

GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

CHANTAL BERLINE

Stabilité et algèbre. 2. Groupes abéliens et modules

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. n° 2, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A2_0

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STABILITÉ ET ALGÈBRE

2. Groupes abéliens et modules

par Chantal BERLINE (*)

[Université Paris-7]

La section A est réservée au rappel de résultats classiques sur les groupes abéliens. La section B peut être considérée comme une initiation à l'application des techniques présentées dans l'exposé 1. Nous y démontrons, en détail pour les groupes abéliens, des résultats parfois valables pour des classes beaucoup plus générales de modules. La section C est consacrée aux modules. Nous nous contentons la plupart du temps d'énoncer les résultats ou d'en esquisser les preuves. Le lecteur intéressé par les démonstrations consultera les articles de GARAVIGLIA ([5], [6]) et les articles qui y sont mentionnés.

Conventions et notations. - Dans cet exposé, L désigne le langage des groupes abéliens $(=, +, 0)$, et T est la théorie des groupes abéliens exprimée dans L . R est un anneau unitaire, et T_R la théorie des R -modules à gauche exprimée dans le langage L_R qui s'obtient en ajoutant à L un symbole de fonction unaire λ pour chaque λ de R . L_R n'est donc dénombrable que si R lui-même l'est.

Pour tout module M et tout cardinal α , $M^{(\alpha)}$ désigne la somme directe de α copies de M . Rappelons que $M^{(\alpha)}$ et M^α sont élémentairement équivalents [8].

Enfin, tous les modules considérés ici sont des modules à gauche et tous les groupes sont abéliens.

A. Préliminaires sur les groupes abéliens.

1. Elimination des quantificateurs.

C'est un résultat classique de SZMIELEV [12] que la théorie des groupes abéliens admet l'élimination des quantificateurs dans le langage $L' = L \cup \{P_n ; n \in \mathbb{N}\}$, où les P_n sont des prédicats unaires, et $P_n(x)$ est interprété par $\exists y (ny=x)$. En particulier, toute théorie complète de groupes abéliens (dans L), telle que " n divise x " se dit sans quantificateurs, admettra l'élimination des quantificateurs dans L . C'est le cas des groupes de la forme $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^{(\alpha)}$, α cardinal quelconque, c'est aussi le cas des groupes divisibles, i. e. des groupes abéliens D tels que $nD = D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(*) Chantal BERLINE, Mathématiques, Université Paris-7, Aile 45-55, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

2. Groupes divisibles ([4], vol. I).

Un groupe divisible est facteur direct de tout groupe qui le contient. Tout groupe G a un plus grand sous-groupe divisible, D ; G est donc de la forme $D \oplus R$, où R n'a pas de sous-groupe divisible non trivial. D est unique, R est unique à isomorphisme près. D est inclus dans $\Delta = \bigcap_{n \geq 1} nG$, et en général les deux groupes sont distincts; ils coïncident exactement quand Δ est divisible.

LEMME 1. - Si G est ω -saturé, alors $D = \Delta$.

Démonstration. - Il faut montrer que, pour tout x de Δ et pour tout $n \geq 1$, l'équation $ny = x$ a une solution dans Δ , c'est-à-dire vérifier que l'ensemble suivant de formules à une variable libre y :

$$p(y) : \{ny = x\} \cup \{\exists z (y = mz) ; m \geq 1\}$$

est réalisable dans G . Il suffit de voir qu'il est finiment réalisable dans Δ . Or, si r est le plus grand des entiers m qui interviennent dans un sous-ensemble fini q de p , et si $x_0 \in \Delta$ est tel que $x = nr!x_0$, alors $r!x_0$ satisfait $q(y)$.

LEMME 2 ([4], I, p. 104). - Les groupes divisibles sont, à isomorphisme près, les groupes de la forme $D = \bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\alpha_p)} \oplus \alpha^{(\alpha)}$, où α est le groupe additif des rationnels, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ le p -groupe cocyclique infini et α , α_p des cardinaux quelconques.

3. Groupes d'exposant borné.

On dit qu'un groupe G est d'exposant borné s'il y a un entier $n \geq 1$ tel que $nG = (0)$. Pour les groupes abéliens d'exposant borné, comme pour les groupes divisibles, on dispose d'un théorème de structure :

LEMME 3 ([4], I, p. 88). - Les groupes abéliens d'exposant borné sont, à isomorphisme près, les groupes de la forme $\bigoplus_{\text{finie}} (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^{(\alpha_{p,n})}$, où les p sont premiers, les n entiers quelconques, et les $\alpha_{p,n}$ des cardinaux arbitraires.

4. Invariants de Szpielew (pour mémoire).

Les α_p , α (resp. les $\alpha_{p,n}$) constituent des systèmes d'invariants permettant de caractériser les groupes divisibles (resp. les groupes d'exposant borné) à isomorphisme près. On ne connaît pas d'invariants permettant de caractériser, à isomorphisme près, un groupe abélien quelconque. En revanche, on en connaît à équivalence élémentaire près. Wanda SZPIELEW [12] a montré que tout groupe abélien G était élémentairement équivalent à un groupe de la forme :

$$\alpha^{(\alpha)} \oplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\alpha_p)} \oplus_p \mathbb{Z}_p^{(\beta_p)} \oplus_{p,n} (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^{(\alpha_{p,n})},$$

où $\mathbb{Z}_p$ est le groupe additif des entiers p -adiques ([4], I, p. 17), et elle a mis

en évidence des invariants qui se calculent simplement à partir des α , α_p , β_p , $\alpha_{p,n}$. Notons que les cardinaux α , α_p , ... ne sont pas, eux, déterminés de façon unique par la donnée de G , même en supposant, à l'aide de Feferman-Vaught, qu'ils sont tous $\leq \omega$; par exemple, tout groupe G d'exposant non borné et élémentairement équivalent à $G \oplus \alpha^{(\alpha)}$, où α est un cardinal quelconque (cf. Lemme 5).

Nous ne nous servons pas ici de la théorie de Szmielew car nous nous ramènerons toujours à des groupes divisibles ou d'exposant borné, et appliquerons les lemmes 2 et 3 (notons que ce ne serait plus possible si nous nous occupions de superstabilité).

B. Stabilité et catégoricité des groupes abéliens.

THÉOREME 4. - Tout groupe abélien est stable.

Démonstration (BERTHIER). - Grâce à SHELAH ([10], [11]), il suffit de voir que tout $(1, -)$ type de la théorie de G dans L' est définissable. Soit H élémentairement équivalent à G , et p un type sur H : p est réalisé par un élément a d'une extension élémentaire K de H , et il faut trouver pour toute formule $\varphi(x, \bar{y})$ de L' une formule $\psi(\bar{y})$ de $L'(H)$ telle que

$$\forall \bar{b} \in H, K \models \varphi(a, \bar{b}) \text{ si, et seulement si, } H \models \psi(\bar{b}).$$

Puisqu'on a l'élimination des quantificateurs dans L' , il suffit de regarder les formules φ atomiques de la forme $mx + y = 0$ ou $P_n(mx + y)$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$). S'il y a un $c \in H$ tel que $ma + c = 0$ (resp. $P_n(ma + c)$), on choisit $\psi(y) = y = c$ (resp. $P_n(y - c)$), sinon on prend pour $\psi(y)$: $y \neq y$.

LEMME 5. - Pour tout premier p et tout entier $n \geq 1$,

- (a) $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^{(\alpha)}$ est totalement catégorique quel que soit le cardinal α .
- (b) $\mathbb{Z}(p^\infty)^n$ est $\aleph_1$ -catégorique.

Démonstration. - Le (a) est laissé en exercice. Pour (b), il suffit de remarquer, en utilisant le lemme 2, que la théorie T_n des groupes divisibles ayant p^n éléments d'ordre p et aucun élément d'ordre q premier avec p a tous ses modèles de la forme $\mathbb{Z}(p^\infty)^n \oplus \alpha^{(\alpha)}$.

Notons qu'il en résulte que T_n est complète, et donc que $\mathbb{Z}(p^\infty)$ et $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \alpha^{(\alpha)}$ sont élémentairement équivalents pour tout α .

THÉOREME 6 [7]. - Un groupe abélien G est ω -stable si, et seulement si, il est de la forme $D \oplus R$ avec D divisible, et R d'exposant borné.

Démonstration.

$\Rightarrow$: la suite décroissante des sous-groupes définissables $n!G$ est stationnaire puisque G est ω -stable (théorème 18 de l'exposé précédent). Soit r tel que $n!G$ soit constante pour $n \geq r$. Si $G' \equiv G$, on a aussi $r!G' = (r+1)!G' = \dots$, donc si G' est ω -saturé, $r!G'$ est divisible (lemme 1). Par transfert, $D=r!G$ est divisible, donc facteur direct de G . $G = D \oplus R$ et $r!G \cap R = (0)$ implique $r!R = (0)$, donc R est bien d'exposant borné.

$\Leftarrow$: L' ω -stabilité étant conservée par somme directe finie (théorème 8 de l'exposé précédent), il suffit de voir que tout groupe divisible (et tout groupe d'exposant borné) est ω -stable. Le deuxième cas est réglé par les lemmes 3 et 5 (on sait même qu'un tel groupe est de rang de Morley fini puisqu'il est somme finie de groupes $\aleph_1$ -catégoriques). Soit D un groupe divisible, et $D' \equiv D$, D' dénombrable. Un type sur D' est déterminé par les formules de la forme $nx = b$ et $nx \neq b$ ($n \in \mathbb{N}$, $b \in D'$) qu'il contient (utiliser l'élimination des quantificateurs dans L). Il suffit alors de compter les types possibles. On vérifie qu'il n'y en a pas plus de ω : un seul type ne contient aucune équation, et si un type p contient une équation $nx = b$, n étant le plus petit entier pour lequel cela se produit, alors le type est déterminé par cette équation et toutes les inéquations $mx \neq c$, $m < n$, $c \in D'$.

THÉOREME 7 [7]. - Un groupe abélien G est $\aleph_1$ -catégorique si et seulement si, il est de l'une des deux formes suivantes :

- (a) $K \oplus H$ avec H fini et $K = (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^{(\alpha)}$, α fini ou non.
- (b) $D \oplus H$ avec H fini et D divisible n'ayant pour tout p qu'un nombre fini d'éléments d'ordre p , i. e. $D \cong \bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)^{n_p}$ où tous les n_p sont finis.

Démonstration.

$\Rightarrow$: On sait déjà que $G = D \oplus R$, D divisible, R d'exposant borné. Supposons qu'un $\mathbb{Z}(p^\infty)$ intervienne avec un exposant infini α dans G . Alors, en utilisant la remarque qui suit le lemme 5 et plusieurs fois Feferman-Vaught, on a :

$$\begin{aligned} G &\equiv \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\alpha)} \oplus L \quad (L \text{ sans facteur } \mathbb{Z}(p^\infty) \text{ et de cardinal } \leq \omega) \\ &\equiv \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\omega)} \oplus \alpha^{(\omega_1)} \oplus L \\ &\equiv \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\omega_1)} \oplus \alpha^{(\omega_1)} \oplus L \end{aligned}$$

et les deux derniers groupes sont manifestement de cardinal ω_1 et non isomorphes. Le même argument montre que si $D \neq (0)$, R ne peut contenir aucune composante en $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^{(\alpha)}$, α infini, et que si $D = (0)$, il ne peut y en avoir plus d'une.

$\Leftarrow$: Une démonstration analogue à celle du lemme 5 (b) montre que les groupes $\bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)^{n_p}$, où tous les n_p sont finis, sont $\aleph_1$ -catégoriques. Dans le cas (a)

comme dans le cas (b), G est donc produit d'un groupe $\aleph_1$ -catégorique par un groupe fini. Nous verrons dans l'exposé sur les groupes que G est alors $\aleph_1$ -catégorique. Dans les deux cas qui nous préoccupent ici, une démonstration directe, et simple, est possible. Nous la laissons à titre d'exercice.

THÉOREME 8. - Un groupe abélien est $\aleph_0$ -catégorique si, et seulement si, il est d'exposant borné.

Démonstration.

$\Rightarrow$: On utilise le fait que les formules $y = nx$, $n \in \mathbb{N}$, sont équivalentes à un nombre fini d'entre elles.

$\Leftarrow$: si un groupe est d'exposant borné, on voit en utilisant les lemmes 3 et 5 qu'il est somme finie de groupes $\aleph_0$ -catégoriques, donc $\aleph_0$ -catégorique lui-même.

C. Modules.

On appelle formule existentielle positive de L_R (en abrégé, e. p. formule) toute formule de L_R de la forme

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists y_1, \dots, y_p \bigwedge_{i=1}^m \alpha_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p),$$

où les α_i sont atomiques. Si $\varphi(x)$ est une e. p. formule à une variable libre x et M un R -module, alors $\varphi^M = \{a \in M ; M \models \varphi(a)\}$ est un sous-groupe additif de M (et un R -module si R est commutatif). Soient φ_1 et φ_2 deux e. p. formules à une variable libre, on notera $[\varphi_1 : \varphi_1 \cap \varphi_2]^M$ l'indice de $\varphi_1^M \cap \varphi_2^M$ dans φ_1^M si cet indice est fini, ∞ sinon.

Les noms de BAUR, FISHER, GARAVIGLIA, MARTYANOV, MONK, SABBAGH, sont associés aux résultats suivants ; pour avoir des références précises on pourra consulter [5] et [10] (p. 294-302).

THÉOREME 9 [2].

(a) Deux R -modules M et M' sont élémentairement équivalents si, et seulement si, pour toutes e. p. formules φ_1 et φ_2 $[\varphi_1 : \varphi_1 \cap \varphi_2]^M = [\varphi_1 : \varphi_1 \cap \varphi_2]^{M'}$.

(b) Modulo une théorie complète quelconque de modules, toute formule de L_R est équivalente à une combinaison booléenne de e. p. formules.

(a) fournit donc des systèmes d'invariants qui permettent de caractériser un module à équivalence élémentaire près, et en particulier de montrer que pour tout M , et tout cardinal α , $M^{(\alpha)}$ et M^α sont élémentairement équivalents.

(b) permet d'éliminer en partie les quantificateurs quand on travaille, ce qui est notre cas, avec des théories complètes de modules.

THÉOREME 10. - Tous les modules sont stables.

Esquisse de démonstration. - On procède comme pour le théorème 4 : on cherche à montrer que tout type est définissable. Grâce au théorème 9 (b), il suffit de fournir des définitions aux formules existentielles positives du type ; nous le laissons en exercice, ce n'est guère plus difficile que pour le théorème 4.

Nous avons vu qu'une structure ω -stable (resp. superstable), M , n'admettait pas de ω -suite de sous-groupes M -définissables strictement décroissante (resp. d'indice infini les uns dans les autres). La réciproque est vraie dans le cas des modules. Avant de l'énoncer, remarquons que la notion d' ω -stabilité n'a de sens que pour un langage dénombrable. Pour inclure le cas R non dénombrable, il nous faut donc utiliser la notion plus générale de théorie totalement transcendante (i. e. tout 1-type a un rang de Morley) les deux notions coïncident dans le cas dénombrable, de plus si M est totalement transcendant, il n'a évidemment pas non plus de ω -suite décroissante stricte de sous-groupes, car une telle suite fournirait une ω -suite strictement décroissante d'ordinaux (utiliser le lemme 19 de l'exposé précédent).

THÉOREME 11 ([5], [6]). - Un R -module M est totalement transcendant (resp. superstable) si, et seulement si, il n'a pas de ω -suite de sous-groupes définissables (par e. p. formules de L_R) strictement décroissante (resp. d'indices infinis les uns dans les autres).

Démonstration. - Nous nous contenterons de traiter le cas de l' ω -stabilité. L'idée de base est la même pour la superstabilité. Pour la totale transcendance, il faudrait bien sûr faire un raisonnement par récurrence sur les rangs. Supposons donc que R est dénombrable et que le R -module M n'a pas de ω -suite strictement décroissante de sous-groupes définissables par des e. p. formules, alors il n'a pas non plus de ω -suite strictement décroissante de sous-ensembles M -définissables par des e. p. formules : soient $\varphi(x, \vec{y})$ et $\psi(x, \vec{z})$ deux e. p. formules à, respectivement, $m+1$ et $n+1$ variables libres ; soient $\vec{b} \in M^m$ et $\vec{c} \in M^n$ des paramètres. Il suffit de montrer que $\varphi(x, \vec{b})^M \not\subseteq \psi(x, \vec{c})^M$ implique $\varphi(x, \vec{c})^M \not\subseteq \varphi(x, \vec{b})^M$, et pour ça de remarquer que, pour tout $a \in M$,

$$M \models \forall x (\varphi(x, \vec{b}) \wedge \varphi(a, \vec{b}) \leftrightarrow \varphi(x - a, \vec{c}) \wedge \varphi(a, \vec{b})) .$$

Soit M' un R -module dénombrable élémentairement équivalent à M . Il nous faut montrer qu'il n'y a pas plus de ω -types à paramètres dans M . On commence par énumérer les e. p. formules à paramètres dans M . Soit $\varphi_n(x, \vec{b}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, une telle énumération. A tout type p , on associe le plus petit entier n tel que la formule $\varphi_n(x, \vec{b}_n)$ soit dans p et que le sous-ensemble défini dans M par $\varphi_n(x, \vec{b}_n)$ soit minimal parmi les sous-ensembles définis par une e. p. formule de p . Soit $f(p)$ cet entier. Nous allons montrer que f est injective. En effet, si $f(p) = f(q)$, et si $\varphi_n(x, \vec{b}_n)$ est une e. p. formule quelconque de p ,

$\varphi_n(x, \vec{b}_n) \wedge \varphi_{f(p)}(x, \vec{b}_{f(p)})$ est une e. p. formule de p (à équivalence près). D'après le choix de $f(p)$, elle est équivalente à $\varphi_{f(p)}(x, \vec{b}_{f(p)})$ comme $f(p) = f(q)$,

$$M' \models \varphi_{f(q)}(x, \vec{b}_{f(p)}) \rightarrow \varphi_n(x, \vec{b}_n),$$

donc $\varphi_n(x, \vec{b}_n)$ est dans q . De même, toute e. p. formule de q à paramètre dans M' est dans p , on conclue avec le théorème 9(b) que $p = q$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 12. - Tout module $\aleph_0$ -catégorique est totalement transcendant.

En effet, un tel module n'a qu'un nombre fini de sous-groupes définissables sans paramètres.

La notion de R -module injectif (i. e. facteur direct de tout R -module qui le contient) généralise celle de groupe abélien divisible. On a vu que tout groupe divisible est ω -stable ; plus généralement on a le théorème suivant.

THÉOREME 13 ([6], [9]). - Si R est noethérien, alors tout R -module injectif est totalement transcendant (et la réciproque est vraie).

Nous terminerons par l'énoncé, sous une forme un peu plus forte, d'un théorème de Baur :

THÉOREME 14 ([1], [6]). - Un R -module M est $\aleph_0$ -catégorique si, et seulement si, il y a des R -modules finis $M_1, \dots, M_n$ et des cardinaux $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$M = M_1^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus M_n^{\alpha_n}.$$

REFERENCES

- [1] BAUR (W.). - $\aleph_0$ -categorical modules, J. symb. Logic, t. 40, 1975, p. 213-220.
- [2] BAUR (W.). - Elimination of quantifiers for modules, Israel J. of Math., t. 25, 1976, p. 64-70.
- [3] EKLOV (P. C.) and FISCHER (E. R.). - The elementary properties of abelian groups, Annals of math. Logic, Amsterdam, t. 4, 1972, p. 115-171.
- [4] FUCHS (L.). - Infinite abelian groups, Vol. I and II. - New York, Academic Press, 1970-1973 (Pure and applied Mathematics. Academic Press, 36).
- [5] GARAVIGLIA (S.). - Direct product decomposition of theories of modules, J. of symb. Logic, t. 44, 1979, p. 77-88.
- [6] GARAVIGLIA (S.). - Decomposition of totally transcendental modules, J. of symb. Logic, t. 45, 1980, p. 155-164.
- [7] MACINTYRE (A.). - On ω_1 -categorical theories of abelian groups, Fund. Math. Warszawa, t. 70, 1971, p. 253-270.
- [8] SABBAGH (G.). - Aspects logiques de la pureté dans les modules, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 909-912.
- [9] SABBAGH (G.). - Catégoricité et Stabilité : Quelques exemples parmi les groupes et les anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 603-606.

- [10] SHELAH (S.). - The lazy model-theoretician's guide to stability, *Logique et Analyse*, Louvain, nouvelle série, t. 18, 1975, 71-72, p. 241-308.
 - [11] SHELAH (S.). - Stability, the f. c. p., and superstability : model theoretic properties of formulas in first order theory, *Annals math. Logic*, t. 13, 1971, p. 271-362.
 - [12] SZMIELEW (W.). - Elementary properties of abelian groups, *Fund. Math.*, Warszawa, t. 41, 1955, p. 203-271.
-