

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

GUY ROBIN

Sur l'ordre maximum d'un élément du groupe des permutations

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 6, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A3_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ORDRE MAXIMUM D'UN ÉLÉMENT
DU GROUPE DES PERMUTATIONS

par Guy ROBIN ⁽¹⁾ ⁽²⁾

1. Introduction.

Soit $g(n) = \max_{\sigma} (\text{ordre de } \sigma)$ le maximum portant sur l'ensemble des permutations de n éléments. L'évaluation asymptotique de $g(n)$ a été réalisée par LANDAU ([LAN], 1909), SHAH ([SHA], 1939), SZALAY ([SZA], 1980). Ce dernier donnait :

$$\log g(n) = \sqrt{n \log n} \left(1 + \frac{\log \log n - 1}{2 \log n} - \frac{(\log \log n)^2 - 6 \log \log n + o(1)}{8 \log^2 n} \right).$$

Le but de l'exposé est de donner le meilleur développement asymptotique possible de $\log g(n)$ et de $\omega(g(n))$, compte tenu des connaissances actuelles sur le terme reste dans le théorème des nombres premiers ($\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n).

2. Notations.

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$$

$$\pi_r(x) = \sum_{p \leq x} p^r, \quad r \in \mathbb{R}; \quad \pi(x) = \pi_0(x)$$

$$\Pi_r(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{p^{rm}}{m}, \quad r \in \mathbb{R}; \quad \Pi(x) = \Pi_0(x)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} \text{ prolongée analytiquement}$$

$$\Theta = \sup \{ \operatorname{Re} \rho; \zeta(\rho) = 0 \}.$$

On désigne par $R(x)$ une majoration du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers de telle sorte que

$$\pi(x) - \operatorname{Li}(x) = O(R(x)) \quad x \rightarrow \infty$$

$$\Pi(x) - \operatorname{Li}(x) = O(R(x))$$

$$\psi(x) - x = O(R(x) \log x).$$

On définit $S(x)$ par

$$\text{si } \Theta = 1, \quad S(x) = R(x); \quad \text{si } \Theta < 1, \quad S(x) = x^{\Theta} / \log x.$$

⁽¹⁾ Guy ROBIN, UER Sciences, Département de Mathématiques, Université de Limoges, 123 rue Albert Thomas, 87100 LIMOGES

⁽²⁾ Travail en collaboration avec J.-L. NICOLAS et J.-P. MASSIAS.

On sait que, si $\Theta = 1/2$, $R(x) = \Omega_{\pm}(S(x) \log \log \log x)$.

3. Résultats.

Nous démontrons les résultats suivants.

THÉOREME 1. - On a, pour $n \rightarrow \infty$,

$$(i) \quad \log g(n) = \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)} + O(\log n \cdot S(\sqrt{n \log n})),$$

et, en particulier si $\Theta < 1$,

$$\log g(n) = \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)} + O((n \log n)^{\Theta/2}).$$

Si $\Theta > 1/2$, on a, pour tout $\xi < \Theta$,

$$(ii) \quad \log g(n) = \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)} + \Omega_{\pm}((n \log n)^{\xi/2}),$$

et s'il existe un zéro de partie réelle Θ ,

$$(iii) \quad \log g(n) = \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)} + \Omega_{\pm}((n \log n)^{\Theta/2}).$$

Enfin, si l'hypothèse de Riemann est vraie,

$$(iv) \quad \log g(n) < \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)} \quad \text{pour } n \text{ assez grand},$$

$$(v) \quad \log g(n) = \sqrt{\text{Li}^{-1}(n)} - \frac{2 - \sqrt{2}}{3} (n \log n)^{1/4} + \Omega_{\pm}(n \log n)^{1/4}.$$

THÉOREME 2. - On a, pour $n \rightarrow \infty$,

$$(i) \quad \omega(g(n)) = \text{Li}(\sqrt{\text{Li}^{-1}(n)}) + O(S \sqrt{n \log n}),$$

et, en particulier si $\Theta < 1$,

$$\omega(g(n)) = \text{Li}(\sqrt{\text{Li}^{-1}(n)}) + O((n \log n)^{\Theta/2} / \log n).$$

Si $1/2 < \Theta < 1$, on a, pour tout $\xi < \Theta$,

$$(ii) \quad \omega(g(n)) = \text{Li}(\sqrt{\text{Li}^{-1}(n)}) + \Omega_{\pm}((n \log n)^{\xi/2}),$$

et s'il existe un zéro de partie réelle Θ ,

$$(iii) \quad \omega(g(n)) = \text{Li}(\sqrt{\text{Li}^{-1}(n)}) + \Omega_{\pm}((n \log n)^{\Theta/2} / \log n).$$

Enfin, si l'hypothèse de Riemann est vraie,

$$(iv) \quad \omega(g(n)) < \text{Li}(\sqrt{\text{Li}^{-1}(n)}) \quad \text{pour } n \text{ assez grand}.$$

COROLLAIRE. - On a, pour $n \rightarrow +\infty$, et $k \in \mathbb{N}$,

$$\log g(n) = \sqrt{n \log n} \left(1 + \sum_{i=1}^k \frac{A_i(\log \log n)}{(\log n)^i} + O\left(\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)^{k+1}\right) \right)$$

$$\omega(g(n)) = 2\sqrt{\frac{n}{\log n}} \left(1 + \sum_{i=1}^k \frac{B_i(\log \log n)}{(\log n)^i} + O\left(\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)^{k+1}\right) \right)$$

où A_i et B_i sont des polynômes de degré i . On a, en particulier,

$$A_1(x) = \frac{x-1}{2}, \quad A_2(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 6x + 9), \quad A_3(x) = \frac{1}{16}(x^3 - 11x^2 + 39x - 53),$$

$$B_1(x) = -\frac{1}{2}(x-3), \quad B_2(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 22x + 55), \quad B_3(x) = -\frac{1}{16}(5x^3 - 61x^2 + 319x - 711)$$

4. "Optimisation" du problème.

Il est facile ([NIC 1]) de montrer que la valeur du programme suivant est $g(n)$

$$P_n : \begin{cases} \text{Max } \prod p_i^{r_i} \\ \sum p_i^{r_i} \leq n \\ p_i \text{ premier.} \end{cases}$$

Considérons le problème dual :

$$Q_N : \begin{cases} \text{Min } \sum p_i^{r_i} \\ \prod p_i^{r_i} \geq N \\ p_i \text{ premier.} \end{cases}$$

En posant $\lambda(n) = \sum p_i^{r_i}$ si $n = \sum p_i^{r_i}$, on a

$$Q_n : \begin{cases} \text{Min } \lambda(n) \\ n \geq N. \end{cases}$$

La valeur de ce programme est obtenue pour $n = N_0$: c'est la valeur de Q_{N_0} , problème facile à résoudre compte tenu de l'unicité de la décomposition de N_0 en facteurs premiers.

Considérons encore le problème "relaché" suivant,

$$Q_p : \begin{cases} \text{Min } \lambda(N) - \rho \log N \\ N \text{ entier} \end{cases}$$

et soit $G = \{N ; \exists \rho > 0 \text{ tel que } N \text{ soit solution de } Q_p\}$.

On a alors ([NIC 2])

1° $G \subset g(\mathbb{N})$.

2° Il y a équivalence entre :

(i) $M \in g(\mathbb{N})$,

(ii) la contrainte de G_M est saturée,

(iii) $\forall M' > N$, alors $\lambda(M') > \lambda(N)$.

Nous commençons à étudier la fonction λ sur les éléments de G (qui jouent le rôle des nombres hautement composés de Ramanujan), puis nous prolongerons son étude à tous les éléments de $g(N)$. Nous en déduisons alors le comportement de $g(n)$.

Étude des éléments de G . - Soit $\rho > 2/\log 2$ et $x_1 > 4$, défini par $x_1/\log x_1 = \rho$.

Pour $i \geq 2$, soit x_i , défini par $(x_i^i - x_i^{i-1})/\log x_i = \rho$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît vers 1 et, si l'on pose $M_{x_1} = \prod_{p \leq x_1} p$, le nombre $N = N_\rho = \prod_{x_i \geq 2} M_{x_i}$ est solution de Q_ρ .

On a alors les propriétés simples suivantes, lorsque $\rho \rightarrow \infty$:

$$(i) \quad x_i = \left(\frac{x_1}{i}\right)^{1/i} (1 + o(1/\log x_1)),$$

$$(ii) \quad \log N_\rho = \sum_{i \geq 1} \theta(x_i) \sim \theta(x_1) \sim x_1,$$

$$(iii) \quad \lambda(N) \sim \sum_{p \leq x_1} p \sim \text{Li}(x_1^2) \sim x_1^2/2 \log x_1.$$

En posant $N = g(n)$, on retrouve, si $N \in G$, le résultat de Landau $\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}$.

5. Étude de $\text{Li}(\log^2 N) - \lambda(N)$ pour $N = N_\rho \in G$.

Nous démontrons successivement les lemmes suivants.

LEMME 1. - Pour $x_1 \rightarrow \infty$,

$$\text{Li}(\log^2 N) - \lambda(N) = \text{Li}(\theta^2(x_1)) - \pi_1(x_1) + \frac{\sqrt{2}}{3} x_1^{3/2}/\log x_1 + o(x_1^{3/2}/\log^2 x_1).$$

LEMME 2. (en utilisant les formules explicites). - Pour $x \rightarrow \infty$,

$$\text{Li}(\psi^2(x)) - \Pi_1(x) = - \sum_p \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} / \log x + o\left(\frac{x^{\Theta+1}}{\log^2 x}\right).$$

LEMME 3. - Pour $x \rightarrow \infty$,

$$\text{Li}(\psi^2(x)) - \Pi_1(x) = \text{Li}(\theta^2(x)) - \pi_1(x) + \frac{2}{3} x^{3/2}/\log x + o(x^{3/2}/\log^2 x).$$

D'où finalement, si $x_1 \rightarrow \infty$,

$$\text{Li}(\log^2 N) - \lambda(N) = - \sum_p \frac{x_1^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} / \log x_1 + \frac{\sqrt{2}-2}{3} \frac{x_1^{3/2}}{\log x_1} + o(x_1^{\Theta+1}/\log^2 x_1).$$

Ces relations permettent d'obtenir facilement les résultats du théorème 1 sur les

n tels que $g(n) \in G$.

Précisons les théorèmes d'oscillation lorsque $\Theta > 1/2$. Comme

$$\text{Li}(\log^2 N) - \mathcal{L}(N) = (\text{Li}(\psi^2(x_1)) - \Pi_1(x_1))(1 + \theta(1)),$$

il suffit d'étudier,

$$\text{Li}(\psi^2(x)) - \Pi_1(x) = \text{Li}(x^2) - x \frac{\psi(x) - x}{\log x} - \Pi_1(x) + O(R^2(x) \log x).$$

Lorsque $\Theta < 1$, le théorème de Landau, via la transformée de Mellin, est suffisant. Pour $\Theta = 1$, il faut procéder comme dans ([ROB 1]) et étudier la fonction,

$$x \longmapsto \text{Li}(x^2) - \Pi_1(x) - x \frac{\psi(x) - x}{\log x} + x^{5+1} \quad \xi < 1.$$

Soit maintenant n quelconque de $\underline{N}$, et N le nombre de G immédiatement inférieur à $g(n)$ de paramètre ρ , et soit x_1 tel que $x_1/\log x_1 = \rho$.

On montre alors que

$$\begin{cases} n = \mathcal{L}(N) + O(x_1) \\ \log g(n) = \log N + O(\log x_1) \end{cases}$$

ce qui permet de démontrer le théorème 1 dans sa généralité.

6. Démonstration du théorème 2.

Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors

$$\pi(x) < \text{Li}(\theta(x)) \quad \text{pour } x \text{ assez grand ([ROB])},$$

d'où l'on déduit que

$$\omega(n) \leq \text{Li}(\log n) \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

et par suite ;

$$\omega(g(n)) \leq \text{Li}(\log g(n)) \leq \text{Li}(\sqrt{\text{Li}^{-1}(n)}) \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Si $\Theta > 1/2$, le théorème 2 est facile à établir pour les n tels que $g(n) \in G$; pour n quelconque, on utilisera les deux lemmes suivants.

LEMME 4. - Soit $n \geq 1$, $N \in G$ immédiatement inférieur à $g(n)$, ρ tel que N soit solution de Q_ρ , et x_1 défini par $x_1/\log x_1 = \rho$. Pour $M \in \underline{N}$, on définit le bénéfice de M par rapport à ρ par $\text{bén}_\rho(M) = \mathcal{L}(M) - \mathcal{L}(N) - \rho \log M/N$.

Alors,

$$\text{bén}_\rho g(n) = O(x_1/\log x_1).$$

LEMME 5. - Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme précédent,

$$\omega(g(n)) = \omega(N) + O(\sqrt{x_1}/\log x_1).$$

Dans la démonstration, on utilise le théorème d'Hoheisel et l'inégalité de Brun-Titchmarsh.

Les résultats sur l'oscillation utilisent le lemme suivant.

LEMME 6. - Si $A(x) = \Pi(x) - Li^{-1}(\Pi_1(x)^{1/2})$, alors

$$A(x) = O(S(x)) ,$$

$$A(x) = \Omega_{\pm}(S(x)) \text{ s'il existe un zéro de } \zeta \text{ de partie réelle } \theta .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [LAN] LANDAU (Edmund). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bände 1 und 2. - Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909. [2te Auflage. - New York, Chelsea publishing Company, 1953.]
- [NIC 1] NICOLAS (Jean-Louis). - Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "Highly composite numbers", Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 129-191.
- [NIC 2] NICOLAS (Jean-Louis). - Sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe S_n des permutations, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, 1968, p. 315-332.
- [ROB 1] ROBIN (G.). - Sur la différence $Li(\theta(x)) - \pi(x)$, Ann. Fac. Sc. Toulouse, t. 6, 1984, p. 257-268.
- [SHA] SHAH (S. M.). - An inequality for the arithmetical function $g(x)$, J. of Indian math. Soc., t. 3, 1939, p. 316-318.
- [SZA] SZALAY (M.). - On the maximal order in S_n and S_n^* , Acta Arithm., Warszawa, t. 37, 1980, p. 321-331.
-