GEORGES RHIN

Sur les mesures d'irrationalité de certains nombres transcendants

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 28, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A10_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
1re-2e années, 1984-1985, n° 28, 6 p.

4 mars 1985

SUR LES MESURES D'IRRATIONALITÉ DE CERTAINS NOMBRES TRANSCENDANTS

par Georges RHIN (*)

1. Introduction.

Soit α un élément de $\underset{\sim}{R} \setminus \underset{\sim}{Q}$. On dit que le réel $\mu = \mu(\alpha)$ est une mesure d'irrationalité (effective) de α si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q_0(\varepsilon) > 0$ effectivement calculable tel que, pour tout couple (p , q) de $\underset{\sim}{Z}^2$ vérifiant $q \geqslant q_0(\varepsilon)$, on ait $|\alpha - p/q| \geqslant q^{-\mu-\varepsilon}$.

Nous étudions ici $\log 2$ et π, mais cette méthode se généralise à d'autres nombres transcendants ou même algébriques. La méthode de Baker de minoration de formes linéaires de logarithmes [2] fournit $\mu(\log 2) = 10^{22}$. En 1978, APÉRY (cf. [11]) obtient $\mu(\log 2) = 4,622 \ldots$ par une méthode d'accélération de la convergence de la série définissant $\log 2$. Les approximations de $\log 2$ obtenues sont liées aux approximations de Padé de la fonction $\log(1 - (1/z))$. Cette méthode avait déjà permis à BAKER [1] de donner en 1964 $\mu(\log 2) = 12,5$. En 1982, CHOODNOVSKY ([5] et [7]) annonce $\mu(\log 2) = 4,269\ 654\ 9$ et $\mu(\log 2) = 4,134\ 400\ 029$.

Nous donnons ici des démonstrations simples de ces deux résultats, et nous donnons la valeur $\mu(\log 2) = 4,079\ 154 \ldots$

MAHLER [9] a donné en 1953 $\mu(\pi) = 42$, puis MIGNOTTE [10] a donné en 1974 $\mu(\pi) = 20$. Ce résultat a été légèrement amélioré par CHOODNOVSKY en 1979 [4] avec $\mu(\pi) = 19,89$. Ce dernier a annoncé en 1982 successivement $\mu(\pi) = 17$, puis $\mu(\pi) = 14,65$ ([6] et [7]). Nous donnons ici la valeur $\mu(\pi) = 16,2$.

2. Mesure d'irrationalité de $\log 2$.

On étudie les intégrales du type

$$I_n = \int_0^1 \frac{H_n(x)}{(x + 1)^{n+1}}\, dx ,$$

où H_n est un polynôme de $\underset{\sim}{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à $2n$ appartenant à l'idéal $(X + 1 , 2)^n$. Alors

$$H_n(X) = \sum_{i=n}^{2n} b_i (X + 1)^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i\, 2^{n-i}\, (X + 1)^i$$

et

$$I_n = b_n \log 2 + a_n$$

(*) Georges RHIN, Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Ile du Saulcy, 57045 METZ CEDEX 1.

avec $b_n \in \mathbb{Z}$ et

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i\ 2^{n-i}}{n-i} (1 - 2^{i-n}) + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{b_i}{i-n} (2^{i-n} - 1) \ .$$

Si $d_n = \text{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$, il est clair que $d_n a_n$ est dans $\mathbb{Z}$. Pour obtenir une mesure d'irrationalité de $\log 2$, il suffit alors d'estimer I_n et de majorer $|b_n|$ qui est donné par

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{H_n(z)}{(z+1)^{n+1}} dz \ ,$$

où C est un cercle de centre -1 , de rayon non nul, et d'utiliser le lemme suivant.

LEMME. - *Soit* α *un réel. Soient* $k_0 > 0$, $\ell_0 \geq 1/2 \geq \ell_1 > 0$, $1 < E_0 \leq E_1$ et $Q > 1$ *des nombres réels tels qu'il existe une suite* (p_n , q_n) *de* $\mathbb{Z}^2$ *vérifiant, pour* $n \geq 0$,

$$|q_n| \leq k_0\, Q^n \ \ \underline{\text{et}} \ \ \ell_1\, E_1^{-n} \leq |q_n \alpha - p_n| \leq \ell_0\, E_0^{-n} \ .$$

Alors, pour tous p , q *dans* $\mathbb{Z}$, $q \neq 0$,

$$|\alpha - p/q| \geq c\, |q|^{-\mu} \ ,$$

où $\mu = \dfrac{\log(QE_1)}{\log E_0}$ *et* $c = \dfrac{\ell_1}{k_0} (QE_1)^{-(1+(\log(\ell_0/\ell_1)/\log E_0))}$.

Démonstration. - Soit $\delta = \alpha - (p/q)$, et soit n le plus petit des entiers m tels que

$$|q_m \alpha - p_m| < \frac{\ell_1}{|q|} \ .$$

Il est clair que $q_n \neq 0$. Nous avons

$$q\, |q_n \alpha - p_n| = q_n\, p - p_n\, q + q\, \delta\, q_n \ .$$

Si $q_n\, p - p_n\, q = 0$,

$$|\delta| \geq \frac{1}{|q_n|}\ \ell_1\, E_1^{-n} \ .$$

Puisque n est minimal et que $n \geq 1$,

$$\ell_0\, E_0^{-n+1} \geq |q_{n-1}\, \alpha - p_{n-1}| \geq \frac{\ell_1}{|q|} \ ,$$

donc $n \leq 1 + (\log(|q|\ \ell_0/\ell_1)/\log E_0)$.

De $|\delta| \geq \ell_1\, E_1^{-n}/k_0\, Q^n$, on déduit que

$$|\delta| \geqslant c\,|q|^{-\mu} .$$

Si $q_n p - p_n q \neq 0$, alors $|q_n p - p_n q| \geqslant 1$ et

$$|\delta q q_n| \geqslant 1 - |q|\ |q_n \alpha - p_n| \geqslant \frac{1}{2} ,$$

d'après le choix de n . On a $|\delta| \geqslant 1/2\, k_0\, |q|\, Q^n$, et l'on vérifie que la minoration précédente est encore valable.

On appliquera le lemme à l'expression $d_n I_n = d_n b_n \log 2 + d_n a_n$ en remarquant que, d'après le théorème des nombres premiers, $d_n = e^{n(1+o(1))}$.

Le résultat d'Apéry est obtenu en prenant $H_n(X) = (X(1 - X))^n$.

Pour majorer I_n , il suffit de trouver le maximum de $f_1(x) = x(1 - x)/(1 + x)$ sur $[0 , 1]$.

Nous avons $f_1'(x) = -(x^2 + 2x - 1)/(x + 1)^2$ qui s'annule en $x_0 = \sqrt{2} - 1$ et $f_1(x_0) = (\sqrt{2} - 1)^2$.

D'autre part, $|b_n| \leqslant \omega_1^n$, où

$$\omega_1 = \min_{\rho>0} \max_{|z+1|=\rho} \left|\frac{z(1 - z)}{z + 1}\right| .$$

La valeur ω_1 est atteinte en un point x_1 , zéro de f_1' ,

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \omega_1 = (\sqrt{2} + 1)^2 .$$

La fonction $(x(1 - x))^n/(x + 1)^{n+1}$ étant positive sur $[0 , 1]$, on peut appliquer le lemme, et l'on obtient

$$\mu(\log 2) = \frac{4 \log(\sqrt{2} + 1)}{2 \log(\sqrt{2} + 1) - 1} = 4{,}622\ 100\ 832 \ldots .$$

Pour obtenir le premier résultat de Choodnovsky, on utilise le polynôme $X^2 + 2X - 1 = (X + 1)^2 - 2$, numérateur de la dérivée de f_1 . On prend

$$H_n(X) = (X^2 + 2X - 1)^{2[\beta n]}\, (X(1 - X))^{n-2[\beta n]} \quad \text{avec} \quad 0 < \beta < 1$$

la valeur optimale de β est $0{,}06$, et l'on obtient

$$I_n \leqslant c_1\, e^{bn} \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant c_2\, e^{an}$$

avec $b = -1{,}776\ 029\ 24 \ldots$ et $a = 1{,}533\ 870\ 74 \ldots$.

H_n étant positif ou nul sur $[0 , 1]$, on obtient

$$\mu(\log 2) = 4{,}265\ 174\ 29 \ldots .$$

Le second résultat de Choodnovsky est obtenu en utilisant le polynôme $6X^2 - 5X + 1$

qui est égal à $6(X+1)^2 - 17(X+1) + 12$. On prend

$$H_n(X) = (6X^2 - 5X + 1)^{2[0,05\,n]}\,(X(1-X))^{n-2[0,05\,n]} .$$

Soit $f_3(x) = |6x^2 - 5x + 1|^{0,1}\,(x(1-x))^{0,9}/(x+1)$. Sur $[0\,,\,1]$, $f_3'(x)$ s'annule en $1/4$, $3/5$ et $\pm\sqrt{2} - 1$. Avec les notations précédentes, nous avons $b = -\,1,937\,666\,495\ldots$ et $a = 1,939\,021\,891\ldots$ qui nous donnent $\mu(\log 2) = 4,134\,400\,029\ldots$.

On peut donner une meilleure mesure d'irrationalité de $\log 2$ en utilisant plusieurs polynômes de degré 2 comme facteurs de H_n . Si

$P_1 = X^2 + 2X - 1$, $P_2 = 6X^2 - 5X + 1$, $P_3 = 7X^2 - 5X + 1$, $P_4 = 13X^2 - 11X + 2$,

on prend

$$H_n(X) = P_1^{2m_1}\,P_2^{2m_2}\,P_3^{2m_3}\,P_4^{2m_4}\,(X(1-X))^{n-2m_5} ,$$

où $m_1 = [0,00645\,n]$, $m_2 = [0,0554\,n]$, $m_3 = [0,01985\,n]$, $m_4 = [0,002\,n]$ et $m_5 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

Alors $b = -\,1,976\,013\,647\ldots$ et $a = 2,005\,296\,66\ldots$, donc $\mu(\log 2) = 4,079\,154\,34$

C'est actuellement la meilleure mesure d'irrationalité connue de $\log 2$.

3. Mesures d'irrationalité de π^2 et π .

Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[X\,,\,Y]$ engendré par $T = 1 - XY$, $U = 1 - X$ et $V = 1 - Y$. Soit $P_n \in \mathbb{Z}[X\,,\,Y]$ de degré inférieur ou égal à $4n$ et appartenant à $\mathfrak{a}^n$. Alors l'intégrale

$$I_n = \int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(x\,,\,y)}{(1-xy)^{n+1}}\,dx\,dy$$

est convergente. On remarque que

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

et que, pour $m \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 0$,

$$d_m^2 \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^{\ell}\,(1-y)^{m-\ell}}{(1-xy)^{m+1}}\,dx\,dy \in \mathbb{Z}$$

et

$$d_{m+\ell}^2 \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^{m+\ell}}{(1-xy)^{m+1}}\,dx\,dy \in \mathbb{Z} .$$

Supposons que P_n s'écrive $P_n = \sum_{j=0}^{2n} T^j A_j(U,V)$ avec $A_j(U,V) = Q_j(U) + B_j(U,V) + R_j(V)$

où A_j est de degré inférieur ou égal à n et que, pour $0 \leqslant j \leqslant n$, Q_j et R_j soient d'ordre supérieur ou égal à $n - j$, et B_j soit homogène de degré $n - j$. Si on pose $A_n(0 , 0) = b_n$,

$$b_n = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{|x|=\rho} \int_{|y|=\rho} \frac{P_n(x , y)}{(1 - xy)^{n+1}} \, dx \, dy \quad \text{pour} \quad \rho > 1$$

et

$$I_n = a_n + b_n \zeta(2) \quad \text{avec} \quad b_n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad d_n^2 a_n \in \mathbb{Z} .$$

Si l'on prend $P_n = (XY(1 - X)(1 - Y))^n$, on obtient les formules données par F. BEUKERS [3] (voir aussi [11]).

Le maximum de $xy(1 - x)(1 - y)/(1 - xy)$ sur $[0 , 1]^2$ est obtenu pour $x = y = (\sqrt{5} - 1)/2$ et vaut $((\sqrt{5} - 1)/2)^5$.

De plus, $|b_n| \leqslant ((\sqrt{5} + 1)/2)^{5n}$, donc

$$\mu(\pi^2) = 11,850\ 782\ 2 \ldots$$

et

$$\mu(\pi) = 23,701\ 564\ 4 \ldots .$$

Si on utilise le polynôme $X - Y$, il vient, en prenant

$$P_n = XY^{[1,075]n} ((1 - X)(1 - Y))^{n-2[0,075\,n]} (X - Y)^{2[0,075\,n]} ,$$

$$\mu(\pi^2) = 9,385\ 630\ 57 \ldots$$

et

$$\mu(\pi) = 18,771\ 261\ 14 \ldots .$$

Si l'on prend le polynôme

$$P_n = (XY)^{[0,97\,n]} ((1 - X)(1 - Y))^{n-2[0,15\,n]} (X - Y)^{2[0,15\,n]} (2XY - 1)^{2[0,9\,n]} ,$$

on obtient

$$\mu(\pi^2) = 8,099\ 587 \ldots$$

et

$$\mu(\pi) = 16,199\ 174 \ldots .$$

Ces résultats peuvent encore être un peu améliorés, mais le calcul des maxima de $P_n(x , y)/(1 - xy)^n$ requiert l'utilisation de langages de calcul formel. Le calcul précédent a été réalisé sur MACSYMA avec le concours du GRECO calcul formel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). - Approximations to the logarithms of certain rational numbers, Acta Arithm., Warszawa, t. 10, 1964, p. 315-323.

[2] BAKER (A.). - Transcendental number theory. - Cambridge, Cambridge University Press, 1975.

[3] BEUKERS (F.). - A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull. of the London math. Soc., t. 11, 1979, p. 268-272.

[4] CHOODNOVSKY (G. V.). - Formules d'Hermite puis les approximations de Padé de logarithmes et de fonctions binômes, et mesure d'irrationalité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, 1979, série A, p. 965-967.

[5] CHOODNOVSKY (G. V.). - Recurrences defining rational approximations to irrational numbers, Proc. Japan Acad., Series A, t. 58, 1982, p. 129-133.

[6] CHOODNOVSKY (G. V.). - Number theoretic applications of polynomials with rational coefficients defined by extremality conditions, "Arithmetic and geometry", vol. 1, p. 61-105. - Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1983 (Progress in Mathematics, 35).

[7] CHOODNOVSKY (G. V.). - Padé and rational approximations to systems of functions and their arithmetic applications, "Number theory", p. 37-84. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1984 (Lecture Notes in Mathematics, 1052).

[8] DANILOV (V.). - [En Russe] Math. Zametki, t. 24, 1978, p. 449-458.

[9] MAHLER (K.). - On the approximations of π, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series 1, t. 56, 1953, p. 30-42 ; Indag. Math., t. 15, 1953.

[10] MIGNOTTE (M.). - Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres, "Journées arithmétiques" [1973. Grenoble], p. 121-132, Bull. Soc. math. France. Mémoires, t. 37, 1974.

[11] VAN DER POORTEN (A.). - A proof that Euler missed ... Apéry's proof of irrationality of $\zeta(3)$, Math. Intelligencer, t. 1, 1979, p. 195-203.