

# GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

## **La chaîne d'Ising imaginaire ou la suite de Rudin Shapiro**

*Groupe d'étude en théorie analytique des nombres*, tome 1 (1984-1985), exp. n° 35, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=TAN\\_1984-1985\\_\\_1\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A16_0)

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

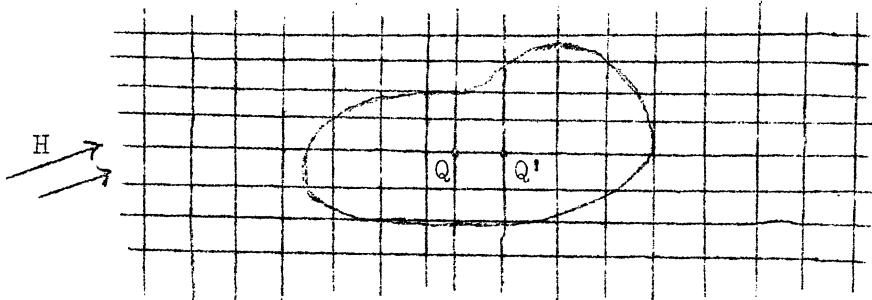
LA CHAÎNE D'ISING IMAGINAIRE OU LA SUITE DE RUDIN SHAPIRO

par Michel MENDES FRANCE (\*)

(d'après un travail fait en commun avec J. P. ALLOUCHE [1] et [2])

1. Le modèle d'Ising.

Le modèle d'Ising est une tentative d'explication de la substance magnétique. On suppose que l'espace est composé d'un réseau régulier  $\mathbb{Z}^d$  ( $d \geq 1$  est la dimension de l'espace) aux sommets (sites) duquel on place des spins à valeurs  $\pm 1$ .



On suppose qu'il y a  $N$  sommets intérieurs à l'objet étudié. En fin de calcul,  $N$  tendra vers l'infini, ce qui revient à dire que la maille du réseau tend vers 0.

Chaque site interagit avec ses  $2d$  voisins immédiats. Si  $\mu_Q$  et  $\mu_{Q'}$  sont des spins aux sites  $Q$  et  $Q'$  respectivement, le champ d'interaction entre les deux sites est

$$\begin{cases} -\mu_Q \mu_{Q'} J & \text{si } Q \text{ et } Q' \text{ sont voisins } (Q \neq Q') \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La constante de couplage  $J$  est supposée positive non nulle.

Si la substance étudiée est soumise à un champ externe  $H$ , le champs magnétique total est donné par "l'hamiltonien"

$$\mathcal{H}(\mu) = -J \sum \mu_Q \mu_{Q'} - H \sum \mu_Q,$$

où la première somme est étendue à tous les couples  $Q, Q'$  voisins, et où la seconde somme est étendue aux  $N$  sites  $Q$ .  $\mu = (\mu_Q)$  représente l'une des  $2^N$  configurations possibles.

L'un des postulats fondamentaux de la physique statistique est que la probabilité d'une configuration donnée  $\mu^0$  est

$$P(\mu^0) = \exp(-\beta \mathcal{H}(\mu^0)) / Z$$

---

(\*) Michel MENDES FRANCE, Mathématiques, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

où  $\beta = 1/kT$  est l'inverse de la température de l'objet étudié, où  $k$  est la constante de Boltzmann, et où  $Z$  est la fonction de partition

$$Z = Z(N, \beta, H) = \sum_{\mu \in \{-1, +1\}^N} \exp(-\beta \mathcal{H}(\mu)) .$$

Ainsi, pour  $T = \infty$ , toutes les configurations sont équiprobables

$$P(\mu^0) = 1/2^N ,$$

ce qui correspond à une "phase gazeuse" ou liquide. Pour  $T = 0$ , seule la configuration d'énergie minimale  $\mathcal{H}(\mu)$  a pour probabilité 1, les autres configurations ayant une probabilité nulle. On dit qu'on est en "phase cristalline".

Toute la problématique attachée au modèle d'Ising est de comprendre comment lorsque  $T$  décroît de  $+\infty$  à 0, on passe brusquement d'une phase à l'autre. Bien entendu, cette transition ne peut avoir lieu tant que  $N$  reste fini, car les probabilités  $P$  et la fonction de partition, sont des fonctions analytiques de  $T$ .

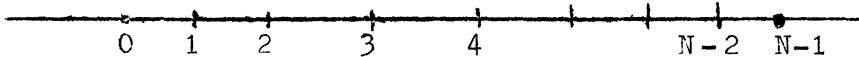
On montre que la quantité intéressante à étudier est en fait "l'énergie libre"

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z(N, \beta, H) .$$

Nous ne discuterons pas de ce problème ici. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage classique de Colin THOMPSON [9] qui est une excellente introduction à la physique statistique. Il y apprendra que le modèle d'Ising à 1 dimension n'a pas de transition de phase. Le modèle a été résolu à 2 dimensions par ONSAGER, en 1944, dans le cas d'un champ externe  $H = 0$ ; il y a alors transition de phase. Le cas  $d \geq 3$  est à ce jour sans solution.

Dans notre exposé, nous nous plaçons dans le cadre de loin le plus simple  $d = 1$ . La fonction de partition est alors

$$Z(N, \beta, H) = \sum_{\mu} \exp(\beta J \sum_{q=0}^{N-2} \mu_q \mu_{q+1} + \beta H \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q) .$$



Une simplification supplémentaire consiste à considérer le modèle cyclique où on identifie le site  $N$  au site 0. La fonction de partition prend alors la forme légèrement plus symétrique

$$Z_{\text{cycl}}(N, \beta, H) = \sum_{\mu} \exp(\beta J \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q \mu_{q+1} + \beta H \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q) .$$

Nous nous proposons de montrer comment on calcule explicitement  $Z_{\text{cycl}}$ , et comment en considérant des températures imaginaires, on peut obtenir de nouveaux résultats concernant la suite de Rudin-Shapiro.

Cet exposé est un compte rendu d'un travail récent fait conjointement avec Jean-Paul ALLOUCHE ([1] et [2]).

## 2. Calcul de $Z_{\text{cycl}}$

Nous reproduisons le calcul dû à KRAMERS et WANNIER [5], exposé dans THOMPSON [9].

On a

$$Z_{\text{cycl}} = \sum_{\mu} \prod_{q=0}^{N-1} \exp[\beta J \mu_q \mu_{q+1} + 1/2 \beta H (\mu_q + \mu_{q+1})] .$$

Soit  $L$  la matrice

$$L = \begin{pmatrix} L(1, 1) & L(1, -1) \\ L(-1, 1) & L(-1, -1) \end{pmatrix}$$

où

$$L(\epsilon, \epsilon') = \exp(\beta J \epsilon \epsilon' + 1/2 \beta H (\epsilon + \epsilon')) .$$

Alors

$$Z_{\text{cycl}} = \sum_{\mu} L(\mu_0, \mu_1) L(\mu_1, \mu_2) \dots L(\mu_{N-1}, \mu_0) = \sum_{\mu_0 = \pm 1} L^N(\mu_0, \mu_0) ,$$

où  $L^N(\epsilon, \epsilon')$  représente l'élément  $(\epsilon, \epsilon')$  de la matrice  $L^N$ . Ainsi

$$Z_{\text{cycl}} = \text{Trace}(L^N) .$$

Si donc,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les deux valeurs propres de la matrice  $L$ ,

$$Z_{\text{cycl}} = \lambda_1^N + \lambda_2^N ,$$

d'où

$$Z_{\text{cycl}} = [e^{\beta J} \text{ch } \beta H + (e^{2\beta J} \text{sh}^2 \beta H + e^{-2\beta J})^{1/2}]^N + [e^{\beta J} \text{ch } \beta H - (e^{2\beta J} \text{sh}^2 \beta H + e^{-2\beta J})^{1/2}]^N .$$

## 3. La suite de Rudin-Shapiro.

Considérons la somme exponentielle

$$S(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \pm \exp 2i\pi n\theta$$

où la suite  $\pm$  est arbitraire. Sa moyenne  $L^2$  est

$$\left( \int_0^1 |S(N)|^2 d\theta \right)^{1/2} = \sqrt{N}$$

d'où on conclut

$$\max_{\theta} |S(N)| \geq \sqrt{N} .$$

W. RUDIN [7] d'une part, et H. S. SHAPIRO [8] d'autre part, ont découvert indépendamment l'un de l'autre qu'il existe un choix des signes  $\epsilon(n) = \pm 1$  tel que

$$\max_{\theta} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon(n) \exp 2i\pi n\theta \right| \leq (2 + \sqrt{2}) \sqrt{N} .$$

Leur démonstration est la suivante. On définit récursivement la suite des polynômes  $P_n(X)$ ,  $Q_n(X)$

$$\begin{cases} P_0(X) = Q_0(X) = 1 \\ P_{n+1}(X) = P_n(X) + X^{2^n} Q_n(X) \\ Q_{n+1}(X) = Q_n(X) - X^{2^n} Q_n(X) . \end{cases}$$

On constate que  $P_n$  et  $Q_n$  sont de degré  $2^n$  et que les polynômes sont à coefficients  $\pm 1$ .

Ainsi  $P_n(\exp 2i\pi\theta)$  est une somme exponentielle du type  $S(2^n)$ . Par ailleurs

$$|P_n(e^{2i\pi\theta})|^2 + |Q_n(e^{2i\pi\theta})|^2 = 2[|P_{n-1}(e^{2i\pi\theta})|^2 + |Q_{n-1}(e^{2i\pi\theta})|^2]$$

donc

$$|P_n(e^{2i\pi\theta})|^2 + |Q_n(e^{2i\pi\theta})|^2 = 2^n(P_0^2 + Q_0^2) = 2^{n+1}$$

et par suite

$$|P_n(e^{2i\pi\theta})| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^n .$$

Si on pose donc

$$P_n(X) = \epsilon(0) + \epsilon(1)X + \epsilon(2)X^2 + \dots + \epsilon(2^n - 1)X^{2^n - 1} ,$$

on a

$$\left| \sum_{k=0}^{2^n - 1} \epsilon(k) \exp 2i\pi k\theta \right| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^n .$$

Remarquant ensuite que tout entier  $N$  s'écrit sous la forme

$$N = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots \quad n_0 > n_1 > \dots$$

l'inégalité se prolonge en

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon(k) \exp 2i\pi k\theta \right| \leq (2 + \sqrt{2}) \sqrt{N} .$$

La constante  $(2 + \sqrt{2})$  ne semble pas optimale (communication orale de B. SAFFARI). Notre préoccupation ici n'est pas tant d'améliorer la constante, mais plutôt d'étendre le champ de validité de l'inégalité.

#### 4. La suite de Rudin-Shapiro et la chaîne d'Ising.

J. BRILLHART et L. CARLITZ [3] ont donné une expression remarquable des coefficients  $\epsilon(n)$  de Rudin-Shapiro. Considérons le développement binaire de  $n$

$$n = \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) 2^q , \quad e_q(n) = 0, 1 .$$

Les chiffres  $e_q(n)$  sont tous nuls pour  $q > (\log n)/(\log 2)$  en sorte que la somme est finie. On constate que

$$\epsilon(n) = \exp i\pi \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) e_{q+1}(n) ;$$

$\epsilon(n)$  compte donc le nombre d'apparitions modulo 2 du mot 11 dans l'écriture

binaires de  $n$ .

Considérons plus généralement

$$\epsilon(n, x, y) = \exp 2i\pi(x \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) e_{q+1}(n) + y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)),$$

où  $x$  et  $y$  sont des paramètres réels donnés.

Pour  $x = 1/2$ ,  $y = 0$ , cette suite se réduit à  $\epsilon(n)$ .

THÉORÈME 1. - Soit  $\gamma(x, y)$  le plus grand des deux nombres

$$|\cos(\pi x + \pi y) \pm (-\sin^2(\pi x + \pi y) + e^{-2i\pi x})^{1/2}|$$

et soit

$$\alpha(x, y) = \frac{\log \gamma(x, y)}{\log 2}.$$

Alors

$$|\sum_{n=0}^{N-1} \exp 2i\pi(x \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) e_{q+1}(n) + y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n))| \leq c N^{\alpha(x, y)} + 1$$

où  $c$  est une constante absolue. L'exposant  $\alpha(x, y)$  est optimale.

En particulier, si  $\epsilon(n)$  est la suite de Rudin-Shapiro

$$|\sum_{n=0}^{N-1} \epsilon(n) \exp(y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n))| \leq c \sqrt{N}.$$

Nous ne donnerons pas ici le détail [1] de la démonstration ; nous préférons en donner une esquisse rapide.

On considère la somme

$$T(2^N) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \exp 2i\pi(x \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) e_{q+1}(n) + y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)),$$

et on pose

$$e_q(n) = 1/2(1 - \mu_q(n))$$

en sorte que  $\mu_q(n)$  est la valeur  $\pm 1$ . On obtient alors

$$T(2^N) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \exp 2i\pi \left[ \frac{x}{4} \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q(n) \mu_{q+1}(n) - \frac{x+y}{2} \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q(n) + N \left( \frac{x}{4} + \frac{y}{2} \right) + \frac{x}{4} (\mu_0(n) - \mu_N(n)) \right].$$

Le terme  $\exp 2i\pi N (\frac{x}{4} + \frac{y}{2})$  se factorise. Une manipulation algébrique simple permet de se débarrasser de "l'effet de bord"

$$\frac{x}{4} (\mu_0(n) - \mu_N(n)),$$

et on reconnaît alors, à des notations près, la fonction de partition de la chaîne d'Ising cyclique à température  $T = -(2J/\pi x)i$ .

La formule obtenue en fin de paragraphe 2 permet alors d'estimer  $T(2^N)$ , puis  $T(N)$ .

### 5. L'inégalité de Rudin-Shapiro étendue.

Au vu de l'inégalité obtenue par RUDIN et SHAPIRO d'une part et de la dernière inégalité du théorème 1 d'autre part, on peut se poser la question de savoir quel rapport existe entre les deux inégalités.

Rappelons qu'une suite 2-multiplicative  $f$  est une suite telle que, pour tous entiers  $n \geq 0$ ,  $a \geq 1$  et  $b \in \{0, 2^n\}$ ,

$$f(a2^n + b) = f(a2^n) f(b).$$

Appelons  $\mathcal{M}_2$  la classe des suites 2-multiplicatives unimodulaires  $|f(n)| = 1$ . Les suites  $\exp 2i\pi n\theta$  et  $\exp 2i\pi y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)$  sont dans cette classe.

Il est aisé de voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite  $f$  soit dans  $\mathcal{M}_2$  est qu'il existe des nombres réels  $c_0, c_1, c_2, \dots$  tels que

$$f(n) = \exp 2i\pi \sum_{q=0}^{\infty} c_q e_q(n).$$

Dans [2], nous établissons le résultat suivant.

**THÉOREME 2.** - Pour tout  $x$  réel

$$\sup_{f \in \mathcal{M}_2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp 2i\pi x \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) e_{q+1}(n) \right| \leq c(x) N^{\delta(x)}$$

où

$$\delta(x) = \frac{\log 2(1 + |\cos \pi x|)}{2 \log 2} \quad \text{et} \quad c(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(1 + |\cos \pi x|)} - 1} \leq 2 + \sqrt{2}.$$

En particulier pour  $x = 1/2$

$$\sup_{f \in \mathcal{M}_2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \epsilon(n) \right| \leq (2 + \sqrt{2}) \sqrt{N}.$$

La preuve de ce théorème est de nature assez différente aussi nous renvoyons le lecteur à notre article [2].

Il faut noter qu'aucun de nos deux résultats ne contient l'autre. Le premier est plus précis mais plus restreint. Enfin, pour terminer, signalons un corollaire immédiat du théorème 2.

**COROLLAIRE.** - Soit  $(\sigma(n))$  la suite de Thue-Morse sur les symboles  $\pm 1$ . Alors

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \sigma(n) \epsilon(n) \right| \leq (2 + \sqrt{2}) \sqrt{N}.$$

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLOUCHE (J. P.) et MENDES FRANCE (M.). - Suite de Rudin-Shapiro et modèle d'Ising, Bull. Soc. Math. France (à paraître).
- [2] ALLOUCHE (J. P.) and MENDES FRANCE (M.). - On an extremal property of the Rudin-Shapiro sequence, Mathematika, London, 1985 (à paraître).

- [3] BRILLHART (J.) and CARLITZ (L.). - Note on the Shapiro polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., t. 25, 1970, p. 114-118.
- [4] GELFOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.
- [5] KRANERS (H. A.) and WANNIER (G. H.). - Statistics of the two-dimensional Ferromagnet. Part I and II, Phys. Rev., 2nd series, t. 60, 1941, p. 252-262 ; p. 263-276.
- [6] MENDES FRANCE (M.) et TENENBAUM (G.). - Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, Bull. Soc. math. France, t. 109, 1981, p. 207-215.
- [7] RUDIN (W.). - Some theorems on Fourier coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., t. 10, 1959, p. 855-859.
- [8] SHAPIRO (H. S.). - Extremal problems for polynomials and power series (Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1951).
- [9] THOMPSON (C. J.). - Mathematical statistical mechanics. - Princeton, Princeton University Press, 1979.
-