Groupe d'étude de théories stables

Sébastien Ehrsam

Exposé élémentaire de la théorie de la stabilité

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 1, p. 1-30

<http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A1_0>

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Théories stables
(B. POIZAT)
1re année, 1977/78, n° 1, 30 p.

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE DE LA THÉORIE DE LA STABILITÉ

par Sébastien EHRSAM (*)

Chapitre 0 : Ultrapuissances. Types. Modèles ω-saturés.

Notations. - On notera Σ une signature (ou type de similarité) qui sera toujours supposée finie ou dénombrable. On notera de la même lettre une Σ-structure et la base de cette structure, sauf indication précise. Le langage associé à Σ, $L(\Sigma)$, est toujours du premier ordre, et les formules du langage sont de complexité finie. On suppose connues les notions d'isomorphisme de structures, de sous-(sur-) structure (élémentaire ou non), de structures élémentairement équivalentes, de modèle, de théorie complète, ainsi que les résultats fondamentaux suivants :

Test de Tarski

Théorème de Löwenheim-Skolem (L. S.)

Théorème de la chaîne d'extensions élémentaires.

N, extension élémentaire de M, s'écrit $M \prec N$, et le cardinal de M est noté $\|M\|$.

1. Ultrapuissances.

1.1. Définition. - Soit Σ une signature, $(M_i)_{i\in I}$ une famille de Σ-structures. Pour tout r d'arité N de Σ, on note $r(M_i)$ la relation N-aire interprétant r dans la structure M_i. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. On définit $R_{\mathcal{U}}$, relation d'équivalence sur $\prod_i M_i$,

$$x \, R_{\mathcal{U}} \, y \Longleftrightarrow \{i \in I \; ; \; x_i = y_i\} \in \mathcal{U} .$$

Alors (théorème et définition), l'ensemble des classes d'équivalence de $R_{\mathcal{U}}$, noté $\prod_i M_i/\mathcal{U}$, peut être muni d'une Σ-structure définie ainsi : Si r est un symbole N-aire de Σ, on définit son interprétation sur $\prod_i M_i/\mathcal{U}$ par

$$\left[\begin{array}{c} \bar{\xi} \in r \\ \xi = (\xi_1 \, , \, \ldots \, , \, \xi_N) \\ \text{avec, pour tout } j \text{ dans } [1 \, , \, \ldots \, , \, N] \, , \\ \xi_j = (x_{j,i})_{i\in I} \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow [\{i \in I \; ; \; (x_{1,i} \, , \, \ldots \, , \, x_{N,i}) \in r(M_i)\} \in \mathcal{U}] .$$

(*) Sébastien EHRSAM, C. E. S. de Wintzenheim, 68000 COLMAR.

$\prod_i M_i/\mathcal{U}$ est l'ultraproduit des M_i par $\mathcal{U}$. Si $M = M_i$, pour tout i, $\prod_i M_i/\mathcal{U}$ est noté $M^{\mathcal{U}}$, c'est l'ultrapuissance de M par $\mathcal{U}$.

Si $P(i)$ est une propriété dépendant de i dans I, "l'ensemble des i dans I, tels que $P(i)$ soit vraie, appartient à l'ultrafiltre $\mathcal{U}$" se dit :

$P(i)$ est vraie pour presque tout i, ou vraie presque partout.

1.2. THÉORÈME de Loš. - Soient $(M_i)_{i\in I}$ des Σ-structures, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Pour $\bar{a}$ dans $\prod_i M_i/\mathcal{U}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ (avec, pour tout j dans $[1, \dots, n]$, $a_j = \overline{(a_{j,i})_{i\in I}}$), on note $\bar{a}_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})$. Alors, pour toute formule $\varphi(\bar{x})$,

$$\prod_i M_i/\mathcal{U} \vdash \varphi(\bar{a}) \Longleftrightarrow M_i \vdash \varphi(\bar{a}_i) \text{ , pour presque tout } i .$$

1.3. Applications.

1° THÉORÈME de compacité. - Une théorie T est consistante si, et seulement si, tout fragment fini de T est consistant.

2° Soit $\mathcal{U}$ une ultrafiltre sur I ; $M^{\mathcal{U}}$ est une extension élémentaire de M, M étant identifié à son plongement diagonal dans $M^{\mathcal{U}}$.

3° Si M est une structure infinie, pour tout cardinal $\lambda \geqslant \|M\|$, M a des extensions élémentaires de cardinal λ.

4° "Test de Vaught" : Soit T une théorie dénombrable. Si T n'a pas de modèle fini, et, pour k, cardinal infini, T a un modèle et un seul, à isomorphisme près, de cardinal k (on dit alors que T est k-catégorique), alors T est complète.

Exemple. - On considère la théorie des axiomes de l'ordre dense, total, sans extrémités. Les deux derniers s'expriment ainsi :

$$(\forall x)\ (\forall y)\ \ x \leqslant y \longrightarrow (\exists z)\ \ x \leqslant z \leqslant y ,$$

$$(\forall x)\ ((\exists y)\ \ y > x) \wedge ((\exists z)\ \ z < x)$$

On montre que cette théorie, qui est sans modèle fini, est $\aleph$-catégorique (ou ω-catégorique), par va-et-vient (voir ci-après).

En présence d'une théorie complète T, on a les résultats suivants.

THÉORÈME 1. - Si M et N sont élémentairement équivalents (i. e., dans ce cas, modèles de T), M se plonge élémentairement dans (i. e. est isomorphe à une restriction élémentaire de) une ultrapuissance de N.

THÉORÈME 2. - Si M et N sont modèles de T, elles ont une extension élémentaire commune, à isomorphisme près.

Dans la suite, comme une théorie complète ayant un modèle fini, n'a que celui-là, à isomorphisme près, on étudiera les théories complètes sans modèle fini.

2. Espaces de types. (T complète sans modèle fini).

2.1. Types.

Définition 1. - Soient M un modèle de T, A une partie de M, et x_1 et x_2 dans M. On dit que x_1 et x_2 ont même type au-dessus de A si x_1 et x_2 satisfont, dans M, les mêmes formules à paramètres dans A. Ce qui s'écrit :

Pour tout $\bar{a} \in A^n$, et tout φ dans $L(\Sigma)$, $M \vdash \varphi(x_1, \bar{a})$ si, et seulement si, $M \vdash \varphi(x_2, \bar{a})$.

On le note $t^A_M(x_1) = t^A_M(x_2)$. Si $M \prec N$, on a évidemment $t^A_N(x_1) = t^A_M(x_2)$.

THÉORÈME de Svenonius. - On reprend les hypothèses de la définition 1. x_1 et x_2 ont même type au-dessus de A si, et seulement si, il existe une extension élémentaire N de M possédant un automorphisme σ fixant A point par point, tel que $\sigma(x_1) = x_2$.

Définition 2. - Soient M un modèle de T, A inclus dans M et ξ dans M. Le type de ξ au-dessus de A est l'ensemble de toutes les formules $\varphi(x, \bar{a})$ telles que $M \vdash \varphi(\xi, \bar{a})$ $(\bar{a} \in A^n)$.

Remarque. - Le type de ξ, $t^A_M(\xi)$, est donc un ensemble de formules $\varphi(x, \bar{a})$ consistant et complet ; x est appelée la variable type.

On pose $\mathfrak{L}(A, x) = \mathfrak{L}(\Sigma \cup A \cup \{x\})$, et on est amené à la définition générale suivante.

Soit M un modèle de T, et $A \subset M$. Un type au-dessus de A est une théorie complète dans le langage $\mathfrak{L}(A, x)$, contenant $T(A)$, qui est "la théorie de A ".

Ce qui s'exprime aussi : Un type p est un ensemble de formules $\varphi(x, \bar{a})$ finiment satisfaisable dans M et complet (la démonstration se fait par compacité).

On notera $S_1(A)$ l'ensemble des types (1-types) au-dessus de A. De même, on définit, et on note, $S_n(A)$, $S_I(A)$, l'ensemble des n-types (i. e. types à n variables $x_1, \ldots, x_n$), des I-types (i. e. types à variables indexées par I) sur A.

Définition 3. - p dans $S_1(A)$ est réalisé si, et seulement si, $p \vdash (x = a)$, où a est dans A. Si $M \prec N$, p est réalisé dans N s'il existe a dans N de type p ; sinon, on dit que p est omis dans N.

2.2. Espaces de types.

$S_1(A)$ est muni de la topologie dont une base d'ouverts est, pour toute formule $\varphi(x, \bar{a})$ dans $\mathfrak{L}(A, x)$,

$$\langle \varphi(x, \bar{a}) \rangle = \{p \in S_1(A) \ ; \ p \vdash \varphi(x, \bar{a})\} .$$

PROPOSITION 1.

1° $S_1(A)$ est compact, totalement discontinu.

2° Les ouverts-fermés de $S_1(A)$ sont exactement les $\langle\varphi(x , \bar{a})\rangle$.

PROPOSITION 2.

1° Un type réalisé est isolé dans $S_1(A)$ par $\langle(x = a)\rangle$, où $a \in A$.

2° Dans $S_1(M)$, où M est un modèle, les seuls types isolés sont les réalisés.

3° A est un modèle si, et seulement si, tous les types réalisés forment un sous-ensemble dense de $S_1(A)$.

Définition 4. - Un type est algébrique s'il n'a qu'un nombre fini de réalisations possibles distinctes.

On montre facilement que, si un type est non algébrique, il a autant de réalisations que l'on veut, et que tout type algébrique est isolé.

PROPOSITION 3. - Soient $A \subset B \subset M$, modèle de T . On considère l'application-restriction f définie par

$$S_1(B) \longrightarrow S_1(A)$$
$$q \longmapsto q/A = f(q)$$

f est continue surjective.

Par définition, q/A est père de q qui est alors son fils, ou une extension de q/A . q , fils de p , se note $p \subset q$.

3. Modèles ω-saturés.

Définition 1. - M , modèle de T , est ω-saturé si, et seulement si, pour toute partie finie A de M , tout type $S_1(A)$ est réalisé dans M .

On démontre par un procédé de récurrence ordinale, que toute structure M a une extension élémentaire N ω-saturée, avec $\|N\| \leqslant \sup(2^{\omega} , \|M\|)$.

Définition 2. - Soient M et N deux structures de même signature. Un isomorphisme local de M vers N est une bijection d'une restriction finie de M dans une restriction finie de N qui conserve les formules atomiques.

Définition 3. - $\mathcal{K}$ est une famille karpienne d'isomorphimes locaux de M vers N si, et seulement si,

$\mathcal{K}$ est non vide ;

Pour tout σ de $\mathcal{K}$, et pour tout a dans M , il existe τ de $\mathcal{K}$ prolongeant σ et défini sur a (Va) ;

Pour tout σ de $\mathcal{K}$, et pour tout b dans N , il existe τ de $\mathcal{K}$ prolongeant σ et tel que b soit dans l'image de τ (Vient).

S'il existe un famille karpienne de M vers N , on dit que M et N sont

∞-équivalents ou $L_{\infty,\omega}$-équivalents.

PROPOSITION.

(a) Si M et N sont ∞-équivalents, ils sont élémentairement équivalents.

(b) Deux structures ω-saturées et élémentairement équivalentes sont ∞-équivalentes.

Cette technique de va-et-vient permet souvent de démontrer qu'une théorie est complète.

Définition 4. - T admet l'élimination des quanteurs si, et seulement si, pour toute formule $\varphi(\bar{x})$, il existe $\psi(\bar{x})$ sans quanteurs telle que

$$T \vdash \forall\, \bar{x}\ \ (\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow \psi(\bar{x}))\ .$$

Pour prouver que T admet l'élimination des quanteurs, on montre le lemme suivant.

LEMME. - T admet l'élimination des quanteurs si tout type de $S_n(\emptyset)$, pour tout n , s'axiomatise au moyen d'énoncés sans quanteurs.

Alors, tout type de $S_1(A)$ admet l'élimination des quanteurs, et T est modèle-complète, i. e. $M \subset N$, modèles de $T \longrightarrow M \prec N$.

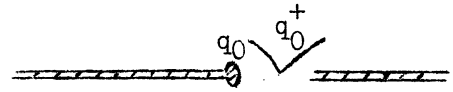
Exemple : Ordre dense sans extrémités. - On démontre facilement que, si M , N sont modèles de T , et $\bar{a} = (a_1 , \dots , a_n)$ et $\bar{b} = (b_1 , \dots , b_n)$ en supposant $\bar{a}$ et $\bar{b}$ rangés dans l'ordre croissant (i. e. $\bar{a}$ et $\bar{b}$ vérifient les mêmes relations sans quanteurs), $\bar{a}$ et $\bar{b}$ se correspondent par va-et-vient infini ; donc T admet l'élimination des quanteurs, et est ω-catégorique. Décrivons les types sur le modèle Q :

Type de 1re espèce : p réalisé, $p \vdash (x = q)$ (type isolé).

Type de 2e espèce : Type non réalisé tel qu'il existe q_0 dans Q , avec

$$\{q\ ;\ q \in Q \text{ et } p \vdash (x \leqslant q)\} = \{q\ ;\ q \in Q \text{ et } q_0 < q\}\ .$$

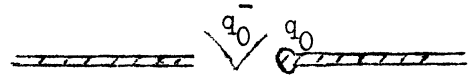
C'est le type q_0^+ dit coupure rationnelle.



Type de 3e espèce : Type non réalisé tel qu'il existe q_0 dans Q , avec

$$\{q\ ;\ q \in Q \text{ et } p \vdash (x \leqslant q)\} = \{q\ ;\ q \in Q \text{ et } q \geqslant q_0\}\ .$$

C'est le type q_0^- , dit aussi coupure rationnelle.

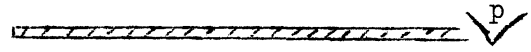


Type de 4e espèce : Type non réalisé, qui n'est pas des deux espèces précedentes, avec : Il existe q et $q' \in Q$, $q < q'$ et $p \vdash (x > q) \wedge (x < q')$.

C'est le type dit irrationnel.

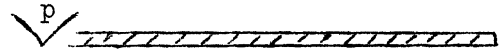
Type de 5e espèce : Il est défini par $p \vdash x > q$, pour tout q dans Q (type non réalisé).

C'est le type dit $+\infty$.



Type de 6e espèce : Il est défini par $p \vdash (x < q)$, pour tout $q \in Q$ (type non réalisé).

C'est le type $-\infty$.



Si on ôte les points isolés dans $S_1(Q)$, c'est-à-dire Q lui-même, on obtient un compact parfait, l'ensemble de Cantor.

Le but principal de notre étude est de chercher des façons privilégiées d'étendre un type $p \in S_1(M)$ en un type sur N , extension élémentaire de M .

Chapitre I : Héritiers

Dans ce chapitre, on traitera seulement de types au-dessus de modèles.

1. Ultrapuissances de types.

THÉORÈME et définition. - Soient M un modèle de T , $p \in S_1(M)$. I un ensemble, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de parties de I .

P est l'ensemble des formules définies sur M de la manière naturelle suivante : Si $\bar{a} \in (M^{\mathcal{U}})^n$, $\bar{a} = (\dots , \bar{a}_i , \dots)$, les $\bar{a}_i$ étant des n-uples de M , p contient $\varphi(x , \bar{a})$ si, et seulement si, pour presque tout i , $p \vdash \varphi(x , \bar{a}_i)$. Cette définition est indépendante de la suite des $\bar{a}_i$ définissant $\bar{a}$. p est un type sur M appelé ultrapuissance du type p par $\mathcal{U}$.

p est complet : Soit $\varphi(x , \bar{a})$ une formule,

$$O = \{ i \in I ; \ p \vdash \varphi(x , \bar{a}_i) \} , \quad N = \{ i \in I , \ p \vdash \neg \varphi(x , \bar{a}_i) \} ,$$

alors O ou N est dans $\mathcal{U}$ (i. e. p décide de $\varphi(x , \bar{a})$).

p est consistant : Si α réalise p dans N , extension élémentaire de M , $\alpha^* = \overline{(\dots , \alpha , \dots)}$ réalise $p^{\mathcal{U}}$ dans $N^{\mathcal{U}}$, extension élémentaire de $M^{\mathcal{U}}$.

Remarque. - On définit aussi un ultraproduit de types $(\prod_i p_i/\mathcal{U})$, type complet consistant sur le modèle $\prod_i M_i/\mathcal{U}$, à partir des types $(p_i)_{i \in I}$ sur les M_i , et

$\mathcal{U}$ ultrafiltre sur I .

LEMME. - M étant plongé diagonalement dans $M^{\mathcal{U}}$, $p^{\mathcal{U}}$ est fils de p .

C'est évident.

Remarque. - Il est possible d'avoir $M^{\mathcal{U}} = M^{\mathcal{L}}$, avec $p^{\mathcal{U}} \neq p^{\mathcal{L}}$.

2. Héritiers.

Définition 1. - M , N modèles de T , $M \prec N$, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \subset q$. q est héritier de p si q se laisse étendre en une ultrapuissance de p . Il existe $\mathcal{U}$ ultrafiltre et un plongement élémentaire de $N \longrightarrow M^{\mathcal{U}}$ prolongeant le plongement diagonal canonique de $M \longrightarrow M^{\mathcal{U}}$, tels que $q = p^{\mathcal{U}}$.

Définition 2. - Mêmes hypothèses. q est héritier de p si, et seulement si, pour toute formule $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^k$, $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, alors il existe $\bar{b}' \in M^k$ tel que $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$.

Les deux définitions de héritier sont équivalentes.

Déf. 1 $\longrightarrow$ Déf. 2 : $M \prec N \prec M^{\mathcal{U}}$ et $p \subset q \subset p^{\mathcal{U}}$. Soit $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$ telle que $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$. Donc $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, avec $\bar{a} = (\dots , \bar{a}_i , \dots)$, $\bar{b} = (\dots , \bar{b}_i , \dots)$. Pour presque tout i , $p \vdash \varphi(x , \bar{a}_i , \bar{b}_i)$. $\bar{a}_i$ est identifié à $\bar{a}$, par le plongement canonique, et pour un i tel que $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}_i)$, on pose $\bar{b}' = \bar{b}_i$.

Déf. 2 $\longrightarrow$ Déf. 1 : $I = \{$applications d'une partie finie de N dans M valant l'identité sur les éléments de $M\}$. Pour toute formule $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^k$, telle que $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, on considère

$$I_{\varphi(x,\bar{a},\bar{b})} = \{i \in I \ ; \ i \text{ définie en } \bar{a} \text{ et } \bar{b} \text{ et } p \vdash \varphi(x , \bar{a} , i\bar{b})\} .$$

Ces parties ne sont jamais vides, par hypothèse, et cet ensemble de parties est clos par intersection finie. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant cette base de filtre, et σ définie par

$$\sigma : N \longrightarrow M^{\mathcal{U}}$$
$$b \longmapsto \overline{(\dots , ib , \dots)} \text{ si } i \text{ définie en } b \text{ , n'importe quoi, sinon.}$$

$I_{b=b} = \{i \ ; \ i \text{ définie en } b\} \in \mathcal{U}$. Donc l'image $\sigma(b)$ est dans $M^{\mathcal{U}}$.

σ est injective car si $b \neq b'$, $I_{b \neq b'}$ est dans $\mathcal{U}$, et prolonge trivialement le plongement diagonal de M dans $M^{\mathcal{U}}$.

σ est élémentaire : si $N \vdash \varphi(\bar{b})$, alors

$$I_{\varphi(\bar{b})} = \{i \in I \ ; \ i \text{ définie en } \bar{b} \text{ et } M \vdash \varphi(i\bar{b})\}$$

entraîne, par définition et grâce au théorème de Loš, que $M \vdash \varphi(\sigma\bar{b})$.

p est fils de q : si $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, alors $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , i\bar{b})$, pour presque tout i , d'où

$$p \vdash \varphi(x , \bar{a} , i\bar{b}) = \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}) .$$

On remarque immédiatement que $p^{\mathcal{U}}$ est héritier de $p^{\mathcal{U}}$ et que, si q hérite de p sur N, avec $M \prec K \prec N$, la restriction r de q à K est héritier de p.

PROPOSITION 1. - Soient M et N modèles de T tels que $M \prec N$, $p \in S_1(M)$. Π un ensemble de formules à paramètres dans N, $\{\varphi(x,\bar{a},\bar{b}) , \bar{a} \in M^n , \bar{b} \in (N-M)^k\}$, clos par conjonction finie, contenant la théorie de N (où les éléments de N sont nommés) et tel que

$$\varphi(x , \bar{a} , \bar{b}) \in \Pi \longrightarrow \text{il existe } \bar{b}' \text{ dans } M^k \text{ tel que } p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}') .$$

Alors il existe dans $S_1(N)$ un héritier q de p qui satisfait tous les énoncés de Π.

Démonstration analogue à Déf. 2 $\longrightarrow$ Déf. 1 (cf. ci-dessus).

COROLLAIRE 1. - $M \prec N \prec P$, modèles de T, $p \in S_1(M)$, et q héritier de p sur N. Alors il existe sur P un fils r de q héritier de p.

On considère q comme type incomplet sur P (i. e. le fermé non vide de) $S_1(P) = \{$ens. des conjonctions finies de formules de $q \cup T(P)\}$, qui satisfait les hypothèses de la proposition.

COROLLAIRE 2. - M, N modèles de T $(M \prec N)$, $p \in S_1(M)$. Il existe dans $S_1(N)$ un héritier de p.

M et N sont élémentairement équivalents, donc il existe $\mathcal{U}$ tel que N se plonge dans M. Alors $q = p^{\mathcal{U}}/N$ est héritier de p, ou bien on fait $M = N$ et $q = p$ dans le corollaire 1.

PROPOSITION 2. - $M \prec N \prec P$, modèles de T, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $r \in S_1(P)$ et $p \subset q \subset r$.

1° Si r est héritier de p, q est héritier de p.

2° Si q hérite de p et r hérite de q, alors r est héritier de p.

1° Déjà vu.

2° Evident par transitivité : Soit $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in P^m$ telle que $r \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, alors $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$ $(\bar{b}' \in N^m)$, et donc $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}'')$ avec $\bar{b}''$ dans M^m.

Il est très important de remarquer que si r hérite de p, il n'hérite pas nécessairement de q (contre-exemple plus loin).

PROPOSITION 3. - Soit $p \in S_1(M)$. Il existe une restriction élémentaire dénombrable N de M telle que p hérite de p/N.

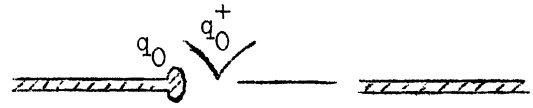
Pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ telle que, pour un certain $\bar{b}$ dans M^n, $p \vdash \varphi(x , \bar{b})$, on choisit un tel n-uple $\bar{b}$. On obtient un ensemble A_1, qui est

dénombrable. On recommence avec les formules $\varphi(x , \bar{a} , \bar{y})$, où $\bar{a}$ est extrait de A_1 ; on obtient A_2 dénombrable contenant A_1 . Ainsi, par récurrence sur n , on construit une suite croissante d'ensembles dénombrables, dont la réunion N est donc dénombrable et incluse dans M . Or, N est restriction élémentaire de M , car le test de Tarski est vérifié. De plus, si $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $\bar{a} \in N^k$, $\bar{b} \in M^p$, alors $\bar{a} \in A_n$, et $\varphi(x , \bar{a} , \bar{y})$ est telle que $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$. On prend alors $\bar{b}'$ dans A_{n+1} , et donc $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$, soit $p/N \vdash \varphi(x, \bar{a}, \bar{b}')$.

3. Exemple : Ordre dense sans extrémités ($M < N$, modèles de T).

Type de 1re espèce : p est réalisé. Il n'admet qu'un seul fils, son unique héritier.

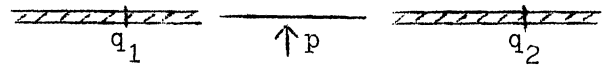
Type de 2e espèce : Coupure rationnelle du type $p = q_0^+$:



Si q est un héritier de p sur N , $q \vdash x \geqslant b > q_0$ $(b \in N)$ entraînerait $p \vdash x \geqslant b' > q_0$, avec $b' \in M$, ce qui est impossible. Donc q vérifie $(q_0 < x < b)$, pour tout $b > q_0$ dans N . C'est le type q_0^+ dans $S_1(N)$ qui est l'unique héritier de p .

Type de 3e espèce : Raisonnement analogue.

Type de 4e espèce : Type irrationnel.



LEMME. - Tout fils non réalisé de p est héritier de p .

Si $q \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^k$ et est non réalisé, la formule n'est pas une égalité, et donc elle est équivalente à une formule du type

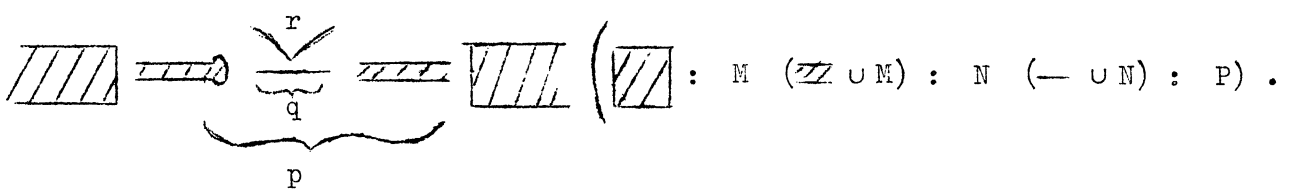
$$d_n < d_{n-1} < \ldots < d_1 < c_1 < \ldots < c_k < x < b_1 < \ldots < b_1 < a_1 < \ldots < a_p ,$$

avec a_i , $d_i \in M$ et b_i , $c_i \in N - M$, pour tout i . On peut remplacer les b_i , c_i par des a_i' , d_i' de M tels que

$$d_n < \ldots < d_1 < d_1' < \ldots < d_k' < x < a_1' < \ldots < a_1' < a_1 < \ldots < a_p .$$

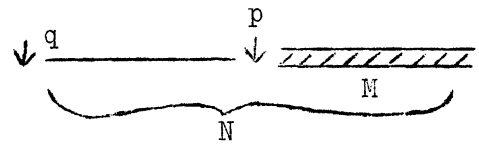
Ce qui signifie que l'on a $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{a}')$, pour un certain j-uple $\bar{a}'$ extrait de M .

Ceci fournit un contre-exemple pour $M < N < P$, avec $p \subset q \subset r$. r hérite de p sans hériter de q .



Type de 5e et 6e espèces : Pour $p = -\infty$, par exemple.

Si q hérite de p sur N, alors $q \not\vdash x \geqslant b$, pour b dans N, sinon $p \vdash x \geqslant a$, pour a dans M. Impossible, donc ce type a un seul héritier, le type $-\infty$ de $S_1(N)$. Même chose pour $p = +\infty$.



Remarque 1. - On peut faire de la même manière la théorie pour les n-types et les I-types.

Remarque 2. - $M \prec M'$, modèles de T, et $M \subset A \subset M'$. Soit $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(A)$, fils de p. q est dit héritier de p s'il peut se prolonger en une ultrapuissance de p, le plongement de p dans $M^{\mathcal{U}}$ étendant le plongement diagonal de A dans $M^{\mathcal{U}}$.

Chapitre II : Cohéritiers

1. Définitions.

Définition 1. - $M \prec N$, modèles de T, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \subset q$. Soit X une réalisation quelconque de q dans une extension de N. q est cohéritier de p si le type de N sur $M \cup \{X\}$ est héritier de sa restriction à M.

Définition 2. - Mêmes hypothèses. q est cohéritier de sa restriction p à M si, et seulement si, pour toute formule $\varphi(x, \bar{b})$, $\bar{b} \in N^k$, telle que $q \vdash \varphi(x, \bar{b})$, il existe a dans M tel que $N \vdash \varphi(a, \bar{b})$. Ceci signifie que q est fils de p, et adhère dans $S_1(N)$ aux types réalisés par les éléments de M.

La première définition ne dépend pas du choix de X réalisation de p, et les deux définitions sont équivalentes.

En abrégé, dire que le type Π de N sur $M \cup \{X\}$ hérite de sa restriction à M, c'est dire que chaque fois que $\Pi \vdash \psi(\bar{a}, \bar{b}, X)$, avec $\bar{a} \in N^k$, $\bar{b} \in M^n$, il existe x' dans M tel $N \vdash \psi(\bar{a}, \bar{b}, x')$.

PROPOSITION 1. - Soient $M \prec N$ deux modèles de T, $p \in S_1(M)$. Π, ensemble de formules à paramètres dans N, clos par conjonction finie, contenant les formules de p et tel que, si $\varphi(x, \bar{b})$ est dans Π, il existe a dans M tel que $N \vdash \varphi(a, \bar{b})$.

Alors Π se laisse prolonger en un cohéritier de p.

$S_1(N)$ est compact. On note M, les types de $S_1(N)$ réalisés dans M. Si $\varphi_1(x, \bar{b}_1)$, $\varphi_k(x, \bar{b}_k)$ sont dans Π, alors

$$\bar{M} \cap \langle \varphi_1(x, \bar{b}_1) \rangle \cap \ldots \cap \langle \varphi_k(x, \bar{b}_k) \rangle \neq \emptyset .$$

En effet, Π étant clos, par conjonction,

$$\varphi_1(x , \bar{b}_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_k(x , \bar{b}_k) = \varphi(x , \bar{b}) \in \Pi ,$$

et donc il existe a dans M tel que $N \vdash \varphi(a , \bar{b})$. Ce qui signifie que $t_N^N(a)$, type réalisé, appartient à $\langle\varphi(x , \bar{b})\rangle$.

$\bar{M}$ est compact, toute sous-famille finie de $\{\langle\varphi(x , \bar{b})\rangle , \varphi(x , \bar{b}) \in \Pi\}$ a une intersection non vide avec $\bar{M}$ (ce sont tous des compacts) et donc

$$\bar{M} \cap (\bigcap_{\varphi\in\Pi} \langle\varphi(x , \bar{b})\rangle) \neq \emptyset .$$

COROLLAIRE 1. - $M \prec N \prec P$, modèles de T , $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \subset q$. Si q est cohéritier de p , il existe un fils de q sur P qui est cohéritier de p .

q est un ensemble de formules de $S_1(P)$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 1.

COROLLAIRE 2. $M \prec N$, modèles de T , $p \in S_1(M)$. p a au moins un cohéritier sur N .

On utilise le corollaire 1 avec p cohéritier de p , et $M = M$ et $P = N$.

On montre trivialement que, dans les hypothèses du corollaire 1, avec r fils de q sur P , si q est cohéritier de p , il cohérite de q et q cohérite de p .

Remarques.

(a) $M \prec N$ modèles de T , $p \in S_1(M)$. L'ensemble des fils de p sur N est un fermé.

Soit F cet ensemble. $q \in F \longleftrightarrow (p \vdash \varphi(x , \bar{a}) , \bar{a} \in M^n$, alors $q \vdash \varphi(x , \bar{a}))$. Donc

$$F = \bigcap_{p\vdash \varphi(x,\bar{a})} \langle\varphi(x , \bar{a})\rangle_{(S_1(N))}$$

est un fermé.

(b) Mêmes hypothèses. Les types sur N , qui cohéritent de leur restriction à M , forment un fermé.

Ces cohéritiers sur N forment exactement l'adhérence de M dans $S_1(N)$ (i. e. un fermé).

(c) $M \prec N$ modèles de T , $p \in S_1(M)$. L'ensemble des fils de p dans $S_1(N)$ qui héritent de p forment un fermé.

F étant le fermé des fils de p , l'ensemble des héritiers de p s'écrit à l'aide de conditions sur les formules

$$F \cap \bigcap \langle\neg\, \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})\rangle ,$$

pour toutes les formules $\varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, $(\bar{b} \in N^k)$ telles qu'il n'existe pas $\bar{b}'$ dans M^k avec $p \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$.

(d) Cependant, l'ensemble des types sur N qui héritent de leur restriction à M ne forment pas un fermé, en général. (cf. ci-après).

PROPOSITION 2. - $M \prec N$ modèles de T . Le nombre de types de $S_1(N)$ qui cohéritent de leur restriction à M est au plus $2^{2^{\|M\|}}$.

$\bar{M}$ est l'ensemble des types sur N qui cohéritent de leur restriction à M . Or, $\|\bar{M}\| \leq 2^{2^{\|M\|}}$. En effet, si a est dans $\bar{M}$, soit $\Phi(a)$ le filtre découpé par les voisinages de a sur M . On a, bien sûr, $\emptyset \notin \Phi(a)$. Si a et b sont dans $\bar{M}$, $S_1(N)$ étant séparé, il existe des voisinages Va et Vb de a et b tels que $Va \cap Vb = \emptyset$. Donc $a \neq b \longrightarrow \Phi(a) \neq \Phi(b)$. Il n'y a pas plus de cohéritiers que de filtres $\Phi(a)$ (i. e. $2^{2^{\|M\|}}$). Le maximum peut être atteint.

PROPOSITION 3. - $M \prec N$ modèles de T , σ un automorphisme de N laissant M fixe point par point. Si $q \in S_1(N)$ cohérite de q/M , alors $\sigma q = q$ $(\sigma q = \{\varphi(x , \sigma\bar{b}) \ ; \ q \vdash \varphi(x , \bar{b})\})$.

σ induit une application continue bijective de $S_1(M)$ dans lui-même qui fixe M, donc $\bar{M}$. En effet, si $\varphi(x , \bar{b})$ $(\bar{b} \in N^k)$ est telle que $q \vdash \varphi(x , \bar{b})$, posons $A_{\varphi(x , \bar{b})} = \{a \in M \ ; \ N \vdash \varphi(a , \bar{b})\}$. Comme $\sigma q \vdash \varphi(x , \sigma\bar{b})$, on a de même $A_{\varphi(x,\sigma\bar{b})} \cdot A_{\varphi(x,\bar{b})}$ et $A_{\varphi(x,\sigma\bar{b})}$ sont les mêmes ensembles car

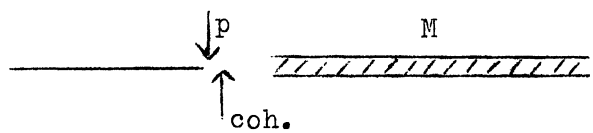
$$N \vdash \varphi(a , \bar{b}) \longleftrightarrow N \vdash \varphi(a , \sigma\bar{b}) ,$$

et donc q et σq découpent sur M le même filtre et sont par conséquent égaux.

2. Exemples et contre-exemples : Ordre dense sans extrémités.

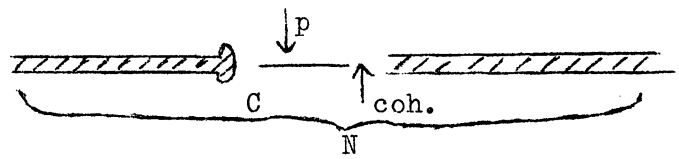
Type de 1re espèce : Il est réalisé, et n'a donc qu'un seul fils, son unique cohéritier.

Type de 5e et 6e espèces : Pour $p = -\infty$,



Si q cohérite de p , $q \vdash x > b$, pour tout $b \in N$, et $b < a$, pour tout $a \in M$. En effet, sinon, il existerait α dans M tel que $\alpha \leq b < a$ (pour tout $a \in M$), ce qui est impossible. Il n'y a qu'un seul cohéritier (défini ci-dessus), et il en est de même pour le type $p = +\infty$.

Type de 2e et 3e espèces : Pour $p = q_0^+$,

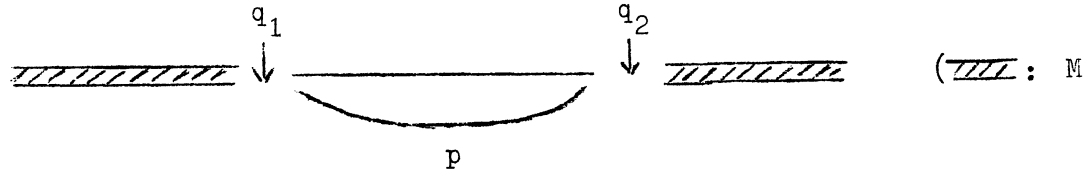


(: M)

Si q cohérite de p , $q \vdash x > b$, pour tout $b \in N - M$, avec $b < z$, pour tout $z \in M$ et $z > q$. En effet, sinon, il existerait α dans M , avec

$N \vdash q_0 < a \leqslant b < a$, ce qui est impossible. Il n'y a donc qu'un seul cohéritier (défini ci-dessus), et le résultat est analogue pour $p = q_0^-$.

Type de 4e espèce : Coupure irrationnelle : (les éléments de la coupure appartiennent à N et forment C)



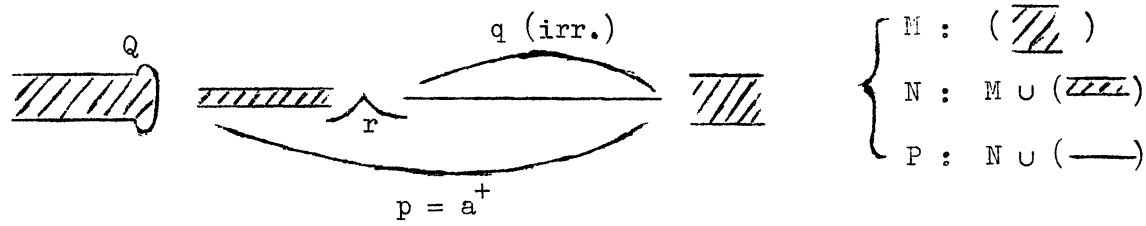
Si q cohérite de p , il ne peut vérifier $q \vdash b \leqslant x \leqslant b'$, pour b et b' dans $(N - M) \cap C$. On montre alors qu'il y a, dans ce cas, deux cohéritiers définis par

$q_1 \vdash x < b$, pour tout $b \in C$, et $q_2 \vdash x > b$, pour tout $b \in C$.

Conclusion. - Ce dernier cas est le seul où il y a plus d'un héritier ou plus d'un cohéritier. Dans les autres cas, il n'y a qu'un seul héritier et un seul cohéritier, qui coïncident pour le type réalisé.

Contre-exemples.

1° $M < N < P$, modèles de T , $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $r \in S_1(P)$, $p \subset q \subset r$. Exemple de non-transitivité du cohéritier :



r n'est pas cohéritier de p .

2° J'exhibe p dans $S_1(M)$, p non cohéritier d'une de ses restrictions dénombrables.

En effet, dans la théorie de l'ordre dense, on considère le modèle M formé de ω_1 copies de Q , $Q \times \omega_1$:

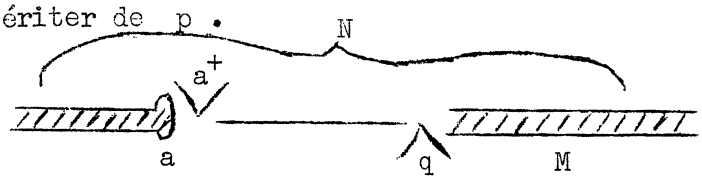
et dans $S_1(M)$, le type $p = +\infty$.

Si p était cohéritier de l'une de ses restrictions dénombrables, il existerait une suite dénombrable dans $Q \times \omega_1$ qui serait cofinale (i. e. il existerait des ensembles dénombrables cofinaux dans ω_1), ce qui est faux, par définition de ω_1 .

3° Les héritiers de $p \in S_1(M)$ formant un fermé H , l'ensemble K des types de $S_1(N)$ qui héritent de leur restriction à M n'est pas un fermé, en général.

En effet, sinon, l'ensemble K contiendrait M (types des éléments de M au-dessus de N) et serait fermé, donc contiendrait $\bar{M}$ (i. e. les types qui cohéritent de leur restriction à M), ce qui est faux. Si p est le type a^+ , q co-

hérite de p sans hériter de p .



Chapitre III : Types stables

1. Types définissables (M modèle de T , $p \in S_1(M)$).

Définition 1. - p est dit définissable si, et seulement si, p n'a qu'un seul héritier sur toute extension élémentaire N de M .

Définition 2. - p est dit définissable si, et seulement si, pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ sans paramètres, il existe une formule $d\varphi(\bar{y})$ à paramètres dans M telle que

$$\text{pour } \bar{a} \text{ dans } M^n , \quad p \vdash \varphi(x , \bar{a}) \text{ si, et seulement si, } M \vdash d\varphi(\bar{a}) .$$

Scholie. - Cela signifie que, si x^* réalise p , alors, pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ ($\bar{y}$ n-uple), en posant $A = \{\bar{a} \in M^n ; \vdash \varphi(x^* , \bar{a})\}$ et

$$B = \{\bar{a} \in M^n ; \vdash \neg \varphi(x^* , \bar{a})\} ,$$

(A , B) forme une partition de M qui est déjà définissable dans M . De plus, si d_1 et d_2 sont deux définitions de p , alors, pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$,

$$T(M) \models d_1 \varphi(\bar{y}) \longleftrightarrow d_2 \varphi(\bar{y}) .$$

Equivalence des deux définitions.

Déf. 1 $\longrightarrow$ Déf. 2 : $M \prec N$, $p \subset q$. Si, pour un $\bar{b}$ dans N^n ,

$$q \vdash \varphi(x , \bar{b}) \wedge \neg d\varphi(\bar{b}) ,$$

alors il n'existe pas de $\bar{b}'$ dans M^n tel que $p \vdash \varphi(x , \bar{b}') \wedge \neg d\varphi(\bar{b}')$, et donc q n'est pas héritier de p .

Donc, si q est héritier de p , on a $q \vdash \varphi(x , \bar{b})$ si, et seulement si, $\vdash d\varphi(\bar{b})$. Or, il existe sur N au moins un héritier de p , et donc q , défini par la formule ci-dessus, est l'unique héritier de p . Il est obtenu en utilisant d , la définition de p .

Déf. 1 $\longrightarrow$ Déf. 2 : $M \prec N$, $p \in S_1(M)$. Pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ sans paramètre, on considère

$$\Psi = \{\psi(\bar{y}) \text{ à paramètre dans } M ; \text{ pour tout } \bar{\beta} \text{ dans } M , \ p \vdash (\psi(\bar{\beta}) \longrightarrow \neg \varphi(x , \bar{\beta}))\} ,$$

$$X = \{\chi(\bar{y}) \text{ à paramètre dans } M ; \text{ pour tout } \bar{\beta} \text{ dans } M , \ p \vdash (\chi(\bar{\beta}) \longrightarrow \varphi(x , \bar{\beta}))\} .$$

Alors tout $\bar{b}$ extrait de N satisfait une formule de Ψ ou de X :

Sinon, soit $\bar{b}$ dans N^n tel que, pour toute formule f telle que $N \vdash f(\bar{b})$, on a $\bar{b}_1$ dans M, avec $p \vdash \varphi(x, \bar{b}_1) \wedge f(b_1)$, et $\bar{b}_2$ dans M^n, avec $p \vdash \neg\varphi(x, \bar{b}_2) \wedge f(\bar{b}_2)$. Cela signifie exactement que les ensembles de formules

$$\Pi = p \cup \{\neg\varphi(x, \bar{b})\} \cup T(N) \quad \text{et} \quad \Pi' = p \cup \{\varphi(x, \bar{b})\} \cup T(N)$$

se laissent prolonger en deux héritiers distincts de p, ce qui est impossible.

De plus, tout $\bar{b}$ extrait de N ne peut satisfaire à la fois une formule de Ψ et une formule de X. Sinon, il existe $\bar{m}$ dans M^n tel que $M \vdash (\psi \wedge \chi)(\bar{m})$ (ψ et X vérifiées par $\bar{b}$), et donc $p \vdash \neg\varphi(x, \bar{m})$ et $p \vdash \varphi(x, \bar{m})$, ce qui est impossible.

Soit $n = |\bar{y}|$. On recouvre alors $S_n(M)$ par une famille d'ouverts $\Psi \cup X$. On en extrait un recouvrement fini

$$S_n(M) = \langle\psi_1(\bar{y})\rangle \cup \ldots \cup \langle\psi_k(\bar{y})\rangle \cup \langle\chi_1(\bar{y})\rangle \cup \ldots \cup \langle\chi_p(\bar{y})\rangle$$

avec pour tout (i, j), $\langle\psi_i(\bar{y})\rangle \cap \langle\chi_j(\bar{y})\rangle = \emptyset$. Posons $d\varphi(\bar{y}) = \chi_1(\bar{y}) \wedge \ldots \wedge \chi_p(\bar{y})$ ($d\varphi$ est à paramètres dans M). On a immédiatement

$$p \vdash \varphi(x, \bar{a}) \longleftrightarrow M \vdash d\varphi(\bar{a}) \quad (\bar{a} \in M^n) .$$

Nota bene. - Si l'héritier est unique, on le nomme parfois le fils aîné.

Exemple : Ordre dense sans extrémités. - Si p est le type $-\infty$, qui est définissable, donnons pour des formules $\varphi(x, \bar{y})$, une définition $d\varphi$

$$d(x < y) = (y = y) \; ; \quad d(x = y) = (y \neq y) \; ; \quad d(x > y) = (y \neq y) .$$

Procédons de même pour le type a^+

$$d(x < y) = (y > a) \; ; \quad d(x = y) = (y \neq y) \; ; \quad d(x > y) = (y \leqslant a) .$$

LEMME 1. - L'héritier d'un type définissable est définissable.

On a montré dans Déf 2 $\longrightarrow$ Déf 1, que, si p est définissable et q héritier de p sur N, alors $q \vdash \varphi(x, \bar{b}) \longleftrightarrow N \vdash d\varphi(\bar{b})$. Ce qui prouve que q est définissable ! Ou encore, q héritier du type définissable p, est définissable car, sinon, il aurait 2 héritiers q_1 et q_2 qui, par transitivité, sont héritiers de p, ce qui est absurde.

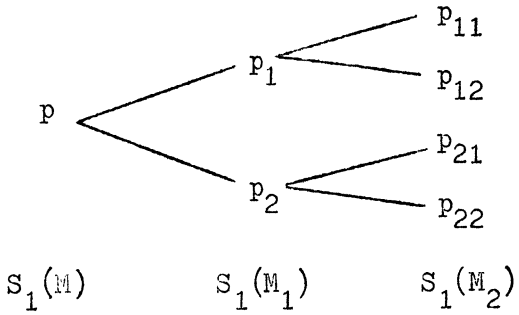
LEMME 2. - Si p a deux héritiers, tout héritier q de p a deux fils distincts qui sont héritiers de p (et non pas nécessairement de q).

$p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$. Si p_1 et p_2 sont héritiers distincts de p, et q héritier de p, on a $p \subset q \subset p^U$. D'où $q \subset p^U \subset p_1^U$ et $q \subset p^U \subset p_2^U$, avec $p_1^U \neq p_2^U$, qui héritent de p_1 et p_2. Le résultat découle par transitivité.

Un type non définissable peut avoir un héritier définissable.

PROPOSITION. - $p \in S_1(M)$, non définissable. Soit λ un cardinal supérieur à $\|M\|$. Il existe une extension élémentaire N de M de cardinal λ, tel que dans $S_1(N)$, p a au moins λ^+ héritiers distincts (λ^+ cardinal successeur de λ).

On fait une récurrence ordinale. Il existe une extension élémentaire M_1 de M telle que, dans $S_1(M_1)$, p ait deux héritiers distincts p_1 et p_2 . Chacun d'eux a deux fils distincts héritiers de p , p_1' dans M_1' , p_2' dans M_1'' , extensions élémentaires de M_1 , et on prend leurs héritiers sur une extension élémentaire M_2 de M_1' et M_1'' .



On recommence :

1° Si α est successeur de β , chaque type Π_β de $S_1(M_\beta)$, qui est héritier de p , admet deux fils qui sont héritiers de p ,sur M_{Π_β} . On peut trouver M_α , extension élémentaire commune à tous les M_{Π_β} , pour Π_β héritier de p dans $S_1(M_\beta)$. Si on note $\Pi_\beta(1)$, $\Pi_\beta(2)$, les fils de Π_β sur M_{Π_β} , alors il existe dans $S_1(M_\alpha)$ des fils Π_β^* et Π_β^{**} de $\Pi_\beta(1)$ et $\Pi_\beta(2)$ qui sont héritiers de p . Dans M_α , tout héritier de p sur M_β , déjà construit, a deux fils distincts qui héritent de p .

2° Si α est limite, chacune des branches de l'arbre déjà construit définit l'ensemble des formules d'un type. C'est encore un héritier de p , car l'héritier se définit formule par formule, sur $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$.

On poursuit le procédé jusqu'au plus petit cardinal μ tel que $\lambda < 2^\mu$. Or $2^\lambda > \lambda$, donc $\mu \leqslant \lambda$. L'arbre ainsi obtenu a 2^μ branches qui déterminent sur M_μ , 2^μ héritiers de p . Au niveau ν , ν étant successeur et strictement inférieur à μ , on a 2^ν branches et $2^\nu \leqslant \lambda$. Sur les μ niveaux, il y aura donc au plus $\mu \times \lambda = \lambda$ noeuds. Pour distinguer les types issus d'un noeud, un nombre fini de paramètres suffisent, soit au plus en tout $\omega \times \lambda = \lambda$. On prend, pour N , une restriction de M_μ de cardinal λ contenant les paramètres distinguant les héritiers. Alors, les 2^μ héritiers de p sur M_μ ont une restriction à N qui forme 2^μ héritiers de p distincts, car les paramètres des formules qui les distinguent ont été conservés.

2. Types stables (M modèle de T , toujours complète sans modèle fini).

Définition 1. - $p \in S_1(M)$ est stable si tous ses fils sur un modèle sont définissables.

Exemple 1. - Les types réalisés sont stables, eux-mêmes étant toujours définissables.

Exemple 2. - Tout fils d'un type stable est stable.

LEMME 1. - $M \prec N$ modèles de T , $r \in S_1(M)$, $s \in S_1(N)$. Si s est héritier de r , pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, $s^{\mathcal{U}}$ est héritier de $r^{\mathcal{U}}$.

Si $s^{\mathcal{U}} \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b})$, avec $\bar{a} = (\bar{a}_i)_{i \in I}$ $(\bar{a}_i \in M^n)$, $\bar{b} = (\bar{b}_i)_{i \in I}$ $(\bar{b}_i \in N^k)$, pour presque tout i , $s \vdash \varphi(x , \bar{a}_i , \bar{b}_i)$. Pour tous ces i , il existe $\bar{\beta}_i$ tels que $r \vdash \varphi(x , \bar{a}_i , \bar{\beta}_i)$. On pose $\bar{b}' = (\bar{b}'_i)_{i \in I}$, avec $\bar{b}'_i = \bar{\beta}_i$, si $s \vdash \varphi(x , \bar{a}_i , \bar{b}_i)$, n'importe quoi sinon. On obtient $r^{\mathcal{U}} \vdash \varphi(x , \bar{a} , \bar{b}')$.

LEMME 2. - Si q est stable et hérite de p , p est stable. (i. e. Un héritier d'un type instable est instable.)

Soit $p \in S_1(M)$ instable, et soit r un fils non définissable de p , qui a donc deux héritiers r_1 et r_2 sur une extension de M . Si $q \in S_1(N)$ est héritier de p , on peut écrire

$$p \subset q \subset p^{\mathcal{U}} \subset r^{\mathcal{U}} \subset r_i^{\mathcal{U}} , \text{ pour } i = 1 , 2 .$$

q a un fils $r^{\mathcal{U}}$ qui a deux héritiers $r_1^{\mathcal{U}}$ et $r_2^{\mathcal{U}}$ distincts, donc q est instable.

THÉORÈME 1. - Soient $p \in S_1(M)$ et un cardinal $\lambda \geqslant \|M\|$.

(a) Si p est instable, il existe N extension élémentaire de M de cardinal λ , sur laquelle p a au moins λ^+ fils distincts.

(b) Si p est stable, sur toute extension élémentaire N de M de cardinal λ , p n'a pas plus que λ^{ω} fils. ($\lambda^{\|T\|}$, si $\|T\|$ non dénombrable)

Remarque. - Il existe des cardinaux aussi grands que l'on veut tels que $\lambda^{\omega} = \lambda$. Ce sont ceux qui sont de la forme $\lambda = \mu^{\omega}$, car $\lambda^{\omega} = (\mu^{\omega})^{\omega} = \mu^{\omega \times \omega} = \mu^{\omega} = \lambda$.

Démonstration du (a). - Soient $p \in S_1(M)$, q , non définissable, fils de p sur N . Je démontre qu'il existe M_1 et q_1 dans $S_1(M_1)$ tels que $M \prec M_1 \prec N$ avec $\|M\| = \|M_1\|$, et q hérite de q_1 .

En effet, de la même manière que dans la proposition 3 sur les héritiers, on construit A_1 , ensemble contenant M , de même cardinal que M , et tel que, si $q \vdash \varphi(x , \bar{b})$, alors $q \vdash \varphi(x , \bar{b}')$, avec $\bar{b}' \in A_1$. On recommence avec les formules à paramètres dans A_1 et on obtient par récurrence $M \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ En posant $M_1 = \bigcup_n A_n$, on a $M \subset M_1 \subset N$. Et M_1 , de cardinal $\|M\|$, est restriction élémentaire de N , car le test de Tarski est vérifié. De plus, q hérite de

manière évidente de $q/M_1 = q_1$.

Alors q_1 est non définissable, et on lui applique la proposition du § 1, et donc, si N_1 est extension élémentaire de M_1 de cardinal λ , p a au moins λ^+ fils distincts.

Démonstration du (b). - Soit N une extension élémentaire de M de cardinal λ . On compte les types sur N qui sont stables, donc susceptibles d'être des fils de p . Si $q \in S_1(N)$ est stable, sur un modèle N_1 tel que q hérite de q/N_1 , q/N_1 est stable, et q est donc son unique héritier. Le nombre de types stables sur N n'excède pas celui des types sur une partie dénombrable de N : Il y a λ^ω parties dénombrables de N , et sur chacune au plus 2^ω types, ce qui donne au plus $\lambda^\omega \times 2^\omega = \lambda^\omega$ types stables sur N , donc au plus λ^ω fils de p .

Ou encore : On compte les définitions d possibles pour tous les fils de p . Il y a au plus λ^ω définitions pour les types définissables, donc au plus λ^ω types définissables, soit λ^ω fils de p sur N .

Définition 2. - Une théorie est stable si tous les types sur ses modèles sont stables.

THÉORÈME 2 (T dénombrable).

1° Si T est instable, pour tout cardinal infini λ , il existe un modèle M de cardinal λ tel que $S_1(M)$ contienne au moins λ^+ types.

2° Si T est stable, tout modèle de cardinal λ n'a pas plus de λ^ω types.

Rien à prouver (cf. ci-dessus).

Définition 3. - Une théorie T est stable en λ (cardinal donné) si tout modèle de cardinal λ ne produit pas plus de λ types.

PROPOSITION. - Soit T une théorie dénombrable :

(1) T instable $\longleftrightarrow$ T instable en tout cardinal λ infini.

(2) T stable $\longleftrightarrow$ T stable en un cardinal infini.

(3) T stable $\longleftrightarrow$ T stable en tous les cardinaux de la forme λ^ω .

($1 \longleftarrow$). - On l'applique pour $\lambda = \mu^\omega$. T ne peut être stable.

($2 \longrightarrow$). - T stable en tous les cardinaux tels que $\lambda^\omega = \lambda$.

THÉORÈME 3. - Soient $p \in S_1(M)$ stable, $M \prec N$ modèles de T , et λ un cardinal. Il existe une extension élémentaire P de N , telle que tout fils de p , sauf son héritier, ait au moins λ conjugués distincts par M-automorphismes de P.

1re étape : "Lemme de bon placement des modèles".

LEMME. - $M \prec N$, $M \prec P$ modèles de T , $p \in S_1(M)$ et p_1 héritier de p sur N . Il est possible de déplacer N par M-automorphisme de manière à ce que tout

fils q de p sur P ait un héritier qui passe par p_1 .

Il existe N' isomorphe à N tel que $M < N'$ et p_1' isomorphe à p_1 dans $S_1(N')$, avec $M < N' < M^{\mathcal{U}}$ et $p \subset p_1' \subset p^{\mathcal{U}}$. On identifie p_1 et p_1' . Alors, si q est fils de p sur P , on a : $q^{\mathcal{U}} \in S_1(P^{\mathcal{U}})$ est fils de $p^{\mathcal{U}} \in S_1(M^{\mathcal{U}})$, donc fils de p_1 , et, par définition, $q^{\mathcal{U}}$ est héritier de q .

2e étape : Lemme.

LEMME. - $M < N$ modèles de T , $p \in S_1(M)$ et λ cardinal. Il existe un modèle P_1 , avec $M < N < P_1$, tel que tout fils non héritier de p sur P_1 , mais qui hérite de sa restriction à N , ait au moins λ conjugués par M-automorphisme de P_1 .

On construit par récurrence transfinie une suite $(Q_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, chaines d'extensions élémentaires de N : $Q_0 = N$. Supposons avoir construit Q_β , pour tout $\beta < \alpha$:

1° Si α est limite, on prend $Q_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$, qui est une extension élémentaire de N .

2° Si α est successeur de β , on place un exemplaire N_β de N de façon à ce que la restriction à N_β de l'héritier de n'importe quel fils q de p sur Q_β soit l'héritier p . On prend alors Q_α modèle contenant Q_β et N_β élémentairement.

On poursuit l'induction jusqu'à λ , et on plonge Q_λ dans un modèle P_1 , qui est suffisament homogène pour qu'il existe, pour tout α , un M-automorphisme de P_1 , σ_α , conjuguant N et N_α . Alors P_1 convient.

Soit q fils non héritier de p sur P_1 , et héritier de sa restriction à N ; q/N n'est donc pas héritier de p . Si $\alpha < \beta$, alors $\sigma_\alpha q \neq \sigma_\beta q$. En effet :

1° q hérite de q/N , donc $\sigma_\alpha q$ hérite de $\sigma_\alpha(q/N) = \sigma_\alpha q/N_\alpha$;

2° $\sigma_\alpha q/N_\beta$ est l'héritier p_1 de p . $\sigma_\alpha q/N_\alpha$ est fils de p , et $\sigma_\alpha q$ est son héritier. Donc $\sigma_\alpha q/N_\beta$ est p_1 par construction ;

3° q/N n'étant pas l'héritier de p , $\sigma_\beta q/N_\beta$ n'est pas l'héritier de $\sigma_\beta p = p$ et est différent de $p_1 \cdot \sigma_\alpha q$ et $\sigma_\beta q$ n'ayant pas même restriction à N_β , sont donc distincts.

Remarque. - On a seulement utilisé le fait que q était stable.

3e étape. - On poursuit ce qui précède. $M < N = P_0 < P_1$; il existe P_2 , extension élémentaire de P_1 , tel que tout fils de p sur P_2 , non héritier, mais qui hérite de sa restriction à P_1 , ait λ conjugués par M-automorphismes de P_2 , P_2 possédant des automorphismes prolongeant ceux introduits au niveau de P_1 . La récurrence se poursuit :

1° Si α est limite, je pose $P_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta$.

2° Si $\alpha = \beta + 1$, P_α est tel que tout fils q de p sur P_α , non héritier de p , mais de sa restriction à P_β , ait λ conjugués distincts par M-automor-

phismes de P_α prolongeant ceux introduits au niveau β .

Le modèle P , construit à l'étape ω_1 , convient : Soit q un fils non héritier de p . Il existe R , restriction dénombrable de P telle que q hérite de q/R . Alors R est inclus dans un P_K , et comme q/R est stable, q hérite de q/P_K et donc q/P_{K+1} a λ conjugués distincts par M-automorphismes de P_{K+1} , qui se prolongent en M-automorphismes de P .

Remarque. - On a, en réalité, démontré un théorème plus fort, celui obtenu en remplaçant, dans l'énoncé du théorème 3, " p stable" par " p quelconque", "tout fils de p " par "tout fils stable de p ", et "sauf son héritier" par "non héritier de p ".

COROLLAIRE. - $p \in S_1(M)$ stable. p n'a sur un modèle qu'un seul cohéritier, son héritier.

Par l'absurde, si q est cohéritier de p et non héritier de p sur $N \succ M$, il existe une extension élémentaire P de N , telle que tout fils non héritier de p a 2 conjugués par M-automorphismes de P , ce qui est impossible, car un cohéritier ne peut être déplacé par M-automorphismes.

On déduit aussi que, si p est stable et cohérite de q , q est stable. (i. e. un cohéritier d'un type instable est instable.)

En effet, p hérite de q : sinon, il aurait un fils r sur P cohéritier de q et non héritier de q , déplacé par M-automorphismes de P , ce qui est impossible.

THÉORÈME 4. - Soient T une théorie stable, $M \prec N$ des modèles de T . L'application h de $S_1(M)$ dans $S_1(N)$, qui à p associe son héritier, est l'unique section continue de la restriction ρ de $S_1(N)$ dans $S_1(M)$.

$S_1(M) \xrightarrow{\rho} S_1(N)$, $p \xrightarrow{h} h(p)$. On a trivialement $\rho \circ h = Id(S_1(M))$; h(p) , cohéritier de p , adhère aux types sur N réalisés dans M , et réciproquement, tout élément de $\overline{M}$ cohérite de sa restriction à M . On a donc : h induit une bijection $\tilde{h}$ de $S_1(M)$ sur $\overline{M}$. $\tilde{h}^{-1}$, égale à $\rho/\overline{M}$ est continue de $\overline{M}$ dans $S_1(M)$, bijective, et donc h est continue.

Soit h' une autre section continue de ρ : $h'(S_1(M))$ contient M , car l'image d'un type réalisé est nécessairement son unique fils sur N . Comme h' est continue , $h'(S_1(M))$ est compact, donc fermé dans $S_1(N)$ et contient $\overline{M}$. De plus,

$$h'(S_1(M)) = h'(\overline{M}) \subset \overline{h'(M)} = \overline{M} .$$

D'où $h'(S_1(M)) = \overline{M}$; or, h'(p) cohérite de sa restriction à M , donc h' associé à p son cohéritier, ce qui prouve l'unicité.

Chapitre IV : Suites de Morley

(T est une théorie stable)

1. Suites d'insécables.

Définition 1. - Soit M un modèle de T ; une suite $s = (a_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de M est insécable si, pour toute formule $\varphi(x , \bar{y})$ et tous paramètres $\bar{b}$ dans N^k, extension élémentaire de M, l'ensemble des a_n qui satisfont $\varphi(x , \bar{b})$ est fini ou cofini.

THÉORÈME et définition 2. - Soit s une suite insécable dans M, et A un ensemble de paramètres. Pour tout $\bar{b}$ dans A^m, on considère les formules $\varphi(x , \bar{b})$ satisfaites par une infinité d'éléments de s. Ceci définit un type, appelé type moyen ou type limite de la suite s sur A, noté p(s/A).

$\varphi_i(x , \bar{b}_i)$, pour $i = 1 , \dots , n$, est satisfaite par tous les a_i sauf un nombre fini, et donc la conjonction des φ_i aussi. De plus, si $\varphi(x , \bar{b})$ n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments de s, $p(s/A) \not\vdash \varphi(x , \bar{b})$, et $\neg\varphi(x,\bar{b})$ est vraie pour les autres a_i en nombre infini, et donc $p(s/A) \vdash \neg\varphi(x , \bar{b})$.

THÉORÈME 1. - Si $p \in S_1(M)$, alors p est limite d'une suite s (i. e. une ω-suite) de types réalisés dans M, une telle suite est nécessairement insécable, et l'héritier de p sur N est le type limite de cette suite sur N.

Si p est limite des $(a_n)_{n\in\omega}$ insécable dans $S_1(M)$, soit h(p) son héritier sur N. Pour toute formule $\varphi(x , \bar{a})$ ($\bar{a} \in M^m$) telle que $p \in \langle\varphi(x , \bar{a})\rangle$, $M \vdash \varphi(a_n , \bar{a})$ pour une infinité de a_n et donc $p(s/N) \vdash \varphi(x , \bar{a}) \cdot p(s/N)$, fils de p, est son cohéritier sur N, car $p(s/N) \vdash \varphi(x , \bar{b})$ ($\bar{b} \in N^k$) implique $N \vdash \varphi(a_n , \bar{b})$, pour un n. Il est aussi son héritier, donc $h(p) = p(s/N)$.

Soit p limite d'une suite insécable $s = (a_n)_{n\in\omega}$, $\bar{b} \in N^k$. S'il existe une infinité de a_n satisfaisant $\varphi(x , \bar{b})$, alors p a sur N un cohéritier q tel que $q \vdash \varphi(x , \bar{b})$.

On considère $p \cup \{\varphi(x , \bar{b})\} \cup T(N)$. Les fragments finis de ce type incomplet tels que $\psi(x , \bar{a}) \wedge \varphi(x , \bar{b})$, avec $p \vdash \psi(x , \bar{a})$, sont satisfaits, car $\psi(x , \bar{a})$ et $\varphi(x , \bar{b})$ sont satisfaits par des suites infinies des a_n, dont l'une cofinie. Ce type incomplet se prolonge donc en un cohéritier de p. Vu l'hypothèse de stabilité, s est insécable, car si deux infinités de a_n satisfont l'une $\varphi(x , \bar{b})$, l'autre $\neg\varphi(x , \bar{b})$, p aurait deux cohéritiers distincts dans $S_1(N)$, ce qui est impossible.

Je montre que, si M est dénombrable, $p \in S_1(M)$ est limite de types réalisés dans M. L'élément a_i et son type sur M sont confondus. $S_1(M)$ est à base dénombrable, car le nombre de $\varphi(x , \bar{a})$ ($\bar{a} \in M^k$) est dénombrable, et donc p a une base de voisinages dénombrable : Si $(\varphi_i)_{i\in\omega}$ sont les formules de p, on prend

$V_n = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. On choisit a_i dans V_i , i. e. un point tel que $M \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i)(a_i)$, la suite $(a_n)_{n\in\omega}$ converge vers p .

Si M est non dénombrable, soit M_1 une restriction élémentaire dénombrable de M avec p héritier de p/M_1 , qui est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\omega}$ dans $S_1(M_1)$. p est alors le type moyen de la suite $(a_n)_{n\in\omega}$, et donc $p = \lim a_n$ dans $S_1(M)$.

2. Suites de Morley.

Définition 1. - Soit $p \in S_1(M)$. On réalise p en a_1 dans M_1 , puis l'héritier de p sur M_1 en a_2 dans M_2 . Et ainsi, on construit une suite $(a_n)_{n\in\omega}$, où a_{n+1} est la réalisation de l'héritier de p sur M_n . On définit aussi la α-suite de Morley de p (pour α ordinal).

Remarque. - Le type de la ω-suite de Morley $(a_n)_{n\in\omega}$ de p au-dessus de M est indépendant des modèles M_1 , ... , M_n dans lesquels on réalise les a_n .

Je montre par récurrence sur n que, pour toute formule $\varphi(x_1 , \dots , x_n , \bar{y})$,

$$\vdash \varphi(a_1 , \dots , a_n , \bar{m}) \longleftrightarrow \vdash \varphi(a'_1 , \dots , a'_n , \bar{m}) .$$

Pour $n = 1$,

$$\vdash \varphi(a_1 , \bar{m}) \longleftrightarrow d\varphi(\bar{m}) \longleftrightarrow \vdash \varphi(a'_1 , \bar{m}) .$$

Si c'est vrai jusqu'à $n - 1$, on a

$$\vdash \varphi(a_1 , \dots , a_n , \bar{m}) \longleftrightarrow d\varphi(a_1 , \dots , a_{n-1} , \bar{m}) ,$$

et par récurrence,

$$d\varphi(a_1 , \dots , a_{n-1} , \bar{m}) \longleftrightarrow d\varphi(a'_1 , \dots , a'_{n-1} , \bar{m}) \longleftrightarrow \vdash \varphi(a'_1 , \dots , a'_n , \bar{m}) .$$

LEMME 1. - Soit $p \in S_1(M)$, la ω-suite de Morley de p est insécable.

Si $h(p)$, héritier de p sur $M_\omega = \bigcup_n M_n$, satisfait $\varphi(x , \bar{b})$ ($\bar{b} \in M^k$), alors $\bar{b} \in M^k_{n'}$ et tous les a_m , pour $m > n'$, réalisant l'héritier de p sur $M_{n'}$ satisfont $\varphi(x , \bar{b})$: $h(p) = \lim a_n$. La suite est alors insécable, et l'héritier est le type moyen de la suite de Morley.

Définition 2.

Une suite $(a_n)_{n\in\omega}$ dans M est indiscernable dans l'ordre sur M si, et seulement si, pour tous indices $n_1 < \dots < n_m$, et toute formule à paramètres dans M ,

$$\vdash \varphi(a_{n_1} , \dots , a_{n_m}) \longleftrightarrow \vdash \varphi(a_1 , \dots , a_m) .$$

Une suite $(a_n)_{n\in\omega}$ dans M est totalement indiscernable sur M si, et seulement si, elle l'est dans l'ordre avec des indices n_1 , ... , n_m quelconques (et non pas croissants) distincts.

LEMME 2. - Soit $p \in S_1(M)$. La ω-suite de Morley de p est totalement indiscernable sur M .

On démontre d'abord l'indiscernabilité dans l'ordre, par récurrence sur m :

Pour $m = 1$, c'est clair, car a_1 et a_{n_1} réalisent p tous deux.

Passage de $(m-1)$ à m : Si $(a_1 , \dots , a_{m-1})$ réalisent les mêmes formules au-dessus de M que $(a_{n_1} , \dots , a_{n_{m-1}})$, alors, dans un gros modèle K , on a un M-automorphisme σ de K tel que $\sigma(a_i) = a_{n_i}$, pour tout i . a_m réalise l'héritier de p sur M_{m-1} , et donc sur $M \cup \{a_1 , \dots , a_{m-1}\}$, donc $\sigma(a_m)$ réalise l'héritier de p sur $M \cup \{a_{n_1} , \dots , a_{n_{m-1}}\}$. Or, a_{n_m} aussi, et par unicité, $a_{n_m} = \sigma(a_m)$. On peut aussi utiliser les définitions des types héritiers de p .

Pour la totale indiscernabilité, je prouve que, pour tout n , la suite $(a_1 , \dots , a_n , a_{n+1})$ a même type sur M que $(a_1 , \dots , a_{n+1} , a_n)$: Si p_{n-1} hérite de p sur $M \cup \{a_1 , \dots , a_{n-1}\}$, alors a_{n+1} réalise l'héritier de p sur $M \cup \{a_1 , \dots , a_{n-1}\} \cup \{a_n\}$, donc, par définition du cohéritier, a_n réalise le cohéritier, égal à l'héritier, de sa restriction à $M \cup \{a_1 , \dots , a_{n-1}\}$ sur $M \cup \{a_1 , \dots , a_{n-1}\} \cup \{a_{n+1}\}$. Or, cette restriction est p_{n-1} par unicité de l'héritier ; donc a_n réalise l'héritier de p_{n-1} sur $M \cup \{a_1 , \dots , a_{n-1} , a_{n+1}\}$ Les deux suites ont même type.

PROPOSITION. - Soit $p \in S_1(M)$ et α un ordinal, la α-suite de Morley de p est totalement indiscernable et insécable sur M , et l'héritier de p en est le type moyen.

Comme dans le lemme 2, on montre qu'elle est indiscernable dans l'ordre ; puis, la α-suite commençant par une ω-suite, elle est totalement indiscernable, car la ω-suite l'est, et insécable. Par l'absurde, si $\varphi(x , \bar{b})$ coupe la suite en 2 morceaux infinis, on peut trouver A et B dénombrables tels que, pour tout a dans A , $\vdash \varphi(z , \bar{b})$ et, pour tout w dans B , $\vdash \neg \varphi(w , \bar{b})$. On énumère A et B de la manière suivante :

$$a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , \dots , \text{ avec } A = (a_i)_{i \in \omega} \text{ et } B = (b_i)_{i \in \omega} .$$

On obtient ainsi une ω-suite de Morley, de même type que la ω-suite extraite de la α-suite de Morley, mais sécable : c'est impossible par le lemme 1.

Remarques.

1° Si le type p est réalisé par a dans M , la α-suite de Morley répète α fois a .

2° Soit N ω_1-saturé et $p \in S_1(N)$; p cohérite de $\pi = p/M$, avec M dénombrable et sur N , $p = h(\pi)$. On réalise π en a_1 dans N , puis $h(\pi)$ sur $M \cup \{a_1\}$, en a_2 , ... La suite insécable qui tend vers p peut donc être prise totalement indiscernable.

3. Modèles saturés.

THÉORÈME (HARNIK, 1975). - Soit T une théorie dénombrable. Si T est stable en λ, alors T possède un modèle λ-saturé de cardinal λ.

(Variante : Si T est stable en $\lambda > \|T\|$, alors T possède un modèle λ-saturé de cardinal λ, et même si $\lambda = \|T\|$.)

(a) Si $\lambda = \omega$ (ou est régulier) : Soit M_0 un modèle dénombrable. On réalise tous les types sur M_0 dans M_1, que l'on peut supposer dénombrable car T est ω-stable. Puis on recommence, et on construit une chaîne $M_1 < M_2 < \ldots < M_n \ldots$ Posons $M = \bigcup_n M_n$, qui est dénombrable et ω-saturé car, si $p \in S_1(\bar{a})$ ($\bar{a} \in M^k$), alors $\bar{a} \in M_j^k$, et p est réalisé dans M_{j+1}.

(b) $\lambda \geqslant \omega_1$: Soit M_0 un modèle, avec $\|M_0\| = \lambda$. On réalise tous les types sur M_0 dans M_1, avec $\|M_1\| = \lambda$, puis des extensions élémentaires successives M_i par induction jusqu'à $\lambda \times \omega_1$, muni de l'ordre suivant : $(x, y) < (u, v)$ si, et seulement si, ($y < v$ ou ($y = v$ et $x < u$)). Pour γ limite, on prend $M_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} M_\delta$. Pour passer de γ à $\gamma + 1$, on réalise tous les types sur M_γ, de cardinal λ, dans un modèle de cardinal λ noté $M_{\gamma+1}$; notons $M = M_{\lambda\times\omega_1}$, qui est bien de cardinal λ. M est λ-saturé : Soit $A \subset M$, avec $\|A\| = \mu < \lambda = \|M\|$, $p \in S_1(A)$, q fils de p sur M. Soit N dénombrable tel que q hérite de q/N. Comme ω_1 n'est pas de cofinalité dénombrable, on a $N \subset M_{(0,\alpha)}$. Si T est stable en λ, T est stable. q, étant stable, hérite de $q/M_{(0,\alpha)}$.

Entre $M_{(0,\alpha)}$ et $M_{(0,\alpha+1)}$ se tient la famille $(M_{(\beta,\alpha)})_{\beta\in\lambda}$; on peut alors construire la λ-suite de Morley de $q/M_{(0,\alpha)}$ dans M, $X = (a_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$, et q en est le type moyen sur N.

Soit $\varphi(x, \bar{a})$ une formule telle que $p \vdash \varphi(x, \bar{a})$. Alors, $q \vdash \varphi(x, \bar{a})$, donc tous les a_α, sauf un nombre fini, satisfont $\varphi(x, \bar{a})$. Or, $\|A\| = \mu < \lambda$: Il y a donc μ formules dans p, chacune étant satisfaite, pour tous les a_α, sauf un nombre fini. On enlève donc ces éléments de la λ-suite de Morley (μ éléments au plus), il en reste dans la suite de Morley, et on réalise p dans M par l'un d'eux.

Chapitre V : Rangs

(T complète sans modèle fini)

1. Définitions.

Définition 1. - Un rang R est une fonction, qui à tout p de $S_1(M)$, pour tout modèle M, associe un ordinal ou le symbole ∞, satisfaisant aux conditions ($\infty > \alpha$, pour tout α) :

1° Si p et q sont isomorphes (i. e. M et N isomorphes, et p et q se correspondent par cet isomorphisme), alors $R(p) = R(q)$.

2° Si q est fils de p , $R(p) \geqslant R(q)$.

3° Propriété d'extension : Si $p \in S_1(M)$, et si N est une extension élémentaire de M , p a sur N un fils q de même rang (se dit équirang avec p).

4° Propriété de multiplicité bornée : Si $R(p) = \alpha < \infty$, il existe un cardinal μ , dépendant de p , tel que p n'a jamais plus de μ fils distincts équirangs avec p sur toute extension élémentaire N de M .

Définition 2. - On dit que p est rangé par R si $R(p) = \alpha < \infty$. Si $R(p) = \infty$, on dit que p est non rangé par R .

Remarque. - Pour la propriété d'extension, il suffit de voir que, pour tout ordinal α , si $R(p) \geqslant \alpha$, p a un fils q_α sur N tel que $R(q_\alpha) \geqslant \alpha$.

En effet, si $R(p) = \alpha$, il existe $q \supset p$, avec $R(q) \geqslant \alpha$. D'après le 2° du § 1, $R(q) = \alpha$.

Si p est non rangé, soit E l'ensemble des rangs des fils rangés de p sur N . Il existe un ordinal α qui majore E ; $R(p) \geqslant \alpha \Longrightarrow$ il existe $q_\alpha \supset p$, avec $R(q_\alpha) \geqslant \alpha$. Donc q_α n'est pas rangé.

2. Exemple : Le rang U noté RU .

Définition. - On définit, par induction sur l'ordinal α , l'expression $RU(p) \geqslant \alpha$.

Si α est limite, $RU(p) \geqslant \alpha$ si, et seulement si, $RU(p) \geqslant \beta$, pour tout $\beta < \alpha$.

Si α est successeur de β , $RU(p) \geqslant \alpha$ si, et seulement si, pour tout cardinal λ , il existe un modèle M_λ , tel que $M < M_\lambda$, et sur lequel p a λ fils distincts de $RU \geqslant \beta$.

(0 est ordinal limite : $RU(p) \geqslant 0$, pour tout p dans $S_1(M)$.)

LEMME 1. - Si $RU(p) \geqslant \alpha$ et $\alpha \geqslant \beta$, alors $RU(p) \geqslant \beta$.

Par induction sur α : C'est clair si α est limite, par définition.

Si $\alpha = \alpha_1 + 1$: Si $\beta = \alpha$, c'est évident. Si $\beta \leqslant \alpha_1$, par hypothèse d'induction, il suffit de le démontrer pour $\beta = \alpha_1$, c'est-à-dire que l'on a $RU(p) \geqslant \alpha_1$. En effet, pour tout cardinal λ , p se divise en λ fils de $RU \geqslant \alpha_1$, donc de $RU \geqslant \delta$ ($\delta \leqslant \alpha_1$), et on a donc $RU(p) \geqslant \delta + 1$, pour tout $\delta \leqslant \alpha_1$.

1er cas : $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$. - On prend $\delta = \alpha_2$, et $RU(p) \geqslant \alpha_1$.

2e cas : α_1 est limite. - Pour tout $\delta < \alpha_1$, $RU(p) \geqslant \delta + 1$, donc, par induction, $RU(p) \geqslant \delta$, et, par définition de RU , $RU(p) \geqslant \alpha_1$.

Suite de la définition. - Si $RU(p) \geqslant \alpha$, pour tout α , on pose $RU(p) = \infty$. Sinon, il existe un unique α tel que $RU(p) \geqslant \alpha$, et $RU(p) \not\geqslant \alpha + 1$, et on pose

alors $RU(p) = \alpha$.

THÉORÈME. - RU est une notion de rang.

1° C'est évident par isomorphisme.

2° On montre par induction que, si $p \subset q$, $RU(q) \geqslant \alpha \longrightarrow RU(p) \geqslant \alpha$, avec $p \in S_1(M)$ et $q \in S_1(N)$:

si α est limite, c'est évident par définition et par induction,

si $\alpha = \beta + 1$, alors, pour tout λ , il existe $M_\lambda > N$, sur lequel q a λ fils distincts de $RU \geqslant \beta$, et donc sur M_λ , p a λ fils distincts de $RU \geqslant \beta$. D'où $RU(p) \geqslant \alpha$.

3° Supposons $RU(p) = \alpha$. Si, par l'absurde, pour tout cardinal λ , il existait un modèle $M_\lambda > M$ sur lequel p a λ fils distincts de $RU = \alpha$, on aurait $RU(p) \geqslant \alpha + 1$, absurde. Donc, il existe μ , tel que p n'a pas plus de μ fils équirangs sur toute extension élémentaire de M .

Pour démontrer le 3°, les deux lemmes suivants sont nécessaires.

LEMME 2. - Si p est instable, $RU(p) = \infty$.

Montrons, par induction, que, pour tout α , $RU(p) \geqslant \alpha$. C'est évident si α est limite. Supposons $RU(p) \geqslant \alpha$. Pour tout λ , il existe un modèle où p a au moins λ fils instables distincts. En effet, on prend q fils non définissables de p , et λ héritiers de q . Ils sont instables et par hypothèse d'induction de $RU \geqslant \alpha$. Donc $RU(p) \geqslant \alpha + 1$.

LEMME 3. - Si p est stable et q hérite de p , alors $RU(p) = RU(q)$.

Par induction, on montre que $RU(p) \geqslant \alpha \longrightarrow RU(q) \geqslant \alpha$. Si α est limite, c'est évident. Si $RU(p) \geqslant \alpha + 1$, λ cardinal quelconque, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, $p \subset q$, on peut déplacer N par M-automorphisme de manière à ce que les λ fils p_i de p sur M_λ de $RU \geqslant \alpha$ aient des héritiers passant par q , qu'on notera q_i . Pour tout $i < \lambda$, $RU(p_i) \geqslant \alpha$, et, donc, par induction, $RU(q_i) \geqslant \alpha$, et donc $RU(q) \geqslant \alpha + 1$ par définition.

Ceci achève la démonstration du théorème.

LEMME 4. - Si $RU(p) = \alpha < \infty$, alors p est stable, et son unique fils de même rang est son héritier.

p est stable d'après le lemme 2 ; par l'absurde, soit q un fils de p non héritier sur N tel que $RU(p) = RU(q)$. Par le théorème 3 du § 2 du chapitre 3, il existe $P > N > M$, tel que tout fils de p , non héritier sur P , a μ^+ conjugués distincts par M-automorphisme de P . Si q_1 est une extension de q sur P équirang avec q , q_1 a μ^+ conjugués dans $S_1(P)$ et n'hérite pas de P , μ étant le cardinal de multiplicité, on a une contradiction.

LEMME 5. - $RU(p) \geqslant \alpha + 1$ si, et seulement si, p a deux fils de $RU \geqslant \alpha$.

($\longleftarrow$) : Si p est instable ou stable, avec $RU(p) = \infty$, on a $RU(p) \geqslant \alpha + 1$. Si p est stable et $RU(p) < \infty$, son unique fils équirang est son héritier, et donc il ne peut avoir deux fils équirangs avec lui. Par conséquent, $RU(p) \geqslant \alpha + 1$.

LEMME 6. - $RU(p) \geqslant \alpha + 1$ si, et seulement si, p est instable ou p a un fils non héritier q tel que $RU(q) \geqslant \alpha$.

($\longrightarrow$) Si p est stable, d'après le lemme 5, il a un fils non héritier de $RU \geqslant \alpha$.

($\longleftarrow$) Si p est stable et rangé par RU , et a un fils non héritier de $RU \geqslant \alpha$, alors $RU(p) \geqslant \alpha + 1$.

On montre de même que $RU(p) \geqslant \alpha + 1$ si, et seulement si, p a un fils non co-héritier de $RU \geqslant \alpha$.

3. Théorème de Lascar.

THÉORÈME. - Soit R un rang. Si p est instable, $R(p) = \infty$. Si p est rangé, il n'a qu'un seul fils de même rang qui est son héritier. Si q hérite de p , $R(p) = R(q)$; de plus, $RU(p) \leqslant R(p)$.

1° p étant instable, montrons par récurrence que, pour tout ordinal α , $R(p) \geqslant \alpha$. Si α est limite, c'est évident. Si $\alpha = \beta + 1$, on a $R(p) \geqslant \beta$, par hypothèse d'induction. Si on avait l'égalité, il existerait μ tel que p n'a jamais plus de μ fils équirangs avec lui. Or, on peut trouver μ^+ fils distincts q_i de p instables. Par induction, $R(q_i) \geqslant \beta$, d'où $R(q_i) = \beta$. Ce qui contredit l'axiome de multiplicité bornée.

2° Soit p avec $R(p) = \alpha$. Par l'absurde, supposons qu'il existe q fils non héritiers de p , avec $R(q) = \alpha$. p est stable, et tout fils non héritier de p a μ^+ conjugués par M-automorphismes dans $S_1(P)$. Soit q' une extension équirang de q sur P . q' n'hérite pas de p , et il y a donc μ^+ conjugués distincts q_i , avec $R(q_i) = R(q)$ par isomorphisme. C'est impossible, et on en déduit le résultat.

3° Si q hérite de p rangé, alors $R(q) = R(p)$. Si p est instable, un héritier l'est aussi, et donc $R(p) = R(q) = \infty$. Si q hérite sur N de p stable non rangé, on démontre par récurrence sur α que $(R(p) \geqslant \alpha \longrightarrow R(q) \geqslant \alpha)$. Si α est limite, c'est clair. Si $\alpha = \beta + 1$, p a sur N un fils équirang q_1 , avec $R(q_1) \geqslant \alpha$ et $q_1 \neq q$, sinon c'est évident. Plaçons deux copies de N de manière à ce que l'héritier q_2 de q_1 passe par q . Par induction, on a $R(q) \geqslant \beta$; supposons par l'absurde que $R(q) = \beta$, alors q est rangé par R , et aurait un fils q_2 de rang $R \geqslant \beta$ (par induction) et donc tel que $R(q_2) = \beta$, avec q_2 non héritier de q . C'est impossible d'après le 2°, donc $R(q) \geqslant \beta + 1 = \alpha$.

4° Démontrons par récurrence ordinale que $RU(p) \geqslant \alpha \longrightarrow R(p) \geqslant \alpha$: Si p est

instable , on a $RU(p) = \infty = R(p)$. Si p est stable : Si α est limite, c'est clair, par induction. Si $\alpha = \beta + 1$, alors p a un fils q non héritier de $RU \geqslant \beta$. Alors, ou p est non rangé par R et c'est clair, ou $R(p) < \infty$, et alors $R(p) > R(q)$ (par le 2°), et de plus $R(q) \geqslant \beta$, par hypothèse d'induction, et donc $R(p) \geqslant \beta + 1 = \alpha$.

Remarque importante. - S'il existe une ω-suite $p_0 \subset p_1 \subset \ldots \subset p_n \subset \ldots$ telle que p_{n+1} ne soit pas héritier de p_n , alors p_0 est non rangé. De même, s'il existe une ω-suite de p_i telle que p_{n+1} ne cohérite pas de p_n , alors p_0 est non rangé, et si cela est vrai, une telle ω-suite existe.

COROLLAIRE. - Soit R un rang ; il existe un ordinal $\alpha(R)$ tel que, si $R(p) \geqslant \alpha(R)$, alors p est non rangé par R .

Si p est rangé, p est stable, et hérite d'un type sur N , dénombrable avec $N < M$. p a même rang qu'un type sur un modèle dénombrable, dont le nombre n'excède pas 2^{ω} ; il y a 2^{ω} types sur chacun d'eux, donc 2^{ω} rangs possibles pour les types rangés. On prend un ordinal $\alpha(R)$ supérieur aux rangs des types rangés.

On peut même prouver que, si $RU(p) \geqslant \omega_1$, alors $RU(p) = \infty$, si T est dénombrable.

4. Types et théories superstables.

Définition 1. - Un type superstable est un type rangé par RU , ou par un rang quelconque.

Définition 2. - T est superstable si le rang $\mathcal{U}$ range tous les types, ou bien s'il existe un rang qui range tous les types, ou bien si tous les types sont superstables.

THÉORÈME 1. - Soit $p \in S_1(M)$, et λ un cardinal $\geqslant \|M\|$.

1° Si p est superstable, et si N est une extension élémentaire de M de cardinal λ , p n'a pas plus de $2^{\omega} \times \lambda$ fils distincts dans $S_1(N)$.

2° Si p n'est pas superstable, il existe une extension élémentaire N de M de cardinal λ sur laquelle p a λ^{ω} fils.

1° On a $RU(p) < \infty$. On considère $M_{\emptyset}$ restriction élémentaire dénombrable de M , telle que p hérite de $p/M_{\emptyset}$. Pour toute partie finie $\bar{a}$ de N , on va construire un modèle dénombrable $M_{\bar{a}}$ de manière à ce que

$$\bar{a} \subset \bar{b} \longrightarrow M_{\bar{a}} < M_{\bar{b}} \quad \text{et} \quad M_{\bar{a}} < N .$$

$M_{\emptyset}$ est déjà construit. Induction de $(n-1)$-uple à n-uple : Soit $\bar{b}$ un n-uple ; il y a un nombre fini de $(n-1)$-uples dans $\bar{b}$. Pour ceux-ci, les $M_{\bar{a}}$ étant déjà construits, il existe (par L. S.) un modèle dénombrable $M_{\bar{b}}$, restriction élémentaire de N contenant tous les $M_{\bar{a}}$. Alors $M_{\bar{a}} < M_{\bar{b}}$.

On montre que, si q est fils de p sur N, il hérite de $q/M_{\bar{a}}$ pour un certain $\bar{a}$; pour cela, on construit une ω-suite de types non héritiers les uns des autres et fils de p, qui sera nécessairement finie. En effet, si q n'hérite pas de $q/M_{\emptyset}$, il existe une formule $\varphi(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M^k$, $\bar{b} \in N^\ell$, telle que $q \vdash \varphi(x, \bar{a}, \bar{b})$ sans qu'il existe $\bar{b}'$ dans M^ℓ, avec $q_0 = q/M_{\emptyset} \vdash \varphi(x, \bar{a}, \bar{b}')$. p est rangé et son héritier q_0 aussi, avec $RU(q_0) = RU(p) < \omega$. Comme $q_1 = q/M_1$ (M_1 modèle dénombrable contenant $\bar{b}$) n'hérite pas de q_0, on a $RU(q_1) < RU(q_0)$. On recommence, en écrivant qu'il existe un n-uple $\bar{b}_2$ qui empêche q d'hériter de q_1. Si $M_2 = M_{\bar{b} \cup \bar{b}_2}$, alors $q_2 = q/M_2$ n'hérite pas de q_1, ...

Donc, tout fils q de p est l'héritier sur N de sa restriction à un $M_{\bar{a}}$. p n'a donc pas plus de fils sur N qu'il n'y a de types sur les modèles $M_{\bar{a}}$. Il y a λ modèles $M_{\bar{a}}$ au plus, et pour chacun d'eux 2^ω types au plus. Donc p n'a pas plus de $\lambda \times 2^\omega$ fils sur N.

2° Par suite du corollaire, en disant que $RU(p) \geq \alpha(R) + 1$, il existe λ fils de p non superstable de $RU \geq \alpha(R)$ (i. e. infini). Tout ytpe de RU infini peut être divisé en λ fils de RU infini. On opère ω divisions successives, et on obtient un arbre à λ^ω branches définissant λ^ω types distincts dans N, extension élémentaire de M. On distingue les types partant d'un même noeud à l'aide d'un nombre fini de paramètres : Avec λ paramètres au 1er noeud, $\lambda \times \lambda = \lambda$ au second, ... $\omega \times \lambda = \lambda$ paramètres sont nécessaires pour distinguer les types. Par L. S., il existe une restriction élémentaire N_λ de N contenant M et ces paramètres, de cardinal λ. Les restrictions à N_λ des λ^ω types répondent à la question.

THÉORÈME 2.

1° Si T est superstable, alors tout modèle de cardinal λ ne produit pas plus de $\lambda \times 2^\omega$ types.

2° Si T n'est pas superstable, pour tout cardinal infini λ, il existe un modèle de cardinal λ produisant λ^ω types distincts.

2° C'est èvident (cf. théorème 1).

1° On prend N de cardinal λ et une restriction élémentaire M dénombrable de N. Il y a au plus 2^ω types sur M, qui sont superstables, ne donnant donc qu'au plus $\lambda \times 2^\omega \times 2^\omega = \lambda \times 2^\omega$ types sur N.

5. Rang de Morley.

Définition. - Par induction : Si α est limite, $RM(p) \geq \alpha$ si $RM(p) \geq \beta$, pour tout $\beta < \alpha$. Si $\beta = \alpha + 1$, $RM(p) \geq \beta$ si p a un fils q qui est point d'accumulation de types de $RM \geq \alpha$.

On peut montrer que c'est une notion de rang ; si RM range tous les types, on dit que T est totalement transcendante.

On montre aussi que, si T est totalemet transcendante, elle est stable en tout

cardinal λ , tandis que si elle ne l'est pas, il existe un ensemble dénombrable qui produit 2^{ω} types. Il y a donc équivalence entre la ω-stabilité et la totale transcendance.

Tableau récapitulatif (T dénombrable)

(α) T instable $\longleftrightarrow$ (T instable en tout cardinal $\lambda \geqslant \omega$)
(β) T stable non superstable $\longleftrightarrow$ (T instable en tout cardinal λ tel que $\lambda^{\omega} > \lambda$, T stable en tous les λ tels que $\lambda^{\omega} = \lambda$)
(γ) T superstable non ω-stable $\longleftrightarrow$ (T est stable en λ si, et seulement si, $\lambda \geqslant 2^{\omega}$)
(δ) T ω-stable (ou totalement transcendante) $\longleftrightarrow$ (T stable en tout cardinal infini)