SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

C. GOLDSTEIN

Valeurs spéciales de fonctions *L*

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 10 (1981-1982), exp. nº 4, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1981-1982__10__A4_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
26 novembre 1981

Grenoble

VALEURS SPECIALES DE FONCTIONS L

par C. GOLDSTEIN

O – INTRODUCTION

Notre but est de présenter ici un certain nombre de propriétés d'algébricité pour des valeurs spéciales de fonctions L associées à des caractères de Hecke ; le modèle pour ce type de propriétés est naturellement le théorème de Damerell, cf. [Da] . Nous avons en vue de raffiner ce théorème dans des cas particuliers et d'obtenir des résultats de rationalité, autant que possible, à $\mathbb{Q}^*$ près.

L'ingrédient fondamental pour cela est la décomposition de ces fonctions L en séries d'Eisenstein estimées en des points de torsion de certaines courbes elliptiques à multiplication complexe, dont nous établissons les propriétés de rationalité grâce aux méthodes déjà utilisées par J. Coates et A. Wiles [C.W] et N. Arthaud [A] .

Nous donnons en guise d'application deux théorèmes de rationalité relatifs à des conjectures bien connues, celle de Birch et Swinnerton-Dyer d'une part, la Γ-hypothèse d'autre part. Notons que tous les résultats sont contenus, soit dans [G.S] qui sera notre principale référence (toute notation entre crochets $\langle \quad \rangle$ y renverra systématiquement), soit dans le thèse de G. Brattström [B] , pour ce qui concerne la Γ-hypothèse; pour ce dernier point, nous nous contentons d'ailleurs d'indiquer une variante de sa démonstration, provenant des résultats de la première partie. En particulier, tout ce qui est exposé ici est le fruit d'un travail commun avec N. Schappacher.

1ère partie - Résultats de rationalité

I - NOTATIONS ET RAPPELS

Soit K un corps quadratique imaginaire contenu dans $\mathbb{C}$ et soit E une courbe elliptique définie sur une extension finie F de K (contenue dans $\mathbb{C}$), à multiplication complexe par l'anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers de K : en fait, nous identifions $\mathcal{O}_K$ et $\mathrm{End}_F(E)$, de sorte que l'action sur l'espace tangent de E à l'origine de l'image de $\rho \in \mathcal{O}_K$ soit la multiplication par ρ . Notons E_{tors} le groupe des points de torsion de E et $F(E_{tors})$ l'extension abélienne de F engendrée par les coordonnées des points de E_{tors} . Dans toute la suite, nous ferons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(1.1) $F(E_{tors})$ est une extension abélienne de K .

En particulier, F/K est abélienne : nous notons G le groupe de Galois de F/K , $\hat{G}$ son groupe de caractères (que nous identifierons si besoin est à des caractères de Dirichlet) et n le degré de F sur K .

(1.2) Remarque. - Nous recherchons des résultats de rationalité à K^* près, sinon à $\mathbb{Q}^*$ près ; l'intérêt de l'hypothèse (1.1) est de nous permettre de maîtriser la descente de F à K : en particulier, les courbes E et E^σ , pour tout $\sigma \in G$, sont conjuguées entre elles, cf. $\langle 4.2 \rangle$.

Nous considérons la variété abélienne B sur K , qui se déduit de E par restriction de scalaires de F à K , au sens d'A. Weil : c'est une variété abélienne de dimension $n = [F:K]$ définie sur K , munie d'un isomorphisme défini sur F :

(1.3) $B \cong_{/F} \prod_{\sigma \in G} E^\sigma$.

Soit $F_{\mathbb{A}}^*$ le groupe d'idèles de F : nous notons $\widetilde{\psi}$ le caractère de Hecke sur $F_{\mathbb{A}}^*$ attaché à E au sens de Serre-Tate. Nous définissons un caractère de Hecke complexe

$$\psi : F_{\mathbb{A}}^*/F^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

par $\psi(a) = \widetilde{\psi}(a)/\prod_{v|\infty}(a_v)$, où $a = (a_v) \in F_{\mathbb{A}}^*$.

(1.4) THEOREME. - <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $F(E_{\mathrm{tors}})$ <u>est une extension abélienne de</u> K .

(ii) <u>La variété abélienne</u> B <u>est à multiplication complexe sur</u> K , <u>dans le sens que</u> :

$$\mathrm{End}_K B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \prod_{i=1}^{r} T_i = T$$

<u>où chaque</u> T_i <u>est un corps de type</u> CM <u>contenant</u> K <u>et</u>

$$\sum_{i=1}^{r} [T_i : K] = n .$$

(iii) <u>L'extension</u> F/K <u>est abélienne et il existe un Grössencharackter</u> φ <u>de</u> K <u>tel que</u> $\psi = \varphi \circ N_{F/K}$.

<u>Démonstration</u> : cf. ⟨4.1⟩.

(1.5) <u>Remarque</u>. - Sous l'hypothèse (1.1), la variété B est isogène sur K à un produit

$$B \sim \prod_{i=1}^{r} B_i ,$$

où les B_i sont des variétés abéliennes simples de type C.M , non isogènes entre elles. Notons $\widetilde{\varphi}_i : K_{\mathbb{A}}^* \longrightarrow T_i^*$ et $\widetilde{\varphi} : K_{\mathbb{A}}^* \longrightarrow T^*$ les caractères associés à B_i (resp. à B) au sens de Serre-Tate, et, pour tout $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_K(T, \mathbb{C})$, $\varphi_\varepsilon : K_{\mathbb{A}}^*/K^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ le Grössencharakter complexe défini par

$$\varphi_\varepsilon(a) = \varepsilon(\widetilde{\varphi}(a))/a_\infty \quad \text{où} \quad a = (a_v) \in K_{\mathbb{A}}^* .$$

(1.6) PROPOSITION. -

(i) $\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi} \circ N_{F/K}$.

(ii) $\{\varphi_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathrm{Hom}_K(T, \mathbb{C})\} = \{\varphi \mid \psi = \varphi \circ N_{F/K}\}$.

Nous fixons dans la suite un tel φ, i.e. un élément $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_K(T, \mathbb{C})$. Nous notons $\mathfrak{f}$ le p.p.c.m. du conducteur de $\widetilde{\varphi}$ et du conducteur de l'extension F/K : nous choisissons un idéal entier principal $\mathfrak{g}$ de K divisible par $\mathfrak{f}$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de K entier premier à $\mathfrak{g}$, nous le considérons comme donné par un idèle a , d'idéal associé $\mathfrak{a}$ et tel que $a_v \equiv 1 \bmod \mathfrak{g}\mathcal{O}_v$, si $v|\mathfrak{g}$ et $a_v = 1$ si $v|\infty$; nous notons σ_a ou $\sigma_{\mathfrak{a}}$ le symbole d'Artin de $\mathfrak{a}$ sur $K^{ab}|K$.

(1.7) LEMME. -

(i) Pour tout point de $\mathfrak{g}$-division P de B , $\widetilde{\varphi}(\mathfrak{a})(P) = P^{\sigma_a}$.

(ii) Si $\mathfrak{t}$ est un idéal entier de K premier à $\mathfrak{g}$, tel que $\sigma_{\mathfrak{t}}$ induise l'identité sur F , $\varphi(\mathfrak{t})$ appartient à K^* .

Démonstration. (i) est la propriété caractéristique de $\widetilde{\varphi}$. On en déduit que $\widetilde{\varphi}(\mathfrak{t})$ induit un élément de $\mathrm{End}_F B = \mathcal{O}_K$, donc $\varphi(\mathfrak{t}) = \widetilde{\varphi}(\mathfrak{t}) \in K^* \subset \mathbb{C}$.

Fixons un modèle de Weierstrass de E sur F

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 ,$$

c'est-à-dire encore une forme différentielle ω $(= dx/y)$ de E sur F . Pour simplifier, nous supposons que le plongement de F dans $\mathbb{C}$ a été choisi de sorte que l'invariant j algébrique de la courbe s'identifie à l'invariant analytique $j(\mathcal{O}_K)$. Le réseau L du plan complexe, correspondant à (E, ω) , s'écrit alors, grâce à la multiplication complexe, $L = \Omega\mathcal{O}_K$, où $\Omega \in \mathbb{C}^*$ est bien défini à une unité de K près. D'autre part $(E^{\sigma_{\mathfrak{a}}/F}, \omega^{\sigma_{\mathfrak{a}}})$ est un modèle de la courbe conjuguée $E^{\sigma_{\mathfrak{a}}/F}$: mais $\widetilde{\varphi}(\mathfrak{a})$ induit, selon (1.7)(i), une isogénie de E dans $E^{\sigma_{\mathfrak{a}}/F}$. Nous posons $\widetilde{\varphi}(\mathfrak{a})^*(\omega^{\sigma_{\mathfrak{a}}}) = \Lambda(\mathfrak{a})\omega$, où $\Lambda(\mathfrak{a}) \in F^*$. Les propriétés essentielles de $\Lambda(\mathfrak{a})$ sont résumées dans la proposition suivante, cf. ⟨4.10⟩ :

(1.8) PROPOSITION. -

(i) L'application $\mathfrak{a} \mapsto \Lambda(\mathfrak{a})$, définie sur les idéaux entiers de K premiers à $\mathfrak{g}$ est caractérisée par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\xi(.,L)} & \mathbb{C}/L \\ \Big\downarrow \tilde{\varphi}(\mathfrak{a}) & & \Big\downarrow \cdot\Lambda(\mathfrak{a}) \\ E^{\sigma_\mathfrak{a}/F} & \xleftarrow{\xi(.,L^{\sigma_\mathfrak{a}/F})} & \end{array}$$

<u>où</u> $\xi(\cdot, L)$ <u>est l'isomorphisme de Weierstrass habituel</u>.

(ii) $L^{\sigma_\mathfrak{a}/F} = \Lambda(\mathfrak{a})\Omega\mathfrak{a}^{-1}$.

(iii) <u>Pour tout</u> $\rho \in \mathfrak{g}^{-1}L - L$, $\xi(\rho, L)^{\sigma_\mathfrak{a}/F} = \xi(\Lambda(\mathfrak{a})\rho, L^{\sigma_\mathfrak{a}/F})$.

(iv) <u>Pour</u> $\mathfrak{a}$ <u>et</u> $\mathfrak{b}$ <u>deux idéaux premiers à</u> $\mathfrak{g}$,

$$\Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \Lambda(\mathfrak{a})^{\sigma_\mathfrak{b}}\Lambda(\mathfrak{b}) = \Lambda(\mathfrak{a})\,\Lambda(\mathfrak{b})^{\sigma_\mathfrak{a}} .$$

Toute cette machinerie étant mise en place, nous pouvons nous attacher maintenant à l'étude des fonctions L .

II - THEOREME DE DAMERELL

Nous considérerons, en gardant les notations du paragraphe précédent, les fonctions

$$L(\varphi^k, s) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{g}} (1 - \varphi^k(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1 + \tfrac{k}{2})$$

où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux premiers de K qui ne divisent pas $\mathfrak{g}$ et

$$L(\psi^k, s) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{g}} (1 - \psi^k(\mathfrak{p})\, N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1 + \tfrac{k}{2}) ,$$

où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux premiers de F qui ne divisent pas $\mathfrak{g}\mathcal{O}_F$. De plus, pour tout $\sigma \in G$, nous définissons

$$L(\varphi^k, \sigma, s) = \sum_{\sigma_\mathfrak{a} = \sigma} (\varphi^k(\mathfrak{a})\, N\mathfrak{a}^{-s}) \quad , \quad (\mathrm{Re}(s) > 1 + \tfrac{k}{2}) ,$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers $\mathfrak{a}$ de K , premiers à $\mathfrak{g}$, dont le symbole d'Artin $\sigma_\mathfrak{a}$ induit σ sur F .

Nous avons clairement

$$L(\psi^k, s) = \pm \underset{\sigma,\tau\in G}{\text{dét}} \left(L(\varphi^k, \sigma\tau, s)\right) .$$

Le fait fondamental -d'ailleurs assez général-, est la décomposition des séries L partielles en sommes de séries d'Eisenstein $E^*_{i,j}$ définies simplement, au moins pour $j \geq i+3$ par

$$E^*_{i,j}(z, L) = \sum_{\omega\in L} \frac{(\bar{z}+\bar{\omega})^i}{(z+\omega)^j} .$$

Pour plus de détails, cf. [W] .

Nous avons donc le théorème

(2.1) THEOREME. - <u>Soient</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal entier de</u> K <u>premier à</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> $\mathfrak{B}$ <u>un système d'idéaux entiers de</u> K , <u>premiers à</u> $\mathfrak{g}$, <u>tels que les symboles d'Artin</u> $\sigma_{\mathfrak{b}}$, <u>pour</u> $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$, <u>décrivent le groupe de Galois de</u> $F(E_{\mathfrak{g}})$ <u>sur</u> F . <u>Soit</u> $\rho = \Omega/g$, <u>où</u> g <u>est un générateur de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Soient</u> j <u>et</u> k <u>deux entiers tels que</u> $\frac{k}{2} < j \leq k$. <u>Alors, pour tout</u> $\chi\in\hat{G}$,

$$(2\pi i)^{k-j} \frac{\varphi^k(\mathfrak{a})\chi(\sigma_{\mathfrak{a}})}{(\Lambda(\mathfrak{a})\rho)^k} L(\bar{\varphi}^k \chi(\mathfrak{a}), \sigma_{\mathfrak{a}}, j) = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}} \mathcal{E}_{j,k}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) ,$$

<u>où</u> $\mathcal{E}_{j,k}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \left(\frac{2\pi i N\mathfrak{a}}{|\Lambda(\mathfrak{a})\rho|^2}\right)^{k-j} E^*_{k-j,j}(\varphi(\mathfrak{b})\Lambda(\mathfrak{a})\rho, L^{\sigma_{\mathfrak{a}}})$.

L'intérêt de cette décomposition réside dans les propriétés d'algébricité des valeurs spéciales des séries d'Eisenstein considérées :

(2.2) THEOREME. - <u>Avec les notations précédentes</u>

$$\mathcal{E}_{j,k}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in F(E_{\mathfrak{g}})$$
$$\mathcal{E}_{j,k}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \mathcal{E}_{j,k}(\mathfrak{a},\mathcal{O}_K)^{\sigma_{\mathfrak{b}}}$$
$$\mathcal{E}_{j,k}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \mathcal{E}_{j,k}(\mathcal{O}_K,\mathfrak{b})^{\sigma_{\mathfrak{a}}} .$$

<u>Démonstration</u>. Il est facile d'interpréter les $E^*_{0,k}(\rho, L)$ comme coefficients du développement en série de Laurent d'une fonction θ^* telle que, pour un $\alpha \in K$,

$$\theta^*(z, L, \alpha^{-1}L) = \prod_{\ell} (\wp(z, L) - \wp(\ell, L))^{-1} ,$$

où ℓ décrit un système de représentants non triviaux de $\alpha^{-1}L$ modulo L. L'estimation de θ^* en $z+\rho$ par la formule ci-dessus montre notre première assertion. Pour les deux dernières, nous sommes ramenés à démontrer que

$$\theta^*(z+\rho, L, \alpha^{-1}L)^{\sigma_a \sigma_b} = \theta^*(z+\Lambda(a)\,\varphi(b)\rho, L^{\sigma_a} ,$$

où σ_a et σ_b agissent sur $\theta^*(z+\rho)$ comme série de Laurent en z à coefficients dans $F(E_g)$, ou ce qui revient au même, comme fonction rationnelle en $\wp(z, L)$ et $\wp'(z, L)$ à coefficients dans $F(E_g)$ à condition de faire aussi agir σ_a sur les coefficients des développements en z de $\wp(z, L)$ et $\wp(z, L)$ (σ fixe F, donc le réseau L). Le résultat découle alors de la proposition (1.8)(iii) et (1.7) et de l'expression des $E^*_{i,j}$ généraux comme combinaison linéaire des $E^*_{0,k}$.

Nous pouvons interpréter $\bar{\varphi}^k\chi$ à partir du caractère $\tilde{\varphi}$ de Serre-Tate attaché à B de la manière suivante : nous notons $\tilde{T}(k)$ la sous-algèbre de $T(\chi)$ engendrée par les valeurs de $\tilde{\varphi}^k\chi$ (où χ est considéré ici comme caractère à valeurs algébriques, précisément dans le groupe des racines n-ièmes de l'unité). Soit $\epsilon \in J_k = \mathrm{Hom}_K(\tilde{T}(k), \mathbb{C})$. Nous définissons $[\varphi^k\chi]_\epsilon$ comme le composé des applications

$$K_A^* \xrightarrow{\tilde{\varphi}^k\chi \otimes d_\infty^{-k}} (\tilde{T}(k) \otimes \mathbb{R})^* \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}^* ,$$

où d_∞ est l'application diagonale.

(2.3) LEMME.

$$\{[\varphi^k\chi]_\epsilon \mid \chi \in \hat{G}, \epsilon \in J_k\} = \{\Phi ; \psi^k = \Phi \circ N_{F/K}\} .$$

Démonstration. D'après la proposition (1.6) (ii), il suffit de montrer que pour $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_K(T(\chi), \mathbb{C})$

$$[\varphi^k \chi]_{\varepsilon \mid \widetilde{T}(k)} = \varphi^k_{\varepsilon \mid T} \chi .$$

Mais χ est d'ordre fini, donc il suffit de montrer cette égalité pour $\chi = 1$.
Or

$$\varphi^k_\varepsilon = (\varepsilon(\widetilde{\varphi} \otimes d_\infty^{-1})^k) = \varepsilon((\widetilde{\varphi}^k \otimes d_\infty^{-k})) = (\varphi^k)_{\varepsilon \mid \widetilde{T}(k)} .$$

(2.4) PROPOSITION. -

(i) Pour tout idéal entier $\mathfrak{a}$ de K premier à $\mathfrak{g}$, l'élément $\dfrac{\overline{\varphi}^k \chi(\mathfrak{a})}{\Lambda^k(\mathfrak{a})}$ (de $(\widetilde{T}(k) \otimes_k F)^*$) ne dépend que de la restriction $\sigma_{\mathfrak{a}}/F$ de G.

(ii) L'application de G dans $(\widetilde{T}(k) \otimes_K F)^*$ définie par $\sigma_{\mathfrak{a}}/F \mapsto \dfrac{\overline{\varphi}^k \chi(\mathfrak{a})}{\Lambda^k(\mathfrak{a})}$ est un 1-cocycle.

Démonstration. cf. $\langle 4.11 \rangle$.

Le groupe de cohomologie $H^1(G, (\widetilde{T}(k) \otimes_K F)^*)$ est trivial, donc il existe un élément $\eta_\chi \in (\widetilde{T}(k) \otimes_K F)^*$, bien déterminé à multiplication près par un élément de $\widetilde{T}(k)^*$, tel que

$$\eta_\chi^{\sigma_{\mathfrak{a}} - 1} = \frac{(\overline{\varphi}^k \chi)(\mathfrak{a})}{\Lambda^k(\mathfrak{a})} .$$

Rappelons que l'action de G est triviale sur $\widetilde{T}(k)$ et évidente sur F.

(2.5) COROLLAIRE. - Pour $\frac{k}{2} < j \leq k$,

$$(2\pi i)^{k-j} \eta_\chi^{-1} \Omega^{-k} L(\overline{[\varphi^k \chi]_\varepsilon}, j) \in \widetilde{T}(k) \otimes 1 .$$

(2.6) COROLLAIRE. - Pour j et k comme précédemment

$$L^*(\overline{\psi}^k, j) = (2\pi i)^{n(k-j)} \pi(\Lambda(\mathfrak{a})\Omega)^{-k} L(\overline{\psi}^k, j) \in F ,$$

où le produit est pris sur un ensemble $\mathfrak{A}$ d'idéaux $\mathfrak{a}$ de K

<u>premiers à</u> $\mathfrak{g}$ <u>dont les symboles d'Artin recouvrent</u> G .

<u>De plus</u>, $L^*(\overline{\psi}^k, j)^\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma)\, L^*(\overline{\psi}^k, j)$, <u>pour tout</u> $\sigma \in G$, <u>où</u> $\mathrm{sgn}(\sigma)$ <u>est le signe de la permutation</u> $\tau \mapsto \tau\sigma$ <u>de l'ensemble</u> G .

<u>Démonstration</u>. cf. $\langle 7.1 \rangle$: Il est facile de voir que $L^*(\overline{\psi}^k, j)$ est, à un élément de K^* près, le déterminant

$$D = \underset{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}}{\text{dét}} \left((2\pi i)^{k-j} \varphi^k(\alpha_1\alpha_2)(\Lambda(\alpha_1)\rho)^{-k} L(\varphi^{-k}, \sigma_{\alpha_1\alpha_2}, j)\right) ,$$

qui s'écrit, grâce à (2.1), (2.2) et (1.8)(iv) :

$$D = \underset{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}}{\text{dét}} \left(\{\Lambda(\alpha_2)^k [(2\pi i)^{k-j} \rho^{-k} L(\varphi^{-k}, \mathrm{id}, j)]^{\sigma_{\alpha_2}}\}^{\sigma_{\alpha_1}}\right)$$

le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.

2ème partie - Applications

Nous allons maintenant montrer que les résultats obtenus en (2.6) et (2.5) permettent de prouver certaines conjectures de rationalité.

III - CONJECTURE DE BIRCH ET SWINNERTON-DYER

Rappelons que la fonction L de Hasse-Weil de la courbe E se décompose ici en produit

$$L(E/F, s) = L(\psi, s)\, L(\overline{\psi}, s) ,$$

où, contrairement à ce que nous avons implicitement admis jusqu'à présent, les fonctions à droite sont primitives : mais nous pouvons négliger ce fait pour les questions de rationalité, puisque les facteurs d'Euler parasites, a priori dans K^* , se regroupent en fait par paires de conjugués complexes. Supposons maintenant que $L(E/F, 1) \neq 0$: la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour E/F s'écrit dans ce cas

$$\sqrt{|d_F|}\prod_{v\in S} m_v^{-1} L(E/F,1) = \mathrm{card}(Ш)\,\mathrm{card}(E(F)_{\mathrm{tors}})^{-2} .$$

Ici $d_F \in \mathbb{Q}^*$ est le discriminant de F sur $\mathbb{Q}$, S un ensemble fini de places de F contenant les places à l'infini, m_v la mesure de Tamagawa de E sur F_v , bien normalisée (rappelons que, si v est finie, $m_v \in \mathbb{Q}^*$) ; enfin $Ш$ est le groupe de Tate-Shafarevic de E sur F , supposé conjecturalement fini. L'énoncé de rationalité inclus dans cette conjecture est donc le suivant :

$$\sqrt{|d_F|}\prod_{v|\infty} m_v^{-1} L(E/F,1) \in \mathbb{Q} .$$

Mais comme les places à l'infini correspondent aux plongements de F dans $\mathbb{C}$ sur K , nous pouvons associer à $v|\infty$ un idéal $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ (cf. énoncé de (2.6)) tel que

$$m_v = \int_{E(F_v)} |\omega_v|\, d\mu_v = |\Lambda(\mathfrak{a})\Omega|^2\, N\mathfrak{a}^{-1}\sqrt{|d_K|} .$$

Alors (2.6) montre facilement que

(3.1) THEOREME. - <u>L'énoncé de rationalité contenu dans la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est vrai pour les courbes</u> E/F <u>vérifiant</u> (1.1) .

IV - Γ-HYPOTHESE

Cette conjecture de rationalité, cf. [B], [L] , ne concerne pas a priori des caractères associés comme ici à des courbes elliptiques. Nous l'énoncerons ici sous sa forme la plus simple, relative à un corps quadratique imaginaire K de nombre de classes h impair, qui est celle traitée par G. Brattström dans la seconde partie de [B] . Faute de place, nous ne rappellerons pas ici la définition des caractères sommes de Jacobi sur K . Un tel caractère ψ est un caractère de Hecke dont nous connaissons explicitement le type à l'infini $I(\psi)$, il est à valeurs dans K et invariant sous Galois, i.e.

$$\psi(\mathfrak{a}^{\sigma}) = \psi(\mathfrak{a})^{\sigma} ,$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et tout idéal $\mathfrak{a}$ de K. On peut lui associer, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, un élément $\Gamma_{\sigma}(\psi) \in \mathbb{R}^* |\mathbb{Q}^*$ qui est un produit de valeurs particulières de la fonction Γ ; pour plus de détails, cf. [B] ; si $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, posons $C(\sigma) = \{-n\sigma + d(\bar{\sigma}-\sigma) \mid n \geq 1$ et $d \geq 0$ ou $n \leq 1$ et $d+n \geq 1\}$.

(4.1) Γ-hypothèse. Si ψ est un caractère somme de Jacobi et si $I(\psi) \in C(\sigma)$ pour un $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, alors

$$\Gamma_{\sigma^{-1}}(\psi)\ L(\psi, 0) \in \mathbb{Q} .$$

Pour démontrer (4.1) dans le cas où K est de nombre de classes impair, nous suivons la démonstration de [B] : le premier pas consiste à exprimer ψ comme produit de caractères associés à des courbes elliptiques. Si K est de nombre de classes impair, B. Gross a montré l'existence d'une $\mathbb{Q}$-courbe E définie sur le corps de Hilbert H de K, à multiplication complexe par $\mathcal{O}_K$ et vérifiant (1.1), cf. [G]. Soit φ un caractère de Hecke de K associé à E comme dans le premier paragraphe : φ^h (qui est la restriction du Grössencharakter de E sur H aux idéaux de K) est à valeurs dans K^*. Le lemme suivant est montré dans [B], lemmes 12.1 et 12.2.

(4.2) LEMME.

(i) φ^h, $\bar{\varphi}^h$ et $\mathbb{N}$ sont des caractères sommes de Jacobi.

(ii) Les types à l'infini $I(\varphi^h)$ et $I(\mathbb{N})$ (resp. $I(\bar{\varphi}^h)$ et $I(\mathbb{N})$) engendrent le groupe des types à l'infini des caractères sommes de Jacobi.

Une conséquence du lemme (4.2)(ii) est que tout caractère somme de Jacobi de K s'écrit sous la forme

$$\psi = \chi\, \bar{\varphi}^{ha}\, \mathbb{N}^{-b} ,$$

où a et b sont entiers et χ est un caractère de Dirichlet. Nous sommes donc ramenés à étudier $L(\bar{\varphi}^{ha}\mathbb{N}^{-b}\chi, 0)$ soit $L(\bar{\varphi}^{ha}\chi, b)$. G. Brattström établit pour cela "à la main" un théorème de rationalité (à la "Damerell") pour les $\mathbb{Q}$-courbes étudiées. Nous appliquerons quant à nous directement le corollaire (2.5) : si $\frac{ha}{2} < b \leq ha$, alors

$$(2\pi i)^{ha-b}\, \eta_{\bar{\chi}}^{-1}\, \Omega^{-ha}\, L(\bar{\varphi}^{ha}\chi, b) \in \widetilde{T}(ha) \otimes 1 .$$

Ici $\bar{\varphi}^{ha}\chi$ est à valeurs dans K^*, donc aussi χ d'ailleurs : en particulier $\widetilde{T}(k) = K$ et $\eta_{\bar{\chi}} \in (K^* \otimes_K H)^* = H^*$. Nous pouvons d'ailleurs expliciter $\eta_{\bar{\chi}}$.

(4.3) PROPOSITION. - <u>Pour tout idéal</u> $\mathfrak{c}$ <u>premier à</u> $\mathfrak{g}$,

$$\left\{\frac{\eta_{\bar{\chi}}}{\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a})^{a}}\right\}^{\sigma_{\mathfrak{c}}} = \left(\frac{\eta_{\bar{\chi}}}{\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a})^{a}}\right) \bar{\chi}(\mathfrak{c}) .$$

<u>Démonstration</u>. Par définition $\eta_{\bar{\chi}}^{\sigma_{\mathfrak{c}}} = \eta_{\bar{\chi}} \dfrac{\bar{\varphi}^{ha}(F)\,\bar{\chi}(\mathfrak{c})}{\Lambda^{ha}(\mathfrak{c})}$. Puisque $\mathfrak{a} \mapsto \Lambda(\mathfrak{a})$ se comporte comme un cocycle, cf. [1.8] (iv),

$$\left\{\frac{\eta_{\bar{\chi}}}{\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a})^{a}}\right\}^{\sigma_{\mathfrak{c}}} = \frac{\eta_{\bar{\chi}}^{\sigma_{\mathfrak{c}}}}{\left(\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a})^{\sigma_{\mathfrak{c}}}\right)^{a}} = \eta_{\bar{\chi}} \frac{\bar{\varphi}^{ha}(\mathfrak{c})\bar{\chi}(\mathfrak{c})}{\left(\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{c})\right)^{a}} .$$

Notons $\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}$ l'élément de $\mathfrak{A}$ qui induit $\sigma_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}$ sur F (pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$) :

$$\Lambda(\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}) = \Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}) = \Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{c})\, \Lambda(\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}/\mathfrak{a}\mathfrak{c})^{\sigma_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}} ,$$

mais $\sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}/\mathfrak{a}\mathfrak{c}) = \mathrm{id}$, donc, par (1.7) (ii)

$$\Lambda(\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}/\mathfrak{a}\mathfrak{c}) = \widetilde{\varphi}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}/\mathfrak{a}\mathfrak{c}) = \varphi(\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}/\mathfrak{a}\mathfrak{c}) \in K^* .$$

Mais lorsque $\mathfrak{a}$ parcourt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}$ parcourt aussi $\mathfrak{A}$, donc

$$\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) = \left(\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a})\right) \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \varphi\left(\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}}\right) = \left(\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a})\right) \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \frac{\widetilde{\varphi}(\mathfrak{a})}{\widetilde{\varphi}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}})}\, \widetilde{\varphi}(\mathfrak{c})^{n}$$

$$= \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \Lambda(\mathfrak{a})\, \widetilde{\varphi}(\mathfrak{c})^{n} , \text{ d'où la proposition.}$$

Autrement dit, $(2\pi i)^{ha-b}(\prod \Lambda(\mathfrak{a})\,\Omega)^{-a}\, L(\bar{\varphi}^{ha}\chi, b) = \delta_\chi$, où $\delta_\chi \in H$, vérifie $\delta_\chi^{\sigma_c} = \chi(c)\,\delta_\chi$ et n'est bien défini qu'à K^* près. Mais la courbe E descend à H^+ ; en particulier nous pouvons choisir judicieusement les idéaux $\mathfrak{a}$ et définir $\Lambda_+(\mathfrak{a})$ et Ω_+ (dans $\mathbb{R}$) , cf. $\langle 8.\ \rangle$. Nous obtenons alors

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{d_k}}\right)^{ha-b} \left(\prod \Lambda_+(\mathfrak{a})\,\Omega_+\right)^{-a} L(\bar{\varphi}^{ha}\chi, b) = \delta'_\chi ,$$

où $\delta'_\chi \in H_+$ et vérifie $\delta'^{\sigma_c}_\chi = \chi(c)\,\delta'_\chi$.

Nous utilisons alors la formule de Chowla-Selberg qui exprime $(\prod \Lambda_+(\mathfrak{a})\,\Omega_+)$ comme produit de facteurs Γ , cf. [G] , chapitre 5. Nous en déduisons

$$\Gamma_{\sigma^{-1}}(\psi)\, L(\psi, 0) \underset{\mathbb{Q}^*}{\sim} \delta'_\chi\, \Gamma_{\sigma^{-1}}(\chi) .$$

Mais le théorème de Deligne généralisé montre que $\Gamma_{\sigma^{-1}}(\chi)$ se transforme sous Galois par χ , cf. [De] ou [K.L] donc le second membre est rationnel, d'où le résultat.

<u>Remarque</u>. A priori les conditions sur a et b imposées par le corollaire (2.5) ne couvrent pas tous les caractères sommes de Jacobi : nous devrions utiliser l'équation fonctionnelle des fonctions L étudiées pour obtenir toutes les valeurs voulues, cf. [B] , 123 pour plus de détails.

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] N. ARTHAUD, On Birch and Swinnerton-Dyer's conjecture for elliptic curves with complex multiplication, I, Compos. Math. 37 (1978), 209-232 .

[B] G. BRATTSTRÖM, L-functions of Jacobi-Sum Hecke charakters, Ph D, Cornell University, 1981.

[C.W] J. COATES et A. WILES, On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, Inventiones Math. 39 (1977), 223-251.

[Da] R.M. DAMERELL, L-functions of elliptic curves with complex multiplication, I, Acta Arithm. 17 (1970), 287-301.

[De] P. DELIGNE, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, dans Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (AMS) 33 (1979), part. 2, 313-346.

[G] B. GROSS, Arithmetic on elliptic curves with complex multiplication, Springer Lect. Notes Math. 776 (1980).

[G.S] C. GOLDSTEIN et N. SCHAPPACHER, Séries d'Eisenstein et fonctions L de courbes elliptiques à multiplication complexe, Journ. für die reine and angew. Math., 327 (1981), 184-218.

[K.L] D. KUBERT et S. LICHTENBAUM, Jacobi-Sum Hecke characters (preprint).

[L] S. LICHTENBAUM, On the values of the L-functions of Jacobi Sum Hecke characters (preprint).

[W] A. WEIL, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer-Verlag (1976).