Groupe d'étude en théorie analytique des nombres

Maurice Margenstern

Sur les nombres pratiques

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 21, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A4_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
1re-2e années, 1984-1985, n° 21, 13 p.

3 décembre 1984

SUR LES NOMBRES PRATIQUES

par Maurice MARGENSTERN (*)

1. Résultats.

1.1. Définitions et critères de praticité.

Un nombre pratique est un entier naturel m non nul vérifiant la propriété suivante: Tout entier naturel non nul, au plus égal à $\sigma(m)$, est somme de diviseurs distincts de m. Ce qui peut s'écrire : pour tout entier n, tel que $1 \leqslant n \leqslant \sigma(m)$, $n = \sum_{d|m} \epsilon_d d$ avec $\epsilon_d = 0$ ou 1.

a et b étant deux entiers naturels non nuls, on dit que b est représentable par les diviseurs de a ou que les diviseurs de a représentent b, si b est somme de diviseurs distincts de a. On dit que b est à portée de a si, et seulement si, $b = 1$, ou si le plus petit facteur premier p de b vérifie $p \leqslant \sigma(a) + 1$. Dans le cas contraire, on dit que b est hors de portée de a.

n étant un entier naturel non nul. Soit $n = q_1^{a_1} \ldots q_r^{a_r}$ sa décomposition en facteurs premiers avec $q_1 < \ldots < q_r$ et les a_i non nuls. On définit $Q_0, \ldots, Q_r$ par

$$Q_0 = 1$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1}^{a_{k+1}} \quad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, r-1.$$

Chaque entier Q_k est appelé préfixe de n. On appelle terminaison de n tout quotient de n par un de ses préfixes.

THÉORÈME 1. (D. F. ROBINSON). - Soit n un entier naturel non nul, et $d_1 = 1$, $d_2, \ldots, d_r = n$ la liste de ses diviseurs par ordre croissant. Pour k avec $0 \leqslant k \leqslant r$, on pose $t_0 = 0$ et $t_k = d_1 + \ldots + d_k$. Le nombre n est un nombre pratique si, et seulement si, $d_{k+1} \leqslant t_k + 1$ pour $k = 0, \ldots, r-1$.

La condition est évidemment nécessaire. Pour se convaincre qu'elle est suffisante on remarque que si tout nombre m, tel que $1 \leqslant m \leqslant t_k$, est somme de d_i distincts avec $i \leqslant k$, les mêmes sommes augmentées de d_{k+1} permettent d'aller jusqu'à t_{k+1}.

Une caractérisation plus puissante est fournie par le théorème suivant.

THÉORÈME 2. (B. M. STEWART). - Un entier naturel non nul est un nombre pratique si, et seulement si, chacune de ses terminaisons est à portée du préfixe correspondant.

(*) Maurice MARGENSTERN, Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 ORSAY CEDEX.

COROLLAIRE 1. - Si m est un nombre pratique et n un entier non nul tel que $n \leqslant \sigma(m) + 1$, le produit $m\,n$ est un nombre pratique.

COROLLAIRE 2. - Tout nombre pratique plus grand que 1 est pair. Tous les préfixes d'un nombre pratique sont des nombres pratiques.

Il est assez facile de voir que la condition du théorème 2 est nécessaire. La suffisance découle immédiatement du lemme suivant.

LEMME 1. Si m est un nombre pratique, et p un nombre premier avec m, le produit mp^n est un nombre pratique pour tout entier n.

La démonstration se fait par récurrence sur n. Considérant un entier $a \leqslant \sigma(mp^{n+1})$, on examine successivement le cas $a \leqslant \sigma(m)\, p^{n+1}$ qu'on écrit alors $a = a_1\, p^{n+1} + r$ avec $a_1 \leqslant \sigma(m)$ et $r < p^{n+1}$ qu'on écrit en base p, et le cas $a > \sigma(m)\, p^{n+1}$ qu'on écrit alors $a = \sigma(m)\, p^{n+1} + b$ où il est facile de montrer que $b \leqslant \sigma(mp^n)$.

Le théorème 2 permet d'améliorer le critère de praticité fourni par le théorème 1. On a

THÉORÈME 3. - Soit n un entier pair, et $d_1, d_2, \ldots, d_r$ la liste de ses diviseurs par ordre croissant. Soit h le plus petit indice j pour lequel $d_j \geqslant \sqrt{n}$. Alors n est un nombre pratique si, et seulement si,

$$\forall\, j,\ j < h \Longrightarrow d_{j+1} \leqslant t_j + 1 \quad (t_o = 0 \text{ et } t_j = d_1 + \ldots + d_j).$$

La suffisance de la condition résulte de ce que si n n'est pas pratique, et si m est son plus grand diviseur pratique, si p est le plus petit facteur premier de n/m, alors tout diviseur de n est soit au plus égal à m, soit au moins égal à p.

L'exemple de $102 = 6.17$ montre qu'il faut pousser parfois le test jusqu'à l'indice h.

1.2. Quelques propriétés algébriques des nombres pratiques.

1 et 2 sont des nombres pratiques. Il résulte du lemme 1 le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Il existe une infinité de nombres pratiques puisque toute puissance de 2 est un nombre pratique.

Au corollaire 1 du théorème 2, on tire immédiatement le théorème 5.

THÉORÈME 5. - Le produit de deux nombres pratiques est un nombre pratique.

Donc le carré d'un nombre pratique est un nombre pratique. Observons que $100 = 10^2$ est un nombre pratique, mais que 10 ne l'est pas. On a le résultat suivant.

PROPOSITION 1. - Tout entier non nul possède un multiple propre qui est un nombre pratique et un multiple propre qui n'est pas un nombre pratique.

Ce qui résulte immédiatement du théorème 2.

Soit S l'ensemble des nombres pratiques. On a donc

(i) $0 \notin S$ et $1 \in S$

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\exists\, m \in S$ tel que $n \mid m$.

On pose pour tout n-uple d'entiers naturels non nuls $a_1 , \ldots , a_n$

$$M(a_1 , \ldots , a_n) = \min\{m \ ; \ m \in S \ \& \ a_1 \mid m \ \& \ \ldots \ \& \ a_n \mid m\}$$

$$D(a_1 , \ldots , a_n) = \max\{m \ ; \ m \in S \ \& \ m \mid a_1 \ \& \ \ldots \ \& \ m \mid a_n\} .$$

Les fonctions M et D sont toujours définies du fait de (i) et (ii). On tire immédiatement des définitions la proposition suivante.

PROPOSITION 2.

$$M(a_1 , \ldots , a_n) = M(\text{ppcm}(a_1 , \ldots , a_n))$$
$$D(a_1 , \ldots , a_n) = D(\text{pgcd}(a_1 , \ldots , a_n))$$

et le fait que l'entier naturel non nul n est un nombre pratique si, et seulement si, $M(n) = n$ (ou si $D(n) = n$) . Observons que 20 et 30 sont des nombres pratiques, que $\text{pgcd}(20 , 30) = 10$ et que $D(20 , 30) = 2$. Donc on n'a pas $D(a_1 , \ldots , a_n) = \text{pgcd}(a_1 , \ldots , a_n)$ si $a_1 , \ldots , a_n \in S$. Cependant, on peut avoir cette relation même pour des nombres non pratiques. Prendre, par exemple, $a_1 = 44$ et $a_2 = 52$. Cependant on a

PROPOSITION 3. - Si m et s sont deux nombres pratiques, ppcm(m , s) est également un nombre pratique.

Cela résulte de la remarque suivante : soit Q un préfixe de ppcm(m , s) , et q le plus petit facteur premier de la terminaison correspondante. m étant un nombre pratique, q est à portée d'un préfixe de m (ou de s si $q \nmid m$ puisque s est un nombre pratique). Par construction du ppcm , on peut supposer que ce préfixe de m divise Q .

Donc, si $m_1 , \ldots , m_n \in S$, on a donc

$$M(m_1 , \ldots , m_n) = \text{ppcm}(m_1 , \ldots , m_n) .$$

Par ailleurs :

PROPOSITION 4. - Soit n un entier non nul. D(n) est le plus grand diviseur pratique de n , et pour tout nombre pratique m , $m \mid n$ si, et seulement si, $m \mid D(n)$.

La première assertion de la proposition se démontre assez aisément. La seconde

s'en déduit en considérant $n_1 = \text{ppcm}(n , D(n))$ qui divise n et qui est un nombre pratique d'après la proposition 3.

De la proposition 4 on tire la proposition 5.

PROPOSITION 5. - Si a , b , c sont des entiers naturels non nuls et si $a|c$ alors

$$M(D(a , c) , D(a , b)) = D(a) .$$

On a enfin le théorème

THÉORÈME 6. - Soit d un entier pair non nul. Il existe une infinité de nombres pratiques n tels que $n + d$ soit également un nombre pratique.

En effet, si n_1 et n_2 sont deux nombres pratiques tels que

$$n_1 < n_2 \leqslant 2n_1 \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(n_1 , n_2) = d .$$

Soit u_1 la plus petite solution positive de l'équation $n_1 u_1 + d \equiv 0 \pmod{n_2}$. Il n'est pas difficile de montrer que $n_1 u_1$ est un nombre pratique ainsi que $n_2 u_2$, où u_2 est le quotient de $n_1 u_1 + d$ par n_2 . Il suffit de construire une infinité de nombres pratiques vérifiant la relation ci-dessus. Il suffit de les chercher sous la forme $d.2^k$ et $d.3^h$ pour des exposants k et h judicieusement choisis.

Il résulte en particulier de ce théorème qu'il existe une infinité de nombres pratiques n tels que $n + 2$ soit également un nombre pratique.

1.3. Analogies avec les nombres premiers.

1.3.1. Densité de répartition des nombres pratiques. - On a le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - Soit $S(x)$ le cardinal des nombres pratiques au plus égaux à x . Alors $S(x)/x \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

L'assertion concernant $S(x)$ se démontre selon des méthodes connues (cf. par exemple [1]) si on sait démontrer que

$$d(m) \geqslant \frac{\log 2m}{\log 2} \quad (\forall\, m \in S) . \tag{1}$$

On observe alors que

$$P_m(X) = \prod_{d|m}(1 + X^d) = \sum_{k=0}^{\sigma(m)} a_{k,m} X^k \quad \text{où} \quad a_{k,m} \in \mathbb{N} .$$

m est un nombre pratique si, et seulement si, $a_{k,m} \neq 0$ pour tout $k = 0 , \ldots , \sigma(m)$. En particulier, si n est un nombre pratique

$$P_n(1) = 2^{d(n)} \geqslant \sigma(n) + 1 \geqslant 2n$$

car on démontre immédiatement à partir du théorème 1 que

$$\sigma(n) \geqslant 2n - 1 \quad (\forall\, n \in S) . \tag{2}$$

Il résulte de ce théorème que l'on a pour les nombres non pratiques une propriété analogue au théorème des blocs de longueur arbitraire de nombres composés. Comme pour les nombres premiers, on peut donner un caractère constructif à cette propriété.

THÉORÈME 8. - Soient K et N deux entiers non nuls fixés. On peut construire K nombres pairs consécutifs $n_1 , \dots , n_K$ avec $N < n_1 < \dots < n_K$ et tels qu'aucun d'eux ne soit un nombre pratique.

On pose $p_1 , \dots , p_k$ la suite des nombres premiers au plus égaux à 2K , et a entier non nul tel que $p_1^a > 2K$. On définit $M_1 = (p_1 , \dots , p_K)^a$ et $M = \max_{1 \leq n \leq M_1} (N , \sigma(n) + 1)$. Soit p_j le plus petit nombre premier au moins égal à M . Alors les nombres $U_h = 2((p_1 , \dots , p_j)^a + h)$ où $h = 1 , \dots , K$ sont des nombres pairs consécutifs, supérieurs à N , et on démontre sans grande difficulté qu'aucun des nombres U_h n'est pratique (détails dans [6]).

Une minoration de la densité des nombres pratiques est donnée par le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 9. - S(x) désignant le cardinal des nombres pratiques au plus égaux au réel positif x , on a, pour x assez grand,

$$S(x) \geq A \frac{x}{\exp[\frac{1}{2 \log 2}(\log \log x)^2 + 3 \log \log x)}$$

où A est une constante strictement positive.

L'idée de la démonstration (détails dans [6]) est la suivante : prenant r de l'ordre de log log x , on pose $y = x.2^{-(r+1)}$, et on partage l'intervalle $(0 , y)$ en r + 1 intervalles dont la borne supérieure est $y_k = y^{1/2^k}$ où $k = 0,1,\dots,r$. On constate qu'alors y_r reste inférieur à une constante fixe. On choisit un nombre pratique s de l'intervalle $(y_r , 2y_r($, et on choisit un nombre premier q_k dans chaque intervalle $(y_{r+1-k} , 2y_{r+1-k}($. On établit par récurrence sur k que $sq_1 \dots q_k$ est un nombre pratique. Les conditions sur s et les q_i assurent qu'à des choix différents de ces nombres correspondent des valeurs différentes de $sq_1 \dots q_r$ qui est au plus égal à x . Le nombre des entiers de la forme $sq_1 \dots q_r$ faisant intervenir une estimation grossière de $\pi(2\alpha) - \pi(\alpha)$ est minorée par l'expression figurant dans le membre de droite de l'inégalité du théorème. On peut prendre $A = 2^{5/2}/5$.

1.3.2. Nombres pratiques et progressions géométriques. - On a tout d'abord la proposition suivante.

PROPOSITION 6. - Soient a et b deux entiers naturels non nuls, $a > b$. S'il existe un nombre pratique au moins égal à a et congru à b modulo a , il en existe une infinité.

Cela résulte de ce que, entre s et $2s$ $(s \in S)$, on peut trouver un nombre premier $p > s$. D'après le lemme 1, sp^n est un nombre pratique pour tout n. Si on prend $s \geqslant a$, p étant premier avec a, il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $p^n \equiv 1 \pmod{a}$.

Ce même argument permet d'établir la proposition suivante.

PROPOSITION 7. - Soient a et b deux entiers naturels non nuls, $a > b$. S'il existe un nombre pratique au moins égal à a congru à b modulo a, il existe un entier k et une suite strictement croissante m_n de nombres pratiques congrus à b modulo a tels que pour tout nombre premier p, $p^{r+1} \nmid m_n$ quelque soit n.

Il reste à caractériser l'existence d'un nombre pratique au moins égal à a et congru à b modulo a. C'est ce que donne le théorème 10.

THÉORÈME 10. - Soient a et b deux entiers naturels non nuls, $a > b$. Soit d le pgcd de a et de b. Une condition necessaire et suffisante pour qu'il existe un nombre pratique au moins égal à a et congru à b modulo a est que le quotient de a par d ne soit pas divisible par au moins un des nombres premiers à portée de $D(a , b)$.

La suffisance de la condition relève d'un argument analogue à celui qui permet de démontrer la proposition 6 en utilisant un nombre premier p à portée de $D(a , b)$ qui ne divise pas a/d (de sorte qu'on aura $bp^n \equiv b \pmod{a}$ pour une infinité d'entiers n et p étant à portée de $D(a , b)$, bp^n est un nombre pratique pour tout n assez grand).

La condition est nécessaire : soit $a = da_1$ et $b = db_1$ n non nul. Si tous les nombres premiers à portée de $D(a , b)$ divisent a_1, les diviseurs premiers de $a_1 n + b_1$ sont hors de portée de $D(a , b)$. Comme $D(a , b) = D(\text{pgcd}(a , b))$ les diviseurs premiers de d qui ne divisent pas $D(a , b)$ sont hors de portée de $D(a , b)$. De ce fait, $an + b$ n'est pas un nombre pratique.

En conséquence, une progression arithmétique contient soit une infinité de nombres pratiques, soit aucun, soit un seul (au cas ou b lui-même serait un nombre pratique). Ce dernier cas se rencontre, par exemple, avec les nombres de la forme $12n + 2$. Le théorème n'aborde pas le cas où $b = 0$. Mais ce cas est résolu par la proposition 1. Observons que si a et b sont premiers entre eux, il y a une infinité de nombres pratiques congrus à b modulo a si, et seulement si, a est impair.

Comme les nombres pratiques autres que 1 sont pairs, on peut supposer pour l'étude des nombres pratiques de la forme $an + b$ que a et b sont pairs et que $0 < b \leqslant a$.

On appelle séquent toute suite (finie ou non) de termes consécutifs de la progression arithmétique $an + b$. On dit qu'un séquent est pratique si tous ses termes sont des nombres pratiques. Pour un séquent fini, sa longueur est le nombre de ses termes.

THÉORÈME 11. - Soient a et b deux entiers pairs non nuls avec $b \leq a$. Soit $n = D(a, b)$, $p_1, \ldots, p_r$ la suite des nombres premiers à portée de n et $\Pi_r = p_1 \ldots p_r$. Alors la longueur des séquents pratiques de la progression arithmétique $an + b$ est majorée par $\Pi_r - 1$.

On considère les nombres $b + an$, $b + a(n + 1)$, ..., $b + a(n + k)$ avec $k \geq \Pi_r - 2$. On pose $d = pgcd(a, b)$, $a = da_1$, $b = db_1$. Comme a_1 et b_1 sont premiers entre eux, il existe un entier h tel que le reste ρ de $b_1 + a_1(n + h)$ modulo Π_r soit un reste premier modulo Π_r. Les restes de $b_1 + a_1(n + j)$ modulo Π_r quand j parcourt $\mathbb{N}$ constituent une suite périodique de période au plus Π_r. Comme $k \geq \Pi_r - 2$ un des restes de $b_1 + a_1(n + k)$ modulo Π_r est égal à p. Donc aucun des p_i ne divise $b_1 + a_1(n + k)$ dont tous les facteurs premiers sont donc hors de portée de n. Comme $n = D(a, b) = D(d)$, on en déduit que le nombre $b + a(n + k)$ correspondant n'est pas un nombre pratique.

Comme $D(a, b) \mid D(a)$ d'après la proposition 4, et donc $\sigma(D(a,b)) + 1 \leq \sigma(D(a)) + 1$ le théorème semble indiquer que les segments pratiques les plus longs de la progression $an + b$ sont à chercher lorsque $b = 0$, ce que l'observation confirme.

Pour $a = 2$, le théorème donne une borne égale à 5 pour la longueur des segments pratiques. Cette borne est en fait 3 si on excepte le séquent 2, 4, 6, 8 comme le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 8. - Pour n pair plus grand que 2, au moins un des quatre nombres n, $n + 2$, $n + 4$, $n + 6$ n'est pas un nombre pratique.

Cela résulte de ce qu'au moins un des quatres nombres k, $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$ $(k \geq 1)$ a un reste premier modulo 6 de sorte que tous ses facteurs premiers sont hors de portée de 2.

Le théorème 11 montre donc qu'une progression arithmétique ne peut jamais contenir de séquent pratique infini. Comme pour chaque n, 2^n est un nombre pratique, l'exponentielle est un exemple de fonction f telle que, pour chaque n, $f(n)$ soit un nombre pratique. Qu'en est-il si f est polynôme à coefficients entiers ? Comme pour les nombres premiers, la réponse est négative comme l'établit le théorème suivant.

THÉORÈME 12. - Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ de degré au moins égal à 1. Il existe une infinité de valeurs de n $(n \in \mathbb{N})$ telles que $|f(n)|$ ne soit pas un nombre pratique.

En effet, soit n tel que $f(n) \neq 0$, et $m = D(|f(n)|)$. Par le développement de f en série de Taylor, on peut écrire que $|f(n + hf(n))| = |f(n)|\,|1 + hA|$ où $A \in \mathbb{Z}$. On peut écrire $f(n) = mB$ où $B = 1$, ou B est hors de portée de m. Il suffit de trouver une infinité de valeurs de h pour lesquelles $|1 + hA|$ soit hors de portée de m. Il suffit pour cela que h soit divisible par tous les nombres premiers à portée de m.

Observons cependant qu'il y a une infinité de nombres pratiques de la forme n^2+n car si n est pratique, $n + 1 \leqslant 2n \leqslant \sigma(n) + 1$, et donc $n^2 + n$ l'est aussi.

1.4. Propriétés spécifiques aux nombres pratiques.

1.4.1. Comportement des fonctions arithmétiques usuelles sur les nombres pratiques. - On sait déjà que

$$\sigma(n) \geqslant 2n - 1 \quad (\forall\, n \in S), \tag{2}$$

et qu'il y a égalité pour les puissances de 2. M. R. HEYWORTH a démontré la réciproque. En voici une autre démonstration avec la preuve de la proposition suivante.

PROPOSITION 9. - *Si n est un nombre pratique distinct d'une puissance de 2, $\sigma(n) \geqslant 2n$.*

On écrit en effet $n = 2^a k$, $a \geqslant 1$, et k impair. Donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(2^a)}{2^a}\frac{\sigma(k)}{k} \geqslant (2 - \frac{1}{2^a})(1 + \frac{1}{p})$$

où p est le plus petit facteur premier de k. Donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} \geqslant 2 + \frac{2}{p} - \frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^a p} = 2 + \frac{2^{a+1} - p - 1}{2^a p}.$$

Comme n est pratique, $p \leqslant \sigma(2^a) + 1 = 2^{a+1}$, et donc $\sigma(n) \geqslant 2n$ comme annoncé.

On établit dans [6] que, pour n parcourant S,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} = 2, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} = +\infty$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{1}{2}.$$

On peut en fait établir des résultats plus précis.

PROPOSITION 10. - *L'ensemble des rationnels de la forme $\sigma(n)/n$, où on parcourt l'ensemble des nombres pratiques est dense dans $[2, +\infty[$.*

En effet, soit $n = 2^k \prod_{n=N}^{N+K} p_n$ où p_n est la suite des nombres premiers. Pour $N \geqslant 2$,

$$\frac{\sigma(m)}{m} = (2 - \frac{1}{2^k}) \prod_{n=N}^{N+K}(1 + \frac{1}{p_n}).$$

Soit λ un réel fixé, $\lambda \in [1, +\infty[$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Comme le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + \frac{1}{p_n})$ est divergent, on peut trouver N et K assez grand pour que

$$p_N \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{2} < \prod_{n=N}^{N+K}(1 + \frac{1}{p_n}) \leqslant \frac{\lambda}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où $\left|\frac{\sigma(m)}{m} - \lambda\right| \leqslant \varepsilon$, si N et K étant fixé, k est assez grand. Or on peut prendre k assez grand pour qu'également m soit un nombre pratique.

Un argument analogue permet d'établir la proposition suivante.

PROPOSITION 11. - L'ensemble des rationnels de la forme $\frac{\sigma(m)}{m}$ où m parcourt l'ensemble des nombres pratiques est dense dans $(0 , 1/2)$.

En ce qui concerne les fonctions ω et Ω , on a la

PROPOSITION 12. - Pour tout nombre pratique pair m , on a

$$\log\left(\frac{\log m}{\log 2}\right) \leqslant \Omega(m) \leqslant \frac{\log m}{\log 2}$$

avec

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{\Omega(m)}{\log\log m} < +\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{m\to\infty} \frac{\Omega(m)}{\log m} > 0 .$$

La première inégalité découle de (1), car $\Omega(n) \geqslant \log d(n)$ pour tout entier naturel n . La seconde est triviale. La relation sur $\limsup_{m\to\infty} \frac{\Omega(m)}{\log m}$ est évidente même si on fait abstraction des puissances de 2 . Pour établir $\liminf_{m\to\infty} \frac{\Omega(m)}{\log\log m}$, il suffit de considérer les nombres pratiques construits dans la démonstration du théorème 9. Si $m = sq_1 \ldots q_r$, $\Omega(m) = \Omega(s) + r$, et r est de l'ordre de $\log\log m$, d'où le résultat.

1.4.2. Précisions sur la fonction M . - Dans le but de cette étude, on introduit une nouvelle fonction Q , définie de la façon suivante. Pour tout entier naturel n non nul, $Q(n)$ est le quotient de $M(n)$ par n , de sorte que $M(n) = Q(n)n$ par définition. Il résulte de la définition de M que

$$Q(n_1 , n_2) \leqslant \max(Q(n_1) , Q(n_2)) \tag{3}$$

pour tous entiers non nuls n_1 , n_2 premiers entre eux.

On a donc

THÉORÈME 13. - Pour tout nombre premier p et tout entier n , on a $Q(p^n) = Q(p)$, et $Q(p)$ est un nombre pratique.

Il existe une constante positive A telle que, pour tout nombre premier impair,

$$\frac{p}{A \log\log p} \leqslant Q(p) < p .$$

La première assertion s'établit sans grande difficulté. Dans les inégalités du théorème, il reste à démontrer celle de gauche. On sait qu'il existe une constante positive B telle que, pour tout entier n plus grand que 3 , $\sigma(n) \leqslant Bn \log\log n$ (cf. [1] th. 323). On prend B tel que $B > e^{\gamma} > 1$. Si on suppose, pour p premier impair, $Q(p) < \frac{p}{2B \log\log p}$ (on prend B assez grand pour que $2B \log\log p > 1$ pour tout nombre premier impair p), alors un calcul simple montre que $\sigma(m) < \frac{p}{2} < p - 1$, où $m = Q(p)$ de sorte que mp ne peut être un nombre pratique.

De ce théorème et de (3), on tire le résultat suivant.

COROLLAIRE. - Pour tout entier n plus grand que 1, on a

$$Q(n) \leqslant \max_{p|n} Q(p) .$$

Si $Q(p)$ est un nombre pratique pour tout nombre premier impair p, pour un entier n quelconque, $Q(n)$ n'est pas, en général, un nombre pratique. Prendre par exemple $n = 22$ pour lequel $Q = 3$.

On a également le théorème suivant.

THÉORÈME 14. - La fonction Q est croissante sur les nombres premiers et, par conséquent, la fonction M est strictement croissante sur les nombres premiers.

En effet, soit p un nombre premier, et $m = Q(p)$. p est donc à portée de m et, d'après le théorème 2, mq est a fortiori un nombre pratique pour tout nombre premier q inférieur à p. Donc $Q(q) \leqslant m$.

D'où le corollaire

COROLLAIRE. - Pour tout entier naturel n, plus grand que 1, si q désigne le plus grand facteur premier de n, $Q(n) \leqslant Q(q)$.

On observe que la fonction Q n'est pas strictement croissante. Q, restreinte aux nombres premiers, est à valeurs dans S, mais n'y est pas surjective car $Q^{-1}(28) = \emptyset$.

PROPOSITION 13. - Soit $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ la suite des nombres pratiques pairs. Soit $S_n = s_1, s_2 \dots s_n$ et $M_n = M(s_1, \dots, s_n)$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{S_n} = 0 .$$

Si α est la plus grande puissance de 2 divisant M_n, et β la plus grande puissance de 2 divisant S_n, comme $M_n = \mathrm{ppcm}(s_1, s_2, \dots, s_n)$, on a aisément que $\beta \geqslant \alpha + n - 1$ et donc $M_n/S_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, d'où le résultat.

2. Conjectures.

Sur la base d'observations faites à l'aide des ordinateurs du C. I. R. C. E. d'Orsay, on peut formuler un certain nombre de conjectures (cf. [5] et [6]).

Soit

$$\vartheta_S(x) = \sum_{m\leqslant x, m\in S} \log m \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{m\leqslant x, m\in S} 1 .$$

CONJECTURE 1. - Il existe une constante réelle positive λ telle que $\vartheta_S(x) \sim \lambda x$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

On en tire aisément que, sous cette hypothèse, $S(x) \sim \lambda \frac{x}{\log x}$ quand $x \longrightarrow +\infty$,

que $s_k \sim \frac{1}{\lambda} k \log k$, où s_k est le k-ième nombre pratique pair, que $\sum_{m \in S} \frac{1}{m} = +\infty$, et que le produit $\prod_{m \in S}(1 + 1/m)$ est divergent.

Les observations numériques suggèrent $\lambda \sim 1,3$.

Soit $S_J(x) = \text{card}\{m \in S \ ; \ m \leqslant x \ \& \ m + 2 \in S\}$. Alors

CONJECTURE 2. - Il existe une constante réelle positive λ_J telle que

$$S_J(x) \sim \lambda_J \frac{x}{(\log x)^2} .$$

CONJECTURE 3. - Il existe une infinité de nombres pratiques n tels que $n + 2$ et $n + 4$ soient également des nombres pratiques.

On sait (proposition 8) que $2, 4, 6, 8$ est le seul séquent pratique de longueur 4 dans la suite des nombres pairs.

CONJECTURE 4. - Il existe deux constantes réelles positives δ et ν_d avec $1/2 < \nu_d$, $\delta < 1$ telles que

$$\sum_{n \leqslant x, n \in S} d(n) \sim \nu_d \, x(\log x)^{\delta} \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty .$$

Les observations numériques suggèrent $\delta = \log 2$. On peut attendre pour $d(m)$, avec $m \in S$, un ordre moyen égal à $1/\lambda(\log m)^{1+\delta}$.

CONJECTURE 5. - Il existe des constantes réelles positives η , ν_ω et ν_Ω avec $1/2 < \eta < 1$ et $1/2 < \nu_\omega/\nu_\Omega \leqslant 1$ telles que

$$\sum_{m \leqslant x, m \in S} \omega(m) \sim \nu_\omega \frac{x}{(\log x)^{\eta}} \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sum_{m \leqslant x, m \in S} \Omega(m) \sim \nu_\Omega \frac{x}{(\log x)^{\eta}} \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty .$$

CONJECTURE 6. - Pour tout entier pair n non nul, il existe deux nombres pratiques m et s tels que $n = m + s$.

CONJECTURE 7. - Tout entier naturel plus grand que 1 est somme de deux nombres pratiques ou premiers.

Ce qui équivaut, sous l'hypothèse de la conjecture 6, à énoncer : Tout entier impair contre que 1 est somme d'un nombre pratique et d'un nombre premier.

3. Historique et développements.

Le premier article consacré aux nombres pratiques semble être celui de A. K. SRINIVASAN en 1948 [8]. L'auteur se contente d'y donner une définition très proche de celle qui est donnée ici.

Il pose seulement la question : existe-t-il une densité des nombres pratiques ? L'article de B. M. STEWART de 1954 [9] paraît être le premier à caractériser la praticité en fonction de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel non nul. Il ne contient pas d'autre indication sur les nombres pratiques si ce n'est une nouvelle démonstration de la décomposition de tout nombre rationnel en somme de fractions égyptiennes distinctes. Les articles de D. F. ROBINSON en 1979 et de M. R. HEYWORTH en 1980 ([7] et [3]) découvrent ces nombres.

Ils donnent un autre critère de praticité (théorème 1 de cet article) sans aborder non plus la question de la densité. Dans un addendum à son article, M. R. HEYWORTH retrouve le critère de Stewart.

G. TENENBAUM a signalé à l'auteur de ces lignes, après l'exposé qu'il a fait sur ce sujet, un article récent de M. HAUSMAN et H. SHAPIRO de 1984 [2] sur ces mêmes nombres. On y considère la fonction $f(n)$ égale au plus grand entier tel que tout nombre m au plus égal à $f(n)$ soit somme de diviseurs distincts de n. Il résulte aisément des définitions qu'un entier n est un nombre pratique si, et seulement si, $f(n) \geqslant n$. Ces auteurs établissent que si

$$B^*(n) = e^{\gamma/2} (n \log\log n)^{1/2}$$

(γ est la constante d'Euler), alors pour tout $\lambda > 1$ si $f(n) \geqslant \lambda B^*(n)$ pour tout n sauf un nombre fini, il en résulte que n est un nombre pratique et que pour tout $\lambda \in]0, 1[$, il existe une infinité de nombres non pratiques tels que $f(n) \geqslant \lambda B^*(n)$. On peut sans doute trouver une relation entre ce résultat et le théorème 3 du paragraphe 1.

M. HAUSMAN et H. SHAPIRO démontrent également que

$$S(x) = O(x/(\log x)^{\beta}) \quad \text{où} \quad \beta < 1/2\left(\frac{1}{\log 2} - 1\right)^2 = 0{,}0979 \ldots$$

et que, pour tout réel $x \geqslant 1/3$, l'intervalle $(x, x + 2\sqrt{x})$ contient au moins un nombre pratique (donc, en particulier, tout intervalle de la forme $(x^2(X+1)^2)$ contient au moins un nombre pratique puisque le carré d'un nombre pratique l'est). Concernant la densité des nombres pratiques, H. DELANGE m'a signalé que de l'inégalité de gauche de la proposition 12, on tire, par des arguments classiques, que $S(x) = O(x/(\log x)^{\alpha})$ d'où $\alpha = 1 - \dfrac{1 + \log\log 2}{\log 2} = 0{,}086 \ldots$

Lors de l'exposé qu'il a présenté devant le groupe de travail, le 7 janvier 1985, G. TENENBAUM a indiqué (voir [10]) un résultat beaucoup plus précis sur $S(x)$ obtenu par une méthode de crible

$$\frac{x}{\log x} (\log\log x)^{-\lambda} \ll_{\lambda} S(x) \ll \frac{x}{\log x} \log\log x \log\log\log x \ .$$

Cependant, ce résultat, non contradictoire avec la densité déduite de la conjecture 1, n'est pas assez précis pour statuer sur le corollaire concernant la divergence de $\sum_{m \in S} 1/m$. Or, récemment, J. P. KAHANE à démontré que

$$\sum_{n\in S, n\geq 4} \frac{1}{n \log\log\log n} = +\infty \quad \text{...}$$

(cf. [4] formulé initialement pour $\sum_{n\in S} 1/n$). La preuve repose sur l'encadrement, indépendant de ν , $c_1 \leq t_\nu \leq c_2$ où

$$t_\nu = \sum_{S_\nu^*} \frac{\log p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_{\nu-1}}{p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_{\nu-1} \quad p_\nu \quad \log p_\nu} ,$$

S_ν^* étant l'ensemble des entiers n de la forme $n = p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_\nu$ avec $p_1 = 2_1 \; p_2 = 3$, p_j premiers et $p_j < p_{j+1} \leq p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_j$ pour $j = 2 , 3 , \ldots , \nu - 1$, cet encadrement s'obtenant par "réduction" de ν à l'aide d'estimations de $\sum_{\alpha<p<\beta} \frac{1}{p \log p}$ et de $\sum_{p>X} \frac{1}{p^{3/2} \log^\mu p}$.

On observe que S_ν^* est un ensemble de nombres pratiques quadratfrei et que $\sum_{n\in S_\nu^*} 1/n > 1/\nu \; t_\nu$. Par ailleurs, pour $n \in S_\nu^*$, $\log\log n < \nu$ (cf. proposition 12) et donc

$$\sum_{n\in S_\nu^*} \frac{1}{n \log\log\log n} > \frac{1}{\log \nu} \sum_{n\in S_\nu^*} 1/n ,$$

d'où la divergence de

$$\sum_{n\in S, n\geq 4} \frac{1}{n \log\log\log n} .$$

G. TENENBAUM signale qu'on retrouve l'encadrement des t_ν par des estimations de sommes voisines qu'il introduit dans la méthode de crible citée (cf. [10]) et qu'il considère comme plausible la conjecture $S(x) \sim \lambda \frac{x}{\log x}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. - Oxford, 1960.

[2] HAUSMAN (M.) and SHAPIRO (H.). - On practical numbers, Comm. pure and appl. Math., t. 37, 1984, p. 705-713.

[3] HEYWORTH (M. R.). - More on panarithmic numbers, The New Zealand. math. Mag., t. 7, 1980, fasc. 1, p. 28-34.

[4] KAHANE (J.-P.). - Sur les nombres pratiques quadratifiés, Communication privée.

[5] MARGENSTERN (M.). - Résultats et conjectures sur les nombres pratiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 299, 1984, série 1, p. 895-898.

[6] MARGENSTERN (M.). - Les nombres pratiques : Théorie, observations et conjectures, J. of number theory (à paraître).

[7] ROBINSON (D. F.). - Egyptian fractions via Greek number theory, The New Zealand math. Mag., t. 16, 1979/80, fasc. 2, p. 47-52.

[8] SRINIVASAN (A. K.). - Practical numbers, Current Science, t. 17, 1948, p. 179-180.

[9] STEWART (B. M.). - Sums of distinct divisors, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 779-785.

[10] TENENBAUM (G.). - Sur un problème de crible et ses applications, Annales scient. ENS (à paraître).