

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

JEAN-PAUL ALLOUCHE
Sur certains produits infinis

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 4, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A2_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINS PRODUITS INFINIS

par Jean-Paul ALLOUCHE (*)

Cet exposé est un peu la suite de celui proposé ici l'an dernier et résume trois articles, l'un en collaboration avec H. COHEN [1], le second avec H. COHEN, M. MENDES-FRANCE et J. O. SHALLIT [2], le troisième avec J. O. SHALLIT [3].

A l'origine un résultat de WOODS et ROBBINS ([6], [4]) généralisé par J. O. SHALLIT [5], puis par H. COHEN et l'auteur [1] stipule que

$$(1/2)^{a(0)} (3/4)^{a(1)} (5/6)^{a(2)} \dots = 2^{-1/2}$$

où $a(n) = (-1)^{s(n)}$ et $s(n)$ est la somme des chiffres de n en base 2.

Le produit infini ci-dessus inspire une conjecture proposée dans [5] et prouvée dans [1].

Définissons la suite $b(n)$ par

$$b(0) = 1 ,$$

$$\prod_{k \leq n} \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right)^{b(k)} < 2^{-1/2} , \text{ alors } b(n) = -1 ,$$

$$\prod_{k \leq n} \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right)^{b(k)} > 2^{-1/2} , \text{ alors } b(n) = 1 .$$

Alors la suite $b(n)$ vérifie

$$b(n) = (-1)^{s(n)} .$$

Dans [2] les auteurs établissent le théorème suivant.

THÉORÈME. - Soit $s_q(n)$ la somme des chiffres de n en base q .

- Si $\sup(|x|^{q-1} , |1+x+\dots+x^{q-1}|) < q$, alors

$$\sum_{n \geq 0} x^{s_q(n)} \log \frac{n+1}{q \lfloor n/q \rfloor + q} = \frac{-\log q}{1-x} ,$$

et l'on peut dans ce domaine de convergence dériver sous le signe somme à n'importe quel ordre.

- Si $\sup(|x|^{q-1} , |1+x+\dots+x^{q-1}|) > q$, la série ci-dessus diverge.

(*) Jean-Paul ALLOUCHE, UER Mathématiques et Informatique, UA 226, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

Ceci permet de donner les valeurs de nouveaux produits infinis, par exemple

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^{(-3/2)^{s(n)}} = 2^{-2/5},$$

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^{s(n)} (-1)^{s(n)} = 2^{1/4}$$

($s(n)$ est toujours la somme des chiffres de n en base 2).

Dans ce même article les auteurs remplacent $s_q(n)$ par $u(n)$, le nombre 11 dans le développement binaire de n (de sorte que $(-1)^{u(n)}$ est la suite de Rudin-Shapiro), et montrent par exemple

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)} \right)^{(-1)^{u(n)}} = 2^{-1/2}.$$

Enfin dans un travail en préparation [3], J. O. SHALLIT et l'auteur étudient des produits infinis où intervient plus généralement le nombre d'apparitions d'un mot w dans le développement binaire de n .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLOUCHE (Jean-Paul) and COHEN (Henri). - Dirichlet series and curious infinite products, Bull. of London math. Soc., t. 17, 1985, p. 531-538.
 - [2] ALLOUCHE (Jean-Paul), COHEN (Henri), MENDES-FRANCE (Michel) et SHALLIT (J. O.). - De nouveaux curieux produits infinis, Acta Arithm. Warszawa, t. 49, 1987, (à paraître).
 - [3] ALLOUCHE (Jean-Paul) et SHALLIT (J. O.). - (En préparation).
 - [4] ROBBINS (David). - Solution to problem E2692, Amer. math. Monthly, t. 86, 1979, p. 394-395.
 - [5] SHALLIT (J. O.). - On infinite products associated with sums of digits, J. of Number Theory, t. 21, 1985, p. 128-134.
 - [6] WOODS (Donald R.). - Elementary problem proposal, E2692, Amer. math. Monthly, t. 85, 1978, p. 48.
-