^2 - D^2 = 6$$

et le fait que  $\alpha, \beta, \gamma$  sont entiers et peuvent être supposés premiers entre eux,

$$2x - \beta = -5B, \quad \beta = D, \quad \gamma = 5C;$$

de sorte que l'équation aux points fixes de substitution de période *trois* est:

$$(5) \quad -(2x - \beta)^2 + 2\gamma^2 - 5\beta^2 = 30.$$

*Axes de symétrie passant par O :*

$\gamma = 0$ , puisque O est le centre;

$n = -1$  est impossible;

$n = -2$  donne  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \pm 1$ , et l'axe  $2x - \gamma = 0$ ;

$n = -5$  est impossible;

$n = -10$  donne  $\beta = 2$ ,  $\alpha = +1$  et l'axe  $\gamma = 0$ .

On aurait pu se dispenser du calcul, car O étant point fixe de période *deux* sur un axe de symétrie, la droite conjuguée passant par ce point doit en être un aussi.

*Points fixes sur  $\gamma = 0$ .* — D'abord ceux de période *deux* :

$$\gamma^2 - 2x^2 = n,$$

$n = 1$  ou  $2$  seulement;  $5$  ou  $10$  sont impossibles, car  $\left(\frac{2}{5}\right) = -1$ . Le point le plus rapproché de O ( $x=0, \gamma=1$ ) pour  $n=1$  est  $\alpha=2, \gamma=3$ ; pour  $n=2$ , c'est  $\alpha=1, \gamma=2$ , ce dernier est le plus près.

Pour la période *trois*, (5) se réduit, avec  $\beta=0$ , à

$$-2x^2 + \gamma^2 = 15,$$

impossible à cause de  $\left(\frac{2}{5}\right) = 1$ .

*Axes par  $\alpha=1, \beta=0, \gamma=2$ .* — Leurs pôles sont sur la polaire de ce point :

$$2\alpha - \beta - 2\gamma = 0;$$

$\beta$  éliminé, (3) devient

$$10(x - \gamma)^2 + \gamma^2 = -n,$$

d'où  $n = 1$  ou  $10$  seulement.  $n = 10$  redonne  $\gamma = 0, \alpha = 1$ ;  $n = 1$  donne  $\alpha = +\gamma = 1, \beta = 0$ , et l'axe

$$2x - \gamma - z = 0.$$

*Points fixes sur  $2x - \gamma - z = 0$ .* — Pour ceux de période *deux*, (3) devient :

$$10x^2 - 10x\gamma + 2\gamma^2 = -n.$$

Il faut  $n = 2$  ou  $10$ . En prenant seulement les points au-dessus de Ox, les plus rapprochés de  $\alpha=1, \beta=0, \gamma=2$  sont :

pour  $n = 2$ ,  $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 3$ ;

pour  $n = 10$ ,  $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 5$ , qui est le plus rapproché.

Comme  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 2$  est solution pour  $n = 2$  et que l'équation était soluble pour  $n = 10$ , il était inutile de calculer d'autres solutions pour  $n = 2$ ; elles devaient forcément donner des points plus éloignés. C'est évident par l'équivalence ou la notion de classe de points fixes.

Pour la période *trois*, avec  $2x - \beta = \gamma$ , (5) se réduit à

$$\gamma^2 - 5\beta^2 = 30,$$

impossible parce que  $\left(\frac{5}{3}\right) = -1$ .

*Axes par*  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 5$ . — Leurs pôles sont sur la polaire de ce point :

$$5x - 5\gamma = 0.$$

(3) devient

$$\gamma^2 - 2\beta\gamma + 3\beta^2 = -n$$

ou

$$(\gamma - \beta)^2 + 2\beta^2 = -n;$$

$n$  est soit  $-1$ , soit  $-2$ . Avec  $-1$ , on retrouve l'axe  $2x - y - 1 = 0$ ; avec  $-2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 1$ , qui donne l'axe

$$x + 2y - z = 0.$$

*Points fixes sur*  $x + 2y - z = 0$ . — (3) devient, par élimination de  $\gamma$ ,

$$(\beta + 3\alpha)^2 - 10\alpha^2 = n;$$

$n = 1$  et 10 seuls sont possibles. Pour  $n = 10$ , on retrouve  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 5$ ; il est inutile de calculer d'autre solution. Pour  $n = 1$ , la plus petite solution est  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 2$ , qui est au delà de l'axe  $2x - y = 0$ , et la solution suivante du côté des  $\frac{\alpha}{\gamma}$  positifs est  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 8$ ; elle est au delà du point fixe  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 5$ , de l'autre côté de l'axe  $2x - y - z = 0$ . Aucune n'est à conserver, ni les suivantes *a fortiori*.

(5) devient

$$(\beta + 3\alpha)^2 - 10\alpha^2 = 15,$$

dont la solution fondamentale est  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ , par suite  $\gamma = 5$ . C'est le point d'intersection de  $x + 2y - z = 0$  avec  $2x - y = 0$ .

Le domaine fondamental est ainsi obtenu. En revenant au plan analytique à l'aide des formules (4), on obtient les équations des circonférences de symétrie :

$$\begin{aligned}\xi &= 0, \\ \xi^2 + \eta^2 &= 1, \\ \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\sqrt{2} + 1 &= 0, \\ (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\xi^2 + \eta^2) + 2\xi - \sqrt{5} - \sqrt{2} &= 0.\end{aligned}$$

Enfin, les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des substitutions elliptiques se déduisent aisément des coordonnées des points fixes dans la conique, à l'aide de (2) et (4). On trouve :

		A	B	C	D
$V_4 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$	du type 2... Point fixe O.	0	0	-2	0
$V_1 = \begin{pmatrix} 1, & -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}, & -1 \end{pmatrix}$	du type 4... Point fixe A.	0	2	-2	0
$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2}, & \frac{-\sqrt{10}-1}{2} \\ \frac{+\sqrt{10}-1}{2}, & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$	du type 3... Point fixe B.	0	1	-1	-1
$V_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	du type 1... Point fixe C.	1	0	-1	-2

Le domaine fondamental est ABCDEO<sup>(1)</sup>; la signature du groupe (0, 4; 2, 2, 2, 3).

En portant les valeurs de A, B, C, D dans les formules (7) du n° 31, on retrouverait les substitutions semblables qui ont été déterminées par la réduction continue.

[41]  $Forme \ z^3 - 5x^3 + 4xy - 5y^3 \quad (a=5, \Delta=21).$

Il y a ici huit types de substitutions fuchsiennes.

$$1^{er} \text{ type } (m=1, \Delta_1=1).$$

$$5A^2 - 21B^2 + 105C^2 - D^2 = 20$$

avec  $A \equiv B \equiv C \equiv D \pmod{2}, \quad B \equiv 2D \pmod{5}.$

$$(\alpha, \delta) = \frac{1}{2} \left( A \pm B \sqrt{\frac{21}{5}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \pm C \sqrt{21} + \frac{D}{\sqrt{5}} \right).$$

---

(1) Voir planche III.

2° type ( $m = 1, \Delta_1 = 3$ ).

$$15A^2 - 7B^2 + 35C^2 - 3D^2 = 20$$

avec  $A \equiv B \equiv C \equiv D \pmod{2}, \quad B \equiv D \pmod{5}.$

$$(\alpha, \delta) = \frac{1}{2} \left( A\sqrt{3} \pm B\sqrt{\frac{7}{5}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \pm C\sqrt{7} + D\sqrt{\frac{3}{5}} \right).$$

3° type ( $m = 1, \Delta_1 = 7$ ).

$$35A^2 - 3B^2 + 15C^2 - 7D^2 = 20$$

avec  $A \equiv B \equiv C \equiv D \pmod{2}, \quad B \equiv -D \pmod{5}.$

$$(\alpha, \delta) = \frac{1}{2} \left( A\sqrt{7} \pm B\sqrt{\frac{3}{5}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \pm C\sqrt{3} + D\sqrt{\frac{7}{5}} \right).$$

4° type ( $m = 1, \Delta_1 = 21$ ).

$$105A^2 - B^2 + 5C^2 - 21D^2 = 20$$

avec  $A \equiv B \equiv C \equiv D \pmod{2}, \quad B \equiv 2D \pmod{5}.$

$$(\alpha, \delta) = \frac{1}{2} \left( A\sqrt{21} \pm \frac{B}{\sqrt{5}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \pm C + D\sqrt{\frac{21}{5}} \right).$$

5° type ( $m = 2, \Delta_1 = 1$ ).

$$5A^2 - 21B^2 + 105C^2 - D^2 = 10, \quad B \equiv 2D \pmod{5}.$$

$$(\alpha, \delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( A \pm B\sqrt{\frac{21}{5}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \pm C\sqrt{21} + \frac{D}{\sqrt{5}} \right).$$

6° type ( $m = 2, \Delta_1 = 3$ ).

$$15A^2 - 7B^2 + 35C^2 - 3D^2 = 10, \quad B \equiv 0 \pmod{5}.$$

$$(\alpha, \delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( A\sqrt{3} \pm B\sqrt{\frac{7}{5}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \pm C\sqrt{7} + D\sqrt{\frac{3}{5}} \right).$$

7° type ( $m = 2, \Delta_1 = 7$ ).

$$35A^2 - 3B^2 + 15C^2 - 7D^2 = 10, \quad B \equiv -D \pmod{5}.$$

$$(\alpha, \delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( A\sqrt{7} \pm B\sqrt{\frac{3}{5}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \pm C\sqrt{3} + D\sqrt{\frac{7}{5}} \right).$$

8° type ( $m = 2, \Delta_1 = 21$ ).

$$105A^2 - B^2 + 5C^2 - 21D^2 = 10, \quad B \equiv 2D \pmod{5}.$$

$$(\alpha, \delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( A\sqrt{21} \pm \frac{B}{\sqrt{5}} \right), \quad (\beta, \gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \pm C + D\sqrt{\frac{21}{5}} \right).$$

Ici il n'y a pas d'extension possible par  $\zeta' = -\zeta_0$ , mais comme le groupe reproductif a des symétries (c'est évident, puisque  $f(1, 0, 2) = -1$ ), on aura des circonférences de symétrie de deuxième espèce.  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ , coefficients d'une substitution de deuxième espèce, ont les mêmes expressions que  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ; mais on a

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1,$$

c'est-à-dire qu'il faut changer le signe du second membre des équations correspondantes en A, B, C, D. La circonférence relative à la substitution

$$\zeta' = \frac{\alpha'\zeta + \beta'}{\gamma'\zeta + \delta'},$$

où l'on a  $\alpha' + \delta' = 0$  pour que ce soit une symétrie, est

$$\gamma'(\xi^2 + \gamma^2) - 2\alpha'\xi - \beta' = 0.$$

La condition  $\alpha' + \delta' = 0$  revient à  $A = 0$ .

Les équations des types 4, 6, 7 et 8 sont alors seules possibles.

Pour les substitutions elliptiques  $(\alpha + \delta)^2 < 4$  :

celles de période *deux* ( $\alpha + \delta = 0$ ), où A est par suite nul, peuvent appartenir aux types 1, 3, 4 et 8;

celles de période *trois* ( $\alpha + \delta = \pm 1$ ) n'appartiennent à aucun type, ce qu'on pouvait déduire du critérium de Poincaré;

celles de période *quatre*  $[(\alpha + \delta)^2 = 2]$  appartiennent au cinquième type. On voit de suite la solution  $A = 1, B = -2, C = 1, D = 4$ .

Inutile de chercher celles de période *six*, puisqu'il n'y en a pas de période *trois*.

Opérons maintenant dans la conique (voir planche II). Nous aurons pour les substitutions de période *deux* et les symétries

$$(1) \quad \gamma^2 - 5x^2 + 4x\beta - 5\beta^2 = n,$$

$n$  diviseur de 42.

Pour les points fixes de période *quatre* on trouve, en partant de

$$\frac{z\sqrt{5} + \gamma\sqrt{21}}{\xi^2 + \gamma^2} = \frac{5x - 2\gamma}{\xi} = \frac{z\sqrt{5} - \gamma\sqrt{21}}{1},$$

les relations suivantes entre B, C, D et les coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  :

$$\frac{5\alpha - 2\beta}{-B\sqrt{21}} = \frac{\beta\sqrt{21}}{D} = \frac{\gamma}{C\sqrt{21}},$$

d'où résulte, par l'équation

$$-21B^2 + 105C^2 - D^2 = 5$$

et le fait que  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des entiers premiers entre eux,

$$5\alpha - 2\beta = -21B, \quad \beta = D, \quad \gamma = 21C;$$

l'équation aux points fixes de période *quatre* est donc

$$(2) \quad -(5\alpha - 2\beta)^2 + 5\gamma^2 - 21\beta^2 = 105.$$

*Axes de symétrie passant par O*, point fixe de période *deux* (et pas *quatre*,  $\alpha = \beta = 0$  ne vérifiant pas (2)),

$$\gamma = 0,$$

et on doit avoir

$$5\alpha^2 - 4\alpha\beta + 5\beta^2 = -n,$$

—  $n$  diviseur positif de 42. Il suffit d'essayer à partir de  $n=6$ , car la forme du premier membre qui est réduite à pour minimum 5; 6 est précisément le second minimum, pour  $\alpha = \beta = 1$ , qui donne l'axe  $x + y = 0$ . Comme il passe en O seulement un autre axe, conjugué du premier, c'est  $x - y = 0$ .

*Points fixes sur  $x - y = 0$* . — Pour la période *deux*, il faut donc

$$\gamma^2 - 6\alpha^2 = n$$

avec  $2\gamma$  et  $6\alpha$  divisibles par  $n$  ( $n^\circ 9$ ).

$n=1$  donne  $\alpha=0, \gamma=1$ ; c'est le point O.

$n=2$  est impossible :  $\left(\frac{2}{3}\right) = -1$ .

$n=3$  donne pour le point le plus rapproché :  $\alpha = \beta = 1, \gamma = 3$ , et il est inutile d'examiner les autres équations.

Pour la période *quatre*, il faudrait

$$5\gamma^2 - 30\alpha^2 = 105 \quad \text{ou} \quad \gamma^2 - 6\alpha^2 = 21,$$

équation impossible, car  $\left(\frac{6}{7}\right) = -1$ .



*Axes par  $\alpha = \beta = 1, \gamma = 3$ . — Leurs pôles  $\alpha, \beta, \gamma$  sont sur la polaire :*

$$\alpha + \beta - \gamma = 0.$$

Mais il est inutile même de faire la recherche, car il ne peut passer qu'un axe conjugué du premier, par le point  $\alpha = \beta = 1, \gamma = 3$ , point fixe de substitution de période *deux*. Cet axe est donc

$$3x + 3y - 2z = 0.$$

*Points fixes sur l'axe  $3x + 3y - 2z = 0$  :*

(1) et (2) deviennent, par élimination de  $\gamma$ ,

$$-11\alpha^2 + 34\alpha\beta - 11\beta^2 = 4n.$$

$$-11\alpha^2 + 34\alpha\beta - 11\beta^2 = 84.$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont de même parité; d'où, en posant

$$\alpha + \beta = 2u, \quad \alpha - \beta = 2v,$$

$$3u^2 - 14v^2 = n,$$

$$3u^2 - 14v^2 = 21.$$

Pour la première, on voit aisément par les résidus quadratiques, que  $n$  doit être 3 ou 21. Cette dernière valeur donne la seconde équation; en effet, les substitutions de période *quatre* sont aussi de période *deux*. Quant à  $n = 3$ , elle donne le point  $v = 0, u = 1$ , donc  $\alpha = \beta = 1, \gamma = 3$  déjà obtenu, et des points équivalents. Reste à prendre les plus petites solutions de la seconde (pour avoir le point le plus rapproché de  $x - y = 0$ ); ce sont  $u = 7, v = \pm 6$ , on prendra  $v = -6$  pour avoir le polygone au-dessus de  $\alpha - \beta = 0$ ; alors on a *le point fixe de substitution de période quatre*  $\alpha = 4, \beta = 10, \gamma = 21$ .

*Axes passant par  $\alpha = 4, \beta = 10, \gamma = 21$ . — Leurs pôles sont sur la polaire*

$$2\beta - \gamma = 0.$$

(1) devient

$$(\beta - 2\alpha)^2 + \alpha^2 = -n.$$

$n = -1$  ou  $-2$ , car tout autre diviseur de 42 est divisible par 3 ou par 7 et qu'une somme de deux carrés ne l'est jamais.

D'où les solutions

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2; & \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4; \\ \alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 6; & \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2; \end{array}$$

et les polaires correspondantes

$$\begin{array}{ll} 2x - 5y + 2z = 0, & x + 8y - 4z = 0, \\ 2x + 13y - 6z = 0, & 3x + 3y - 2z = 0. \end{array}$$

La dernière est l'axe dont nous sommes partis; celle qui vient après, en tournant dans le sens convenable, est

$$2x - 5y + 2z = 0.$$

*Points fixes sur*  $2x - 5y + 2z = 0$ . — Par les mêmes calculs on trouve, pour le point le plus rapproché,

$$\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 6$$

(correspondant à  $n = 3$ ), point fixe de substitution de période *deux*.

Puis, pour l'axe passant par ce point, la droite conjuguée

$$2x - 2y - z = 0.$$

Enfin, sur cette dernière, le point fixe le plus rapproché est l'intersection avec  $x + y = 0$ , soit

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 4.$$

point fixe de substitution de période *deux* correspondant à  $n = 2$ .

On a ainsi en OABCD un domaine fondamental du groupe reproductif total et en lui ajoutant son symétrique O'ABC'D' par rapport à AB par exemple, on a le domaine du groupe droit.

Dans le plan analytique (voir planche IV), on a les circonférences :

$$\begin{aligned} 3(\xi^2 + \eta^2) - 2\xi\sqrt{21} - 3 &= 0; \\ 7(\xi^2 + \eta^2) + 2\xi\sqrt{21} - 7 &= 0; \\ (21 - 2\sqrt{105})(\xi^2 + \eta^2) + 6\sqrt{21}\xi - (21 + 2\sqrt{105}) &= 0; \\ (21 - 2\sqrt{105})(\xi^2 + \eta^2) - 4\sqrt{21}\xi - (21 + 2\sqrt{105}) &= 0; \\ (\sqrt{105} - 6)(\xi^2 + \eta^2) + 4\sqrt{21}\xi + (\sqrt{105} + 6) &= 0. \end{aligned}$$

On calculerait aisément les coefficients ( $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $-\alpha'$ ) des symétries de deuxième espèce correspondantes. Je donnerai seulement les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  des substitutions génératrices du groupe fuchsien.

	A	B	C	D
$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$	type 4..... 0	0	-2	0
	Point fixe O.			
$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}}, & -\sqrt{3}-\sqrt{\frac{7}{5}} \\ \sqrt{3}-\sqrt{\frac{7}{5}}, & -\sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix}$	type 3..... 0	2	-2	-2
	Point fixe A.			
$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{21}+\frac{10}{\sqrt{5}}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{21}+\frac{10}{\sqrt{5}}\right), & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	type 5..... 1	0	1	10
	Point fixe B.			
$\begin{pmatrix} 3\sqrt{\frac{3}{5}}, & 2\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{7}{5}} \\ -2\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{7}{5}}, & -3\sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix}$	type 3..... 0	6	4	4
	Point fixe C.			
$\begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{10}}, & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(4+\sqrt{\frac{21}{5}}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-4+\sqrt{\frac{21}{5}}\right), & -\frac{7}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$	type 8..... 0	7	4	1
	Point fixe D.			

On a donc un groupe de signature  $(0, 5; 2, 2, 2, 2, 4)$ .

## QUATRIÈME PARTIE.

### Détermination du domaine fondamental par la méthode de rayonnement.

---

[42] Dans le cas où le groupe contient des symétries, nous venons de voir que la détermination du domaine fondamental était facile. Dans le cas contraire, il est désirable d'avoir une méthode plus rapide que la réduction continue, qui est très longue, dès qu'on dépasse les très petits discriminants.

Je vais montrer que pour les formes  $z^2 - \varphi(x, y)$  la *méthode de rayonnement* paraît remplir cette condition. Voici le principe de cette méthode, dont M. Fricke a trouvé la première idée dans un Mémoire de Dirichlet (Ueber die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, *Journal de Crelle*, t. XL). Considérons un point O intérieur à la conique  $f(x, y, z) = 0$  et tous ses équivalents  $O_i$  par les substitutions d'un groupe proprement discontinu dans cet intérieur. Deux de ses points ne sont jamais infiniment voisins <sup>(1)</sup>. On peut tracer un cercle de centre O et de rayon assez petit pour que tous les cercles équivalents soient extérieurs les uns aux autres. En faisant croître le rayon, il arrivera un moment où des rayons se rencontreront sur les lignes des centres; on les arrêtera, et, si l'on continue à faire croître les autres, ceux-ci se rejoindront et seront arrêtés sur les perpendiculaires aux segments  $O_i O_k$  en leurs milieux. Tout l'intérieur de la conique est ainsi divisé en polygones égaux équivalents; chacun constitue un domaine fondamental, à condition que O ne soit pas point fixe de substitution elliptique. Dans le cas contraire, si elle est de période  $n$ , la partie découpée dans le polygone par deux demi-droites issues de O et faisant un angle  $\frac{2\pi}{n}$  est un domaine fondamental <sup>(2)</sup>, si le groupe est de première espèce ( $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ) ou que, s'il est de seconde espèce ( $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ), il ne passe pas d'axe de symétrie par le point O; dans le cas d'un groupe de deuxième espèce, si O est l'intersection d'axes de symétrie, c'est la partie du polygone comprise entre deux d'entre eux consécutifs qui constitue un domaine fondamental.

---

<sup>(1)</sup> Longueurs et angles doivent s'entendre au sens non-euclidien.

<sup>(2)</sup> Fricke lui donne le nom de domaine ou polygone *normal*.

Pour appliquer cette méthode aux formes  $z^2 - \varphi(x, y)$ , je prends pour le point O le centre de l'ellipse

$$f(x, y, z) = z^2 - \varphi(x, y) = 0;$$

c'est un point fixe de substitution de période *deux*. Soient  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  les coordonnées d'un point équivalent à O par une substitution du groupe reproductif total. Les coordonnées de O étant 0, 0, 1, cette substitution sera nécessairement de la forme

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \alpha_i \\ v_1 & v_2 & \beta_i \\ w_1 & w_2 & \gamma_i \end{vmatrix}$$

et l'on aura :

$$(1) \quad f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = 1.$$

La longueur non-euclidienne d'un segment MM' (M de coordonnées  $x, y, z$ ; M',  $x', y', z'$ ) est, d'après les formules de Klein (1),

$$\mathfrak{L} MM' = \log \frac{f_{xx'} + \sqrt{f_{xx'}^2 - f_{xx}f_{x'x'}}}{f_{xx'} - \sqrt{f_{xx'}^2 - f_{xx}f_{x'x'}}},$$

où l'on désigne, pour abréger,  $f(x, y, z)$  par  $f_{xx}$  et  $\frac{1}{2} \left( x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z} \right)$  par  $f_{xx'}$ .

Donc,

$$(2) \quad \mathfrak{L} OO_i = \log \frac{\gamma_i + \sqrt{\gamma_i^2 - 1}}{\gamma_i - \sqrt{\gamma_i^2 - 1}} = 2 \log (\gamma_i + \sqrt{\gamma_i^2 - 1}).$$

*Elle varie dans le même sens que  $\gamma_i$ .* Pour déterminer les points  $O_i$  les plus rapprochés de O, par lesquels on aura le polygone en menant les perpendiculaires au milieu des  $OO_i$ , il suffit donc de calculer, par ordre de grandeur croissante des  $\gamma_i$ , les solutions entières de l'équation (1), en conservant seulement les points *équivalents* à O.

Cette équation a évidemment une infinité de solutions, on le voit par le groupe reproductif de la forme, lequel a une infinité de substitutions; on le voit aussi en la ramenant à l'équation de Fermat

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

par la substitution  $\gamma = t, \alpha = \beta_0 u, \beta = \beta_0 u, \varphi(\alpha_0, \beta_0) = D$ ; cette deuxième considération prouve même qu'il y a une infinité de solutions sur une droite quelconque

(1) C'est le logarithme du rapport anharmonique des deux points M et M' et des points d'intersection de la conique avec MM'.

*rationnelle* issue de l'origine, donc une infinité de points fixes de substitutions elliptiques de période *deux*, donc aussi une infinité de points équivalents à O.

Pour distinguer des autres ces derniers, voici deux procédés :

*Premier procédé.* — On réduira, par la méthode de Selling, la forme associée à  $f$  au point  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  :

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(xf'_{\alpha_i} + yf'_{\beta_i} + zf'_{\gamma_i})^2 - f(x, y, z).$$

Pour que le point  $O_i$  soit équivalent à O, il faut et il suffit que l'on trouve une réduite identique à celle relative à ce dernier point, à  $f$ , si, comme on a avantage à le faire, on a mis cette forme sous le type réduit à l'origine.

*Deuxième procédé.* — On appliquera les formules d'Hermite relatives aux substitutions semblables d'une forme quadratique ternaire indéfinie  $f$ ; ces formules, pour les substitutions entières, dépendent de quatre indéterminées entières,  $p, q, q', q''$  vérifiant une équation du type

$$(3) \quad p^2 + F(q, q', q'') = P,$$

où  $F$  désigne l'adjointe de  $f$  et  $P$  un diviseur, positif ou négatif, du quadruple du discriminant (voir Bachmann, *Quadratischen Formen*). En écrivant que  $O_i$  est le transformé de O par une telle substitution, on aura avec (3) quatre équations : la condition nécessaire et suffisante de l'équivalence de O et de  $O_i$  est l'existence d'une valeur de  $P$  et de solutions entières  $p, q, q', q''$  de ces équations, mais solutions rendant entière la substitution.

La question suivante se pose maintenant : on sait, par la réduction, que le groupe a un nombre fini de substitutions génératrices ; donc le polygone normal un nombre fini de côtés, c'est ce qui rend possible la méthode précédente ; mais à quel moment sera-t-on sûr d'avoir obtenu ce domaine normal, c'est-à-dire sûr qu'aucune des perpendiculaires suivantes ne traversera le polygone trouvé ? La réponse est facile. Soit A, B, C, etc., le *premier* polygone convexe obtenu et soit M le sommet ou l'un des sommets pour lequel ou lesquels  $\angle OM$  est la plus grande, il est nécessaire et suffisant de poursuivre le calcul jusqu'au premier  $O_n$  <sup>(1)</sup> pour lequel on a

$$\angle OO_n \geq 2\angle OM,$$

condition nécessaire et suffisante pour que les perpendiculaires au milieu de  $OO_n$  et de tous les segments suivants  $OO_{n+1}$ , etc., ne rencontrent pas le cercle de centre O et de rayon OM. Cela revient à

$$(4) \quad \gamma_n \geq 2\gamma_M^2 - 1,$$

---

(1) D'ailleurs équivalent ou non à O.

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  désignant les coordonnées de  $O_n$ , solutions par conséquent de

$$f(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = 1,$$

et  $\alpha_M, \beta_M, \gamma_M$  les coordonnées *réduites* de M, j'entends par là les coordonnées multipliées, s'il est nécessaire, par un facteur convenable pour vérifier

$$f(\alpha_M, \beta_M, \gamma_M) = 1$$

(ceci dans le but de pouvoir appliquer la formule (2)).

[43] Entrons maintenant dans quelques détails utiles pour la pratique de la méthode.

*Coordonnées du milieu  $m_i$  de  $OO_i$ .* — Elles sont de la forme  $\mu_i \alpha_i, \mu_i \beta_i, \lambda_i$ ; supposons les réduites, alors  $2Om_i = \log(\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 - 1})$ , et on doit avoir

$$2 \log(\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 - 1}) = \log(\gamma_i + \sqrt{\gamma_i^2 - 1}),$$

d'où

$$\gamma_i = 2\lambda_i^2 - 1,$$

puis par  $f(\mu_i \alpha_i, \mu_i \beta_i, \lambda_i) = 1$ ,

$$\mu_i^2 \varphi(\alpha_i, \beta_i) = \frac{\gamma_i - 1}{2},$$

c'est-à-dire par  $f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = 1$  :

$$\mu_i^2 = \frac{1}{2(\gamma_i + 1)}.$$

Les coordonnées réduites étant ainsi

$$\frac{\alpha_i}{\sqrt{2(\gamma_i + 1)}}, \quad \frac{\beta_i}{\sqrt{2(\gamma_i + 1)}}, \quad \sqrt{\frac{\gamma_i + 1}{2}},$$

sont proportionnelles aux valeurs entières simples

$$(5) \quad \alpha_i, \quad \beta_i, \quad \gamma_i + 1.$$

Ainsi, le milieu non-euclidien de  $OO_i$  se marquera très facilement.

*Perpendiculaire à  $OO_i$  en son milieu.* — C'est la droite conjuguée de  $OO_i$  passant en  $m_i$ , donc

$$(6) \quad \frac{1}{2} \varphi'_{\alpha_i} x + \frac{1}{2} \varphi'_{\beta_i} y - (\gamma_i - 1) = 0.$$

*Pôle de cette perpendiculaire.* — Ses coordonnées sont évidemment

$$(7) \quad \alpha_i, \quad \beta_i, \quad \gamma_i - 1.$$

[44] Pour traiter des exemples numériques, j'emploierai le deuxième procédé; j'ai aussi employé le premier, mais les calculs m'ont paru, par la réduction, plus longs et plus fastidieux.

On détermine les solutions successives de l'équation

$$f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = 1$$

par ordre de grandeur croissante des  $\gamma_i$ ; on ne peut opérer que par tâtonnements méthodiques; la considération des caractères génériques permet d'éliminer de suite une partie des  $\gamma$  à essayer; pour une valeur donnée de  $\gamma$  l'équation

$$\gamma^2 - \varphi(\alpha, \beta) = 1$$

n'a d'ailleurs qu'un nombre limité (qui peut être nul) de solutions.

Une solution  $\alpha, \beta, \gamma$  étant trouvée, il faut voir si le point correspondant est transformé de  $O(0, 0, 1)$  par une substitution du groupe, c'est-à-dire si dans les formules (1) du n° 1 on peut faire  $\alpha_3 = \varepsilon\alpha, \beta_3 = \varepsilon\beta, \gamma_3 = \varepsilon\gamma^{(1)}$ . Dans ces formules il faut faire, pour notre forme particulière,

$$c = 1, \quad g = h = 0, \quad F = \Delta s^2 - \varphi(r, -q),$$

$\Delta$  désignant le discriminant  $ab - k^2$ .

Alors les formules précitées deviennent, en tenant compte de  $p^2 + F = P$ ,

$$(8) \quad \begin{cases} \varepsilon P\alpha = 2pr - 2s(bq - kr), \\ \varepsilon P\beta = -2pq - 2s(ar - kq), \\ P(\varepsilon\gamma - 1) = 2\varphi(r, -q) = 2(ar^2 - 2krq + bq^2). \end{cases}$$

Évidemment, comme  $\varphi$  est positive ainsi que  $\gamma$ , il faut prendre  $\varepsilon$  du signe de  $P$ .

On aura donc à chercher d'abord s'il existe des valeurs de  $P$  pour lesquelles  $\frac{P(\gamma-1)}{2}$  si  $P$  est positif,  $\frac{-P(\gamma+1)}{2}$  si  $P$  est négatif est représentable par la forme  $\varphi$ . Pour un  $\gamma$  pair seules les valeurs paires de  $P$  seront à considérer. Il en est de même par les deux premières relations si  $\alpha$  ou  $\beta$  est impair.

La représentation par  $r$  et  $-q$  doit d'ailleurs être telle que ces deux premières relations donnent des valeurs entières pour  $p$  et  $s$ , c'est-à-dire que

$$(9) \quad \begin{aligned} \varepsilon p &= \frac{\alpha(ar - kq) - \beta(bq - kr)}{\varepsilon\gamma - 1} \\ \text{et} \\ \varepsilon s &= \frac{\alpha q + \beta r}{\varepsilon\gamma - 1} \end{aligned}$$

soient entiers.

(1)  $\varepsilon = \pm 1$ .



Avant de chercher si les équations (8) sont résolubles, il y a intérêt à utiliser la remarque suivante. Le point  $O_i$  peut être équivalent à  $O$ , soit par une substitution hyperbolique, soit par une elliptique de période *trois*, soit par une substitution de deuxième espèce, mais non de période *deux*, soit enfin par une substitution elliptique de période *deux*, *quatre* ou *six*, ou par une symétrie. Or, dans ces derniers cas, le point fixe ou le pôle de la symétrie sont le milieu non euclidien de  $OO_i$  ou le pôle de la perpendiculaire à  $OO_i$  en ce point : par suite (n° 9), les coordonnées  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i + 1$ , ou  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i - 1$  respectivement, devront vérifier une équation

$$f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \pm 1) = \pm n,$$

$n$  diviseur positif de  $2\Delta$ , multiplié ou non par un facteur carré (le carré du plus grand commun diviseur des coordonnées). Or, cette vérification est très facile à cause de

$$f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = 1;$$

elle revient, par soustraction, à

$$2(\pm \gamma_i + 1) = \pm n.$$

Toutefois, si la relation a lieu, il faut encore s'assurer que  $f'_{\alpha_i}, f'_{\beta_i}, f'_{\gamma_i \pm 1}$  sont divisibles par  $n$ .

Il n'y a pas non plus de calcul à faire si la perpendiculaire ne coupe pas la partie utile déjà obtenue du polygone, ce qui se voit rapidement.

[45] *Application numérique.* (Voir la planche V.)

$$f = z^2 - 3x^2 + 2xy - 10y^2 \quad (\Delta = 29).$$

Les caractères génériques de la forme  $\varphi(x, y)$  sont ici :

$$\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = -1 \quad \left(\frac{\varphi}{29}\right) = -1.$$

Tout nombre représentable par  $\varphi$  ne doit d'ailleurs contenir que des facteurs premiers impairs  $\omega$  dont  $-29$  soit résidu quadratique, et cette condition

$$\left(\frac{-29}{\omega}\right) = 1$$

revient à

$$\omega \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \pm 14 \pmod{29}.$$

La plus petite valeur de  $\gamma$  est 2, et le point  $O_1(1, 0, 2)$ ; et ce point est *équivalent* à  $O$ , parce que  $2(-\gamma_1 + 1) = -2$ , par où l'on voit que la perpendiculaire au milieu  $O'_1(1, 0, 3)$  de  $OO_1$  est un axe de symétrie

$$3x - y - z = 0.$$

Le second minimum de  $\varphi$  étant 10, inutile d'essayer  $\gamma=3$ , qui donnerait  $\gamma^2-1=8$ .

$\gamma=4$  donne  $\alpha=-1$ .  $\beta=+1$ , mais les seules valeurs de P qui pourraient convenir, 2 et -4 ne donnent pas s entier. Le point fixe  $(-1, 1, 4)$  n'est donc pas de même classe que O. Par les diviseurs ou le calcul direct,  $\gamma=5, 6, 7, 8, 9$  ne donnent pas de solutions.

$\gamma=10$  donne deux solutions :  $(-1, 3, 10), (3, 3, 10) : O_2$ .

Pour la première, les seules valeurs de P qui pourraient convenir :  $P=4$  et 116,  $P=-2$  et -58 ne donnent pas de solutions du système (8). Quant au second point, il est *équivalent* à O, car  $2(-\gamma_2+1)=-18$ , qui, divisé par 9 carré du plus grand commun diviseur de  $\alpha_2, \beta_2, -\gamma_2+1$ , donne -2, par où l'on voit que la perpendiculaire à  $OO_2$  en son milieu  $O'_2(3, 3, 11)$  est un axe de symétrie

$$2x + 9y - 3z = 0.$$

Il coupe le premier axe au point B(12, 7, 29).

Pas de solution pour  $\gamma=11$ .

$\gamma=12$  donne le point fixe  $(7, 1, 12)$ . Mais la perpendiculaire

$$20x + 3y - 12z = 0$$

ne coupe pas la partie utile du contour polygonal déjà trouvé.

Pas de solution pour  $\gamma=13$ .

Deux solutions avec  $\gamma=14 : (+5, -3, 14)$  et  $(7, 3, 14)$ .

La première ne convient pas, par l'impossibilité d'un système (8). La seconde non plus, parce que la perpendiculaire correspondante

$$18x + 23y - 13z = 0$$

passe par B.

Pas de solutions pour  $\gamma=15$  ou 16.

Une solution avec  $\gamma=17 : (8, 4, 17)$ . Mais la perpendiculaire correspondante

$$5x + 8y - 4z = 0$$

passe par B.

Pas de solution pour  $\gamma=18$ .

Deux solutions avec  $\gamma=19 : (4, 6, 19)$  et  $(0, 6, 19)$ .

La première ne convient pas, par l'impossibilité de (8) pour  $P=2, 58$ , ou -1, -4, -29, -116, seules valeurs qui pourraient convenir.

Le second point,  $O_3$ , est *équivalent* à  $O$ , car  $2(-\gamma_3 + 1) = -36$  débarrassé du carré du plus grand commun diviseur de 6 et 18 donne  $-1$ , ce qui prouve que la perpendiculaire à  $OO_3$ , en son milieu

$$x - 10y + 3z = 0$$

est un axe de symétrie. Il rencontre  $O'_2B$  en  $A(3, 9, 29)$ .

Pas de solutions ensuite avant  $\gamma = 25$ , qui donne  $(4, 8, 25)$ , mais la perpendiculaire correspondante

$$x + 19y - 6z = 0$$

passé par  $A$  et ne coupe pas la partie utile du contour trouvé.

Même observation pour la solution suivante  $(3, 9, 28)$ , avec la perpendiculaire

$$29y - 9z = 0.$$

Pas de solution avec  $\gamma = 29$ .

$\gamma = 30$  donne le point  $O_4(+7, -8, 30)$  *équivalent* à  $O$ , car  $2(-\gamma_4 + 1) = -58$ , une des valeurs de  $n$  qui répondent aux symétries, et  $f'_{\alpha_4}, f'_{\beta_4}, f'_{\gamma_4-1}$  sont divisibles par 58; la perpendiculaire au milieu de  $OO_4$

$$x - 3y - z = 0$$

est un *axe de symétrie*. Il rencontre  $O'_1B$  au point  $C(1, -1, 4)$  et la symétrique de  $x - 10y + 3z = 0$  au point  $D(1, -2, 7)$ . On a ainsi un polygone fermé de centre  $O$ , intérieur à la conique, limité par les axes de symétrie trouvés et leurs symétriques par rapport à  $O$ .

Il faut maintenant chercher le sommet de ce polygone le plus éloigné de  $O$ , et pour cela réduire les coordonnées; on trouve pour les  $\gamma$  réduits

$$\gamma_A = \frac{29}{\sqrt{58}}, \quad \gamma_B = \frac{29}{\sqrt{87}}, \quad \gamma_C = 4, \quad \gamma_D = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

Le point  $D$  est donc le plus éloigné, et nous savons que nous n'aurons pas besoin de chercher de solutions plus loin que

$$\gamma = 2 \left( \frac{7}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 = 48.$$

$\gamma = 31$  et  $32$  donnent  $(8, -8, 31)$  et  $(1, -10, 32)$ , mais les perpendiculaires

$$16x - 44y - 15z = 0,$$

$$13x - 101y - 31z = 0$$

ne coupent pas le polygone.

Plus de solutions ensuite jusqu'à  $\gamma = 39$ , qui donne  $(20, 8, 39)$ ; mais la perpendiculaire

$$26x + 30y - 19z = 0$$

ne coupe pas le polygone.

Plus de solutions ensuite jusqu'à  $\gamma = 44$  qui en donne quatre :  $(25, -1, 44)$ ,  $(25, 6, 44)$ ,  $(21, -6, 44)$ ,  $(-1, -14, 44)$ .

Mais les perpendiculaires correspondantes

$$72x - 35y - 43z = 0,$$

$$69x + 35y - 43z = 0,$$

$$69x - 81y - 43z = 0,$$

$$11x - 139y - 43z = 0$$

ne coupent pas le polygone.

Pas de solutions pour  $\gamma = 45$ .

Quatre solutions avec  $\gamma = 46$  :

$$(27, 3, 46), \quad (25, -3, 46), \quad (25, 8, 46), \quad (17, 13, 46).$$

Mais les perpendiculaires correspondantes

$$26x + y - 15z = 0,$$

$$78x - 55y - 45z = 0,$$

$$67x + 55y - 45z = 0,$$

$$38x + 113y - 45z = 0$$

ne coupent pas le polygone.

Enfin  $\gamma = 47$  et  $48$  ne donnent pas de solutions.

Donc le *polygone* ABCDEFGH, de centre O, est le *double*<sup>(1)</sup> d'un domaine *fondamental* du groupe *reproductif total*; nous le diviserons par le diamètre AOE, par exemple, et nous prendrons pour domaine fondamental de ce groupe OABCDE; de sorte qu'en lui ajoutant son symétrique par rapport à BC par exemple, on aura en ABA'E'D'CDE un domaine fondamental du groupe *droit*; il suffira de prendre son homologue dans le demi-plan analytique pour avoir le domaine fondamental du groupe fuchsien associé.

Étudions maintenant les *sommets* du polygone OABCDE. O est point fixe de substitution elliptique de période *deux* : il pourrait l'être par conséquent de période

(1) On va préciser, dans un instant, que O est point fixe de substitution de période *deux* et n'est pas sur un axe de symétrie.

*quatre* ou *six*; nous savons, par les numéros 6, 7 que c'est impossible, car le discriminant 29 est premier impair et  $\left(\frac{-\varphi}{29}\right) = -1$ ; d'ailleurs, pour que O fût point fixe de substitution de période *quatre* ou *six*, il faudrait que les sommets du polygone de centre O fussent quatre par quatre, ou six par six équidistants de O (sans parler des angles des rayons vecteurs), ce qui n'a pas lieu.

Aucun axe de symétrie ne passe par O : c'est déjà évident par les considérations géométriques précédentes; cela résulte aussi de l'impossibilité d'une équation

$$f(\alpha, \beta, 0) = -n,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi(\alpha, \beta) = n,$$

( $n$  diviseur positif de  $2\Delta$ ).

Pour les points A, B, C, D, E qui sont points fixes de substitutions elliptiques, comme intersections d'axes de symétrie, on obtiendra la substitution correspondante en faisant le produit des symétries. Pour calculer ces dernières, il suffit d'appliquer les formules d'Hermite (n° 9) en y remplaçant  $\alpha, \beta, \gamma$  par les coordonnées  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i + 1)$  du pôle correspondant. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \Sigma_{AB} &= \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 2 & 8 & -3 \\ 6 & 27 & -10 \end{vmatrix}, & \Sigma_{BC} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \\ \Sigma_{CD} &= \begin{vmatrix} 6 & -21 & -7 \\ -8 & 23 & 8 \\ 29 & -87 & -30 \end{vmatrix}, & \Sigma_{DE} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 19 & 6 \\ 6 & -60 & -19 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

D'où les substitutions génératrices du groupe droit :

$$\begin{aligned} V_0 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ V_A &= \Sigma_{AH} \Sigma_{AB} = \begin{vmatrix} -1 & -9 & 3 \\ 0 & -28 & 9 \\ 0 & -87 & 28 \end{vmatrix}, & V_B &= \Sigma_{AB} \Sigma_{BC} = \begin{vmatrix} -7 & -7 & 5 \\ -5 & -7 & 4 \\ -18 & -23 & 14 \end{vmatrix}, \\ V_C &= \Sigma_{BC} \Sigma_{CD} = \begin{vmatrix} -9 & 22 & 8 \\ 8 & -23 & -8 \\ -32 & 88 & 31 \end{vmatrix}, & V_D &= \Sigma_{CD} \Sigma_{DE} = \begin{vmatrix} -6 & 21 & 7 \\ 10 & -43 & -14 \\ -35 & 147 & 48 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$V_0, V_A, V_C$  et  $V_D$  sont de période *deux*,  $V_B$  de période *trois*.

[46] Pour passer au plan analytique, nous employons la transformation

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{z\sqrt{3} + y\sqrt{29}} = \frac{\xi}{3x - y} = \frac{1}{z\sqrt{3} - y\sqrt{29}}$$

On obtient ainsi le domaine représenté planche VI et, par des calculs que nous omettons, les substitutions génératrices suivantes :

$$\begin{aligned} V_0, \quad \zeta' &= \frac{-1}{\zeta}, \\ V_A, \quad \zeta' &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \sqrt{29} + \frac{9}{\sqrt{3}} \right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\sqrt{29} + \frac{9}{\sqrt{3}} \right) \zeta}, & V_B, \quad \zeta' &= \frac{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{29}{3}} \right) \zeta + \frac{1}{2} \left( \sqrt{29} + \frac{7}{\sqrt{3}} \right)}{\frac{1}{2} \left( -\sqrt{29} + \frac{7}{\sqrt{3}} \right) \zeta + \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{29}{3}} \right)}, \\ V_C, \quad \zeta' &= \frac{\frac{1}{2} \frac{8}{\sqrt{3}} \zeta + \frac{1}{2} \left( 8 - 2\sqrt{\frac{29}{3}} \right)}{-\frac{1}{2} \left( 8 + 2\sqrt{\frac{29}{3}} \right) \zeta - \frac{1}{2} \frac{8}{\sqrt{3}}}, & V_D, \quad \zeta' &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} \zeta + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 7 - 2\sqrt{\frac{29}{3}} \right)}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \left( 7 + 2\sqrt{\frac{29}{3}} \right) \zeta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

On a un groupe de signature  $(0, 5; 2, 2, 2, 2, 3)$ .

Les angles du domaine fondamental sont  $B = \frac{2\pi}{3}$ ,  $D = D' = \frac{\pi}{2}$ ,  $O = O' = C = \pi$  (sommets non apparents). Enfin, la somme des quatre angles en  $AA'EE'$  qui forment cycle est  $\pi$ .

Il serait d'ailleurs plus avantageux pour le tracé de prendre pour  $O_1$  un axe de symétrie, par exemple en rapportant la conique à la corde  $BC$  et aux tangentes à ses extrémités.

[47] La méthode de rayonnement appliquée au premier exemple, de discriminant 5, que j'ai traité, conduit au polygone fondamental à peu près aussi vite que celle des symétries. Mais c'est évidemment dans les cas où il n'y a pas de symétries qu'elle serait surtout intéressante. Il faut pour cela dépasser les discriminants de la première centaine, que contient seulement la table de Cayley; aussi est-il à désirer que cette dernière soit prolongée<sup>(1)</sup>. Observons pour terminer que la méthode s'applique aux formes quaternaires<sup>(2)</sup>.

$$x^2 - \varphi(y, z, t) = 0,$$

où  $\varphi$  est définie; c'est la géométrie non euclidienne à trois dimensions qui intervient alors. On pourrait augmenter encore le nombre des variables, mais on sortirait des groupes automorphes.

<sup>(1)</sup> J'ai effectué ce prolongement pour la seconde centaine : pour tous ces nouveaux discriminants il y a encore des symétries.

<sup>(2)</sup> C'est à elles que se rattache le groupe de M. Picard, qui généralise le groupe modulaire.

## CINQUIÈME PARTIE. — APPENDICE.

### Sur l'équivalence des formes $\varphi(x, y) - z^2$ de même genre.

---

[48] Un des résultats essentiels du Mémoire de Poincaré est le suivant : la nature des substitutions elliptiques et paraboliques et le nombre de cycles du domaine fondamental du groupe fuchsien relatif à une forme déterminée dépendent de l'équivalence de cette dernière à des formes canoniques en nombre limité. Or, la recherche de cette équivalence, qui serait autrement très compliquée, se trouve, dans des cas très larges, rendue facile par les théorèmes d'Arnold Meyer, relatifs au nombre des classes contenues dans un genre. Ce nombre est égal à l'unité dans le cas d'une forme proprement primitive dont les invariants n'ont aucun facteur commun impair et ne contiennent le facteur 4 ni l'un ni l'autre, et pour décider si deux telles formes sont équivalentes, il n'y a plus alors qu'à voir si elles sont de même genre, ce qui est facile. J'ai ainsi, dans la première partie, appliqué ce théorème à certaines formes  $z^2 - \varphi(x, y)$ .

Dans le Mémoire de M. G. Humbert sur *Les fonctions abéliennes singulières et l'arithmétique* (Journal de Mathématiques, 5<sup>e</sup> série, t. IX), les théorèmes d'A. Meyer jouent un rôle important, notamment pour la démonstration de cette propriété remarquable : *si des systèmes de deux relations singulières répondent à des formes  $z^2 - \varphi(x, y)$  de même genre arithmétique, les courbes hyperabéliennes associées sont du même genre algébrique.*

Les démonstrations d'A. Meyer sont assez compliquées entre autres celle du lemme suivant, essentiel dans sa théorie : *si  $\Delta$  contient le facteur 2 avec un exposant  $\leq 4$ , il existe une infinité de nombres premiers  $p$  et  $q$  tels que l'équation*

$$T^2 - pqU^2 = 1$$

*ait une solution fondamentale  $t, u$ , telle que ni  $t-1$  ni  $t+1$  ne soient divisibles par  $pq$ .*

Il m'a donc paru intéressant de faire une recherche directe pour les formes du type simple  $\varphi(x, y) - z^2$ , ( $\varphi$  forme positive); mais je supposerai de plus la forme

$\varphi$  primitive et même proprement primitive, alors l'invariant  $\Omega^{(1)}$  (c'est-à-dire le plus grand commun diviseur des mineurs du discriminant) est égal à  $-1$ . J'ai pu, avec ces restrictions, obtenir, dans des cas assez étendus, une démonstration beaucoup plus simple. Mais, avant de l'exposer, je dirai quelques mots des premiers procédés que j'ai employés, parce que, par une marche pourtant bien différente, ils conduisent aux conditions d'Arnold Meyer. Observons auparavant que pour les formes  $f = \varphi(x, y) - z^2$  que nous étudions, la condition d'être de même genre revient à la même condition pour les formes  $\varphi$ . Notre méthode va consister à chercher une substitution entière faisant passer d'une forme à l'autre.

[49] 1<sup>er</sup> procédé. — Soit  $T$  la substitution cherchée,

$$fT = f_1.$$

$\varphi$  et  $\varphi_1$  étant de même genre se changent l'une dans l'autre par une infinité de substitutions *rationnelles*. On en obtient une simplement en commençant par remplacer  $\varphi$  et  $\varphi_1$  par des formes équivalentes ayant même premier coefficient : ce premier coefficient commun ne peut être un nombre premier, car autrement  $\varphi$  et  $\varphi_1$  seraient équivalentes proprement ou improprement, cas où l'équivalence de  $f$  et  $f_1$  est évidente ; — mais d'après un théorème de Dirichlet, ce peut être un produit de deux nombres premiers  $p$  et  $q$ . Supposons donc  $\varphi$  et  $\varphi_1$  ramenées à être  $(pq, k, b)$  et  $(pq, k_1, b_1)$ . On passera de  $f$  à  $f_1$  par la substitution rationnelle  $T'$  :

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & \frac{k_1 - k}{pq} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

De  $fT' = f_1 = fT$ , résulte que  $TT'^{-1}$  est une substitution semblable rationnelle  $S$  de  $f$ . Tout revient donc à déterminer  $S$  de façon que  $T = ST'$  soit *entière*.

J'ai dû pour cela apporter aux formules générales du numéro 31 les modifications voulues pour avoir la  $S$ , non plus entière, mais *rationnelle seulement*, la plus générale. Je n'entre pas dans le détail des calculs et je me borne à donner la conclusion : c'est que la démonstration de l'équivalence et celle de la possibilité d'au moins une des équations

$$q\Delta_1 A'^2 - p\Delta_2 B'^2 + pq(p\Delta_2 C^2 - q\Delta_1 D^2) = \frac{4}{m}$$

se ramènent l'une à l'autre. En prenant égale à zéro l'une des indéterminées, l'on aurait comme condition suffisante de l'équivalence la possibilité de toujours pouvoir

---

(<sup>1</sup>) Notation de Stephen Smith.



représenter soit  $+1$ , soit  $-1$  par une forme ternaire indéfinie proprement primitive, ainsi que son adjointe et de déterminant impair : or, c'est là inversement un des corollaires déduits par Arnold Meyer de ses théorèmes.

[50] 2<sup>e</sup> procédé. — Je cherche directement une substitution entière

$$(1) \quad T = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

qui change  $f$  en  $f_1$ .

Posant égaux à  $\lambda, \mu, \nu$  les mineurs de  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ , on doit avoir<sup>(1)</sup>, d'après l'identification de  $fT$  et de  $f_1$  (termes en  $xy$  et  $xz$  nuls),

$$(2) \quad \frac{\alpha}{A\lambda} = \frac{\alpha_1}{g\nu - c\mu} = \frac{\alpha_2}{g\mu - b\nu} = \frac{1}{F(\lambda, \mu, \nu)};$$

et comme  $f(x, \alpha_1, \alpha_2) = 1$ , on a  $F(\lambda, \mu, \nu) = A$ .

Supposons  $\nu$  égal à zéro, on aura

$$(3) \quad A\lambda^2 - c\mu^2 = A,$$

équation qui se ramène à celle d'Arnold Meyer, car  $c$  et  $g$  pouvant évidemment être supposés premiers entre eux, les équations (2) montrent que  $\mu$  doit être divisible par  $A$ , pour que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  soient entiers; (3) devient par suite

$$(4) \quad \lambda^2 - cA\mu'^2 = 1;$$

c'est, si l'on fait  $c = pq$ , l'équation d'Arnold Meyer.

Mais en écrivant les relations

$$\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = \lambda, \quad \beta_2\gamma - \beta_1\gamma_2 = \mu, \quad \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma = \nu = 0,$$

et les trois égalités restant à satisfaire pour identifier  $f_1$  à  $fT$  :

$$f(\beta, \beta_1, \beta_2) = -b_1, \quad \frac{1}{2} \Sigma \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} = -g_1, \quad f(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = -c_1 = -c,$$

on voit qu'il est possible de les vérifier par  $\gamma = \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$ , d'où

$$\beta_1 = \lambda, \quad \beta = -\mu, \quad \beta_2 = -\frac{g\lambda + g_1}{c};$$

$\beta_2$  est bien entier si  $\lambda$  est une solution fondamentale de (4), cette équation étant supposée astreinte aux conditions d'Arnold Meyer; car alors on a  $\lambda \equiv \pm 1 \pmod{pq}$ , donc aussi

$$g\lambda \equiv \pm g \pmod{pq}.$$

<sup>(1)</sup> Je prends ici  $f$  sous la forme  $x^2 - (by^2 + 2gyz + cz^2)$ ,  $bc - g^2 = A = \Delta$ .

Or, la congruence

$$\rho^3 \equiv -\Delta \pmod{pq}$$

a seulement quatre racines incongrues  $\pmod{pq}$ , et ces racines doivent être congrues à  $\pm g, \pm g_1$ ,  $g$  étant  $\equiv \pm g_1$ , parce que  $\varphi$  et  $\varphi_1$  ne sont ni proprement ni improprement équivalentes. Comme d'ailleurs, par (3), on a

$$g^2 \lambda^2 \equiv -\Delta \pmod{pq},$$

il en résulte

$$g\lambda \equiv \pm g_1 \pmod{pq},$$

et comme on dispose du signe de  $\lambda$ , on pourra toujours vérifier la congruence relative au signe  $+$ .

Dès lors, la dernière équation  $f(\beta, \beta_1, \beta_2) = -b_1$  sera vérifiée d'elle-même (par l'égalité des discriminants) et l'on a obtenu la substitution entière suivante qui change  $f$  en  $f_1$  :

$$T = \begin{vmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \frac{c\mu}{A} & \lambda & 0 \\ -\frac{g\mu}{A} & \frac{g_1 - g\lambda}{c} & 1 \end{vmatrix}$$

[51] Voici maintenant comment on peut, dans un grand nombre de cas, simplifier la démonstration d'Arnold Meyer.

Supposons d'abord le discriminant de  $\varphi$  et  $\varphi_1$  de l'une des formes  $4n+2$  ou  $4n+3$ ; alors les nombres premiers  $p$  et  $q$ , dont on peut prendre le produit pour premier coefficient, peuvent être tous les deux de la forme  $4n+3$ , car les formes d'un discriminant  $4n+2$  ou  $4n+3$  n'ont pas de caractère particulier par rapport au module 4. Il en résulte que les équations

$$(1) \quad t^2 - pq u^2 = -1 \quad \text{et} \quad (2) \quad t^2 - pq u^2 = \pm 2$$

sont impossibles et l'on en conclut par un raisonnement connu que la solution fondamentale  $t, u$  de l'équation

$$T^2 - pq U^2 = 1$$

est telle que ni  $t-1$ , ni  $t+1$  ne sont divisibles par  $pq$ .

Considérons alors la substitution unimodulaire

$$S = \begin{vmatrix} t & pq u & g_1 u \\ u & t & \frac{g_1 t - g}{pq} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

elle change  $f$  en  $f_1$  <sup>(1)</sup>, comme on le vérifie par un calcul rapide, et ses coefficients sont entiers, par le même raisonnement que dans le deuxième procédé.

La démonstration s'applique encore aux discriminants  $4n + 1$  et  $8n + 4$ , *pourvu qu'il y ait au moins une classe ambiguë qui puisse représenter des nombres congrus à 3 (mod 4)*. Soit, en effet,  $\psi$  une forme de la duplication de laquelle résulte la forme du genre principal  $\varphi\varphi_1$ ; on peut écrire <sup>(2)</sup>,  $\psi_1$  étant une autre forme, et  $\psi_1^{-1}$  la forme opposée :

$$\varphi = \psi\psi_1, \quad \varphi_1 = \psi\psi_1^{-1}.$$

Mais on peut multiplier  $\psi$  et  $\psi_1$  par une même classe ambiguë quelconque. Si donc  $\psi$  ne représente pas déjà des nombres  $4n + 3$ , c'est-à-dire si  $\left(\frac{-1}{\psi}\right) = +1$ , on pourra, par hypothèse, choisir la classe ambiguë  $\alpha$ , de façon que  $\psi\alpha$  en représente.

Alors, si les nombres représentés par les formes du genre de  $\varphi$  et de  $\varphi_1$  sont congrus à 1, mod 4, et que  $\left(\frac{-1}{\psi}\right) = -1$ , on aura aussi  $\left(\frac{-1}{\psi_1}\right) = -1$ , et  $\varphi$  et  $\varphi_1$  représenteront donc un même produit  $pq$  de nombres premiers  $4n + 3$ ; si  $\left(\frac{-1}{\psi}\right) = +1$ , on prendra  $\psi\alpha$ , et on aura  $\left(\frac{-1}{\psi\alpha}\right) = \left(\frac{-1}{\psi_1\alpha}\right) = -1$ , de sorte que  $p$  et  $q$  seront encore  $4n + 3$ ; cela suffit pour que l'équation (1) soit impossible; mais comme les formes de discriminants  $4n + 1$  ou  $8n + 4$  n'ont pas de caractères particuliers  $\left(\frac{2}{\varphi}\right)$  ni  $\left(\frac{-2}{\varphi}\right)$ , on pourra prendre en outre  $p$  et  $q$ , de manière à rendre les équations (2) impossibles.

Dans un cas comme dans l'autre, la transformation S pourra encore être employée.

S'il n'y a aucune classe ambiguë pouvant représenter des nombres  $4n + 3$ , elle pourra l'être seulement pour les formes  $\varphi$  d'un genre représentant des nombres  $4n + 3$ ; il existe de tels genres pour tous les discriminants non carrés parfaits.

La démonstration s'applique également aux formes  $x^2 - \varphi$ , où  $\varphi$  est une forme indéfinie.

La démonstration précédente paraîtra sans doute peu naturelle sous la forme synthétique que je lui ai donnée pour plus de concision; j'y ai cependant été conduit assez naturellement en cherchant à représenter par la forme  $x^2 + \varphi(y, z)$  un nombre  $b_1$  représentable par une forme de même genre que  $\varphi$  (mais non représentable par  $\varphi$ , bien entendu); des raisonnements utilisant les *idéaux quadratiques* conduisent alors à la substitution que j'ai indiquée.

(1)  $f = x^2 - by^2 - 2gyz - cz^2$ ,  $f_1 = x^2 - by^2 - 2q_1yz - c_1z^2$ ,  $b = pq$ .

(2) Cf. ARNOLD MEYER, *Journal de Crelle*, t. CVIII.

[52] Faisons une application numérique en prenant les formes de discriminant 29

$$2x^2 + 2xy + 15y^2,$$

$$3x^2 + 2xy + 10y^2,$$

formes de même genre, mais non de même classe (elles sont réduites et distinctes). Toutes deux représentent des nombres  $4n + 3$  et on peut prendre pour produit  $pq$  satisfaisant aux conditions requises pour la démonstration précédente le nombre  $15 = 3 \cdot 5$ ; on a, en effet :

$$\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{-2}{5}\right) = -1.$$

Les formes  $f$  et  $f_1$  s'écriront alors

$$f = 15x^2 + 2xy + 2y^2 - z^2,$$

$$f_1 = 15x^2 + 22xy + 10y^2 - z^2,$$

et voici les substitutions auxquelles conduisent le plus directement les trois procédés indiqués :

$$1^{\text{er}} \text{ procédé} \dots\dots\dots \begin{vmatrix} 1313 & 1044 & 344 \\ 16830 & 13387 & 4410 \\ 25230 & 20068 & 6611 \end{vmatrix}.$$

$$2^{\text{e}} \text{ procédé} \dots\dots\dots \begin{vmatrix} -1 & 9 & 7 \\ 0 & -146 & -105 \\ 0 & 203 & 146 \end{vmatrix}.$$

$$3^{\text{e}} \text{ procédé} \dots\dots\dots \begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & 11 & -4 \end{vmatrix}.$$



## ERRATA ET RECTIFICATIONS

---

Page 1. *Ajouter en nota* : Il ne s'agit, bien entendu, dans tout ce travail, que de formes à coefficients *entiers*.

Page 5, ligne 7, *supprimer* : et les classer suivant la nature de ces dernières.

Page 15, ligne 1, *au lieu de* : deuxième, *lire* : dernière.

— ligne 5, — oceptables, — acceptables.

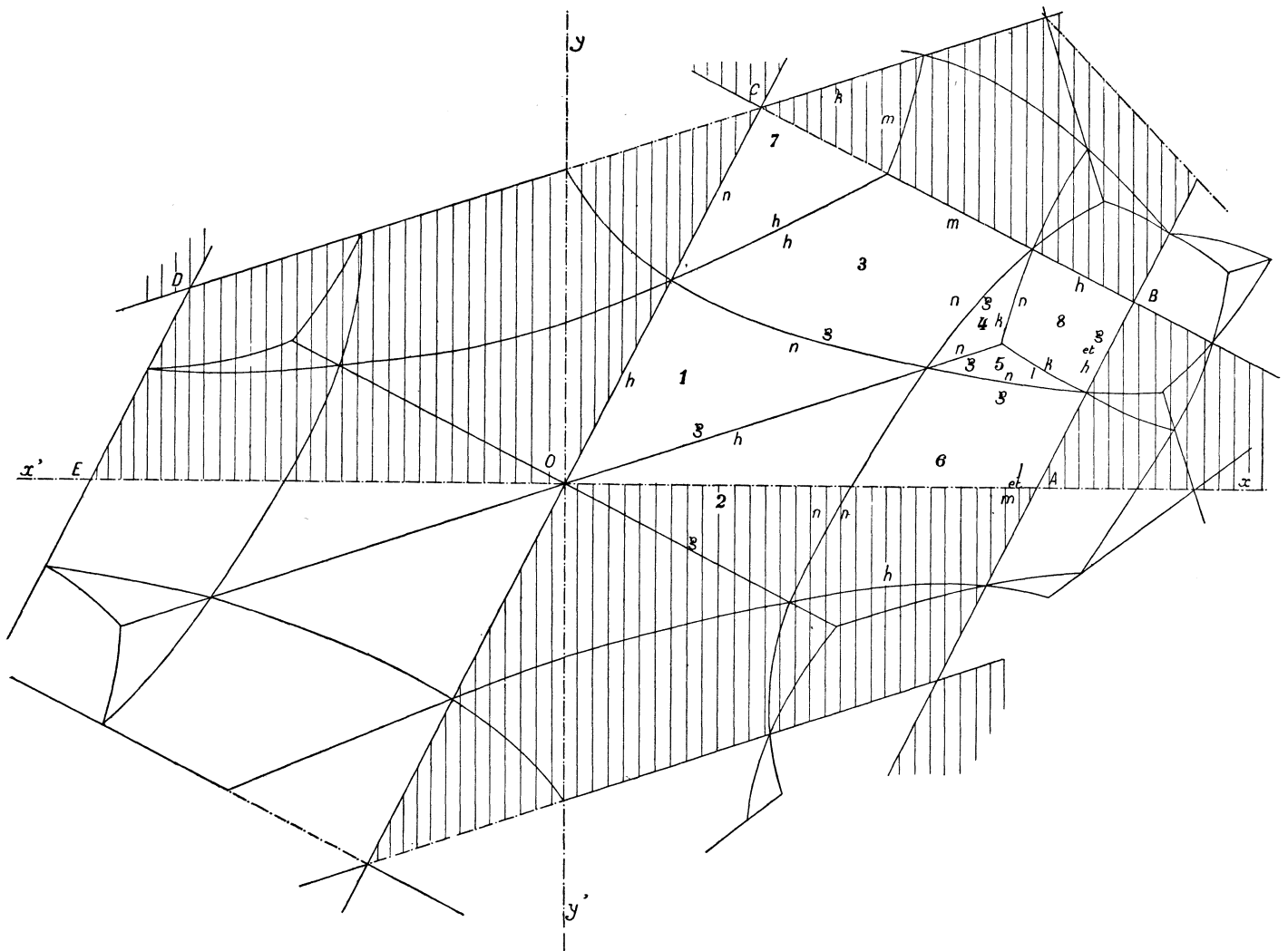
Page 18, supprimer le nota (<sup>1</sup>).

Page 20, ligne 6 à partir du bas, *au lieu de* : une ellipse imaginaire, *lire* : le premier membre de l'équation d'une ellipse imaginaire.

Page 24, ligne 2 à partir du bas, *au lieu de* : précédent, *lire* : 16.

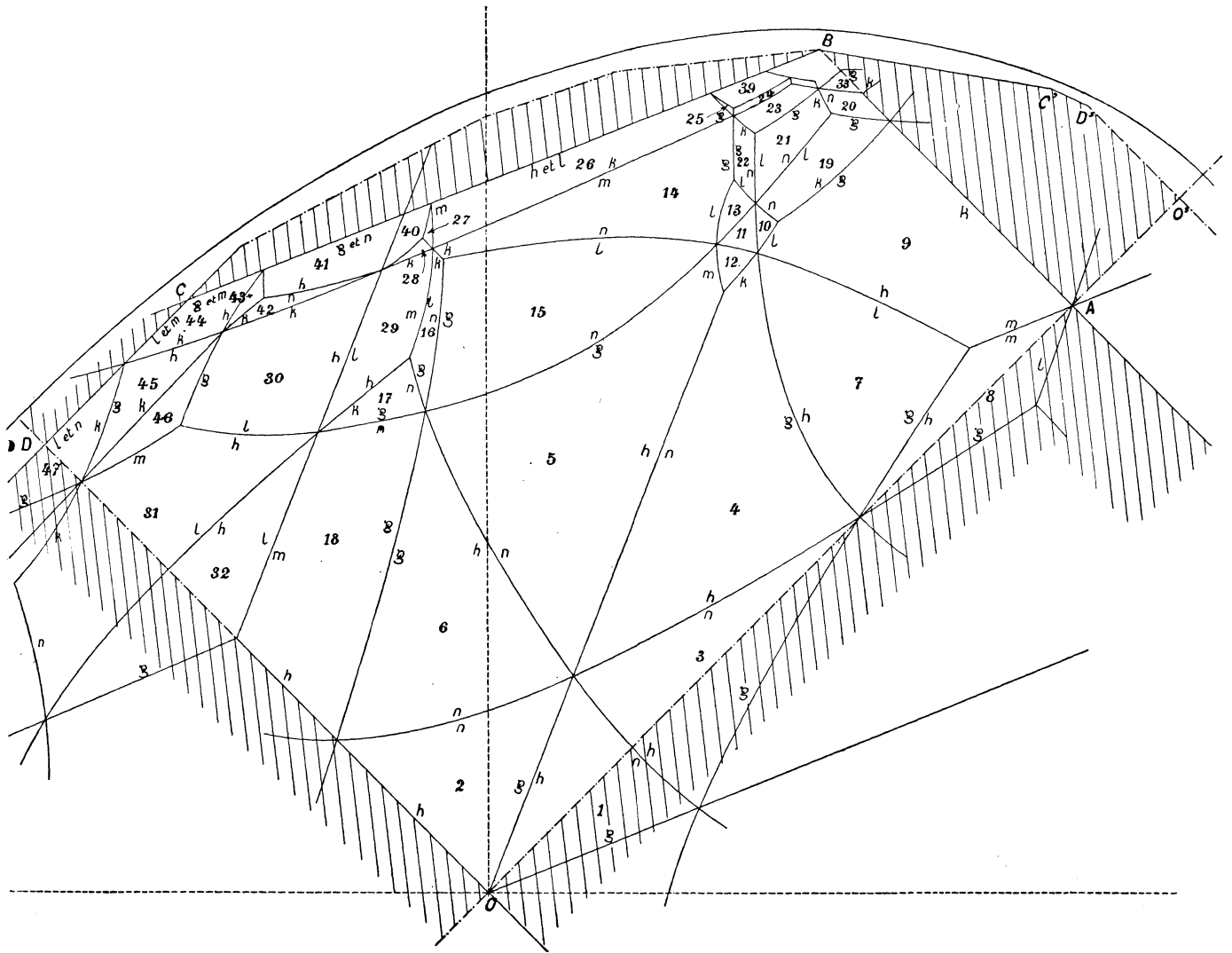
---

# PLANCHE I.





# PLANCHE II.



Agrandissement  
de la région voisine  
du point B.

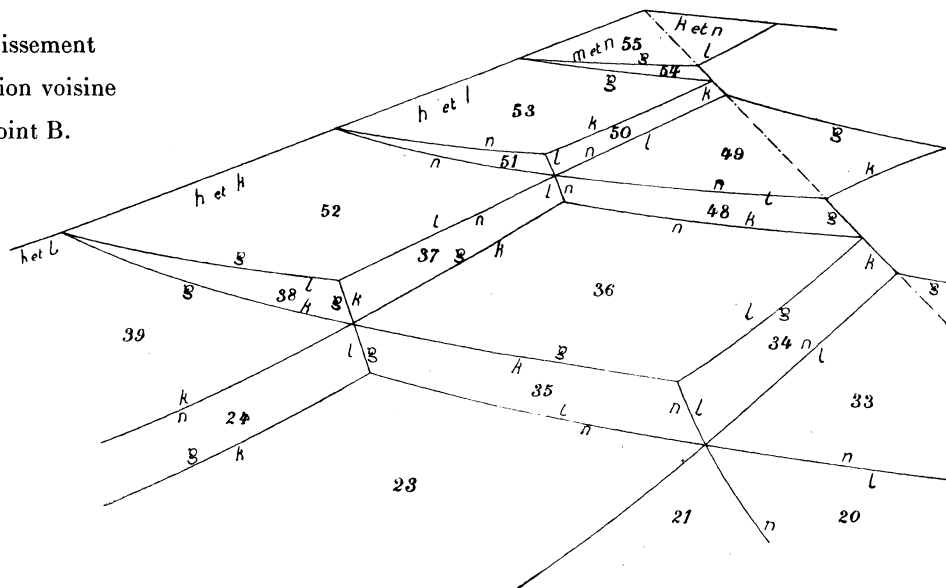






PLANCHE III.

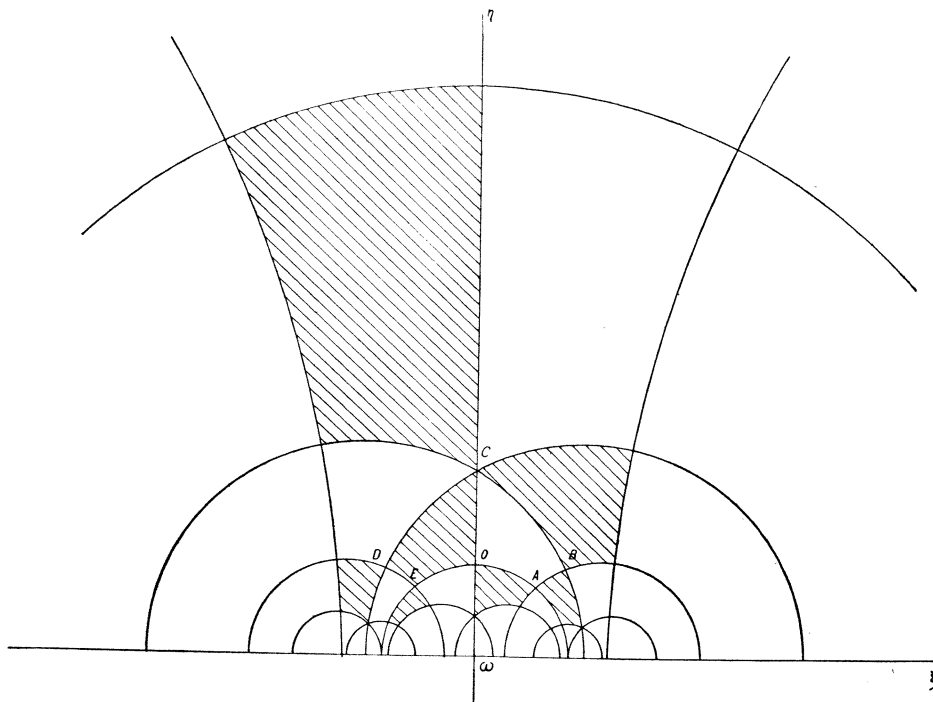
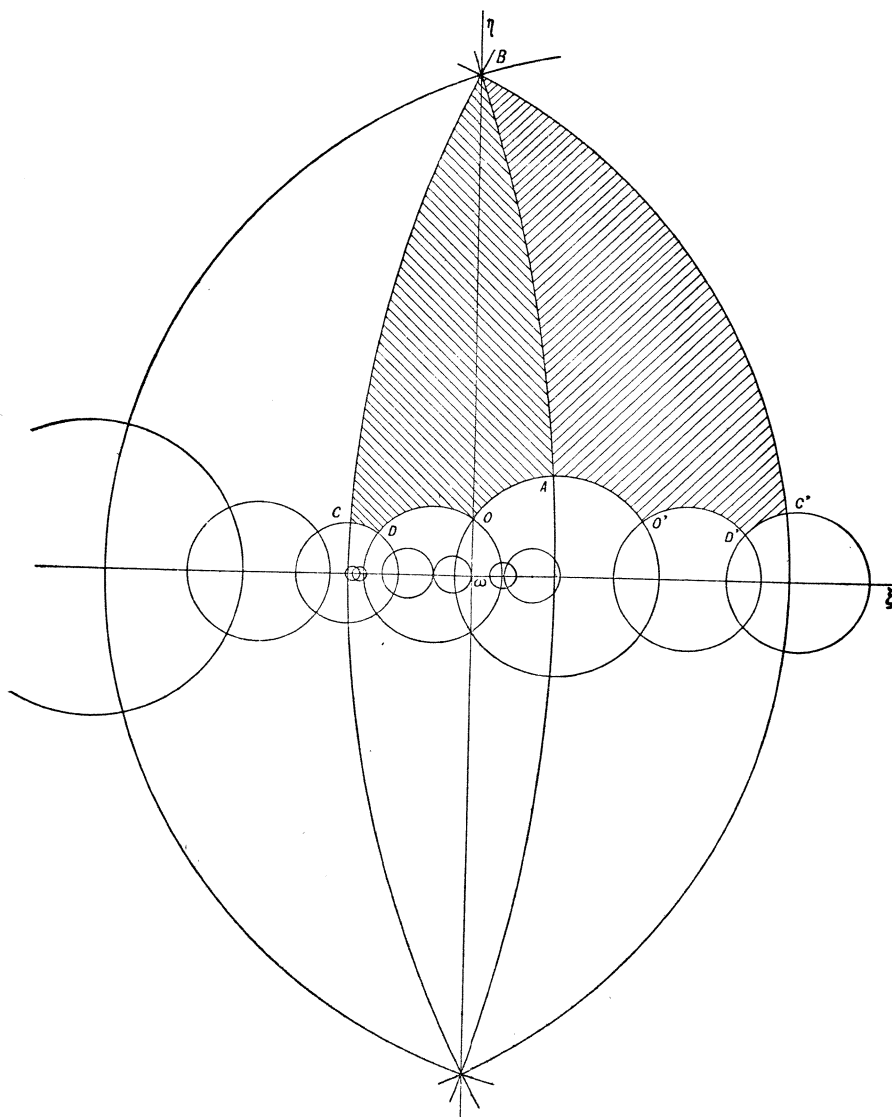


PLANCHE IV.





A detailed geometric diagram of a crystal section, likely a calcite crystal, showing various points, lines, and angles. The diagram is enclosed in an oval boundary. A central point is labeled  $Q$ . A vertical dashed line passes through  $Q$ . A horizontal dashed line also passes through  $Q$ . A diagonal dashed line passes through  $Q$ . A shaded region is bounded by points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , and  $E$ . The region is filled with diagonal hatching. Points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , and  $E$  are labeled. Points  $G$  and  $H$  are also labeled. Angles are labeled with  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$ ,  $O_5$ ,  $O_6$ ,  $O_7$ ,  $O_8$ ,  $O_9$ ,  $O_{10}$ ,  $O_{11}$ ,  $O_{12}$ ,  $O_{13}$ ,  $O_{14}$ ,  $O_{15}$ ,  $O_{16}$ ,  $O_{17}$ ,  $O_{18}$ ,  $O_{19}$ ,  $O_{20}$ ,  $O_{21}$ ,  $O_{22}$ ,  $O_{23}$ ,  $O_{24}$ ,  $O_{25}$ ,  $O_{26}$ ,  $O_{27}$ ,  $O_{28}$ ,  $O_{29}$ ,  $O_{30}$ ,  $O_{31}$ ,  $O_{32}$ ,  $O_{33}$ ,  $O_{34}$ ,  $O_{35}$ ,  $O_{36}$ ,  $O_{37}$ ,  $O_{38}$ ,  $O_{39}$ ,  $O_{40}$ ,  $O_{41}$ ,  $O_{42}$ ,  $O_{43}$ ,  $O_{44}$ ,  $O_{45}$ ,  $O_{46}$ ,  $O_{47}$ ,  $O_{48}$ ,  $O_{49}$ ,  $O_{50}$ ,  $O_{51}$ ,  $O_{52}$ ,  $O_{53}$ ,  $O_{54}$ ,  $O_{55}$ ,  $O_{56}$ ,  $O_{57}$ ,  $O_{58}$ ,  $O_{59}$ ,  $O_{60}$ ,  $O_{61}$ ,  $O_{62}$ ,  $O_{63}$ ,  $O_{64}$ ,  $O_{65}$ ,  $O_{66}$ ,  $O_{67}$ ,  $O_{68}$ ,  $O_{69}$ ,  $O_{70}$ ,  $O_{71}$ ,  $O_{72}$ ,  $O_{73}$ ,  $O_{74}$ ,  $O_{75}$ ,  $O_{76}$ ,  $O_{77}$ ,  $O_{78}$ ,  $O_{79}$ ,  $O_{80}$ ,  $O_{81}$ ,  $O_{82}$ ,  $O_{83}$ ,  $O_{84}$ ,  $O_{85}$ ,  $O_{86}$ ,  $O_{87}$ ,  $O_{88}$ ,  $O_{89}$ ,  $O_{90}$ ,  $O_{91}$ ,  $O_{92}$ ,  $O_{93}$ ,  $O_{94}$ ,  $O_{95}$ ,  $O_{96}$ ,  $O_{97}$ ,  $O_{98}$ ,  $O_{99}$ ,  $O_{100}$ ,  $O_{101}$ ,  $O_{102}$ ,  $O_{103}$ ,  $O_{104}$ ,  $O_{105}$ ,  $O_{106}$ ,  $O_{107}$ ,  $O_{108}$ ,  $O_{109}$ ,  $O_{110}$ ,  $O_{111}$ ,  $O_{112}$ ,  $O_{113}$ ,  $O_{114}$ ,  $O_{115}$ ,  $O_{116}$ ,  $O_{117}$ ,  $O_{118}$ ,  $O_{119}$ ,  $O_{120}$ ,  $O_{121}$ ,  $O_{122}$ ,  $O_{123}$ ,  $O_{124}$ ,  $O_{125}$ ,  $O_{126}$ ,  $O_{127}$ ,  $O_{128}$ ,  $O_{129}$ ,  $O_{130}$ ,  $O_{131}$ ,  $O_{132}$ ,  $O_{133}$ ,  $O_{134}$ ,  $O_{135}$ ,  $O_{136}$ ,  $O_{137}$ ,  $O_{138}$ ,  $O_{139}$ ,  $O_{140}$ ,  $O_{141}$ ,  $O_{142}$ ,  $O_{143}$ ,  $O_{144}$ ,  $O_{145}$ ,  $O_{146}$ ,  $O_{147}$ ,  $O_{148}$ ,  $O_{149}$ ,  $O_{150}$ ,  $O_{151}$ ,  $O_{152}$ ,  $O_{153}$ ,  $O_{154}$ ,  $O_{155}$ ,  $O_{156}$ ,  $O_{157}$ ,  $O_{158}$ ,  $O_{159}$ ,  $O_{160}$ ,  $O_{161}$ ,  $O_{162}$ ,  $O_{163}$ ,  $O_{164}$ ,  $O_{165}$ ,  $O_{166}$ ,  $O_{167}$ ,  $O_{168}$ ,  $O_{169}$ ,  $O_{170}$ ,  $O_{171}$ ,  $O_{172}$ ,  $O_{173}$ ,  $O_{174}$ ,  $O_{175}$ ,  $O_{176}$ ,  $O_{177}$ ,  $O_{178}$ ,  $O_{179}$ ,  $O_{180}$ ,  $O_{181}$ ,  $O_{182}$ ,  $O_{183}$ ,  $O_{184}$ ,  $O_{185}$ ,  $O_{186}$ ,  $O_{187}$ ,  $O_{188}$ ,  $O_{189}$ ,  $O_{190}$ ,  $O_{191}$ ,  $O_{192}$ ,  $O_{193}$ ,  $O_{194}$ ,  $O_{195}$ ,  $O_{196}$ ,  $O_{197}$ ,  $O_{198}$ ,  $O_{199}$ ,  $O_{200}$ ,  $O_{201}$ ,  $O_{202}$ ,  $O_{203}$ ,  $O_{204}$ ,  $O_{205}$ ,  $O_{206}$ ,  $O_{207}$ ,  $O_{208}$ ,  $O_{209}$ ,  $O_{210}$ ,  $O_{211}$ ,  $O_{212}$ ,  $O_{213}$ ,  $O_{214}$ ,  $O_{215}$ ,  $O_{216}$ ,  $O_{217}$ ,  $O_{218}$ ,  $O_{219}$ ,  $O_{220}$ ,  $O_{221}$ ,  $O_{222}$ ,  $O_{223}$ ,  $O_{224}$ ,  $O_{225}$ ,  $O_{226}$ ,  $O_{227}$ ,  $O_{228}$ ,  $O_{229}$ ,  $O_{230}$ ,  $O_{231}$ ,  $O_{232}$ ,  $O_{233}$ ,  $O_{234}$ ,  $O_{235}$ ,  $O_{236}$ ,  $O_{237}$ ,  $O_{238}$ ,  $O_{239}$ ,  $O_{240}$ ,  $O_{241}$ ,  $O_{242}$ ,  $O_{243}$ ,  $O_{244}$ ,  $O_{245}$ ,  $O_{246}$ ,  $O_{247}$ ,  $O_{248}$ ,  $O_{249}$ ,  $O_{250}$ ,  $O_{251}$ ,  $O_{252}$ ,  $O_{253}$ ,  $O_{254}$ ,  $O_{255}$ ,  $O_{256}$ ,  $O_{257}$ ,  $O_{258}$ ,  $O_{259}$ ,  $O_{260}$ ,  $O_{261}$ ,  $O_{262}$ ,  $O_{263}$ ,  $O_{264}$ ,  $O_{265}$ ,  $O_{266}$ ,  $O_{267}$ ,  $O_{268}$ ,  $O_{269}$ ,  $O_{270}$ ,  $O_{271}$ ,  $O_{272}$ ,  $O_{273}$ ,  $O_{274}$ ,  $O_{275}$ ,  $O_{276}$ ,  $O_{277}$ ,  $O_{278}$ ,  $O_{279}$ ,  $O_{280}$ ,  $O_{281}$ ,  $O_{282}$ ,  $O_{283}$ ,  $O_{284}$ ,  $O_{285}$ ,  $O_{286}$ ,  $O_{287}$ ,  $O_{288}$ ,  $O_{289}$ ,  $O_{290}$ ,  $O_{291}$ ,  $O_{292}$ ,  $O_{293}$ ,  $O_{294}$ ,  $O_{295}$ ,  $O_{296}$ ,  $O_{297}$ ,  $O_{298}$ ,  $O_{299}$ ,  $O_{300}$ ,  $O_{301}$ ,  $O_{302}$ ,  $O_{303}$ ,  $O_{304}$ ,  $O_{305}$ ,  $O_{306}$ ,  $O_{307}$ ,  $O_{308}$ ,  $O_{309}$ ,  $O_{310}$ ,  $O_{311}$ ,  $O_{312}$ ,  $O_{313}$ ,  $O_{314}$ ,  $O_{315}$ ,  $O_{316}$ ,  $O_{317}$ ,  $O_{318}$ ,  $O_{319}$ ,  $O_{320}$ ,  $O_{321}$ ,  $O_{322}$ ,  $O_{323}$ ,  $O_{324}$ ,  $O_{325}$ ,  $O_{326}$ ,  $O_{327}$ ,  $O_{328}$ ,  $O_{329}$ ,  $O_{330}$ ,  $O_{331}$ ,  $O_{332}$ ,  $O_{333}$ ,  $O_{334}$ ,  $O_{335}$ ,  $O_{336}$ ,  $O_{337}$ ,  $O_{338}$ ,  $O_{339}$ ,  $O_{340}$ ,  $O_{341}$ ,  $O_{342}$ ,  $O_{343}$ ,  $O_{344}$ ,  $O_{345}$ ,  $O_{346}$ ,  $O_{347}$ ,  $O_{348}$ ,  $O_{349}$ ,  $O_{350}$ ,  $O_{351}$ ,  $O_{352}$ ,  $O_{353}$ ,  $O_{354}$ ,  $O_{355}$ ,  $O_{356}$ ,  $O_{357}$ ,  $O_{358}$ ,  $O_{359}$ ,  $O_{360}$ ,  $O_{361}$ ,  $O_{362}$ ,  $O_{363}$ ,  $O_{364}$ ,  $O_{365}$ ,  $O_{366}$ ,  $O_{367}$ ,  $O_{368}$ ,  $O_{369}$ ,  $O_{370}$ ,  $O_{371}$ ,  $O_{372}$ ,  $O_{373}$ ,  $O_{374}$ ,  $O_{375}$ ,  $O_{376}$ ,  $O_{377}$ ,  $O_{378}$ ,  $O_{379}$ ,  $O_{380}$ ,  $O_{381}$ ,  $O_{382}$ ,  $O_{383}$ ,  $O_{384}$ ,  $O_{385}$ ,  $O_{386}$ ,  $O_{387}$ ,  $O_{388}$ ,  $O_{389}$ ,  $O_{390}$ ,  $O_{391}$ ,  $O_{392}$ ,  $O_{393}$ ,  $O_{394}$ ,  $O_{395}$ ,  $O_{396}$ ,  $O_{397}$ ,  $O_{398}$ ,  $O_{399}$ ,  $O_{400}$ ,  $O_{$

