Groupe d'étude de théories stables

Sébastien Ehrsam

L'ordre fondamental, le théorème de la borne, le théorème de la relation d'équivalence finie

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 4, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A4_0>

L'ORDRE FONDAMENTAL, LE THÉORÈME DE LA BORNE, LE THÉORÈME DE LA RELATION D'ÉQUIVALENCE FINIE

par Sébastien EHRSAM (*)

Il sera largement fait appel aux résultats mentionnés dans l'exposé n° 1 ; $|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A, λ^+ le cardinal successeur de λ ; pour tous ensembles de paramètres X et Y, $t(X, Y)$ est le type de X sur Y ; si p et q sont deux types, " q est une extension de p " se note $p \subset q$; enfin, si p est un type sur A et si $X \subset A$, la restriction de p à X se note $p_{|X}$.

1. L'ordre fondamental.

Cette partie 1 ne concerne que des types complets au-dessus de modèles d'une théorie T complète.

A. Définitions ; propriétés élémentaires ; notion de fils maximal.

1° Soient M et N deux modèles de T, $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$. $p \geq q$ si, et seulement si, pour toute formule $f(x, \bar{y})$ telle qu'il existe $\bar{a}$ dans M^n, avec $p \vdash f(x, \bar{a})$, il existe $\bar{a}'$ dans N^n tel que $q \vdash f(x, \bar{a}')$.

$\geq$ est clairement un préordre, et " $p \geq q$ et $q \geq p$ ", noté $p \sim q$, est une relation d'équivalence sur l'ensemble des types sur les modèles de T. Le quotient de ce préordre par la relation d'équivalence $\sim$ s'appelle l'ordre fondamental de T.

2° On dit que p représente $f(x, \bar{y})$ s'il existe $\bar{a}$ dans M^n tel que $p \vdash f(x, \bar{a})$; sinon, on dit que p omet $f(x, \bar{y})$. Une classe d'équivalence de types est donc caractérisée par les formules que ses éléments représentent ; il y a donc au plus 2^ω classes.

On montre aisément qu'un père est plus grand que son fils, que deux types isomorphes sont équivalents et que si $p \geq q$, p et q ont même restriction à l'ensemble vide de paramètres.

LEMME 1.1. - Tout type majore un type minimal pour l'ordre fondamental ; les types minimaux correspondent aux types réalisés, deux tels types étant équivalents si, et seulement si, ils ont même restriction à l'ensemble vide de paramètres.

Si q et q', réalisés dans M et M', ont même restriction à l'ensemble vide de paramètres, $q \vdash (x = b)$ et $q' \vdash (x = b')$, et b et b' ont même type sur $\emptyset$. Si $q \vdash f(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M^n$, alors $M \vdash f(b, \bar{a})$, i. e. $M \vdash (\exists \bar{y})\, f(b, \bar{y})$, et

(*) Sébastien EHRSAM, C. E. S. de Wintzenheim, 68000 COLMAR donc $\vdash (\exists \bar{y})\ f(b', \bar{y})$, i. e., parce que M' est un modèle, il existe $\bar{a}'$ dans M'^n tel que $M' \vdash f(b', \bar{a}')$, soit $q' \vdash f(x, \bar{a}')$; ce qui prouve que $q \geqslant q'$ et par symétrie $q \sim q'$.

Tout type réalisé représente $x = y$, et donc tout type qui lui est inférieur est aussi réalisé : Les types réalisés sont minimaux et, évidemment, tout type a un fils réalisé.

On peut dire que la classe de p est d'autant "plus basse" dans l'ordre fondamental que p est près d'être réalisé. Ainsi, dans la théorie des corps différentiels, si p , non réalisé, satisfait $(x' = a)$, p est "plus bas" dans l'ordre fondamental que si l'on avait seulement $p \vdash (x'' = b)$, par exemple.

PROPOSITION 1.1.

1° Soient M , N deux modèles de T , avec $M < N$, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$. Si q hérite de p , p et q sont équivalents.

2° Soient M et N deux modèles de T , $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$. $p \geqslant q$ si, et seulement si, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ et un plongement élémentaire σ de M dans $N^{\mathcal{U}}$, qui fasse de $q^{\mathcal{U}}$ un fils de $\sigma(p)$, type isomorphe à p .

1° On a $p \geqslant q$; de plus, si $q \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M^j$, $\bar{b} \in N^k$, par définition de l'héritier, il existe $\bar{b}' \in M^k$ tel que $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$, i. e. $q \geqslant p$.

(2 $\Longleftarrow$) $p \geqslant q^{\mathcal{U}}$, $q^{\mathcal{U}}$ étant héritier de q , on a $p \geqslant q$ (par le 1°).

(2 $\Longrightarrow$) Soit I l'ensemble des injections d'une partie finie de M dans N . Chaque fois que $p \vdash f(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} \in M^k$, on considère

$$I[f(x, \bar{a})] = \{i \in I \ ; \ i \text{ définie en } \bar{a} \text{ et } q \vdash f(x, i\bar{a})\} \ ;$$

Ces ensembles, non vides par hypothèse, forment une base de filtre sur I , qui est contenue dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$. L'application

$$\begin{aligned} \sigma : \ & M \longrightarrow N \\ & a \longmapsto (\dots, ia, \dots) \text{ si } i \text{ définie en } a \text{, n'importe quoi sinon,} \end{aligned}$$

est un plongement élémentaire qui convient.

Remarque. - Contrairement aux modèles élémentairement équivalents d'une théorie complète, deux types équivalents n'ont pas nécessairement d'ultrapuissances isomorphes (cf. exemples).

LEMME 1.2. - L'ordre fondamental est complet : Toute chaîne de types admet une unique borne supérieure et une unique borne inférieure.

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une chaîne telle que, pour tout $(i, j) \in I^2$, $i \geqslant j$ implique $p_i \geqslant p_j$. Notons, pour tout $i \in I$, $I_i = \{j \in I \ ; \ j \geqslant i\}$; les I_i forment une base de filtre, qui est contenue dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Si $\prod_i p_i/\mathcal{U} \vdash f(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} = \prod_i \bar{a}_i/\mathcal{U}$, pour tout $i \in I$, il existe $j \geqslant i$ tel que $p_j \vdash f(x, \bar{a}_j)$;

Or $p_j \geqslant p_i$, donc il existe $\bar{a}'_i$ tel que $p_i \vdash f(x, \bar{a}'_i)$: $\prod_i p_i/\mathcal{U} \geqslant p_i$, pour tout $i \in I$. Soit $q \geqslant p_i$, pour tout i ; il est évident que $q \geqslant (\prod p_i)/\mathcal{U}$, car toute formule représentée par q est représentée par tous les p_i , donc par leur ultraproduit par $\mathcal{U}$. On fait un raisonnement analogue pour la borne inférieure.

LEMME 1.3. - Soient M un modèle de T et F un fermé non vide de $S_1(M)$; il existe dans F des fils maximaux pour l'ordre fondamental induit sur F .

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une chaîne maximale formée d'éléments de F ; $\prod_i p_i/\mathcal{U}$, type sur $M^{\mathcal{U}}$, est alors la borne supérieure des p_i . Tous les p_i satisfont les formules définissant F , et donc $(\prod_i p_i/\mathcal{U})_{|M}$ aussi ; $(\prod_i p_i/\mathcal{U})_{|M}$, élément de F , est tel que, pour tout i , $(\prod_i p_i/\mathcal{U})_{|M} \geqslant \prod_i p_i/\mathcal{U} \geqslant p_i$.

PROPOSITION 1.2. - Soient $p \in S_1(A)$ et M un modèle contenant A ; il existe dans $S_1(M)$ des fils de p maximaux dans l'ensemble des fils de p sur M , et chacun d'eux est maximal dans l'ensemble de tous les fils de p sur les modèles contenant A .

L'ensemble des fils de p sur M forme un fermé F , et donc il existe, d'après le lemme 1.3, des fils de p maximaux pour l'ordre fondamental induit sur F . Soient q l'un d'eux, M' un modèle contenant A et $q' \in S_1(M')$, tel que $p \subset q'$ et $q' \geqslant q$. Sur une extension élémentaire N commune à M et M' , $h(q')$ étant un héritier de q' sur N et q'' sa restriction à M , qui appartient à F , on obtient : $q'' \geqslant h(q') \sim q' \geqslant q$ et, par maximalité de q dans F , $q'' \sim q$ et donc $q' \sim q$.

Par la suite, q , fils de $p \in S_1(A)$ sur un modèle, sera dit maximal s'il est maximal parmi les fils de p sur des modèles.

B. Exemples. Application aux types stables.

Exemples. - L'ordre fondamental sera représenté en chaînes maximales suivant des points reliés par des flèches qui indiqueront leur position dans l'ordre fondamental.

1° La théorie de l'ensemble infini, ω-stable, admet pour ordre fondamental

(non réalisé) $\bullet\!\longrightarrow\!\bullet$ (réalisé)

2° La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique donnée, ω-stable, si l'on excepte les éléments algébriques sur le corps premier qui forment un point, admet le même ordre fondamental :

(non réalisé) $\bullet\!\longrightarrow\!\bullet$ (réalisé)

3° La notation des types pour l'ordre dense sans extrémités, théorie instable, est la suivante : (1) type $-\infty$; (2) type $+\infty$; (3) type irrationnel ; (3^+) type rationnel q^+ ; (3^-) type rationnel q^- ; (4) type réalisé.

Ordre fondamental :

$$(4) \longleftrightarrow (3)\ ,\ (3^+)\ ,\ (3^-) \begin{array}{l} \leftarrow (1) \\ \leftarrow (2) \end{array} .$$

On remarque que (3) , (3^+) et (3^-) sont équivalents dans avoir d'ultrapuissances isomorphes, celles-ci restant du même genre que le type dont elles sont issues.

4° Pour les personnes connaissant la théorie des A-modules clos $(A = k[\delta])$, qui est ω-stable, le type "linéairement algébrique" est entièrement déterminé par son équation minimale, qui est son équation de plus petit ordre et de coefficient égal à 1 . Il y a bijection entre les classes pour l'ordre fondamental et les idéaux de $k[\delta]$, l'idéal associé à p représentant les quantités déjà connues dans le modèle, l'inclusion des idéaux étant l'ordre inverse de l'ordre fondamental.

THÉORÈME 1.

1° Soit p un type stable sur un modèle ; si $p \geqslant q$, en particulier si $p \sim q$, q est stable.

2° Soient M et N deux modèles de T , avec $M < N$ et $p \in S_1(M)$ stable ; le seul fils de p sur N qui lui soit équivalent est son héritier.

1° Si q est instable , q a un fils q' possédant deux héritiers q_1 et q_2 ; pour un ultrafiltre $\mathcal{U}$, $q'^{\mathcal{U}}$ est un fils de p' , isomorphe à p , donc stable ; $q_1^{\mathcal{U}}$ et $q_2^{\mathcal{U}}$ sont héritiers de $q'^{\mathcal{U}}$ (cf. exposé n° 1, lemme 1, p. 17), fils de p' , ce qui contredit la stabilité de p' .

2° L'héritier de p sur N est équivalent à p ; si p peut être divisé en deux fils qui lui soient équivalents, tout type équivalent à p à la même propriété. En effet, p' , équivalent à p possédant deux fils équivalents p_1 et p_2 , a pour un certain ultrafiltre $\mathcal{U}$ deux fils $p_1^{\mathcal{U}}$ et $p_2^{\mathcal{U}}$ qui lui sont équivalents.

On construit alors un arbre de types de la même manière que dans la proposition p. 16 de l'exposé 1 : Si p a deux fils p_1 et p_2 équivalents à lui sur M_1 , extension élémentaire de M , pour $i = 1$, 2 , p_i a deux fils p_i' et p_i'' équivalents sur M_i' , et on prend leurs héritiers (qui sont équivalents !) sur une extension élémentaire M_2 des M_i' $(i = 1 , 2)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & & p_{11} \\ & p_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & & p_{12} \\ p \arrow[uur, dash] \arrow[ddr, dash] & & \\ & & p_{21} \\ & p_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & & p_{22} \end{tikzcd}$$

On recommence, par construction ordinale : Le procédé précédant détermine le passage de α à $\alpha + 1$; Si α est limite, chacune des branches de l'arbre définit l'ensemble des formules d'un type, qui est équivalent à p ; on considère un cardinal λ tel que $\lambda = \lambda^{|T|} \geqslant |M|$, et on poursuit le procédé jusqu'à μ , le plus petit cardinal tel que $\lambda < 2^{\mu}$. On fabrique ainsi λ^+ fils (équivalents à p), avec $\lambda^+ > \lambda^{|T|}$, sur une extension de M de cardinal λ obtenue en conservant les λ paramètres distinguant les fils de p introduits précédemment. Cela contredit la stabilité de p .

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> M , N <u>deux modèles de</u> T , $p \in S_1(M)$ <u>et</u> $q \in S_1(N)$ <u>stables</u> ; p <u>et</u> q <u>sont équivalents si, et seulement si, ils ont, à isomorphisme près, un héritier commun.</u>

($\longleftarrow$) C'est évident (n'utilise pas la stabilité).

($\longrightarrow$) $p \geqslant q$, et donc il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ et M' , restriction élémentaire de $N^{\mathcal{U}}$, tels que p soit isomorphe à $p' \in S_1(M')$, avec $p' \subset q^{\mathcal{U}}$. On a donc $p \sim p' \geqslant q^{\mathcal{U}} \sim q \geqslant p$. Par conséquent, $p' \sim q^{\mathcal{U}}$ et donc (théorème 1) $q^{\mathcal{U}}$, héritier de q sur $N^{\mathcal{U}}$, est aussi héritier de p' , isomorphe à p .

C. <u>Ordre fondamental avec paramètres.</u>

Soit A un ensemble de paramètres quelconques. On définit l'ordre fondamental $\geqslant_A$ pour les types sur des modèles contenant A de la manière suivante : Soient M , N des modèles contenant A , $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$; $p \geqslant_A$ si, et seulement si, pour toute formule $f(x , \bar{y} , \bar{a})$, $\bar{a} \in A^k$, chaque fois que $p \vdash f(x , \bar{m} , \bar{a})$, avec $\bar{m} \in M^n$, il existe $\bar{n} \in N^n$ tel que $q \vdash f(x , \bar{n} , \bar{a})$.

Le quotient de cette relation de préordre par la relation d'équivalence $\sim_A$ associée ($p \sim_A q$ si, et seulement si $p \geqslant_A q$ et $q \geqslant_A p$) est l'ordre fondamental à paramètres dans A , qui est complet (même preuve que dans le lemme 1.2).

<u>Exemple</u>. - Soit $p \in S_1(M)$, M modèle de T ; si q hérite de p sur une extension élémentaire N de M , alors $p \sim_M q$.

La proposition 1.1 se transpose aisément de la manière suivante.

PROPOSITION 1.3. - <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux modèles de</u> T <u>contenant</u> A , $p \in S_1(M)$; $q \in S_1(N)$; $p \geqslant_A q$ <u>si, et seulement si, il existe un ultrafiltre</u> $\mathcal{U}$ <u>et un A-plongement élémentaire</u> σ <u>(i. e. laissant</u> A <u>invariant point par point), qui fasse de</u> $q^{\mathcal{U}}$ <u>un fils de</u> $\sigma(p)$, <u>type isomorphe à</u> p .

Même preuve que pour la proposition 1.1, en remplaçant T par T(A) , où l'on a nommé les éléments de A , car tout modèle de T contenant A est modèle de T(A) .

Le lemme 1.3, la proposition 1.2 se transposent aisément pour l'ordre fondamental $\geqslant_A$.

Deux types A-équivalents étant évidemment équivalents, on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 1.4.

1° Soient M et N, modèles de T contenant A, avec $M \prec N$ et $p \in S_1(M)$ stable ; le seul fils de p sur N qui lui soit A-équivalent est son héritier.

2° Soient M et N, deux modèles de T contenant A, $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$ stables ; p et q sont A-équivalents si, et seulement si, ils ont, à A-isomorphisme près, un héritier commun.

1° C'est évident.

2° $p \geqslant_A q$, donc il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ et M', restriction élémentaire de $N^{\mathcal{U}}$, tels que p soit A-isomorphe à $p' \in S_1(M')$ (proposition 1.3), avec $p' \subset q^{\mathcal{U}}$. Or $p \sim_A p' \geqslant_A q^{\mathcal{U}} \sim_A q \geqslant_A p$. Par conséquent, $p' \sim_A q^{\mathcal{U}}$, et donc $q^{\mathcal{U}}$ est héritier de q et p', type A-isomorphe à p.

2. Le théorème de la borne.

On considère dorénavant des types (complets) sur des ensembles de paramètres quelconques. $p \in S_1(A)$ est dit stable, si toutes ses extensions sur des modèles le sont. La caractérisation de la stabilité par le nombre de fils sur un modèle reste donc valable. Si T est stable, bien sûr, tous les types sont stables.

De plus, ce qui a été fait en stabilité (ultrapuissance, héritier, cohéritier, stabilité) pour les 1-types sur des modèles peut être transposé pour les n-types, et de manière générale pour les I-types sur des modèles ; de même, ce qui suit dans ce paragraphe 2 pour les 1-types se généralise pour les n- et I-types.

A. Le théorème de la borne.

Soit $p \in S_1(A)$; on appelle borne de p (notée $\beta(p)$), la classe d'un fils maximal de p sur un modèle étendant A. De l'existence de fils maximaux, on déduit que tout type a au moins une borne.

D'après la proposition 1.2, il est clair que q, fils de $p \in S_1(A)$ sur M étendant A, est fils maximal de p si, et seulement si, sa classe est une borne de p. De plus, tout ultraproduit d'éléments p_i d'une borne de p est un élément de cette même borne, car il représente les mêmes formules que les p_i, exactement.

On étend la définition de fils maximal à des fils sur des ensembles de paramètres quelconques : Si $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(B)$, $A \prec B$ et $p \subset q$, q est fils maximal de p s'il est possible de trouver un modèle M contenant B et un prolongement de q en un fils maximal de p sur M (au sens premier).

LEMME 2.1. - Soient $A \prec B$, $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(B)$; si q est fils maximal de p, q se laisse prolonger en un fils maximal de p sur n'importe quel modèle N contenant B.

Soient r un fils de q sur $M \supset B$, qui soit fils maximal de p, P un extension élémentaire commune à M et N, r_1 un héritier de r sur P et r_2 la restriction de r_1 à N : r_2, fils de q, est fils maximal de p : $r_2 \geq r_1 \sim r$, donc, par maximalité de r, $r_2 \sim r$, et donc r_2 est fils maximal de p.

LEMME 2.2. - Soient $A < B < C$, $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(C)$, q fils maximal de p sur B ; q se laisse prolonger en un fils maximal de p sur C.

Par le lemme 2.1, il existe une extension maximale de p rpolongeant q sur un modèle M contenant p, et sa restrcition à C convient.

LEMME 2.3. - Soient $A < B < C$, $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(B)$, $r \in S_1(C)$, avec $p \subset q \subset r$; si r est fils maximal de p, r est fils maximal de q, et q fils maximal de p.

On prend pour C un modèle grâce au lemme 2.1. Le fermé de $S_1(C)$ des fils de q sur C est contenu dans celui des fils de p, ce qui prouve la maximalité de r parmi les fils de q ; le reste est trivial.

THÉORÈME 2 (Théorème de la borne). - Soit $p \in S_1(A)$, stable ; p n'a qu'une seule borne.

La démonstration est très difficile dans le cas général, nous n'allons la faire que dans la cas où la théorie T est stable.

Soit ξ une réalisation de p et M un modèle étendant A. On prolonge le type de M au-dessus de A de façon maximale en un type sur $A \cup \{\xi\}$, réalisé en M_1. Soit p_1 le type de ξ sur M_1 ; p_1 est fils de p, et je dis que tout fils q de p sur N contenant A a un héritier qui est fils d'un type A-isomorphe à p_1 ; cela prouvera que, pour tout q, $p_1 \geq q$ et que, donc, la classe de p_1 est l'unique borne de p.

On déplace N par A-isomorphisme de manière à ce que ξ réalise q, ce qui est possible car, si ξ' réalise q, ξ et ξ' s'échangent par A-isomorphisme (théorème de SVENONIUS). D'après le lemme 2.2, on étend le type de M_1 sur $A \cup \{\xi\}$ en un type sur $N \cup \{\xi\}$, réalisé en M_2, qui soit extension maximale de sa restriction à A. D'après le lemme 2.3, le type de M_2 sur $N \cup \{\xi\}$ est extension maximale de sa restriction à N. Donc, sur un modèle P contenant $N \cup \{\xi\}$, le type de M_2 sur N se prolonge de façon maximale sur P, soit, d'après le théorème 1, pour les I-types stables, le type de M_2 sur P hérite de sa restriction à N, d'où le type de M_2 sur $N \cup \{\xi\}$ hérite de sa restriction à N ; donc, par définition, le type de ξ sur $M_2 \cup N$ cohérite (i. e. hérite) de sa restriction à N, qui est q. Le type de ξ sur $M_2 \cup N$, qui hérite de q, est fils du type de ξ sur M_2, qui est A-isomorphe au type de ξ sur M_1, i. e. p_1 (en effet, M_1 et M_2, ayant même type sur $A \cup \{\xi\}$, s'échangent par $A \cup \{\xi\}$-isomorphisme, et donc les types de ξ sur M_1 et M_2 s'échangent par A-isomorphisme).

Remarque. – Cette démonstration prouve, en outre, que $p_1 \geqslant_A q$, pour tout fils q de p sur N contenant A, i. e. que p_1 est A-maximal et qu'il n'existe qu'une seule A-borne.

B. Caractérisations des fils maximaux de types stables.

Le lecteur voulant simplifier pourra supposer que la théorie est stable.

PROPOSITION 2.1. – Soit $p \in S_1(A)$ stable ; Si q est un fils de p sur un modèle M contenant A, q est fils maximal de p si, et seulement si, pour toute extension élémentaire N de M, et toute restriction élémentaire P de N contenant A, l'héritier de q sur N hérite de sa restriction à P.

($\longrightarrow$) Si q est fils maximal de p, son héritier $h(q)$ sur N lui est équivalent et la restriction q' de $h(q)$ à P est telle que $q' \geqslant h(q) \sim q$. Par maximalité de q, $q' \sim h(q)$. q' a un fils $h(q)$ qui lui est équivalent, c'est son héritier (Théorème 1).

($\longleftarrow$) En reprenant la démonstration du théorème de la borne, ξ réalisant p, et p_1 étant le type de ξ sur M_1, $p_1 \geqslant q$, pour tout fils q de p sur un modèle contenant A. Par la proposition 1.1, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ et $M_1' < M^{\mathcal{U}}$ tels que $q^{\mathcal{U}}$ est fils de $p_1' \in S_1(M_1')$, isomorphe à p_1. $q^{\mathcal{U}}$ hérite de p_1', on en déduit $q \sim q^{\mathcal{U}} \sim p_1' \sim p_1$; q est fils maximal de p.

COROLLAIRE. – Soient $p \in S_1(A)$ stable et q un fils de p sur M ; q est fils maximal de p si, et seulement si, q est fils A-maximal de p.

($\longrightarrow$) Dans la démonstration précédente, p_1 et q ont, à A-isomorphisme près (car $p_1 \geqslant_A q$), un héritier commun, et donc, d'après la proposition 1.4, p_1 et q sont A-équivalents, et donc q est fils A-maximal de p.

PROPOSITION 2.2. – Soient $A < B$, $p \in S_1(A)$ stable et q un fils de p sur B; q est fils maximal de p si, et seulement si, p et q ont même borne, i. e. si, et seulement si, la borne de q n'est pas strictement inférieure à celle de p.

($\longrightarrow$) q se laisse prolonger en un fils maximal de p, r, sur un modèle M contenant B. La classe de r est à la fois la borne de p et celle de q.

($\longleftarrow$) Soit r un fils maximal de q sur M contenant B. La classe de r, qui est fils de p sur M, est la borne de q, donc celle de p, ce qui implique que r est fils maximal de p, et donc q est fils maximal de p, par définition.

COROLLAIRE. – Soient $A < B < C$, $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(B)$, $r \in S_1(C)$, p stable $p \subset q \subset r$; r est fils maximal de p si, et seulement si, r est fils maximal de q, et q fils maximal de p.

On a $\beta(p) \geqslant \beta(q) \geqslant \beta(r)$. Les trois bornes sont égales si, et seulement si, $\beta(p) = \beta(r)$.

PROPOSITION 2.3. - Soit $p \in S_1(A)$ stable, et q fils de p sur $B \supseteq A$; q est fils maximal de p si, et seulement si, chaque fois que $q \vdash f(x, \bar{b})$, la formule $f(x, \bar{y})$ est représentée par la borne de p.

La nécessité est claire.

Pour la suffisance : Soit I l'ensemble des fragments finis de q. Je montre que, pour tout $i \in I$, dont la conjonction s'écrit $f_i(x_i, \bar{b}_i)$, $\bar{b}_i \in B^n$, il existe un plongement élémentaire σ_i de B dans un modèle M_i contenant B, et r_i élément de la borne de p sur M_i, tel que $r_i \vdash f_i(x, \sigma_i(\bar{b}_i))$.

Soient $i \in I$ et E_i l'ensemble des formules $\{f_i(x, \bar{b}_i) \wedge \varphi_e(\bar{b}_i)\}$, où $\varphi_e(\bar{b}_i)$ parcourt l'ensemble des fragments finis du type de $\bar{b}_i$ sur $\emptyset$. Par hypothèse, pour tout $e \in E_i$, il existe un fils maximal p_e de p sur $N_e \supseteq B$ et $\bar{\beta}_e \in N_e^n$ tels que $p_e \vdash f_i(x, \bar{\beta}_e) \wedge \varphi_e(\bar{\beta}_e)$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur E_i contenant les ensembles $E_i(e) = \{f \in E_i \ ; \ f \supseteq e\}$. En notant $N_i = \prod_e N_e/\mathcal{U}$, et $\bar{\beta}_i = \prod_e \bar{\beta}_e/\mathcal{U}$, le type $r_i = \prod_e p_e/\mathcal{U}$, élément de la borne de p, vérifie

$$\text{pour tout } e \text{ dans } E_i, \quad r_i \vdash f_i(x, \bar{\beta}_i) \wedge \varphi_e(\bar{\beta}_i).$$

$\bar{b}_i$ et $\bar{\beta}_i \in M_i^n$ ayant même type sur $\emptyset$, il existe σ, plongement élémentaire de B dans M_i qui envoie $\bar{b}_i$ sur $\bar{\beta}_i$, et qui convient.

Pour tout $i \in I$, soit $I_i = \{j \in I \ ; \ j \supseteq i\}$, et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre les contenant. $\prod_i r_i/\mathcal{U}$ est élément de la borne de p, et si σ est l'application

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow \textstyle\prod_i M_i/\mathcal{U} \\ b &\longmapsto (\ldots, \sigma_i(b), \ldots) = \sigma(b), \end{aligned}$$

si le fragment i contient b, n'importe quoi sinon, σ est un plongement, élémentaire par construction, qui fait de $\sigma(q)$, isomorphe à q, un père de $\prod_i r_i/\mathcal{U}$, et donc q est fils maximal de p.

De ces trois caractérisations, la troisième est plus maniable dans la pratique, surtout sous sa forme négative :

q n'est pas fils maximal de p stable si, et seulement si, $q \vdash f(x, \bar{b})$, et $f(x, \bar{y})$ omise par la borne de p.

LEMME 2.4. - Soient A infini, $p \in S_1(A)$ stable et q fils non maximal de p sur M, modèle $|A|^+$-saturé, il existe une restriction M' de M de même cardinal que A, contenant A, telle que q n'hérite pas de sa restriction à M'.

Par la proposition 2.1, il existe P, extension élémentaire de M, et N restriction élémentaire de P contenant A, telle que l'héritier de q sur P n'hérite pas de sa restriction q' à N. Soit M_1, de cardinal $|A|$, restriction élémentaire de N telle q' hérite de $q'|_{M_1}$. $q'|_{M_1}$ et q ne sont pas équivalents. M est suffisamment saturé pour y réaliser le type de M_1 sur A en M', et alors

q n'hérite pas de l'image correspondante de $q'_{|M_1}$.

C. Déviation.

Dans ce sous-paragraphe C, la théorie T est stable. Dans ce cas, " $q \in S_1(B)$, $\mathcal{A} < B$, est une extension maximale de sa restriction à $\mathcal{A}$ " se dit " q ne dévie pas sur $\mathcal{A}$ " ou " q est fils non déviant de $q_{|\mathcal{A}}$ ". Nous emploierons toujours cette terminologie dans le cadre des théories stables.

Outre les caractérisations précédentes, qui sont évidemment valables, citons les propriétés "canoniques" de la déviation :

1° Si $p \in S_1(\mathcal{A})$, p ne dévie pas sur $\mathcal{A}$ (évident) ;

2° (Propriété de prolongement) Soient $\mathcal{A} < B < C$, et $p \in S_1(B)$ qui ne dévie pas sur $\mathcal{A}$; p se laisse prolonger sur C en un type qui ne dévie pas sur $\mathcal{A}$ (cf. lemme 2.2) ;

3° (Propriété de transitivité) Soient $\mathcal{A} < B < C$; $p \in S_1(C)$ ne dévie pas sur $\mathcal{A}$ si, et seulement si, p ne dévie pas sur $\mathcal{A}$ et $p_{|B}$ ne dévie pas sur $\mathcal{A}$ (cf. corollaire de la proposition 2.2) ;

4° Soient $\mathcal{A} < B$; les types de $S_1(B)$ qui ne dévient pas sur $\mathcal{A}$ forment un fermé.

On se ramène au cas où B est un modèle. En effet, soit M , un modèle contenant B ; si l'ensemble des types de $S_1(M)$ qui ne dévient pas sur $\mathcal{A}$ est un fermé, donc un compact, son image continue par l'application restriction à B , compacte et donc fermée dans $S_1(B)$, forme l'ensemble des types de $S_1(B)$ qui ne dévient pas sur $\mathcal{A}$; Soit $q \in S_1(M)$ adhérant à l'ensemble X des types de $S_1(M)$ non déviant sur $\mathcal{A}$. Soient N une extension élémentaire de M , P un restriction de N contenant $\mathcal{A}$. L'héritier q_1 de q sur N est adhérent à l'ensemble X_1 des types sur N non déviant sur $\mathcal{A}$, par continuité de l'application "héritier" (cf. Exposé n° 1) ; ces derniers cohéritent de leurs restrictions à P , i. e. sont adhérents à des types réalisés dans P , et il en est donc de même de q_1 , qui hérite de sa restriction à P . On conclut à l'aide de la proposition 2.1.

5° (Propriété de symétrie) Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$, réalisant des types sur $\mathcal{A}$: le type de $\bar{a}$ sur $\mathcal{A} \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur $\mathcal{A}$ si, et seulement si, le type de $\bar{b}$ sur $\mathcal{A} \cup \{\bar{a}\}$ ne dévie pas sur $\mathcal{A}$.

Si $t(\bar{a} , \mathcal{A} \cup \{\bar{b}\})$ ne dévie pas sur $\mathcal{A}$, il existe donc M_1 , modèle contenant $\mathcal{A} \cup \{\bar{b}\}$, tel que $t(\bar{a} , M_1)$ ne dévie pas sur $\mathcal{A}$. Il existe aussi M_1' , contenant $\mathcal{A}$, telle que $t(\bar{b} , M_1')$ ne dévie pas sur $\mathcal{A}$. L'héritier (i. e. le cohéritier) sur $M_1 \cup \{\bar{a}\}$ de $t(M_1' , M_1)$ étant réalisé en M_2 , M_1' et M_2 sont M_1-isomorphes, donc $t(\bar{b} , M_2)$ est M_1-isomorphe, donc équivalent, à $t(\bar{b} , M_1')$ et par conséquent ne dévie pas sur $\mathcal{A}$. Par définition, $t(\bar{a} , M_2 \cup M_1)$ hérite de sa restriction à M_1 , et donc $t(\bar{a} , M_2) \geqslant t(\bar{a} , M_1)$. Par maximalité de $t(\bar{a} , M_1)$, $t(\bar{a} , M_2) \sim t(\bar{a} , M_1)$, et donc $t(\bar{a} , M_1 \cup M_2)$ est l'héritier de $t(\bar{a} , M_2)$; par restriction, $t(\bar{a}\ ,\ M_2 \cup \{\bar{b}\})$ hérite de $t(\bar{a}\ ,\ M_2)$, donc cohérite aussi, d'où, par définition, $t(\bar{b}\ ,\ M_2 \cup \{\bar{a}\})$ hérite de $t(\bar{b}\ ,\ M_2)$,i. e. ne dévie pas sur M_2 , et par transitivité, $t(\bar{b}\ ,\ M_2 \cup \{\bar{a}\})$ ne dévie pas sur A . D'où par restriction, $t(\bar{b}\ ,\ A \cup \{\bar{a}\})$ ne dévie pas sur A .

D. Application aux rangs.

Soient q et $q' \in S_1(M)$, fils maximaux quelconques de $p \in S_1(A)$ stable. D'après le corollaire de la proposition 2.1, q et q' sont A-équivalents, et, par la proposition 1.4, q et q' ont, à A-isomorphisme près, un héritier commun; dans un modèle N , contenant élémentairement M qui soit suffisamment homogène pour prolonger tous les A-isomorphismes ainsi considérés entre fils maximaux de p sur M , les fils maximaux de p sur N sont conjugués par A-automorphismes de N : Si r et r' sont fils maximaux de p sur N , ils héritent respectivement de leurs restrictions q et q' à M , fils maximaux de p . Le A-automorphisme σ de N qui envoie q sur σq , q' et σq ayant même héritier sur toute extension commune à M et σM , envoie l'héritier r de q sur N sur l'héritier de σq sur N , i. e. l'héritier r' de q' sur N .

PROPOSITION 2.4. - Soient $p \in S_1(A)$, stable, et un modèle $M \supseteq A$; λ cardinal quelconque ; Il existe un modèle P , extension élémentaire de M , tel que tous les fils maximaux de p sur P soient conjugués par A-automorphismes de P , et que tous les autres fils de p aient au moins λ conjugués par A-automorphismes de P .

Démonstration analogue à celle du théorème 3, page 18 de l'exposé n° 1.

Soit N , extension élémentaire de M , où tous les fils maximaux de p sur N sont conjugués par A-automorphismes. Je dis qu'il existe P_1 , extension élémentaire de N , tel que tout fils non maximal de p sur P_1 , mais qui hérite de sa restriction à N , ait au moins λ-conjugués par A-automorphisme de P .

Pour tout fils q_α non maximal de p sur N , il existe une extension élémentaire N'_α de N , et $M_\alpha < N'_\alpha$, M_α contenant A tels que l'héritier de q_α sur N'_α n'hérite pas de sa restriction à M_α . Par le théorème 3, page 18 de l'exposé n° 1, il existe $N_\alpha > N'_\alpha$, tel que l'héritier de q_α sur N_α ait λ conjugués par M_α- (soit A-) automorphismes de N_α . On regroupe les N_α élémentairement dans un modèle P_1 , extension élémentaire de N , assez homogène pour prolonger les A-automorphismes des N_α déjà introduits, et si q est un fils non maximal de p sur P_1 , qui hérite de sa restriction à N , $q_{|N}$ est fils non maximal de p et donc égal à un q_α . Par stabilité, q , héritier de q_α , est héritier et donc fils de $q_{|N_\alpha}$, qui possède au moins λ conjugués par A-automorphismes de P_1 . Ceux-ci transforment q en au moins λ conjugués distincts car leurs restrictions à N_α le sont.

En réitérant le procédé comme dans le théorème précité, le modèle $P = P_{\omega_1}$, construit à l'étape ω_1 , convient : Si q est fils non maximal de p sur P , il existe R , restriction dénombrable de P telle que q hérite de $q_{|R}$. Alors R est inclus dans un P_K , et, par stabilité de $q_{|R}$, q hérite de $q_{|P_K}$, et $q_{|P_{K+1}}$, père de q , à λ conjugués distincts au moins par A-automorphismes de P_{K+1} , qui sont prolongués en A-automorphismes de P .

PROPOSITION 2.5. - Soit R un rang (Ici les rangs sont définis sur des ensembles de paramètres quelconques, les axiomes étant ceux que l'on devine).

1° Les fils équirangs d'un type rangé sont exactement les fils maximaux ;

2° Tout fils maximal d'un type stable est équirang avec lui ;

3° Deux types stables équivalents (définis sur des modèles) ont même rang ;

4° Deux types stables, ayant même borne, ont même rang R .

1° Soit $p \in S_1(A)$, avec $R(p) = \alpha$, qui est donc stable ; un fils q équirang avec p sur B contenant A admet un fils q' équirang avec lui sur un modèle M contenant B : Montrons, par l'absurde, que q' est fils maximal de p ; sinon, on pouvait trouver $N > M$ sur lequel tout fils de q' (en particulier un fils équirang q'' de q sur N), qui est fils non maximal de p , a au moins μ^+ (où μ est la constante de multiplicité bornée de p) conjugués par A-automorphismes de N tous équirangs avec p pour le cas de q'' . Impossible. De plus, tous les fils maximaux de p finissant par être conjugués par A-automorphismes, ce sont exactement les fils équirangs de p .

2° Soit $p \in S_1(A)$ stable et q fils maximal de p . Il suffit de prouver par induction que, si $R(p) \geq \alpha$, $R(q) \geq \alpha$, où q est un fils maximal de p sur un modèle M où tous les fils maximaux sont conjugués. Si α est limite, c'est évident. Si $R(p) \geq \alpha + 1$, p a un fils p' sur M , avec $R(p') \geq \alpha + 1$; si p' est fils maximal de p , par A-automorphisme, $R(q) \geq \alpha + 1$; sinon, en déplaçant M par A-automorphisme, q est isomorphe au père d'un héritier p'' de p' ; donc $R(q) \geq R(p'')$, et, par hypothèse d'induction, $R(p'') \geq \alpha$; mais alors, comme p'' n'hérite de q , ou bien q n'est pas rangé, ou bien $R(q) > R(p'')$ (par le 1°), et donc $R(q) \geq \alpha + 1$.

3° Si $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$ stables sont équivalents, à isomorphisme près, ils ont un héritier commun, donc ils ont même rang (par le 2°).

4° Si p et q stables ont même borne, ils ont des fils maximaux respectifs sur des modèles qui sont équivalents, donc équirangs, par conséquent p et q ont même rang.

3. Le théorème de la relation d'équivalence finie.

A. Multiplicité et Δ-multiplicité.

Définition 1. - Soient $p \in S_1(A)$ stable, et M et N modèles contenant A. A un fils maximal q de p sur M, j'associe un fils maximal r de p sur N de la manière suivante : Dans une extension élémentaire P commune à M et N, on prend la restriction r à N de l'héritier de q sur P, qui est fils maximal de p. Il est immédiat, par stabilité, que ce procédé est indépendant de l'extension commune à M et N choisie. Cette transformation définit alors une involution entre les fils maximaux de p sur M et les fils maximaux de p sur N, car le même raisonnement, fait à partir de r, nous donne q. L'existence de cette bijection prouve que le cardinal de l'ensemble des fils maximaux de p sur un modèle contenant A est indépendant de ce modèle, et donc constant : On l'appelle multiplicité du type stable p ; elle désigne le nombre de fils maximaux de p sur n'importe quel modèle. Un type de multiplicité 1 est dit stationnaire.

Exemple. - Tout type (stable) sur un modèle est stationnaire.

Définition 2. - Soit Δ un ensemble de formules sans paramètres $f(x, \bar{y})$; on dit que $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$ (M modèle de T) sont Δ-distincts s'il existe $\bar{a} \in M^k$, $f \in \Delta$, avec $p \vdash f(x, \bar{a})$ et $q \vdash \neg f(x, \bar{a})$. Sinon, on dit que p et q sont Δ-confondus.

Remarque. - Si p et q, types stables sur M, sont Δ-confondus, leurs héritiers, sur toute extension élémentaire N de M, sont Δ-confondus, grâce à la définition de p et celle de q, que l'on peut prendre identiques pour les formules de Δ.

Définition 3. - Deux fils maximaux $q \in S_1(M)$, $q' \in S_1(N)$ (M, N modèles de T contenant A) d'un type stable $p \in S_1(A)$ sont associés s'ils ont des héritiers respectifs Δ-confondus sur une extension commune à M et à N (en fait sur toute extension, d'après la remarque). Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des fils maximaux de p sur des modèles. On peut évidemment trouver un représentant de chaque classe dans tout modèle contenant A. Le cardinal de l'ensemble des classes d'équivalence s'appelle la Δ-multiplicité de p. C'est le nombre de fils maximaux de p 2 à 2 Δ-distincts sur tout modèle contenant A.

Si Δ est l'ensemble de toutes les formules $f(x, \bar{y})$ du langage, on retrouve la multiplicité.

PROPOSITION 3.1. - *Soit $p \in S_1(A)$ stable ; pour tout ensemble fini Δ de formules $f(x, \bar{y})$, la Δ-multiplicité de p est finie.*

Supposons, par l'absurde, que, sur M, il existe une infinité $a_1, \dots, a_n, \dots$ de fils maximaux de p, deux à deux Δ-distincts. Soit $\omega^{\mathcal{U}}$ une ultrapuissance de ω, $\mathcal{U}$ étant un ultrafiltre sur I. A $\xi \in \omega^{\mathcal{U}}$, on associe q_ξ sur $M^{\mathcal{U}}$, qui est un élément de la borne de p par

Si $\xi = \prod_i n_i/\mathcal{U}$, $q_\xi \vdash \varphi(x , \bar{a})$, avec $\bar{a} = \prod \bar{a}_i/\mathcal{U} \in M^{\mathcal{U}}$, si, et seulement si, $q_{n_i} \vdash \varphi(x , \bar{a}_i)$, pour presque tout $i \in I$. Alors, si $\xi \neq \eta = \prod_i n'_i/\mathcal{U}$, q_ξ et q_η sont distincts.

[Pour tout $K \in \mathcal{P}(\Delta)^* = \mathcal{P}(\Delta) \setminus \{\emptyset\}$, on note K^c son complémentaire dans Δ , et on note $D(K) = \{i \in I \; ; \; q_{n_i}$ et $q_{n'_i}$ sont f-distincts, pour tout $f \in K$, et K^c-confondus$\}$. On a $\bigcup_{K \in \mathcal{P}(\Delta)^*} D(K) = \{i \in I \; ; \; n_i \neq n'_i\} \in \mathcal{U}$. Les $D(K)$ étant 2 à 2 disjoints et en nombre fini, l'un des $D(K)$, $D(K_0)$, est dans $\mathcal{U}$, ce qui signifie que, pour $f(x , y) \in K_0$, $D(K_0) \subset \{i \in I \; ; \; q_{n_i}$ et $q_{n'_i}$ f-distincts$\} \in \mathcal{U}$.

Donc, pour presque tout i , $q_{n_i} \vdash f(x , \bar{a}_i)$ et $q_{n'_i} \vdash \neg f(x , \bar{a}_i)$, avec $\bar{a}_i \in M^k$. En complétant arbitrairement les $\bar{a}_i$, on voit que $q_\xi \vdash f(x , \bar{a})$ et $q_\eta \vdash \neg f(x , \bar{a})$, avec $\bar{a} = \prod_i \bar{a}_i/\mathcal{U}$.]

Mais, comme $\omega^{\mathcal{U}}$ est de cardinalité arbitrairement grande, on obtient un nombre de fils maximaux de p sur $M^{\mathcal{U}}$ supérieur à la multiplicité de p , ce qui est impossible.

On montre que la multiplicité d'un type stable est finie ou 2^{ω} .

B. <u>Le théorème de la relation d'équivalence finie</u>.

PROPOSITION 3.2. - <u>Soit</u> $p \in S_1(A)$ <u>stable, et</u> $f(x , \bar{y})$ <u>une formule ; il existe une relation d'équivalence</u> $E_{p,f}(\bar{y} , \bar{y}')$ <u>à nombre fini de classes, définissable à paramètres dans</u> A , <u>telle que</u> $\bar{m}$ <u>et</u> $\bar{m}'$ <u>sont congrus modulo</u> $E_{p,f}$ <u>si, et seulement si, pour tout fils maximal</u> q <u>de</u> p <u>sur un modèle contenant</u> $\bar{m}$ <u>et</u> $\bar{m}'$, $q \vdash f(x , \bar{m})$ <u>si, et seulement si,</u> $q \vdash f(x , \bar{m}')$.

Soient q un fils maximal de p sur M , et $\delta f(\bar{y} , \bar{b})$ une définition de q pour f , i. e. $q \vdash f(x , \bar{m})$ si, et seulement si, $\vdash \delta f(\bar{m} , \bar{b})$. La formule

$$E(\bar{z} , \bar{z}') = (\forall \bar{y}) \quad \delta f(\bar{y} , \bar{z}) \Longleftrightarrow \delta f(\bar{y} , \bar{z}')$$

définit une relation d'équivalence. Soit n la f-multiplicité de p ; la théorie suivante est <u>inconsistante</u> : $\bar{b}_1 , \ldots , \bar{b}_{n+1}$ réalisent le type de $\bar{b}$ sur A et sont non congrus 2 à 2 modulo E ; en effet, sinon, les $\bar{b}_i$ seraient conjugués de $\bar{b}$ par A-isomorphismes d'un modèle N , les $\delta f(\bar{y} , \bar{b}_i)$ seraient des définitions pour f de fils maximaux de p sur N , et on en obtiendrait $(n + 1)$ tous f-distincts, ce qui est impossible. Cette inconsistance est induite par un fragment fini $g(\bar{z})$ du type de $\bar{b}$ sur A , qui est inconsistant. Donc E découpe l'ensemble des $\bar{z}$ vérifiant $g(\bar{z})$ en au plus n classes, et, en fait, en exactement n classes, car tous les fils maximaux de P sur un modèle $P \succ M$ étant conjugués par A-isomorphismes, ont tous une définition pour f de la forme $\delta f(\bar{y} , \bar{b}')$, où $\vdash g(\bar{b}')$. La relation d'équivalence $E_{p,f}(\bar{y} , \bar{y}')$ est alors

$$(\forall \bar{z}) \quad g(\bar{z}) \Longrightarrow (\delta f(\bar{y} , \bar{z}) \Longleftrightarrow \delta f(\bar{y}' , \bar{z})) .$$

THÉORÈME 3 (dit "<u>de la relation d'équivalence finie</u>"). - <u>Soient</u> $p \in S_1(A)$ <u>stable,</u>

M <u>un modèle contenant</u> A <u>et</u> q , q' <u>des fils maximaux distincts de</u> p <u>sur</u> M ; <u>il existe une relation d'équivalence</u> E <u>, à nombre fini de classes, définissable à paramètres dans</u> A , <u>telle que, si</u> x <u>et</u> x' <u>réalisent</u> q <u>et</u> q' ,

$$q(x) \wedge q'(x') \vdash \neg E(x, x') .$$

La démonstration est assez difficile dans le cas général. Nous n'allons la faire que dans le cas où <u>la théorie est stable</u>.

Il existe $\bar{a} \in M^{\mathfrak{U}}$, et une formule $f(x, \bar{y})$ tels que $q \vdash f(x, \bar{a})$ et $q' \vdash \neg f(x, \bar{a})$. On réalise q en x et q' en x' , de manière à ce que le type de x' sur $M \cup \{x\}$ ne dévie pas sur M . <u>Alors le type de</u> $\bar{a}$ <u>sur</u> $A \cup \{x, x'\}$ <u>ne dévie pas sur</u> A : Par restriction, le type de x' sur $A \cup \{\bar{a}, x\}$ ne dévie pas sur A , donc ne dévie pas non plus sur $A \cup \{x\}$; par symétrie, le type de $\bar{a}$ sur $A \cup \{x, x'\}$ ne dévie pas sur $A \cup \{x\}$; le type de x sur M ne dévie pas sur A , donc le type de x sur $A \cup \{\bar{a}\}$ ne dévie pas sur $\bar{a}$, et donc par symétrie le type de $\bar{a}$ sur $A \cup \{x\}$ ne dévie pas sur A . On conclut par transitivité. Appelons π , le type de $\bar{a}$ sur A : Alors x et x' ne sont pas congrus modulo E_{π, f^*} , ou f^* désigne $f(x, \bar{y})$, avec $\bar{y}$ variable de type et x variable de paramètre. On considère la proposition 3.2 pour le type de $\bar{a}$ sur A , qui est stable, et une de ses extensions maximales (qui existent) sur un modèle N contenant $A \cup \{x, x'\}$, tel que le type de $\bar{a}$ sur N ne dévie pas sur A . Il est donc consistant de dire que x vérifie q , x' vérifie q' et que x et x' sont non congrus modulo E_{π, f^*} . Cette équivalence n'a qu'un nombre fini de classes, par conséquent, chacune de ces classes a un représentant sur n'importe quel modèle contenant A , et la classe de x est determinée par q , celle de x' par q' .

C. <u>Notion de type fort.</u>

<u>Définition.</u> - On appelle type fort de a sur A la donnée, pour toute relation d'équivalence $E(x, x')$ à nombre fini de classes, définissable à paramètres dans A , de la classe de a modulo E .

<u>Remarques.</u>

1° Le type fort sur A se définit plus généralement comme la donnée, pour toute relation d'équivalence E à nombre fini de classes, définissable à paramètres dans A , de la classe de la variable de type x modulo E .

2° Le type fort sur A contient le type sur A : Pour toute formule $f(x, \bar{b})$, $\bar{b} \in A^n$, on associe $E(\xi, \xi') = f(\xi, \bar{b}) \Longleftrightarrow f(\xi', \bar{b})$, qui n'a que deux classes.

3° Si A est un <u>modèle</u>, le type fort <u>coïncide</u> avec le type : En effet, comme toutes les relations d'équivalence définissables à paramètres dans A ont un nombre fini de classes, il existe un représentant au moins de chaque classe dans le modèle A , et cela revient à écrire : $x \sim \alpha$, $\alpha \in A$, ce qui est une formule du type de x sur A .

4° Les différents types forts étendant un type p stable sur A sont conjugués par A-isomorphismes, et le théorème 3 nous dit que, <u>si</u> q <u>est fils maximal de</u> p , <u>type stable, sur</u> M , <u>il est entièrement déterminé, parmi les fils maximaux de</u> p , <u>par le type fort qu'il réalise</u>.