MARIE-JOSÉ BERTIN

Petits nombres de Salem

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 21, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A12_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
3e année, 1985/86, n° 21, 7 p.

12 mai 1986

PETITS NOMBRES DE SALEM

par Marie-José BERTIN (*)

Un <u>nombre de Salem</u> est un entier algébrique τ , $\tau > 1$, dont tous les conjugués autres que lui-même ont un module inférieur ou égal à 1, avec effectivement des conjugués de module 1 .

Ce nombre est racine d'un polynôme <u>réciproque</u>, irréductible, unitaire, à coefficients entiers.

Un <u>"petit" nombre de Salem</u> est un nombre de Salem inférieur à 1,3. Le plus petit connu actuellement est le nombre τ_0 , de degré 10 , $\tau_0 = 1,1762808\ldots$, de polynôme réciproque

$$T(X) = X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$$

ou encore

$$T = 1\ 1\ 0\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 0\ 1\ 1$$

(selon la notation de D. W. BOYD).

Le nombre τ_0 est connu depuis 1933, signalé par D. H. LEHMER [8] qui ne pouvait alors soupçonner tous les travaux de PISOT et SALEM sur cette classe de nombres à laquelle τ_0 appartient. En 1933, LEHMER s'intéressait à la quantité

$$M(\alpha) = \prod_{|\alpha_j|>1} |\alpha_j| ,$$

où α désigne un entier algébrique $(\alpha \neq 0 , \alpha \neq 1)$ et $\alpha_1 , \ldots , \alpha_d$ les conjugués de α . Il se demandait s'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $M(\alpha) > 1 + \epsilon_0$, pour α entier algébrique non racine de l'unité. Aussi, en considérant de façon aussi systématique que possible les polynômes de degré inférieur ou égal à 14, il avait trouvé $M(\alpha) \geqslant \tau_0$.

Le problème, connu aujourd'hui sous le nom de problème de Lehmer [8], était apparu lors d'une recherche de LEHMER sur les grands nombres premiers. Plus tard, on retrouvera ce problème en théorie ergodique. Enfin, ce problème est lié à une conjecture de PISOT sur les E-suites.

Si l'on désigne par $\mathcal{T}$ <u>l'ensemble des nombres de Salem</u>, l'existence de ϵ_0 entraînerait <u>l'existence d'un plus petit élément de l'ensemble</u> $\mathcal{T}$.

Réciproquement, on pourrait espérer que la démonstration de l'existence d'un plus petit nombre de Salem entraînerait la conjecture de Lehmer.

(*) Marie-José BERTIN, Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 PARIS CEDEX 05.

D'où l'intérêt d'une meilleure connaissance de $\mathcal{T}$.

La difficulté d'étude de $\mathcal{T}$ réside essentiellement dans la réciprocité des polynômes T associés aux éléments de $\mathcal{T}$.

En effet, la conjecture de Lehmer est vraie pour les polynômes non réciproques [14] (SMYTH, 1970) : on a alors $M(\alpha) \geq \theta_0$, pour α entier algébrique de polynôme minimal non réciproque, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, θ_0 désignant le plus petit nombre de Pisot ([9], [10]), $\theta_0 = 1{,}32471795\ldots$, racine supérieure à 1 de l'équation $X^3 - X - 1 = 0$.

Rappelons qu'un nombre de Pisot est un entier algébrique supérieur à 1 dont tous les conjugués autres que lui-même ont un module strictement inférieur à 1, et que l'ensemble S des nombres de Pisot est fermé dans $\mathbb{R}$ (SALEM, 1944) [11].

En 1944 également, SALEM prouva que tout nombre de Pisot θ est limite à droite et à gauche d'une suite infinie de nombres de Salem : c'est la "construction" de Salem ([12], [13]). Les nombres de Salem τ_n , définis pour $n > n_0$ et tendant vers θ , sont racines des équations

$$z^n P(z) + \epsilon \tilde{P}(z) = 0 ,$$

où P est le polynôme minimal du nombre de Pisot θ , $\tilde{P}$ le polynôme réciproque de P , $\tilde{P}(z) = z^{\deg P} P(1/z)$ et $\epsilon = \pm 1$.

Ce résultat prouve que l'ensemble S des nombres de Pisot est contenu dans l'ensemble des points limites de l'ensemble $\mathcal{T}$.

Mais on ignore toujours si les nombres de Pisot sont les seuls points limites de l'ensemble des nombres de Salem. Si toutefois il en était ainsi, on aurait de bonnes raisons d'espérer résoudre la conjecture de Lehmer.

En juin 1977, D. W. BOYD publiait une réciproque à la construction de Salem [4]. Il montrait que tout nombre de Salem τ , racine d'un polynôme réciproque T , s'obtient à partir d'un nombre de Pisot θ , racine d'un polynôme P , de la façon suivante :

Il existe un polynôme cyclotomique K (éventuellement $K \equiv 1$) tel que

(1) $Q(z) = K(z)\, T(z) = z^n P(z) + \epsilon \tilde{P}(z)$, n entier, $n \geq 1$, $\epsilon = \pm 1$, $\tilde{P}$ polynôme réciproque de P . Aussi désigna-t-il tout nombre de Salem τ par θ_n^+ (resp. θ_n^-) puisque τ est racine d'une équation (1) avec $\epsilon = +1$, (resp. $\epsilon = -1$).

Ce résultat, ou plutôt un corollaire tiré de sa démonstration, permit à BOYD d'établir une liste de 39 "petits" nombres de Salem, dont le plus petit est évidemment l'illustre nombre de Lehmer τ_0 . Cependant, il ne permit pas d'en déduire l'existence d'un plus petit nombre de Salem, ni d'établir que l'ensemble S des nombres de Pisot constitue tout l'ensemble des points limites de $\mathcal{T}$.

Puisque les nombres de Salem sont si difficiles à appréhender, à cause de la réciprocité de leur polynôme minimal, pourquoi ne pas essayer d'en rompre la symétrie. Curieusement, un résultat d'A. CONNES [7] sur la localisation des zéros de polynômes fut le catalyseur du résultat suivant. Je montrai dans ma thèse (juin 1977) ([1], [2]) l'égalité suivante :

$$\Sigma = \bigcup_{\substack{q\geq 2,\ \text{entier} \\ 0<h<1}} \Sigma_{q,h} ,$$

où Σ désigne l'ensemble des nombres algébriques $\theta > 1$, dont tous les conjugués autres que lui-même, appartiennent au disque $|z| < 1$ et où $\Sigma_{q,h}$, pour q entier, $q \geq 2$, h réel, $0 < h < 1$, fixés, est le sous-ensemble de Σ formé des nombres algébriques θ tels que $1/\theta$ soit le seul zéro simple, situé dans $|z| \leq 1$, d'une équation de la forme $z = A(z)/Q(z)$, A et Q polynômes à coefficients entiers, $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$, Q sans racine dans $|z| \leq 1$, et vérifiant $|A(z)/Q(z)| \leq h$ sur $|z| = 1$.

Je savais, en outre, que :

* l'ensemble $\mathcal{T}_q = \Sigma_{q,1}$ contient des nombres de Salem et des nombres de Pisot ;

* l'ensemble $\mathcal{T}_q$ est borné par $q + \sqrt{q^2 - 1}$;

* les seuls points limites de l'ensemble $\mathcal{T}_q$ sont des nombres de Pisot [3].

Après la publication du résultat de BOYD (1977), je constatai également que :

* tout nombre de Salem τ appartient à un ensemble $\mathcal{T}_q$, pour q suffisamment grand, c'est-à-dire est racine de l'équation $z = \epsilon\, \tilde{P}(z)/P(z)$ avec $\epsilon\, \tilde{P}(0) = 1$, $P(0) = q$, P sans racine dans $|z| \leq 1$.

Je me posai donc la question suivante :

(2) Un nombre de Salem τ, $\tau \leq \varphi(q)$, appartient-il à un ensemble $\mathcal{T}_q$, pour une fonction φ à déterminer, par exemple $\varphi(q) = q$ ou $\varphi(q) = q + \sqrt{q^2 - 1}$?

En particulier, les nombres de Salem inférieurs ou égaux à 2, appartiennent-ils à $\mathcal{T}_2$?

La réponse affirmative à la question (2) serait particulièrement intéressante puisqu'elle entraînerait que la limite d'une suite de nombres de Salem serait un nombre de Pisot et que le plus petit nombre de Salem appartiendrait à l'ensemble $\mathcal{T}_2$.

Vers 1979-1980, BOYD effectua une recherche sur ordinateur et vérifia l'inégalité

$$M(\alpha) \geq \tau_0 ,$$

pour α entier algébrique, non racine de l'unité, de degré ≤ 16 ou de degré ≤ 26 et de hauteur ≤ 1 (c'est-à-dire dont le polynôme minimal n'a pour coefficients que 0, 1 ou -1) [6].

Il publia alors entre autres, une liste de quelques 150 nombres de Salem de degré inférieur ou égal à 10 et inférieur à 2, et de degré inférieur ou égal à 26 et inférieur à 1,3 , **de hauteur** 1 pour les degrés supérieurs ou égaux à 18.

J'imaginai alors de tester le problème (2) à l'aide de cette liste : calculs déjà pénibles pour le degré 8 et qui nécessitaient la résolution de 3 inéquations à 3 inconnues entières, découragement devant les 12 inéquations attachées à un nombre de Salem de degré 26 ! Plus tard, je repris ces calculs sur micro-ordinateur et constatai que les nombres de Salem de cette liste, de degré inférieur ou égal à 10 (70 environ), appartenaient effectivement à $\mathcal{T}_2$. Je montrai alors mes calculs à BOYD et nos réflections conjointes aboutirent à la jolie caractérisation suivante.

THÉORÈME DE "SÉPARATION" DE L'ENSEMBLE $\mathcal{T}_2$ (BOYD-BERTIN, 1986). - Soit τ un nombre de Salem de polynôme minimal T . La condition nécessaire et suffisante pour que τ appartienne à $\mathcal{T}_2$ est l'existence de deux polynômes cyclotomiques K et L tels que les arguments des racines de module 1 de KT , compris entre 0 et π , soient "séparés" par ceux des racines de module 1 de L , également compris entre 0 et π .

Plus précisément,

(a) le nombre τ appartient à $\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}$ avec $zP - \tilde{P} = (z-1)KT$, K cyclotomique, $K(1) \neq 0$, $\deg P = 2n$, $P(0) = 2$, si, et seulement si, il existe un polynôme cyclotomique L ,

$$L = (z+1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{i\psi_k})(z - e^{-i\psi_k})$$

avec $0 < \psi_1 < \varphi_1 < \ldots < \psi_{n-1} < \varphi_{n-1} < \pi$, et

$$L(1) > -K(1)\,T(1)$$

où

$$KT = \prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{i\varphi_k})(z - e^{-i\varphi_k})(z-\tau)(z - 1/\tau) ;$$

(b) le nombre τ appartient à $\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}$ avec $zP - \tilde{P} = (z^2-1)KT$, K cyclotomique, $K(1) \neq 0$, $K(-1) \neq 0$, $\deg P = 2n+1$, $P(0) = 2$, si, et seulement si, il existe un polynôme cyclotomique L ,

$$L = \prod_{k=1}^{n}(z - e^{i\psi_k})(z - e^{-i\psi_k})$$

avec $0 < \psi_1 < \varphi_1 < \ldots < \psi_{n-1} < \varphi_{n-1} < \psi_n < \pi$ et

$$L(1) > -2K(1)\,T(1)$$

où

$$KT = \prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{i\varphi_k})(z - e^{-i\varphi_k})(z-\tau)(z - 1/\tau) .$$

(c) Le nombre τ appartient à $\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}$ avec $zP + \tilde{P} = (z+1)\,KT$, K cyclotomique, $K(-1) \neq 0$, $\deg P = 2n$, $P(0) = -2$, si, et seulement si, il existe un polynôme cyclotomique L ,

$$L = \prod_{k=1}^{n} (z - e^{i\psi_k})(z - e^{-i\psi_k}) \ ,$$

avec $0 < \psi_1 < \varphi_1 < \dots < \psi_{n-1} < \varphi_{n-1} < \psi_n < \pi$, et

$$L(1) = -\,2K(1)\,T(1)$$

où

$$KT = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{i\varphi_k})(z - e^{-i\varphi_k})(z - \tau)(z - 1/\tau) \ ;$$

(d) le nombre τ appartient à $\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}$ avec $zP + \tilde{P} = KT$, K cyclotomique, $\deg P = 2n - 1$, $P(0) = -2$, si, et seulement si, il existe un polynôme cyclotomique L ,

$$L = (z+1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{-\psi_k})(z - e^{-\psi_k})$$

et

$$L(1) = -\,K(1)\,T(1)$$

avec $0 < \psi_1 < \varphi_1 < \dots < \psi_{n-1} < \varphi_{n-1} < \pi$, où

$$KT = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{i\varphi_k})(z - e^{-i\varphi_k})(z - \tau)(z - 1/\tau) \ .$$

La démonstration repose sur le fait que les nombres de Salem de $\mathcal{T}_2$ vérifient seulement des équations du type (a), (b), (c), (d). Le point délicat de cette assertion consiste à montrer que $zP - \epsilon\tilde{P}$ n'a que des racines simples : on utilise la courbe algébrique $z = Z(t)$ définie par l'équation

$$Q(z\,,\,t) = zP(z) - \epsilon\, t\, \tilde{P}(z) = 0 \ ,$$

et l'on compte les branches qui "entrent" et "sortent" du cercle unité, comme dans BOYD "Petits nombres de Salem", [4]. On utilise en outre le critère de Boyd pour qu'un polynôme soit sans racine dans $|z| \leqslant 1$.

Quelques exemples.

* Pour T = 1 0 0 0 -1 -1 -1 0 0 0 1 , associé au nombre de Salem $\tau = 1{,}2163916611\ldots$, on obtient

φ_k (degrés) :	66,71	82,07	125,13	167,69

Soit alors

ψ_k (degrés) :	36	72	108	144 ,

d'où

$$L = (z + 1)(z^{10} - 1)/(z^2 - 1) , \quad L(1) = 10 > - T(1) = 1$$

Le nombre τ appartient donc à $\mathcal{T}_2$ (cas (a)).

* Pour $T = 1\ 0\ -1\ -1\ 0\ 1\ 0\ -1\ -1\ 0\ 1$, associé au nombre de Salem $\tau = 1{,}2934859531...$, et K polynôme cyclotomique $K = 1\ 1\ 1\ 1\ 1 = F_5 = \dfrac{z^5 - 1}{z - 1}$, on obtient $KT = 1\ 1\ 0\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 0\ 1\ 1$, et

$$\varphi_k \text{ (degrés) : } \quad 41{,}007 \quad 72 \quad 101{,}604 \quad 127{,}972 \quad 144 \quad 166{,}282 .$$

En prenant

$$\psi_k \text{ (degrés) : } 27{,}7 \quad 55{,}4 \quad 83{,}1 \quad 110{,}8 \quad 138{,}3 \quad 166{,}154 ,$$

soit

$$L = (z + 1)\ F_{13} , \quad L(1) = 26 > - K(1)\ T(1) = 5 ,$$

on voit que τ appartient à $\mathcal{T}_2$ (cas (a)).

* Pour $T = 1\ -1\ 0\ 0\ -1\ 0\ -1\ 0\ 0\ -1\ 1$, associé au nombre de Salem $\tau = 1{,}4723531176...$, on obtient

$$\varphi_k \text{ (degrés) : } \quad 50{,}636 \quad 77{,}859 \quad 116{,}609 \quad 166{,}514 .$$

Alors, pour

$$\psi_k \text{ (degrés) : } \quad 20 \quad 60 \quad 100 \quad 140 ,$$

on trouve

$$L = (z + 1)\ F_2\ F_6\ F_{18} , \quad L(1) = 2 = - T(1) = 2$$

est le nombre τ appartient à $\mathcal{T}_2$ (cas (d)).

On peut même montrer que la famille infinie correspondant aux polynômes P et T suivants, appartient à $\mathcal{T}_2$ (cas (d)).

$$P = 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ -1\ -1\ -1\ -2$$

$$T = 1\ -1\ 0\ 0\ -1\ 0\ \ldots\ 0\ -1\ 0\ 0\ -1\ 1 .$$

Corollaires et conséquences. - Je n'en citerai que deux.

(a) $\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_q \cap \mathcal{T}$, $\forall\ q \geqslant 2$

(b) $\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T} \subset \{\theta_n^-,\ n > 1 ,\ \theta \in S\}$.

Le théorème précédent permet de montrer, sans recours à l'ordinateur, que les quelques 150 "petits" nombres de Salem de la liste de Boyd, sauf peut-être trois d'entre eux, appartiennent à l'ensemble $\mathcal{T}_2$.

Le corollaire (b), malheureusement, apporte une réponse négative au problème (2), du moins dans sa formulation actuelle.

En effet, en 1978, BOYD [5] avait déterminé deux "petits" nombres de Salem qui n'étaient pas de la forme $\theta_n^{\pm}$, $n \geqslant 2$, soit

$$\sigma_{23} = 1{,}2816913715\ldots \quad \text{de degré } 26$$

et

$$\sigma_{31} = 1{,}2851991792\ldots \quad \text{de degré } 44 \ .$$

Aujourd'hui, le corollaire (b) prouve que σ_{23} et σ_{31} n'appartiennent pas à $\mathcal{T}_2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTIN (Marie-José). - Familles fermées de nombres et d'entiers algébriques, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris-6, 1977.

[2] BERTIN (Marie-José). - Familles fermées de nombres algébriques, Acta Arithm., Warszawa, t. 39, 1981, p. 207-240.

[3] BERTIN (Marie-José). - L'algorithme de Schur dans certains problèmes concernant les nombres de Pisot et les nombres de Salem, Séminaire de Théorie des nombres d'Alger, avril 1983.

[4] BOYD (David W.). - Small Salem numbers, Duke math. J., t. 44, 1977, p. 315-328.

[5] BOYD (David W.). - Pisot and Salem numbers in intervals of the real line, Math. of Comput., t. 32, 1978, p. 1244-1260.

[6] BOYD (David W.). - Reciprocal polynomials having small measure, Math. of Comput., t. 35, 1980, p. 1361-1377.

[7] CONNES (Alain). - Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

[8] LEHMER (D. H.). - Factorization of certain cyclotomic functions, Annals of Math., Series 2, t. 34, 1933, p. 461-479.

[9] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Sc. fis. e mat., Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[10] PISOT (Charles). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - [Montréal], Université de Montréal, Département de Mathématiques, 1963 (Séminaire de Mathématiques supérieures. Eté 1963, 5).

[11] SALEM (R.). - A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.

[12] SALEM (R.). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.

[13] SALEM (R.). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, Heath, 1963 (Heath mathematical Monographs).

[14] SMYTH (C. J.). - On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, Bull. London math. Soc., t. 3, 1971, p. 169-175.