

GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

ELIZABETH BOUSCAREN

ZOÉ CHATZIDAKIS

**Modèles premiers et atomiques. Théorème des deux cardinaux
dans les théories totalement transcendantes**

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 2, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A2_0

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODELES PREMIERS ET ATOMIQUES
THEOREME DES DEUX CARDINAUX DANS LES THEORIES TOTALEMENT TRANSCENDANTES

par Elizabeth BOUSCAREN et Zoé CHATZIDAKIS (*)

1. Soit A un ensemble de paramètres. A est un modèle de $T(A)$ si, et seulement si, les types de $S_1(A)$ réalisés dans A sont denses dans $S_1(A)$.

En effet, un ouvert $\langle f(x, \bar{a}) \rangle$ est non vide si, et seulement si,

$$T(A) \models \exists x f(x, \bar{a}) ;$$

d'après le test de Tarski, A est un modèle de $T(A)$ si, et seulement si, il existe $b \in A$ tel que $A \models f(b, a)$.

2. Définition. - Soient A, B deux ensembles de paramètres, $A \subset B$; B est atomique sur A si tous les n -types de $S_n(A)$, réalisés dans B , sont isolés dans $S_n(A)$.

3. Quelques propriétés.

(a) Soient A, B, C ensembles de paramètres tels que $A \subset B \subset C$; Si C est atomique sur B , et B est atomique sur A , alors C est atomique sur A .

Soient $c_1 \dots c_n \in C^n$, on veut montrer que le type de $c_1 \dots c_n$ sur A est isolé.

C est atomique sur B , donc $t(c_1 \dots c_n)$ sur B est isolé par une formule $f(x_1 \dots x_n, b_1 \dots b_m)$, $b_1 \dots b_m \in B$; B est atomique sur A , donc $t(b_1 \dots b_m)$ sur A est isolé par une formule $g(x_1 \dots x_m, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$.

On vérifie facilement que $t(c_1 \dots c_n)$ sur A est isolé par la formule suivante

$$\exists y_1 \dots y_m, f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) \wedge g(y_1 \dots y_m, \bar{a}).$$

(b) Soient A, B, C ensembles de paramètres tels que $A \subset B \subset C$, et $B - A$ est fini; si C est atomique sur A , alors C est atomique sur B .

On peut supposer que $B = A \cup \{b\}$, le cas où $B - A$ a n éléments se faisant par récurrence.

Soient $c_1 \dots c_n \in C$, $t(c_1 \dots c_n, b)$ sur A est, par hypothèse, isolé par une formule $f(x_1 \dots x_n, y, \bar{a})$; la formule $f(x_1 \dots x_n, b, \bar{a})$ isole $t(c_1 \dots c_n)$ sur B .

(*) Elizabeth BOUSCAREN, 53 boulevard Saint-Marcel, 75013 PARIS.

Zoé CHATZIDAKIS, 19 rue Trétaigne, 75018 PARIS.

4. Si T est une théorie totalement transcendante, alors, pour tout ensemble A , les points isolés de $S_1(A)$ sont denses dans $S_1(A)$.

Soit O un ouvert non vide de $S_1(A)$; considérons un type p , $p \in O$ et p de rang de Morley minimal dans O . Si α est le rang de Morley de p , nous savons que p est isolé parmi les types de rang de Morley supérieur ou égal à α , par une formule $f(x, \bar{a})$. D'après l'hypothèse de minimalité faite sur p , tout type appartenant à O est de rang de Morley supérieur ou égal à α ; donc la formule $f(x, \bar{a})$ isole p dans l'ouvert O .

On remarque qu'il n'est pas nécessaire que la théorie T soit totalement transcendante pour avoir cette propriété. Il suffit, par exemple, que T soit "quasi totalement transcendante", c'est-à-dire que les types rangés par le rang de Morley soient denses dans $S(T)$. Dans la suite, nous considérerons une théorie T ayant la propriété que, pour tout ensemble A , les points isolés de $S_1(A)$ sont denses dans $S_1(A)$. Nous noterons cette hypothèse (H).

5. Modèles construits.

THEOREME. - Sous l'hypothèse (H), pour tout ensemble A , il existe un modèle M de $T(A)$, $M \supset A$, et une énumération de $M - A$, (a_μ) , tels que, si $A_\mu = A \cup \{a_\nu; \nu < \mu\}$, le type de a_μ sur A_μ est isolé. Nous appellerons construction une telle énumération de M .

On construit la suite suivante par induction :

$A_0 = A$, si λ est un ordinal limite, $A_\lambda = \bigcup_{\mu < \lambda} A_\mu$,

si A_μ est modèle de $T(A)$, $A_{\mu+1} = A_\mu$,

si A_μ n'est pas modèle de $T(A)$, d'après l'hypothèse, il existe un type p_μ isolé sur A_μ et non réalisé dans A_μ ; on réalise ce type en a_μ , et on pose $A_{\mu+1} = A_\mu \cup \{a_\mu\}$.

Nous allons voir que cette construction s'arrête; soit M un modèle de $T(A)$, $M \supset A$. On construit par induction une suite d'applications :

f_0 est l'inclusion de A dans M ,

si λ est un ordinal limite, $f_\lambda = \bigcup_{\mu < \lambda} f_\mu$,

si $A_{\mu+1} \not\subset A_\mu$, on pose $f_{\mu+1} = f_\mu$; sinon, $A_{\mu+1} = A_\mu \cup \{a_\mu\}$, le type de a_μ sur A_μ , p_μ étant isolé. On pose $f_{\mu+1} = f_\mu$ sur A_μ , et $f_{\mu+1}(a_\mu) = c$, où $c \in M$, et réalise le type isolé $f_\mu(p_\mu)$.

Pour tout λ , l'application f_λ de A_λ dans M est injective, on a donc un ordinal γ tel que, pour $\mu \geq \gamma$, $f_\mu = f_\gamma$, c'est-à-dire $A_\mu = A_\gamma$, et A_γ est un modèle de $T(A_\gamma)$.

En fait, le modèle M étant quelconque, on peut le prendre de même cardinal que

A . Il existe donc un ordinal $\gamma < |A|^+$ tel que $A_\gamma \models T(A)$.

THEOREME (RESSAYRE). - Deux modèles construits au-dessus de A sont A-isomorphes.

Soit M un modèle construit au-dessus de A ; pour tout $\lambda < \gamma$, choisissons une formule $f_\lambda(x, \bar{b}_\lambda)$, $\bar{b}_\lambda \in A_\lambda$, qui isole le type p_λ de a_λ sur A_λ . On définit par induction l'ensemble fini X_λ , qui est fermé de a_λ et de la réunion des X_{μ_i} , pour $a_{\mu_i} \in \bar{b}_\lambda$.

Soit X un sous-ensemble de M tel que $X = \bigcup X_\lambda$, pour $a_\lambda \in X$. On montre, par récurrence sur $\{\lambda ; a_\lambda \in X\}$, que le type de X sur A est entièrement déterminé par les formules $f_\lambda(x, \bar{b}_\lambda)$, où $a_\lambda \in X$. En conséquence, M est atomique sur $A \cup X$; en effet, si $a_{\lambda_1} \dots a_{\lambda_n} \in M$, on ajoute $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}$ à X, et on voit que le type de $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}$ sur $A \cup X$ est déterminé par un nombre fini de formules ; le type de $a_{\lambda_1} \dots a_{\lambda_n}$ sur $A \cup X$ est donc bien isolé.

L'unicité se déduit alors par va-et-vient, en prenant, à chaque étape, la clôture par les X_λ .

COROLLAIRE. - Soit M le modèle construit sur A . Si a et b sont deux n-uples extraits de M qui ont même type sur A , ils se correspondent par un A-automorphisme de M .

(a) Le modèle construit sur A est atomique sur A .

Voir le théorème de construction ; on peut aussi montrer par induction que, pour tout λ , A_λ est atomique sur A .

(b) Toute énumération du modèle construit sur A n'en est pas forcément une construction.

6. Définition. - Soit A un ensemble de paramètres. Un modèle P de $T(A)$ est dit premier au-dessus de A si, pour tout modèle N de $T(A)$, il existe un plongement élémentaire f de P dans N qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \circ & \downarrow f & \\ A & N & \end{array}$$

7. Modèles premiers.

(a) Le modèle construit sur A est premier au-dessus de A .

On l'appelle aussi le modèle strictement premier au-dessus de A .

Par construction de la suite d'applications f_λ (voir le § 5), on voit qu'on peut effectivement plonger ce modèle élémentairement dans tout modèle contenant A .

COROLLAIRE. - Soit T une théorie vérifiant l'hypothèse (H), alors, pour tout ensemble de paramètres A , il existe un modèle premier au-dessus de A .

D'après le § 4, cela est vrai pour une théorie totalement transcendante.

Soit T une théorie vérifiant l'hypothèse (H), A un ensemble de paramètres ; si P est un modèle premier au-dessus de A , P est atomique sur A .

En effet, P modèle premier au-dessus de A se plonge élémentairement dans le modèle strictement premier au-dessus de A , qui est atomique sur A .

8. LEMME. - Sous l'hypothèse (H), si $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_\lambda = P$ est une construction de P , alors, pour tout $\bar{a} \in P$, si $A'_\mu = A_\mu \cup \{\bar{a}\}$, $A'_{\mu+1} = A_{\mu+1} \cup \{\bar{a}\}$, les A'_μ sont une construction de P au-dessus de A' .

Démonstration. - P est atomique sur chacun des A_μ , donc $A'_{\mu+1}$ est atomique sur A'_μ . D'après ce qu'on a vu précédemment, comme $\bar{a} \in A'_{\mu+1}$ et est fini, $A'_{\mu+1}$ est atomique sur $A'_\mu \cup \{\bar{a}\} = A'_{\mu+1}$.

9. LEMME. - Sous l'hypothèse (H), si A est dénombrable, il n'y a qu'un seul modèle dénombrable atomique au-dessus de A .

Démonstration. - Soient M_1 et M_2 deux modèles dénombrables atomiques au-dessus de A . On en prend une énumération de type ω .

$$M_1 = A \cup \{a_n, n < \omega\}, \quad M_2 = A \cup \{b_n, n < \omega\}.$$

1re étape : $a_1 \in M_1$ réalise un type isolé au-dessus de A , donc réalisable dans M_2 par un a'_1 .

2e étape : $b_1 \in M_2$ réalise un type isolé au-dessus de A , donc au-dessus de $A \cup \{a'_1\}$. Ce type est réalisable dans M_1 au-dessus de $A \cup \{a_1\}$ par un b'_1 .

Etape $2n+1$: a_{n+1} réalise un type isolé au-dessus de $A \cup \{a_1, b'_1, \dots, b'_n\}$. On lui fait correspondre a'_{n+1} réalisant le même type au-dessus de $A \cup \{a'_1, b_1, \dots, a'_n, b'_n\}$.

Etape $2n$: Même processus.

On a donc construit un isomorphisme f , au-dessus de A , entre M_1 et M_2 ,

$$f|_A = \text{id}_A, \quad f(a_1) = a'_1, \quad f(b'_1) = b_1, \text{ etc.}$$

10. Définition. - P , modèle de $T(A)$, est minimal au-dessus de A s'il n'a pas de sous-structure élémentaire propre au-dessus de A .

11. PROPOSITION. - Sous l'hypothèse (H), si P est minimal au-dessus de A , P est l'unique modèle premier au-dessus de A , car un modèle premier au-dessus de A se plonge élémentairement dans tout modèle contenant A .

12. PROPOSITION. - Sous l'hypothèse (H),

- (1) P minimal sur A $\leftrightarrow$ pour tout B, $A \subset B \subset P$, P est atomique sur B ;
- (2) P minimal sur A $\leftrightarrow$ toute énumération de P en est une construction ;
- (3) P minimal sur A $\leftarrow$ il n'y a qu'un seul modèle atomique au-dessus de A .

Démonstration.

(1 $\rightarrow$) Soit B, $A \subset B \subset P$. Soit P' le modèle premier au-dessus de B, alors $P' \subset P$ et $P' = P$, et donc P est atomique au-dessus de B, puisque P' l'est.

(1 $\leftarrow$) $A \subset P' \subset P$, par hypothèse, P est atomique sur P' . $a \in P$ réalise sur P' un type isolé p. p est réalisé dans P' , car $P' \models T$ et $p \vdash x = a'$, pour un $a' \in P'$. Donc $P = P'$.

(2) L'équivalence (2) est évidemment équivalente à l'équivalence (1) dont c'est une reformulation.

(3 $\leftarrow$) Soit P premier au-dessus de A. Si P n'est pas minimal au-dessus de A, il existe P_0 tel que $A \subset P_0 \subset P_1 = P$.

P étant atomique au-dessus de A, P_0 l'est aussi et, par hypothèse, $P_0 \cong P_1$.

On peut alors trouver $P_2 \subset P_1$, et $P_1 \cong P_2$. On construit ainsi une chaîne élémentaire strictement croissante de modèles atomiques au-dessus de A, donc isomorphes.

Pour η limite, $P_\eta = \bigcup_{\alpha < \eta} P_\alpha$, les P_α étant atomiques au-dessus de A, tout n-uple de P_η se trouve dans un P_α , et donc réalise un type isolé au-dessus de A.

$P_{\eta+1}$ tel que $P_\eta \cong P_{\eta+1}$, et $P_\eta \subset P_{\eta+1}$. $P_{\eta+1}$ étant isomorphe au-dessus de A à P_η , il est aussi atomique au-dessus de A.

On continue jusqu'à $\eta = |A|^+$.

P_η est atomique au-dessus de A et pourtant ne peut être isomorphe à P_1 , car $|P_\eta| > |P_1|$.

13. PROPOSITION. - Sous l'hypothèse (H), si P est minimal au-dessus de A, et si deux suites, de longueur quelconque extraites de P, réalisent le même type au-dessus de A, il existe un A-automorphisme de P qui les échange.

Démonstration. - Soient $(a_i)_{i < |A|}$, $(b_i)_{i < |A|}$ les deux suites extraites de P. Il existe un A-isomorphisme de $A' = A \cup \{a_i ; i < |A|\}$ sur $B' = A \cup \{b_i ; i < |A|\}$.

P est minimal au-dessus de A' , donc c'est le modèle premier au-dessus de A' . De même, P est le modèle premier au-dessus de B' . A' et B' étant A-isomorphes, il existe un A-isomorphisme de $P_{(A')}$ sur $P_{(B')}$ qui envoie A' sur B' .

14. Cas particulier de modèle minimal : Lorsque c'est la clôture algébrique ; ce sera le cas si les types de $S_1(A)$ de $RM = 0$ (i. e. algébriques) sont denses dans $S_1(A)$, pour tout A .

15. LEMME. - T totalelement transcendente, M atomique sur A , $p \in S_1(M)$. p est réalisable dans N , $N > M$, et N atomique sur A si, et seulement si, pour tout $\bar{b} \in M$, $p|_{A \cup \{\bar{b}\}}$ est isolé dans $S_1(A \cup \{\bar{b}\})$.

Démonstration.

($\rightarrow$) Soit x réalisant p dans N . N est atomique sur A , donc il est atomique sur $A \cup \{\bar{b}\}$, pour tout $\bar{b} \in M$. Ceci implique que $t(x, A \cup \{\bar{b}\}) = p|_{A \cup \{\bar{b}\}}$ est isolé dans $S_1(A \cup \{\bar{b}\})$.

($\leftarrow$) Soit x réalisant p , soit N le modèle premier construit au-dessus de $M \cup \{x\}$.

N est premier au-dessus de $M \cup \{x\}$, donc N est atomique au-dessus de $M \cup \{x\}$. On va montrer que $M \cup \{x\}$ est atomique au-dessus de A .

Soit $\bar{b} \in M$. $t(\bar{b}; A)$ est isolé par une formule $\varphi(\bar{y}, \bar{a})$, car M est atomique sur A . $t(x; A \cup \{\bar{b}\})$ est isolé, par hypothèse, par une formule $\psi(z, \bar{b}, \bar{a}')$. Alors $t(x; \bar{b}; A)$ est isolé par la formule $\psi(z, \bar{y}, \bar{a}') \wedge \varphi(\bar{y}, \bar{a})$. Donc N est atomique sur A .

16. THEOREME. - T totalelement transcendente, M atomique sur A , $p \in S_1(M)$. p réalisable dans P , $P > M$ et P atomique sur A .

Alors, si $N > M$, et N atomique sur A , l'héritier de p sur N a la même propriété, c'est-à-dire est réalisable dans une extension élémentaire de N qui est atomique sur A .

Démonstration. - Soit q l'héritier de p sur N . Soit $RM(p) = RM(q) = \alpha$. p est isolé dans $S^\alpha(M)$ par une formule $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$. Alors $RM(p|_{A \cup \{\bar{a}\}}) = \alpha$, et p est l'unique fils sur M de $p|_{A \cup \{\bar{a}\}}$ qui soit de rang α .

Soit $\bar{b}' \in N$; le type de $\bar{b}'$ sur $A \cup \{\bar{a}\}$ est isolé, donc réalisable dans M par un $\bar{b}$.

$p|_{A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}\}}$ est l'unique fils équirang de $p|_{A \cup \{\bar{a}\}}$ sur $A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}\}$.

$q|_{A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}'\}}$ est l'unique fils équirang de $p|_{A \cup \{\bar{a}\}}$ sur $A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}'\}$.

$p|_{A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}\}}$ et $q|_{A \cup \{\bar{a}\} \cup \{\bar{b}'\}}$ sont donc isomorphes. Le premier est isolé, donc le second aussi.

17. COROLLAIRE. - T totalelement transcendente. S'il n'y a pas de modèle minimal au-dessus de A , alors il y a des modèles atomiques sur A , en toute cardinalité $\geq |A|$.

Démonstration. - $A \subset M < N$, M et N atomiques sur A . Soit $p \in S_1(M)$ réalisé dans $N - M$.

On prend l'héritier p_1 de p sur N , à l'étape n : $M = M_0$, $N = M_1$,

$$A \subset M_0 < M_1 < \dots < M_n,$$

les M_i étant tous atomiques sur A . On prend l'héritier p_n de p_{n-1} sur M_n , et on le réalise dans M_{n+1} , atomique sur A , et $M_n < M_{n+1}$.

Pour η limite, $M_\eta = \bigcup_{\alpha < \eta} M_\alpha$.

M_η est atomique sur A et $M_\eta > M_0$; on prend p_η l'héritier de p (et donc de tous les p_α , $\alpha < \eta$) sur M_η , et on le réalise dans un $M_{\eta+1}$, atomique sur A , et $M_{\eta+1} > M_\eta$.

18. Définition. - On dit que M , atomique sur A , est " λ -atomiquement saturé" au-dessus de A si, pour tout $B \subset M$, $|B| < \lambda$, M réalise tous les types de $S_1(B)$ réalisables dans des extensions de B atomiques sur A .

19. COROLLAIRE. - T totalement transcendente, s'il n'y a pas de modèle minimal au-dessus de A , alors, pour tout $\lambda \geq |A|$, il existe un (unique) modèle " λ -atomiquement saturé" de cardinal λ au-dessus de A .

Démonstration. - Soit M_0 , $|M_0| = \lambda$, M_0 atomique au-dessus de A . On énumère les types appartenant à $S_1(M_0)$ réalisables dans des extensions de M_0 atomiques sur A . Soit p_1 le premier de ceux-ci. On le réalise dans $M_{01} > M_0$, atomique sur A .

Soit p_2 le suivant, on prend son héritier sur M_{01} , et on le réalise dans $M_{02} > M_{01}$, atomique sur A . On continue, et on obtient ainsi $M_1 > M_0$, M_1 atomique sur A et réalisant tous les types de $S_1(M_0)$ réalisables dans des extensions de M_0 atomiques sur A .

Si on fait cette opération λ fois, on obtient le modèle cherché (voir la démonstration de l'existence d'un modèle λ -saturé de cardinalité λ , quand T est λ -stable).

20. Rappelons que, si T est ω_1 -catégorique, alors T est ω -stable et λ -catégorique en tout $\lambda \geq \omega_1$.

THÉOREME. - Si T est ω_1 -catégorique non ω -catégorique, alors T a un modèle minimal sur tout ensemble fini de paramètres.

Démonstration. - Si T n'a pas de modèle minimal sur $\bar{a}$, T étant λ -stable, pour tout $\lambda \geq \omega$, T a un modèle saturé de cardinalité ω_1 , et c'est le seul, à isomorphisme près. Ce modèle M réalise tous les types sur $\bar{a}$, d'autre part il est atomique sur $\bar{a}$, par le corollaire 17. C'est-à-dire que, pour tout n , $S_n(\bar{a})$ n'est composé que de points isolés. $S_n(\bar{a})$ étant un compact, il doit être fini, ce

qui implique que T est ω -catégorique.

21. T est ω_1 -catégorique.

Alors, pour tout Λ infini, il y a un modèle premier minimal au-dessus de Λ .

Démonstration. - Supposons qu'il n'y ait pas de modèle minimal au-dessus de Λ . Alors, il existe $M \supset \Lambda$, $|M| = |\Lambda|^+$, et M atomique sur Λ .

M est donc l'unique modèle de cardinalité $|M|$, et donc il est saturé. Il doit réaliser tous les types sur Λ ; or tous les types sur Λ ne peuvent être isolés, car $S_1(\Lambda)$ est un compact et contient tous les types réalisés dans Λ , donc est infini.

22. En résumé, on a donc montré que, si T est totalement transcendante, alors:

1° Il existe un modèle premier sur Λ , qui est aussi atomique sur Λ ;

2° S'il existe un modèle minimal au-dessus de Λ , alors ce modèle est l'unique modèle premier au-dessus de Λ .

Nous démontrerons plus tard, en utilisant des techniques de stabilité, l'unicité du modèle premier, pour T totalement transcendante.

Théorèmes des deux cardinaux

23. Définition. - T admet $\langle \alpha, \beta \rangle$, pour $\varphi(x)$, si T a un modèle M de cardinalité α tel que $|\Phi_M| = |\{x \in M; M \models \varphi(x)\}| = \beta$.

24. PROPOSITION.

1° T admet $\langle \alpha, \beta \rangle$, alors T admet $\langle \gamma, \beta \rangle$, pour tout γ , $\alpha \geq \gamma \geq \beta$.

2° T admet $\langle \alpha, \beta \rangle$, alors T admet $\langle \gamma, \gamma \rangle$, pour tout $\gamma \geq \omega$.

Démonstration.

1° $M \models T$, $|M| = \alpha$, $|\Phi_M| = \beta$.

D'après LST, il existe $N < M$, $N \supset \Phi_M$, et $|N| = \gamma$, et on a $\Phi_N = \Phi_M$.

2° D'après le 1°, T admet $\langle \beta, \beta \rangle$. Soit M ce modèle. Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{F\}$, F symbole fonctionnel unaire.

Soit $T' = T \cup \{F \text{ est une bijection de } M \text{ sur } \Phi_M\}$.

T' étant consistante (il y a une expansion de M au nouveau langage qui en est un modèle), elle a des modèles en toute cardinalité $\geq \omega$, donc, en particulier, a un modèle N de cardinalité γ . Le réduit de N au petit langage $\mathcal{L}$ est le modèle cherché.

25. Définition. - On dit que M est dénombrable homogène si M est dénombrable et ω -homogène.

Nous énonçons quelques théorèmes sans démonstration (*).

26. THEOREME. - Tout modèle dénombrable a une extension élémentaire dénombrable homogène.

27. THEOREME.

1° L'union de toute chaîne élémentaire dénombrable de modèles dénombrables homogènes est dénombrable homogène.

2° L'union de toute chaîne élémentaire dénombrable de modèles dénombrables homogènes isomorphes deux à deux est isomorphe à chacun des termes de la suite.

28. PROPOSITION. - Soit M_0 dénombrable, $N_0 < M_0$, alors le modèle (M_0, N_0) a une extension élémentaire (M, N) telle que M soit dénombrable homogène, $N < M$ et $N \cong M$.

29. THEOREME des deux cardinaux de Vaught. - Si T admet $\langle \alpha, \beta \rangle$, avec $\alpha > \beta \geq \omega$, alors T admet $\langle \omega_1, \omega \rangle$.

LEMME. - Si T admet une paire de Vaught, c'est-à-dire si T a deux modèles M et N tels que $M < N$, $M \neq N$ et $\Phi_M = \Phi_N$, alors T admet $\langle \omega_1, \omega \rangle$.

Démonstration. - Soit $M \models T$, $|M| = \alpha$, $|\Phi_M| = \beta$. Soit $N \neq M$, $|N| = \beta$, $\Phi_N = \Phi_M$. $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{N\}$, $T' = \text{Th}(M, N)$. T' , étant consistante, aura un modèle dénombrable (M_0, N_0) tel que M_0 soit dénombrable homogène, $M_0 > N_0$, $M_0 \cong N_0$ et $M_0 \neq N_0$, car $T' \models \exists x \neg N(x)$ et par la proposition 28.

$\Phi_{M_0} = \Phi_{N_0}$ est infini, car T' dit que Φ_M est infini et inclus dans N .

On va construire maintenant une chaîne élémentaire de modèles dénombrables homogènes N_ξ , $\xi < \omega_1$.

À l'étape $\xi + 1$: $N_\xi \cong N_0 < M_0$.

Soit $N_{\xi+1}$ tel que $(N_{\xi+1}, N_\xi) \cong (M_0, N_0)$. On peut toujours le construire en se plaçant dans un modèle suffisamment saturé. On aura alors $N_\xi < N_{\xi+1}$ et $N_{\xi+1} \cong M_0 \cong N_0$ et $N_{\xi+1}$ dénombrable homogène.

$$\Phi_{N_{\xi+1}} = \Phi_{N_\xi} = \dots = \Phi_{N_0}.$$

À l'étape $\xi < \omega_1$, ξ limite, nous avons $N_\xi = \bigcup_{\alpha < \xi} N_\alpha$. ξ étant dénombrable, on a bien N_ξ dénombrable homogène, et $N_\xi \cong N_0$. $N_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} N_\alpha$ est de cardina-

(*) CHANG (C. C.) and KEISLER (H. I.). - Continuous model theory. - Princeton, Princeton University Press, 1966 (Annals of Mathematics Studies, 58) [cf. p. 130-131].

lité ω_1 , et $|\Phi_{N_{\omega_1}}| = \omega$. En effet, soit $x \in N_{\omega_1}$, et $N_{\omega_1} \models \varphi(x)$. Alors $x \in N_\alpha$, $\alpha < \omega_1$ et $N_\alpha \models \varphi(x)$, car $N_\alpha < N_{\omega_1}$, donc $x \in \Phi_{N_\alpha} = \Phi_{N_0}$, et $|\Phi_{N_0}| = \omega$.

30. LEMME. - Sous l'hypothèse (H), $M \cup A$, N premier sur $M \cup A$. $x \in N - M$; alors $t(x; M \cup A)$ ne cohérite pas de sa restriction à M .

Démonstration. - Supposons qu'il cohérite.

$t(x; M \cup A) \models \varphi(x, \bar{m}, \bar{a})$, alors il existe $a' \in M$ tel que $N \models \varphi(a', \bar{m}, \bar{a})$; si $\varphi(x, \bar{m}, \bar{a})$ est la formule qui isole le type de x sur $M \cup A$ (car N atomique sur $M \cup A$), alors a' réalise le même type sur $M \cup A$ que x ; donc $t(x; M \cup A) \models x = a'$.

31. Définition. - $p \in S_1(M)$ ne fait pas augmenter φ si on peut le réaliser dans $\widetilde{N} > M$, $\Phi_M = \Phi_N$.

32. LEMME. - T est totalement transcendante, $M \models T$, $p \in S_1(M)$, x réalisant p ; p ne fait pas augmenter Φ_M si, et seulement si, pour tout a' satisfaisant φ , $t(x; M \cup \{a'\})$ hérite de sa restriction p à M .

Démonstration. - Soit x réalisant p , N modèle premier au-dessus de $M \cup \{x\}$. $q = t(x; M \cup \{a'\})$.

$(\rightarrow)$ $q \models \psi(x, a', \bar{m}) \wedge \varphi(a')$, $q \models \exists y \psi(x, y, \bar{m}) \wedge \varphi(y)$.
 $p \models \exists y \psi(x, y, \bar{m}) \wedge \varphi(y)$. p ne fait pas augmenter φ , donc, pour un $b' \in M$, on a

$$p \models \psi(x, b', \bar{m}) \wedge \varphi(b').$$

$(\leftarrow)$ Soit $a' \in N$. $t(x; M \cup \{a'\})$ hérite de sa restriction à M ; si a' satisfait φ , $a' \notin N - M$.

33. PROPOSITION. - T est totalement transcendante, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \sim q$. Si p ne fait pas augmenter φ , q a la même propriété.

Démonstration. - Soit a' satisfaisant φ , et x réalisant q . Soit q' le type de x sur $N \cup \{a'\}$.

Si $q' \models \psi(x, a', \bar{n}) \wedge \varphi(a')$, $q \models \exists y \psi(x, y, \bar{n}) \wedge \varphi(y)$, donc, car $p \sim q$, $p \models \exists y \psi(x, y, \bar{m}) \wedge \varphi(y)$, pour $\bar{m} \in M$.

Comme p ne fait pas augmenter φ , il existe $b' \in M$ tel que $p \models \psi(x, b', \bar{m}) \wedge \varphi(b')$, donc, car $q \sim p$, $q \models \psi(x, a'', \bar{m}') \wedge \varphi(a'')$, a'' et m' dans N .

Chaque fragment fini de q' s'interprète dans q , donc q' est extension non déviante de q , c'est donc son héritier.

34. THÉOREME. - Si T est totalement transcendante et admet $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha > \beta \geq \omega$, alors T admet $\langle K, \lambda \rangle$, $K \geq \lambda \geq \omega$.

Démonstration. - Soient $M_0 < N_0$ tels que $|M_0| = \omega$, $\Phi_{M_0} = \Phi_{N_0}$.

Soit $p \in S_1(M_0)$ le type d'un élément de $N_0 - M_0$; alors p ne fait pas augmenter φ .

Soit $N > M_0$, $|N| = |\Phi_N| = \lambda$.

Soit p_1 l'héritier de p sur N ; on le réalise dans $N_1 > N$, avec $\Phi_{N_1} = \Phi_N$. On prend p_2 l'héritier de p_1 sur N_1 , et on le réalise dans $N_2 > N_1$, $\Phi_{N_2} = \Phi_{N_1}$, et on continue. A une étape limite, on prend la réunion, à l'étape $\alpha + 1$, on réalise l'héritier de p sans augmenter φ .

N_K est le modèle cherché.
