

GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

FRANÇOIS GRAMAIN

Non-minimalité de la clôture différentielle II : la preuve de M. Rosenlicht

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. n° 5, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A5_0

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1980-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NON-MINIMALITÉ DE LA CLÔTURE DIFFÉRENTIELLE

II : LA PREUVE DE M. ROSENLICHT

par François GRAMAIN (*)

[Université Pierre et Marie Curie]

1. L'espace des différentielles de Kähler.

Soit $\underline{Q} \subset k \subset K$ des corps, et E un K -espace vectoriel.

Définition. - Une application $\wedge : K \rightarrow E$ est une k -dérivation de E si on a

$$\wedge(x + y) = \wedge(x) + \wedge(y), \quad \wedge(xy) = x \wedge(y) + y \wedge(x)$$

$$\text{pour tout } (x, y) \in K^2 \text{ et } \wedge|_k = 0.$$

On définit alors $\Omega_{K/k}^1$, l'espace des k -différentielles de K (ou différentielles de Kähler) et $d : K \rightarrow \Omega_{K/k}^1$ comme la solution du problème universel suivant :

Trouver un K -espace vectoriel Ω , et $d : K \rightarrow \Omega$ une k -dérivation tels que, pour tout K -espace vectoriel E et pour toute k -dérivation $\wedge : K \rightarrow E$, il existe une unique application K -linéaire $\xi_\wedge : \Omega \rightarrow E$ telle que $\wedge = \xi_\wedge \circ d$.

On peut réaliser $\Omega_{K/k}^1$ de la manière suivante : Soit $\mathcal{K}$ le K -module libre sur les symboles $\{\delta x ; x \in K\}$, et soit $\mathcal{M}$ le sous- K -module engendré par

$$\{\delta(x + y) - \delta x - \delta y, \delta(xy) - x\delta y - y\delta x, \delta a ; a \in k, x, y \in K\}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{M}$ est le plus petit sous- K -module de $\mathcal{K}$ tel que la composée d de la projection canonique $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}/\mathcal{M}$ et de $\delta : K \rightarrow \mathcal{K}$ soit une k -dérivation. On vérifie alors facilement que $\Omega = \mathcal{K}/\mathcal{M}$ et d sont solution du problème universel. En particulier, le K -espace vectoriel $\Omega_{K/k}^1$ est engendré par l'ensemble des dx ($x \in K$).

PROPOSITION 1. - On a $\dim_K \Omega_{K/k}^1 = \deg \operatorname{tr}_K K$. Plus précisément, si $(t_1, \dots, t_n)$ est une base de transcendance de K sur k , alors $(dt_1, \dots, dt_n)$ est une base de $\Omega_{K/k}^1$ sur K .

Démonstration. - Si $x_1, \dots, x_n \in K$ sont algébriquement dépendants sur k , soit $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non nul, tel que $P(x_1, \dots, x_n) = 0$. Quitte à réindexer les x_i , supposons que P est de degré minimal en X_1 et que ce degré est ≥ 1 . Comme d est une k -dérivation, on a

(*) François GRAMAIN, 31 rue Parmentier, 94550 CHEVILLY-LARUE.

$$0 = d(P(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_i.$$

Il s'agit d'une relation de dépendance linéaire entre les dx_i , à coefficients dans K , et elle est non triviale car $\frac{\partial P}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, d'après les hypothèses faites sur P .

Cela montre, en particulier, que si $(t_1, \dots, t_n)$ est une base de transcendance de K sur k , alors $(dt_1, \dots, dt_n)$ engendre $\mathcal{A}_{K/k}^1$.

Inversement, supposons que $t_1, \dots, t_n \in K$ sont algébriquement indépendants sur k . Nous allons montrer que les dt_i sont K -linéairement indépendants. Pour tout i , il existe une k -dérivation D_i de K telle que $D_i(t_j) = \delta_{ij}$ (où $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$). En effet, soit $\{t_j\}_{j \in I}$ (où $I = \{1, 2, \dots, n\}$) une base de transcendance de K sur k . Il est facile de construire $D_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ sur l'anneau de polynômes $k[\{t_j\}_{j \in I}]$, de l'étendre au corps des fractions rationnelles $k(\{t_j\}_{j \in I})$ et, l'extension $K/k(\{t_j\}_{j \in I})$ étant algébrique, D_i s'étend à K ([Bo], chapitre V, § 16).

Soit alors $\sum_{j=1}^n \lambda_j dt_j = 0$ avec des $\lambda_j \in K$ une relation de dépendance linéaire entre les dt_j . La propriété universelle de $(\mathcal{A}_{K/k}^1, d)$ fournit un ξ_1 K -linéaire associé à D_i . On a donc

$$\xi_1\left(\sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j dt_j\right) = 0 = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j D_i(t_j) = \lambda_i,$$

et la relation de dépendance linéaire est triviale : les dt_j sont K -linéairement indépendants.

PROPOSITION 2. - Pour toute dérivation $D : K \rightarrow K$ telle que $D(k) \subset k$, il existe une application $D^1 : \mathcal{A}_{K/k}^1 \rightarrow \mathcal{A}_{K/k}^1$ vérifiant $D^1(\omega + \eta) = D^1 \omega + D^1 \eta$, $D^1(x\omega) = (Dx) \omega + x D^1 \omega$, $D^1(dx) = d(Dx)$, pour tous $\omega, \eta \in \mathcal{A}_{K/k}^1$ et $x \in K$.

Démonstration. - Reprenons les notations ci-dessus relatives à la réalisation de $\mathcal{A}_{K/k}^1$. On définit d'abord $D' : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ par

$$D'\left(\sum_i x_i \circ y_i\right) = \sum_i ((Dx_i) \circ y_i + x_i \circ (Dy_i)).$$

Il est clair que $D' \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, donc que D' induit une application $D^1 : \mathcal{M}/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}$. On vérifie immédiatement que D^1 a les propriétés annoncées.

PROPOSITION 3. - Soit D une dérivation de K telle que $D(k) \subset k$, et soit $C = k \cap \text{Ker } D$ le corps des constantes de K muni de la dérivation D . Alors, si x et $y \in K$ sont algébriquement dépendants sur C , on a $D^1(xdy) = d(xDy)$.

Démonstration. - C'est le lemme 1 de [R1], et il y en a une autre preuve dans [R2] (Proposition 5), où on trouvera tous les résultats de ce premier paragraphe.

Par définition de D^1 , on a

$$D^1(x \, dy) = D(x) \, dy + x \, D^1(dy) = D(x) \, dy + x \, d(Dy)$$

et d étant une dérivation, on a $d(x \, Dy) = D(y) \, dx + x \, d(Dy)$. Il suffit donc de montrer que $D(x) \cdot dy = D(y) \cdot dx$.

Si x et y sont algébriques sur C , alors $dx = dy = 0$ (voir la Proposition 1) et le résultat est prouvé.

Sinon, on peut supposer x transcendant sur C . Soit $P \in C[X, Y]$ irréductible tel que $P(x, y) = 0$. Alors $P(x, Y)$ est irréductible sur $C(x)$ et $\frac{\partial P}{\partial Y}(x, y) \neq 0$. Appliquons d et D à l'égalité $P(x, y) = 0$. Puisque $C \subset \text{Ker } D \cap \text{Ker } d$, on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x, y) \, dx + \frac{\partial P}{\partial Y}(x, y) \, dy = 0 \quad \text{dans } \Omega_{K/k}^1$$

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x, y) \, Dx + \frac{\partial P}{\partial Y}(x, y) \, Dy = 0 \quad \text{dans } K.$$

Comme $\frac{\partial P}{\partial Y}(x, y) \neq 0$, on en déduit $D(x) \cdot dy = D(y) \cdot dx$.

Remarque. - Il ne faut pas interpréter cela comme un système linéaire homogène en les inconnues $\frac{\partial P}{\partial X}(x, y)$ et $\frac{\partial P}{\partial Y}(x, y)$ dont le déterminant serait nul, puisque l'une des équations concerne des éléments du corps K et l'autre des vecteurs de $\Omega_{K/k}^1$, mais il suffit de calculer $D(y)$ et dy à l'aide de ces deux équations.

PROPOSITION 4. - Soit u_i ($1 \leq i \leq n$), et v des éléments de K , avec $u_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$), et $c_1, \dots, c_n$, n éléments de k , Q -linéairement indépendants. Alors $c_1 \frac{du_1}{u_1} + \dots + c_n \frac{du_n}{u_n} + dv \in \Omega_{K/k}^1$ est nul si, et seulement si, $du_1 = \dots = du_n = dv = 0$ (i. e. $u_1, \dots, u_n$ et v algébriques sur k).

Démonstration. - La parenthèse est conséquence de la proposition 1. On peut supposer que $K = k(u_1, \dots, u_n, v)$, et il suffit de prouver que si u_1 est transcendant sur k , alors $\omega = c_1 \frac{du_1}{u_1} + \dots + c_n \frac{du_n}{u_n} + dv \neq 0$. Soit $(u_1, t_2, \dots, t_m)$ une base de transcendance de K sur k . La propriété universelle de $\Omega_{K/k}^1$ appliquée à la dérivation $K \rightarrow \Omega_{K/k(t_2, \dots, t_m)}^1$ fournit un homomorphisme $\varphi : \Omega_{K/k}^1 \rightarrow \Omega_{K/k(t_2, \dots, t_m)}^1$, et si $\varphi(\omega) \neq 0$, alors $\omega \neq 0$. On peut donc, quitte à remplacer k par $k(t_2, \dots, t_m)$, supposer K algébrique sur $k(u_1)$. On peut aussi, quitte à agrandir K , supposer que l'extension $K/k(u_1)$ est galoisienne. Alors, si $\omega = 0$, pour tout $\sigma \in \text{Gal}(K/k(u_1))$, on a

$$\omega^\sigma = c_1 \frac{d\sigma u_1}{\sigma u_1} + \dots + c_n \frac{d\sigma u_n}{\sigma u_n} + d\sigma v = 0,$$

et en ajoutant toutes ces égalités on obtient une égalité du type $\omega = 0$, où c_1 est remplacé par $c_1[K : k(u_1)]$ et les u_i (pour $i \geq 2$) et v sont remplacés par des éléments de $k(u_1)$.

On s'est ramené à prouver que $\omega = c_1 \frac{du_1}{u_1} + \dots + c_n \frac{du_n}{u_n} + dv \neq 0$ si u_1 est

transcendant sur k et $u_2, \dots, u_n, v \in K = k(u_1)$, c'est-à-dire dans le cas d'un corps de fractions rationnelles à une indéterminée. Le résultat est alors immédiat si on utilise la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles : les c_i étant $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants, dans l'expression de ω , il restera un terme en $\frac{du_1}{u_1}$ qui ne pourra pas disparaître.

C. Q. F. D.

Remarque. - L'astuce qui permet de se ramener au cas où $K = k(u_1)$ est un corps de fractions rationnelles (et qui apparaît dans [R2]) simplifie énormément la démonstration de ce résultat dû à James AX [A] qui devait utiliser la théorie des résidus sur les corps de fonctions algébriques d'une variable.

2. Le théorème de M. Rosenlicht [R1].

Nous donnons un énoncé qui généralise un peu (et sans difficulté !) la proposition 1 de [R1].

THÉOREME. - Soit k un corps différentiel de caractéristique zéro, C le corps des constantes de k , et K une extension différentielle de k dont les constantes sont algébriques sur k . Soit $C(x)$ le corps des fractions rationnelles en une indéterminée sur C , et f un élément non nul de $C(x)$ tel que

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i \frac{\frac{\partial u_i}{\partial x}(x)}{u_i(x)} + \frac{\partial v}{\partial x}(x), \text{ où } c_i \in C \ (1 \leq i \leq n), \ u_i \text{ et } v \in C(x).$$

Soit x_1 et $x_2 \in K$ des solutions respectives de $x_1' = a_1 f(x_1)$ et $x_2' = a_2 f(x_2)$, avec a_1 et $a_2 \in C^x$. Si x_1 et x_2 sont algébriquement dépendants sur k , alors l'un des x_i ($1 \leq i \leq 2$) est algébrique sur k , ou bien $a_2(v(x_1))' = a_1(v(x_2))'$.

Remarque. - Rappelons qu'une extension différentielle K d'un corps différentiel k , muni de la dérivation $D: k \rightarrow k$, est un sur-corps K de k , muni d'une dérivation $D': K \rightarrow K$ telle que $D'|_k = D$. Comme d'habitude, on notera $y' = D'(y)$ si $y \in K$. Dans [R1], Maxwell ROSENBLICHT montre que l'hypothèse d'algébricité faite sur les constantes de K est superflue.

D'autre part, l'hypothèse faite sur f est toujours réalisée si C est algébriquement clos. Pour le voir, il suffit de décomposer $1/f(x)$ en éléments simples.

Démonstration. - Il est clair qu'on peut supposer $K = k(x_1, x_2)$. Si aucun des x_i n'est algébrique sur k et s'ils sont algébriquement dépendants sur k , on a $\deg \text{tr}_k(K) = 1$, donc $\dim_K K/k = 1$, d'après la proposition 1. Ainsi $\Omega_{K/k}^1$ est engendré par dx_j ou par $dx_j/f(x_j)$. Il existe donc $c \in K^x$ tel que $dx_2/f(x_2) = c dx_1/f(x_1)$. On va montrer que c est une constante de K . Si on note D la dérivation de K qui en fait une extension différentielle de k , la proposition

3 appliquée à $x = 1/f(x_j)$ et $y = x_j$ montre que

$$D^1\left(\frac{dx_j}{f(x_j)}\right) = d\left(\frac{x'_j}{f(x_j)}\right) = d(a_j) = 0 ,$$

car $a_j \in k$.

Comme l'a remarqué Michel BRESTOVSKI, la proposition 3 est inutile pour obtenir ce résultat, mais elle simplifie seulement les calculs : En effet, l'application de la proposition 2 fournit, compte tenu des propriétés de d , le calcul suivant :

$$\begin{aligned} D^1\left(\frac{dx_j}{f(x_j)}\right) &= D\left(\frac{1}{f(x_j)}\right) dx_j + \frac{1}{f(x_j)} D^1(dx_j) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_j)}{f(x_j)^2} x'_j dx_j + \frac{1}{f(x_j)} d(x'_j) \\ &= -a_j f(x_j) \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_j)}{f(x_j)^2} dx_j + \frac{1}{f(x_j)} d(a_j f(x_j)) = -a_j \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_j)}{f(x_j)} dx_j + a_j \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_j)}{f(x_j)} dx_j = 0 , \end{aligned}$$

où l'on a encore utilisé $da_j = 0$ (pour le calcul de $d(a_j f(x_j))$). La généralisation de la proposition 3, donnée par Michel BRESTOVSKI [Br], pour l'étude d'équations différentielles d'ordre ≥ 2 , est plus utile car les calculs qu'elle simplifie sont beaucoup plus longs.

On a donc, d'après la proposition 2,

$$0 = D^1\left(\frac{dx_2}{f(x_2)}\right) = D^1\left(c \frac{dx_1}{f(x_1)}\right) = D(c) \frac{dx_1}{f(x_1)} + c D^1\left(\frac{dx_1}{f(x_1)}\right) = D(c) \frac{dx_1}{f(x_1)} ,$$

d'où $D(c) = c' = 0$, et c est une constante de K , donc un élément algébrique sur k .

Utilisons maintenant la forme de f :

$$\frac{dx_j}{f(x_j)} = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i \frac{\frac{\partial u_i}{\partial x}(x_j)}{u_i(x_j)} dx_j + \frac{\partial v}{\partial x}(x_j) dx_j = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i \frac{d(u_i(x_j))}{u_i(x_j)} + d(v(x_j)) ,$$

car d est une k -dérivation de K . On a donc

$$\sum_{1 \leq i \leq n} c_i \frac{d(u_i(x_2))}{u_i(x_2)} + d(v(x_2)) = c \left(\sum_{1 \leq i \leq n} c_i \frac{d(u_i(x_1))}{u_i(x_1)} + d(v(x_1)) \right) ,$$

mais c est algébrique sur k , donc $dc = 0$ (proposition 1), et on en déduit

$$\sum_{1 \leq i \leq n} c_i \left(\frac{d(u_i(x_2))}{u_i(x_2)} - \frac{d(c u_i(x_1))}{u_i(x_1)} \right) + d(v(x_2) - c v(x_1)) = 0 .$$

La proposition 4 montre alors que $d(v(x_2) - c v(x_1)) = 0$, d'où l'on tire

$$\begin{aligned} a_1(v(x_2))' &= a_1 \frac{\partial v}{\partial x}(x_2) \cdot x'_2 = a_1 a_2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_2) f(x_2) = a_1 a_2 \frac{d(v(x_2))}{dx_2/f(x_2)} \\ &= a_1 a_2 \frac{c d(v(x_1))}{c dx_1/f(x_1)} = a_1 a_2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_1) f(x_1) = a_2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_1) \cdot x'_1 = a_2(v(x_1))' , \end{aligned}$$

c'est-à-dire le résultat annoncé.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soit C un corps de constantes de caractéristique zéro, et $f(x) = x(1+x)^{-1}$ (ou $f(x) = x^3 - x^2$). Soit $\hat{C}$ la clôture différentielle de C , et $x_1, \dots, x_m \in \hat{C}$ des solutions distinctes non constantes de $x_i' = a_i f(x_i)$, où $a_i \in C^\times$ ($1 \leq i \leq m$). Alors $x_1, \dots, x_m$ sont algébriquement indépendants sur C .

Remarque. - Comme on l'a dit dans l'exposé précédent [G], cela montre que la clôture différentielle $\hat{C}$ de C n'est pas minimale.

Démonstration. - On peut appliquer le théorème aux fractions rationnelles $f(x) = x(1+x)^{-1}$ et $f(x) = x^3 - x^2$, car

$$\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1 = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)}{x} + \frac{\partial}{\partial x}(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\frac{x-1}{x}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a alors $v(x) = x$ (resp. $v(x) = 1/x$), d'où $(v(x_1))' = x_1' = a_1 x_1 (1+x_1)^{-1}$ (resp. $(v(x_1))' = -x_1'/x_1^2 = -a_1(x_1^3 - x_1^2)/x_1^2 = -a_1(x_1 - 1)$). Ainsi l'égalité $a_1(v(x_2))' = a_1(v(x_1))'$ se traduit, dans les deux cas, par $x_1 = x_2$. De plus, les seules solutions constantes de $x_i' = a_i f(x_i)$ vérifient $f(x_i) = 0$, donc sont 0 (resp. 0 et 1).

Montrons alors le corollaire par l'absurde : Soit $x_1, \dots, x_n \in \hat{C}$ des solutions distinctes, non constantes de $x_i' = a_i f(x_i)$ et algébriquement dépendantes sur C , avec n minimal.

Si $n = 1$, $x_1 \in \bar{C}$ qui est le corps des constantes de $\hat{C}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Si $n \geq 2$, alors x_n et x_{n-1} sont algébriquement dépendants sur $k = C(x_1, \dots, x_{n-2})$ et les constantes de $K = \hat{C}$ sont les éléments de $\bar{C}$, clôture algébrique de C , donc algébriques sur k . On peut ainsi appliquer le théorème, qui, d'après ce qui précède, fournit $x_n = x_{n-1}$, c'est-à-dire la contradiction cherchée.

C. Q. F. D.

Dans [R1], Maxwell ROSENBLICHT donne ce résultat avec des a_i tous égaux à 1. Il est intéressant d'introduire ces constantes a_i car, alors, le théorème permet de montrer que si κ est un cardinal infini non dénombrable, il existe 2^κ corps différentiellement clos (de caractéristique zéro) non isomorphes et de cardinal κ . La preuve de ce dernier résultat est due à Saharon SHELAH [S], et on peut la trouver dans l'article de Carol WOOD [W]. Si $\kappa = \aleph_0$ est dénombrable, le problème du nombre de corps différentiellement clos de caractéristique zéro et de cardinal $\aleph_0$ est encore ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] AX (James). - On Schanuel's conjectures, *Annals of Math.*, t. 93, 1971, p. 252-268.
- [Bo] BOURBAKI (Nicolas). - *Algèbre*, chapitres 4 à 7. - Paris, Masson, 1981.
- [Br] BRESTOVSKI (Michel). - Indépendance algébrique de solutions d'équations différentielles, Thèse 3e cycle, ou *C. R. Acad. Sc.*, t. 294, 1982, p. 609-612.
- [G] GRAMAIN (François). - Non-minimalité de la clôture différentielle, I : la preuve de S. Shelah, *Groupe d'étude de Théories stables*, 3e année, 1981/82, n° 4, 9 p.
- [R1] ROSENBLICHT (Maxwell). - The non-minimality of the differential closure, *Pacific J. of Math.*, t. 52, 1974, p. 529-537.
- [R2] ROSENBLICHT (Maxwell). - On Liouville's theory of elementary functions, *Pacific J. of Math.*, t. 65, 1976, p. 485-492.
- [S] SHELAH (Saharon). - Differentially closed fields, *Israel J. of Math.*, t. 16, 1973, p. 314-328.
- [W] WOOD (Carol). - The model theory of differential fields revisited, *Israel J. of Math.*, t. 25, 1976, p. 331-352.
-