

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

JEAN-PAUL ALLOUCHE

Suites de Rudin-Shapiro généralisées

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 24, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A14_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUITES DE RUDIN-SHAPIRO GÉNÉRALISÉES

par Jean-Paul ALLOUCHE (*)

Nous nous proposons ici de résumer un article avec P. LIARDET [2] (voir aussi [1]), où l'on construit des suites vérifiant la même inégalité que la suite de Rudin-Shapiro classique.

Rappelons que, si (a_n) est une suite à valeurs ± 1 , on a

$$\sqrt{N} \leq \sup_{\theta} \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{2i\pi n\theta} \right| \leq N$$

(l'inégalité de droite est triviale, celle de gauche s'obtient en minorant la norme L^∞ par la norme L^2).

Par ailleurs, pour presque toute (au sens de la mesure de Lebesgue) suite (a_n) à valeurs ± 1 , on a

$$\sup_{\theta} \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{2i\pi n\theta} \right| \leq C \sqrt{N \log N}.$$

RUDIN [7] et SHAPIRO [8] ont construit indépendamment une suite (u_n) à valeurs ± 1 vérifiant

$$(*) \quad \sup_{\theta} \left| \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{2i\pi n\theta} \right| \leq C \sqrt{N},$$

autrement dit, le "bon" ordre de grandeur à l'infini du $\sup$ est $\sqrt{N}$.

Deux points méritent d'être soulignés, d'une part cette suite (u_n) a une expression simple : $u_n = (-1)^{v_n}$, où v_n est le nombre de 11 dans le développement binaire de n [4], d'autre part cette suite est déterministe (au sens de [6]), et même engendrée par automate fini [5].

Nous montrons dans [2] que d'autres suites vérifient l'inégalité (*), par exemple $u_n = (-1)^{w_n}$, où w_n est le nombre de $1 * \dots * 1$ dans le développement binaire de n .

De telles suites sont aussi engendrées par automates, et nous proposons de les appeler suites de Rudin-Shapiro généralisées. Notons pour conclure que l'inégalité (*) reste valable si l'on remplace $e^{2i\pi n\theta}$ par $f(n)$ où f est une fonction 2-multiplicative de module 1 (voir aussi [3]), mais que les questions suivantes sont ouvertes :

(*) Jean-Paul ALLOUCHE, UER Mathématiques et Informatique, UA 226, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

- Caractériser les suites (u_n) vérifiant (*), ou au moins celles d'entre elles d'entropie nulle, ou automatiques.
- Si l'inégalité (*) a lieu pour une certaine suite (u_n) , peut-on remplacer $e^{2im\theta}$ par $f(n)$ (f 2-Multiplicative de module 1) dans cette inégalité ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLOUCHE (Jean-Paul). - Les suites de Rudin-Shapiro généralisées, des suites déterministes de "dimension" maximale. Congrès "Des fractales en mathématique et en physique", CIRM-Luminy 1986.
 - [2] ALLOUCHE (Jean-Paul) et LIARDET (P.). - (En préparation).
 - [3] ALLOUCHE (Jean-Paul) et MENDES-FRANCE (Michel). - On an extremal property of the Rudin-Shapiro sequence, *Mathematika*, London, t. 32, 1985, p. 33-38.
 - [4] BRILLHART (John) et CARLITZ (L.). - Note on the Shapiro polynomials, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 25, 1970, p. 114-118.
 - [5] CHRISTOL (Gilles), KAMAE (T.), MENDES-FRANCE (Michel) et RAUZY (G.). - Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. math. France*, t. 108, 1980, p. 401-419.
 - [6] RAUZY (G.). - Nombres normaux et processus déterministes, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 29, 1976, p. 211-225.
 - [7] RUDIN (Walter). - Some theorems on Fourier coefficients, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 10, 1959, p. 855-859.
 - [8] SHAPIRO (Harold S.). - Extremal problems for polynomials and power series, Thesis, MIT, 1951
-