

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

JEAN-PAUL ALLOUCHE

Séries de Dirichlet et automates

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 26, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A8_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SÉRIES DE DIRICHLET ET AUTOMATES

par Jean-Paul ALLOUCHE (*)

Le but de cet exposé était de résumer deux articles, l'un en collaboration avec H. COHEN [1], le second en collaboration avec M. MENDES FRANCE [2] (en préparation).

Donnons juste deux résultats à ce sujet.

(*) Le produit infini $\left(\frac{1}{2}\right)^{a(0)} \left(\frac{3}{4}\right)^{a(1)} \left(\frac{5}{6}\right)^{a(2)} \dots$, où l'on a posé

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si la somme des chiffres binaires de } n \text{ est paire} \\ -1 & \text{si cette somme est impaire,} \end{cases}$$

converge vers $1/\sqrt{2}$.

Ce résultat précédemment démontré par des méthodes de variable réelle (voir [4], [6] et [5]) est prouvé dans [1] par l'intermédiaire de l'étude des séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n)}{(n+1)^s}.$$

Indiquons seulement ici que ces deux séries se prolongent en des fonctions entières, vérifiant des "équations fonctionnelles infinies" liant la valeur au point s aux valeurs aux points $s+1$, $s+2$, $s+3$, ..., du même type que "l'équation fonctionnelle infinie" vérifiée par la fonction ζ .

(*) Si l'on s'intéresse plus généralement (voir [2]) aux séries $\sum_1^{+\infty} \frac{b_n}{n^s}$, où b_n est 2-automatique (voir [3]), on montre qu'une telle série se prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, avec des candidats pôles situés sur un nombre fini de demi-réseaux à gauche. De surcroît, une telle fonction est composante d'un certain vecteur de Dirichlet (qui dépend de la suite (b_n) et d'un automate qui reconnaît cette suite), et ce vecteur vérifie une "équation fonctionnelle infinie matricielle" du même type que celles évoquées ci-dessus. On espère pouvoir en déduire des indications sur le comportement asymptotique (en général oscillant vers l'infini) de la fonction sommatoire $\sum_{n \leq x} b_n$.

(*) Jean-Paul ALLOUCHE, UER de Mathématiques, Université de Bordeaux-I, 351 Cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLOUCHE (J.-P.) and COHEN (H.). - Dirichlet series and curious infinite products, Bull. London math. Soc (à paraître).
 - [2] ALLOUCHE (J.-P.) et MENDES FRANCE (M.). - (en préparation).
 - [3] CRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDES FRANCE (M.) et RAUZY (G.). - Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. math. France, t. 108, 1980, p. 401-419.
 - [4] ROBBINS (D.). - Solution to problem E 2692, Amer. math. Monthly, t. 86, 1979, p. 394-395.
 - [5] SHALLIT (J. O.). - On infinite products associated with sums of digits, J. of number Theory (à paraître).
 - [6] WOODS (D. R.). - Elementary problem proposal E 2692, Amer. math. Monthly, t. 85, 1978, p. 48
-