SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

GILLES ROBERT

Une curieuse symétrie des unités elliptiques

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 7 (1978-1979), exp. n° 4, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1978-1979__7__A4_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
8 mars 1979
Grenoble

UNE CURIEUSE SYMETRIE DES UNITES ELLIPTIQUES

par Gilles ROBERT

Les résultats présentés dans ce texte ont été exposés au séminaire de théorie des nombres de Grenoble, le 8 mars 1979.

INTRODUCTION

Notre remarque essentielle est l'existence d'une symétrie, liée au Spiegelung de Leopoldt, qui paraît conserver un certain module de p-torsion T construit à l'aide d'unités elliptiques.

Les paragraphes 6 et 7 du présent travail s'appuyent sur deux textes en cours de rédaction :

a) L'un [12] donnant une description complète de T en termes de congruences entre valeurs de séries d'Eisenstein ; une description incomplète est implicite dans [11] §§3 et 6 .

b) L'autre [13] établissant, dans un $\mathbb{Z}_p$-réseau de formes modulaires convenable, certaines congruences modulo p entre séries d'Eisenstein.

Plus précisément, l'exactitude des exemples numériques que nous proposons dans le paragraphe 7 repose sur a) ; celle du théorème énoncé paragraphe 6 repose sur b) .

§1 - NOTATIONS

Soient $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments, et μ_m le groupe des racines m-ièmes de l'unité. Pour chaque corps de nombres N ,

$$(N : \mathbb{Q}) < +\infty ,$$

on note $R(N)$ l'anneau des entiers, $Z(N)$ le groupe des unités, $e(N)$ le groupe des racines de l'unité, et $Cl(N)$ le groupe des classes d'idéaux de N ; on pose

$$e_N = |e(N)| \quad , \quad h_N = |Cl(N)| .$$

Soient K un corps quadratique imaginaire, H_0 le corps de classes de Hilbert de K , et notons

$$R = R(K) \quad , \quad e = e_K \quad , \quad h = h_K .$$

Fixons un nombre premier $p \geq 3$, inerte dans K , de sorte que $R/p \simeq \mathbb{F}_q$ avec $q = p^2$, et désignons par H le corps de classes de rayon de K de conducteur (p) . Si $Cl(p)$ désigne le groupe de classes de rayon modulo (p) de K , on a le diagramme commutatif ci-contre

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (R/p)^\times/e(K) & \longrightarrow & Cl(p) & \longrightarrow & Cl(K) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Gal(H_0/K) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, où G (resp. G_0) désigne le groupe de Galois de l'extension H/K (resp. H/H_0) , et où les flèches verticales sont les isomorphismes induits par l'application de réciprocité d'Artin de K . En particulier, on a

$$|G_0| = (H : H_0) = (p^2-1)/e \quad , \quad |G| = (H : K) = h \cdot |G_0| .$$

Pour mémoire, rappelons la décomposition de p dans l'extension H/K : l'idéal premier (p) de K se décompose totalement dans H_0/K , et chacun des idéaux premiers q de H_0 au-dessus de p se ramifie totalement dans H/H_0 .

§2 - UNITES ELLIPTIQUES

Soit $u : H \to \mathbb{C}$ un plongement de H dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et notons θ l'élément de H défini par

$$u(\theta) = \varphi_{(p)}(C_0) ,$$

où C_0 désigne la classe unité de $Cl(p)$, et où $\varphi_{(p)}(C_0)$ est le nombre réel défini comme dans [10] §2.2, cf. aussi [1] et [4].

Considérons alors l'idéal

$$J \overset{dfn}{=} \{a \in \mathbb{Z}[G] \mid e(H)^a = \{1\}\}$$

de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[G]$; le quotient $\mathbb{Z}[G]/J$ est donc cyclique d'ordre e_H. Soit D le groupe des éléments de H dont la puissance $(12p)$-ième appartient à θ^J ; d'après [2], on a

$$D^{12p} = \theta^J ;$$

notons alors C le groupe des unités elliptiques de H défini par

$$C \overset{dfn}{=} D \cap Z(H) .$$

Si $I(G)$ désigne l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G]$, posons

$$J_0 \overset{dfn}{=} \{\text{éléments de } J \text{ de degré } 0\} = J \cap I(G) ,$$

de sorte que le quotient $I(G)/J_0$ est cyclique d'ordre e_H/e ; le groupe C est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$\text{i)}\ C^{12p} = \theta^{J_0} , \quad \text{ii)}\ e(H) \subset C .$$

Celles-ci prouvent que C ne dépend pas du choix du plongement $u : H \to \mathbb{C}$, et montrent que C est un $\mathbb{Z}[G]$-module "essentiellement" monogène.

Pour N sous-corps de H contenant K, on définit le groupe $C(N)$ des unités elliptiques de N par

$$C(N) \overset{dfn}{=} C \cap Z(N) = e(N).\mathbb{N}_{H/N}C ,$$

où $\mathbb{N}_{H/N}$ désigne la norme relative à l'extension H/N. Soit $N_0 = H_0 \cap N$; comme p est totalement décomposé dans N_0/K, on a

$$C(N) \cap N_0 = e(N_0) \ ,$$

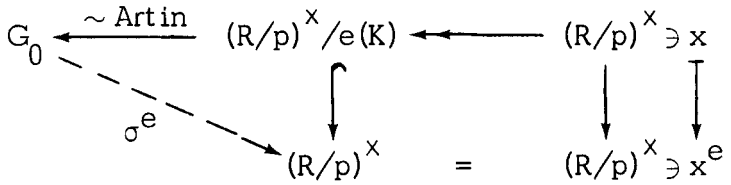
et une formule analytique pour le nombre de classes s'énonce ainsi :

(1) $\quad [Z(N) : Z(N_0).C(N)] = h_N/h_{N_0}$,

cf. [10] §6.4 et [2] .

§3 - CARACTERES DU GROUPE DE GALOIS RELATIF

Notons $\sigma^{e'}$ le caractère fondamental de G_0 , qui rend commutatif le diagramme



ci-contre. Les caractères du groupe abélien G_0 à valeurs dans le corps R/p , assez gros, sont alors les homomorphismes

$$\sigma^k \overset{dfn}{=} (\sigma^e)^{k/e} \ ,$$

où k désigne un entier divisible par e . Précisément, si χ est un caractère de G_0 à valeurs dans R/p , la condition

$$\chi = \sigma^k \ , \quad 0 \leq k/e \leq |G_0| - 1 \ ,$$

détermine un unique entier k divisible par e ; un tel entier k est dit <u>associé</u> à G_0 .

Pour chaque $(R/p)[G]$-module M et chaque entier k associé à G_0 , notons M_k la σ^k-composante de M sur laquelle G_0 agit par σ^k . Comme l'algèbre de groupe $(R/p)[G_0]$ est semi-simple, on a donc un isomorphisme de $(R/p)[G]$-modules

$$M \simeq \bigoplus_{k \text{ associés à } G_0} M_k \ ;$$

notamment, M_0 est le plus grand sous-module de M dont les éléments sont fixés par G_0 .

Remarque. - Soit $\nu : G \to \mathbb{F}_p$ le caractère de G défini par son action sur $\mu_p \subset H$. Alors, on a

$$\nu|G_0 = \sigma^{p+1} .$$

Le lemme suivant complète la description de C.

LEMME 1. - Soit k un entier associé à G_0, $k \neq 0$ et $\neq p+1$. Alors, la σ^k-composante $C \otimes (R/p)_k$ de $C \otimes (R/p)$ est un $(R/p)[G]_k$-module libre de rang 1.

Démonstration. - Choisissons un plongement $u : H \to \mathbb{C}$, et définissons θ comme dans le §1.2. Alors, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} C \otimes (R/p)_k & \xrightarrow{\psi_u} & (R/p)[G]_k \\ \downarrow \wr\, k\neq p+1 & & \downarrow \wr\, k\neq p+1 \\ J_0 \otimes (R/p)_k & \xrightarrow[k\neq 0]{\sim} & J \otimes (R/p)_k \end{array}$$

ci-contre, définit un isomorphisme de $(R/p)[G]$-modules

$$\psi_u : C \otimes (R/p)_k \xrightarrow{\sim} (R/p)[G]_k .$$

§4 - L'INVOLUTION MIROIR

Pour k entier associé à G_0, définissons le miroir $m(k)$ de k comme l'entier associé à G_0 tel que

$$\sigma^{m(k)} = (\nu|G_0)\cdot\sigma^{-pk} ;$$

autrement dit, l'entier $m(k)$ est caractérisé par les relations :

i) $m(k) \equiv p+1-pk \pmod{p^2-1}$,

ii) $0 \leq m(k)/e \leq |G_0|-1$.

On a $m(m(k)) = k$, de sorte que l'application $k \to m(k)$ définit sur l'ensemble des entiers associés à G_0 une involution sans points fixes ; en effet, le quotient

$$t(k) \overset{dfn}{=} (m(k)-k)/(p+1) \ ,$$

qui vérifie l'identité

$$t(m(k)) + t(k) = 0 \ ,$$

est un entier impair. En particulier, on a

$$\sigma^{m(k)} = (\nu|G_0)^{t(k)} \cdot \sigma^k \ ,$$

d'où le lemme suivant.

LEMME 2. - Pour chaque entier k associé à G_0 , l'application

$$\Sigma n_g \cdot g \longmapsto \Sigma \nu(g)^{-t(k)} n_g \cdot g$$

définit un (R/p)-isomorphisme, noté j_k , de $(R/p)[G]_k$ sur $(R/p)[G]_{m(k)}$; précisément, pour tous $a \in (R/p)[G]_k$ et $g \in G$, on a

$$j_k(a) \cdot g = \nu(g)^{t(k)} j_k(a \cdot g) \ .$$

Les isomorphismes j_k et $j_{m(k)}$ sont inverses l'un de l'autre.

Combinant les lemmes 1 et 2, on obtient ainsi le corollaire suivant .

COROLLAIRE. - Soit k comme dans le lemme 1 . Alors, l'application j_k induit -via ψ_u- un (R/p)-isomorphisme, noté $j_k^{(u)}$, de $C \otimes (R/p)_k$ sur $C \otimes (R/p)_{m(k)}$.

§5 - MODULES GALOISIENS DE p-TORSION

Il s'agit de $(R/p)[G]$-modules liés à l'existence de classes d'idéaux d'ordre p dans le corps H .

Le premier est le module

$$Cl(H)^{(p)} \overset{dfn}{=} Cl(H) \otimes (R/p) \ ,$$

difficilement accessible au calcul.

D'autre part, introduisons le groupe U des unités semi-locales de H, i.e. le groupe des unités de l'anneau

$$R(H) \otimes \mathbb{Z}_p = \prod_{q|p} R(H)_q ,$$

où le produit est pris sur tous les idéaux premiers q de H au-dessus de p, et où $R(H)_q$ désigne le complété en q de $R(H)$; pour n entier ≥ 0, on note $U^{(n)}$ le sous-groupe de U formé des unités $u = (u_q)_{q|p}$ telles que

$$u_q \equiv 1 \pmod{q^n \cdot R(H)_q}$$

pour toute place q de H au-dessus de p. Plongeons $Z(H)$ dans U par l'application diagonale ; le groupe Z_{pr} des unités p-primaires de H est l'intersection

$$Z_{pr} = Z(H) \cap (U^p \cdot U^{(n)}) ,$$

avec $n = p(p+1)/e$, cf. e.g. [6]. Nous définissons alors notre second $(R/p)[G]$-module par

$$T \overset{dfn}{=} (C \cap Z_{pr}/C^p) \otimes R .$$

On possède une description complète de T, en termes de congruences entre valeurs de séries d'Eisenstein, cf. [12].

On note aussi T_{ell} le sous-module de T, défini par

$$T_{ell} \overset{dfn}{=} (C \cap Z(H)^p/C^p) \otimes R .$$

Pour chaque sous-corps N de H contenant K, de degré relatif $(H : N)$ premier à p, soit

$$\varepsilon_N = (H:N)^{-1} \cdot \sum_{g \in Gal(H/N)} g$$

l'idempotent de l'algèbre $(R/p)[G]$ associé à N, et posons

$$Cl(N)^{(p)} \overset{dfn}{=} \varepsilon_N \cdot Cl(H)^{(p)} , \quad T(N) \overset{dfn}{=} \varepsilon_N \cdot T , \quad T(N)_{ell} \overset{dfn}{=} \varepsilon_N \cdot T_{ell} .$$

On a les identités

$$Cl(N)^{(p)} = Cl(N) \otimes (R/p) , \quad T(N) = (C(N) \cap Z_{pr}/C(N)^p) \otimes R ,$$
$$T(N)_{ell} = (C(N) \cap Z(H)^p/C(N)^p) \otimes R .$$

Le lemme et la proposition ci-dessous expriment une partie des relations existant entre les modules $T(N)_{ell}$, $T(N)$ et $Cl(N)^{(p)}$.

LEMME 3. - Soient M et N deux sous-corps de H contenant K , tels que

$M \subset N$ et $(H:M) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $Cl(N)^{(p)}\backslash Cl(N)_0^{(p)} = Cl(M)^{(p)}\backslash Cl(M)_0^{(p)}$.

ii) Le quotient $(h_N/h_{N_0})\cdot(h_M/h_{M_0})^{-1}$, où l'on a posé $N_0 = H_0 \cap N$ et $M_0 = H_0 \cap M$, est une unité p-adique.

iii) $T(N)_{ell} = T(M)_{ell}$.

Démonstration. - L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ ii) résulte du fait que l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_p[Gal(H/M_0)]$ est semi-simple.

Pour prouver l'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ iii) observons d'abord que la formule (1) du §1.1 prouve l'identité

$$[Z(N) : C(N)\cdot Z(N_0)\cdot Z(M)] = a\cdot(h_N/h_{N_0})\cdot(h_M/h_{M_0})^{-1} ,$$

où a est un entier, premier à p dès que $(N : M) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Considérons alors les modules de p-torsion

$$A = (C(N)\cdot Z(N_0)\cdot Z(M)) \cap Z(H)^p / C(N)^p \cdot Z(N_0)^p \cdot Z(M)^p ,$$

$$B = C(N) \cap Z(H)^p / (C(M) \cap Z(H)^p)\cdot C(N)^p ,$$

de sorte que ii) (resp. iii)) équivaut à $A = \{0\}$ (resp. $B = \{0\}$) ; il nous suffit donc de vérifier que la flèche naturelle

$$f : B \to A$$

est un isomorphisme. Mais, comme le degré $(H:M)$ et l'ordre du groupe fini $C(N_0) = e(N_0)$ sont premiers à p , on a les identités

$$C(N) \cap (C(N)^p \cdot Z(N_0)^p \cdot Z(M)^p) = (C(N) \cap (Z(N_0)^p \cdot Z(M)^p))\cdot C(N)^p$$

$$= (C(N) \cap Z(M)^p)\cdot C(N)^p = (C(M) \cap Z(H)^p)\cdot C(N)^p ,$$

$$(C(N)\cdot Z(N_0)\cdot Z(M))\cap Z(H)^p = ((C(N)\cdot Z(M))\cap Z(H)^p)\cdot Z(N_0)^p$$
$$= (C(N)\cap Z(H)^p)\cdot Z(N_0)^p\cdot Z(M)^p ,$$

qui prouvent respectivement la trivialité du noyau et du conoyau de f et complètement la démonstration du lemme.

PROPOSITION. - Soient M et N comme dans le lemme 3 . Alors, les modules $T(N)$ et $Cl(N)^{(p)}$ sont liés par les relations suivantes :

i) si $T(N) = T(M)$, on a $T(N)_{ell} = T(M)_{ell}$ et donc $Cl(N)^{(p)}\backslash Cl(N)_0^{(p)} = Cl(M)^{(p)}\backslash Cl(M)_0^{(p)}$;

ii) si $\mu_p \subset N$ et $Cl(N)^{(p)} = Cl(N)_0^{(p)}$ (resp. $= \{0\}$) , on a $T(N) = T(N)_{p+1}$ (resp. $= \{0\}$) .

Démonstration. - On a $T(N) = T(M)$ si et seulement si les deux inclusions naturelles

$$Z(M)\cap Z_{pr}/Z(M)\cap Z(H)^p \hookrightarrow Z(N)\cap Z_{pr}/Z(N)\cap Z(H)^p ,$$
$$Z(M)\cap Z(H)^p/Z(M)^p \hookrightarrow Z(N)\cap Z(H)^p/Z(N)^p ,$$

sont des isomorphismes, d'où l'implication

$$T(N) = T(M) \Longrightarrow T(N)_{ell} = T(M)_{ell} ;$$

celle-ci, jointe au lemme 3, prouve l'assertion i) de la proposition. Quant à l'assertion ii) elle est démontrée dans [11] § 6 .

§ 6 - QUESTIONS ET PROBLEME ; UNE REPONSE PARTIELLE

Les exemples que nous avons pu traiter, cf. §7 infra, suggèrent l'existence de liens plus étroits entre $Cl(N)^{(p)}$ et $T(N)_{ell}$ ainsi que l'existence d'une sorte de dualité entre les modules T_k et $T_{m(k)}$. Précisément, on est conduit à avancer les hypothèses de travail suivantes :

Question 1. - Soient N un sous-corps de H contenant K tel que $(H:N) \not\equiv 0 \pmod{p}$, et k un entier associé à G_0, $k \neq 0$. A-t-on l'équivalence

$$Cl(N)_k^{(p)} = \{0\} \Leftrightarrow (T(N)_{ell})_k = \{0\} \ ?$$

Question 2. - Est-il vrai que pour tout couple d'entiers k et $\bar{k}$ associés à G_0, $k \neq 0$ et $\neq p+1$, tels que $\bar{k} = m(k)$, on a la décomposition en somme directe

$$T_k = (T_{ell})_k \oplus \mathrm{Im}(j_{\bar{k}}^{(u)} | (T_{ell})_{\bar{k}})$$

du $(R/p)[G]$-module T_k ?

Nous ne savons répondre ni à l'une ni à l'autre de ces deux questions ; cependant, la question 2 ci-dessus conduit à poser le problème suivant :

Problème. - Déterminer l'ensemble $A(K,p)$ des entiers k associés à G_0, $k \neq 0$ et $\neq p+1$, tels que l'application $j_k^{(u)}$ induise un (R/p)-isomorphisme de T_k sur $T_{m(k)}$.

Remarque. - Si $k \in A(K,p)$, on a $|T_k| = |T_{m(k)}|$.

Le fait étonnant est que la description de T_k en termes de (valeurs de) séries d'Eisenstein nous permet de prouver que $A(K,p)$ est "presque" aussi grand que possible : on a l'inégalité

$$|A(K,p)| \geq |G_0| \cdot (p-3)/(p-1) \ .$$

En effet, soit $I(e,p)$ l'ensemble des entiers k associés à G_0, $k \neq 0$ et $\neq p+1$, tels que chacun des $(p+1-e)/e$ caractères

$$\sigma^i \ , \ 0 < i < p+1 \ , \ e \mid i \ ,$$

soit distinct de σ^k et de σ^{pk} ; on a donc

$$|I(e,p)| = |G_0| - 2(p+1)/e = (p-3)(p+1)/e \ ,$$

et le théorème ci-dessous fournit une réponse partielle au problème précédent.

THEOREME. - Pour tout corps quadratique imaginaire K , tel que $|e(K)| = e$, et tout nombre premier $p \geq 5$ inerte dans K , on a l'inclusion

$$I(e,p) \subset A(K,p) .$$

Dans [12] , nous réduisons l'assertion de ce théorème aux congruences correspondantes entre séries d'Eisenstein ; pour la démonstration de celles-ci, se rapporter à [13] .

§7 - EXEMPLES NUMERIQUES

Dans ce paragraphe, pour chacun des 12 couples (K,p) formés d'un corps quadratique imaginaire K de nombre de classes d'idéaux h égal à 1 ou 2 , et d'un nombre premier $p = 3$, 5 ou 7 inerte dans K tel que

$$Cl(H)^{(p)} \neq \{0\} ,$$

nous explicitons aussi précisément qu'il nous a été possible les $(R/p)[G]$ -modules

$$T \quad \text{et} \quad Cl(H)^{(p)} .$$

Suivant les valeurs de h et p , ces couples se répartissent

h\p	3	5	7
1	0	1	0
2	3	4	4

en nombre comme indiqué par le tableau ci-contre ; si $-D < 0$ désigne le discriminant de K , la liste en est la suivante :

D	115	123	148	163	232	235	267	403
p	3	5;7	5;7	5	3;5	7	5;7	3

Pour la détermination de T nous utilisons les résultats de [12], ainsi que les tables de [11] appendices B et E. Désignons par M le plus petit sous-corps de H contenant $K(\mu_p)$ tel que le groupe de Galois de l'extension H/M fixe T point par point ; d'après la prop. §5, on a donc

$$Cl(H)^{(p)} = Cl(M)^{(p)} ,$$

autrement dit le quotient h_H/h_M est premier à p. Dans chacun des 12 cas étudiés, on vérifie l'inclusion

$$M \subset H_0(\mu_p) .$$

Mais, comme $H_0(\mu_p)$ est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$, ceci permet d'utiliser les résultats de H. Hasse [5]. Pour cela, on décompose le caractère de la représentation régulière de $Gal(M/\mathbb{Q})$ en somme de caractères irréductibles sur $\mathbb{Q}$, et on calcule la "contribution" de chacun des caractères irréductibles impairs à la p-partie de la composante imaginaire

$$h_M^- = h_M/h_M^+$$

du nombre de classes d'idéaux h_M de M ; ici h_M^+ désigne le nombre de classes d'idéaux du sous-corps réel maximal M^+ de M. Pour chaque caractère irréductible impair de $M/\mathbb{Q}$, on constate que cette contribution est 1 ou p.

Pour en déduire, à l'aide de la connaissance précise de T, la structure galoisienne du p-groupe de Sylow de $Cl(M)$ il nous suffit alors de vérifier que le nombre de classes réelles h_M^+ de M est premier à p. C'est l'obstacle le plus sérieux ; en utilisant les résultats fournis par l'inégalité du miroir de H.W. Leopoldt, cf. [7] et [3], on se ramène à la détermination de la p-partie du nombre de classes d'idéaux de certains sous-corps N^+ de M^+, dont le groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/4$ ou $\mathbb{Z}/6$.

▪ Lorsque $Gal(N^+/\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ ou $\mathbb{Z}/4$ nous avons fait appel aux tables suivantes :

i) table de nombre de classes d'idéaux des corps quadratiques réels ;

ii) table de nombre de classes d'idéaux des corps cycliques réels de degré 4, établie par M.N. Gras [14] .

▪ Lorsque $Gal(N^+/\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/6$ il n'existe pas, à notre connaissance, de table convenable ; aussi, quand nous l'avons pu, nous avons utilisé la majoration de h_N^+ qui résulte des minorations de discriminants (des corps totalement réels) établies par A.M. Odlyzko, cf. [15] et [8] , [9] .

▪ Lorsque $p = 7$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-235})$, nous avons eu besoin d'un calcul direct ; le corps incriminé est

$$N^+ = \mathbb{Q}(\sqrt{7.235}, \cos(2\pi/7)) .$$

Soient $u = (26647 + 657\sqrt{1645})/2$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{7.235})$, et $v_i = (\sin(2\pi/7))^i(\sin(3\pi/7)^{3-i}/(\sin(\pi/7))^3$, $i = 1,2$, une unité de $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/7))$ dont la classe engendre la ν^{2i}-composante de $Z(\mathbb{Q}(\cos(2\pi/7)))\otimes(R/7)$. Comme les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{7.235})$ et $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/7))$ ne possèdent pas de classes d'idéaux d'ordre 7 , on déduit de la formule analytique pour le nombre de classes de N^+ de Leopoldt, cf. e.g.[3] , le fait que le corps N^+ possède des classes d'idéaux d'ordre 7 si et seulement si $u.v_1$ ou $u.v_2$ est une puissance 7-ième dans $Z(N^+)$; s'il en était ainsi, l'une des traces

$$t_i \overset{dfn}{=} \sum_{g\in Gal(N^+/\mathbb{Q})} \sqrt[7]{(u.v_i)^g} \quad , \quad i = 1 \text{ ou } 2 ,$$

serait un entier rationnel. Un calcul facile prouve qu'il n'en est rien : on trouve

$$6,35 < t_1 < 6,37 \quad , \quad 6,95 < t_2 < 6,96 ;$$

ainsi h_N^+ est premier à 7 .

De la sorte, on obtient une description complète du p-groupe de Sylow de $Cl(H)$; en retour, celle-ci permet de préciser le sous-module T_{ell} de T engendré par les unités elliptiques qui sont des puissances p-ièmes dans H . Dans chacun des 12 cas, on vérifie ainsi, pour

chaque couple d'entiers k et $\bar{k}$, associés à G_0, tels que $\bar{k} = m(k)$, les isomorphismes de $(R/p)[G]$-modules

$$Cl(H)_k^{(p)} \simeq (T_{ell})_k \ , \ k \neq 0 \ ,$$

$$T_k \simeq (T_{ell})_k \oplus Im(j_k^{(u)} \mid (T_{ell})_{\bar{k}}) \ , \ k \neq 0 \ \text{ et } \neq p+1 \ ,$$

de sorte que la réponse aux questions 1 et 2 du § 6 est OUI. On vérifie aussi l'isomorphisme

$$Cl(H)_0^{(p)} \simeq Hom_{R/p}((T/T_{ell})_{p+1}, \mu_p \otimes R) \ ,$$

et on constate que la p-extension abélienne non ramifiée maximale L de H est engendrée sur H par les racines p-ièmes des unités p-primaires de H ; en particulier, le groupe de Galois de l'extension L/H est tué par p, et le sous-corps réel maximal $H_0(\mu_p)^+$ de $H_0(\mu_p)$ ne possède pas de classes d'idéaux d'ordre p.

Remarque. - Il serait sûrement instructif de tester les questions 1 et 2 sur un couple (K,p) pour lequel on ait

$$T \neq T(H_0(\mu_p)) \ ;$$

en effet, nous ne connaissons aucun exemple de cette situation !!!

Rappel. - Les couples (K,p) avec K principal et $p = 11$ ou 13 inerte dans K, sont étudiés dans [11] appendice B ; pour le couple $(K,p) = (\mathbb{Q}(\sqrt{-19}),13)$, la réponse aux questions 1 et 2 est OUI.

DEFINITION. - On note R_p le complété $R \otimes \mathbb{Z}_p$ de l'anneau des entiers R de K.

p = 3

(a$_1$) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-115})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{-23},\sqrt{5})$. Posons $N = K(\sqrt{69})$. On trouve

$$T = T_4 = T(N)_4 \simeq R/3 \ ,$$

$$Cl(H)^{(3)} = Cl(H)_0^{(3)} \simeq R/3 \ ,$$

$$T_{ell} = \{0\} \ .$$

Le $(R/3)$-espace vectoriel T est engendré par la classe de l'unité fondamentale 3-primaire

$$u_{69} = -1 + 3(9+\sqrt{69})/2$$

du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{69})$. Le corps $H(\sqrt[3]{u_{69}})$ est la 3-extension abélienne non ramifiée maximale de H .

(a$_2$) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-403})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{-31},\sqrt{13})$. Situation identique à la précédente, il suffit de remplacer partout 69 par 93 ; l'unité fondamentale 3-primaire du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{93})$ est

$$u_{93} = 1 + 3(9+\sqrt{93})/2 \ .$$

(b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-58})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{29},\sqrt{-2})$. Posons $N = K(\sqrt{-87})$. On trouve

$$T = T_4 = T(N)_4 \simeq R/3 \ ,$$

$$Cl(H)^{(3)} = Cl(N)_4^{(3)} \simeq Cl(\mathbb{Q}(\sqrt{-87}) \otimes R_3 = R/3 \ ,$$

$$T_{ell} = T \ .$$

Soit $u_{29} = 1 + (3+\sqrt{29})/2$ l'unité fondamentale 3-primaire de $\mathbb{Q}(\sqrt{29})$; la 3-extension abélienne non ramifiée maximale de H est le corps $H(\sqrt[3]{u_{29}})$.

p = 5

(a$_1$) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-163}) = H_0$, cf. [10] appendice. Posons $N_1 = K(\sqrt{5})$ et $N_2 = K(\mu_5)$; on a donc $(N_2 : N_1) = 2$. On trouve

$$T = T_{12} \oplus T_{18} \ ,$$

avec $T_{12} = T(N_1)_{12} \simeq R/5$ et $T_{18} = T(N_2)_{18} \simeq R/5$,

$$Cl(H)^{(5)} = Cl(N_1)^{(5)}_{12} \simeq Cl(\mathbb{Q}(\sqrt{-5\cdot 163}))\otimes R_5 = R/5 \ ,$$

$$T_{ell} = T_{12} \ .$$

Le $(R/5)$-espace vectoriel T_{18} est engendré par la classe de l'unité 5-primaire

$$v = w^2\cdot w^s$$

de N_2 ; ici w désigne une solution de l'équation quadratique

$$w+w^{-1} = 7\cdot((1+\sqrt{5})/2)^8\cdot\sqrt{163(5+\sqrt{5})/2}$$

de discriminant

$$\Delta = (163\cdot 7^2+3571\sqrt{5})/2 = ((1+\sqrt{5})/2)^8\cdot(217+55\sqrt{5})/2 \ ,$$

et $s = (a_{163},H/K)$ l'automorphisme d'Artin de H/K associé à l'idéal a_{163} de K de norme 163 . Le corps $H(\sqrt[5]{v})$ est la 5-extension abélienne non ramifiée maximale de H .

(a2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-123})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{41},\sqrt{-3})$.

(a3) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-58})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{29},\sqrt{-2})$. Situations identiques à la précédente, il suffit de remplacer $\sqrt{-5.163}$ par $\sqrt{-5.123}$ (resp. $\sqrt{-5.58}$).

En particulier, il existe une unité 5-primaire v de $N_2 = K(\mu_5)$ dont la classe engendre T_{18} . La 5-extension abélienne non ramifiée maximale de H est le corps $H(\sqrt[5]{v})$; nous n'avons pas déterminé explicitement v .

(b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-37})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{37},\sqrt{-1})$. Posons $N_1 = K(\sqrt{5.37})$, et désignons par N_2 le sous-corps de $H_0(\mu_5)$, cyclique de degré 4 sur K , fixé par l'automorphisme d'Artin $(a_{74},H/K)$ de H/K associé à l'idéal a_{74} de K de norme 74 ; on a donc

$$N_1\cdot N_2 = H_0(\mu_5) \quad \text{et} \quad N_1\cap N_2 = K \ .$$

On trouve

$$T = T_{12}\oplus T_{18} \ ,$$

avec $T_{12} = T(N_1)_{12} \simeq R/5$ et $T_{18} = T(N_2)_{18} \simeq R/5$,

$Cl(H)^{(5)} = Cl(N_2)_{18}^{(5)} \simeq R/5$,

$T_{ell} = T_{18}$.

Le $(R/5)$-espace vectoriel T_{12} est engendré par la classe de l'unité fondamentale 5-primaire

$$u_{185} = 68 + 5\sqrt{185}$$

du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5.37})$. Le corps $H(\sqrt[5]{u_{185}})$ est la 5-extension abélienne non ramifiée maximale de H .

(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-267})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{89},\sqrt{-3})$. Désignons par N le sous-corps de $H_0(\mu_5)$, cyclique de degré 4 sur K , fixé par l'automorphisme d'Artin $(a_{89},H/K)$ de H/K associé à l'idéal a_{89} de K de norme 89 ; on a donc

$$H_0 \cdot N = H_0(\mu_5) \quad \text{et} \quad H_0 \cap N = K .$$

On trouve

$T = T_6 = T(N)_6 \simeq R/5$,

$Cl(H)^{(5)} = Cl(N)_6^{(5)} \simeq R/5$,

$T_{ell} = T$.

Soit $u_{89} = 500 + 53\sqrt{89}$ l'unité fondamentale 5-primaire de $\mathbb{Q}(\sqrt{89})$; la 5-extension abélienne non ramifiée maximale de H est le corps $H(\sqrt[5]{u_{89}})$.

p = 7

(a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-123})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{41},\sqrt{-3})$. Posons $M_1 = K(\sqrt{21})$, $M_2 = K(\cos(2\pi/7))$ et $N_1 = H_0 \cdot M_1$, $N_2 = H_0 \cdot M_2$; on a donc

$$(N_1 : M_1) = (N_2 : M_2) = 2 , \quad N_1 . N_2 = H_0(\mu_7) \quad \text{et} \quad N_1 \cap N_2 = H_0 .$$

On trouve

$T = T_{24} \oplus T_{32}$,

avec $T_{24} = T(N_1)_{24} \simeq (R/7)^2$ et $T_{32} = T(N_2)_{32} \simeq (R/7)^2$,

$$Cl(H)^{(7)} = Cl(M_1)_{24}^{(7)} \oplus Cl(M_2)_{32}^{(7)} ,$$

avec $Cl(M_1)_{24}^{(7)} \simeq Cl(\mathbb{Q}(\sqrt{-7.41})) \otimes R_7 = R/7$ et $Cl(M_2)_{32}^{(7)} \simeq R/7$

$$T_{ell} = T(M_1)_{24} \oplus T(M_2)_{32} ,$$

avec $T(M_1)_{24} \simeq R/7 \simeq T(M_2)_{32}$.

Le $(R/7)$-espace vectoriel $(T(N_1)/T(M_1))_{24}$ (resp. $(T(N_2)/T(M_2))_{32}$) est engendré par la classe de l'unité fondamentale 7-primaire

$$u_{861} = -1 + 7(3.7^2 + 5\sqrt{861})/2$$

du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{7.123})$ (resp. d'une unité 7-primaire v de N_2) . Le corps $H(\sqrt[7]{u_{861}}, \sqrt[7]{v})$ est la 7-extension abélienne non ramifiée maximale de H .

(b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-37})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{37}, \sqrt{-1})$. Posons $N = K(\sqrt{7}, \cos(2\pi/7))$; on a donc

$$H_0 \cdot N = H_0(\mu_7) \quad \text{et} \quad H_0 \cap N = K .$$

On trouve

$$T = T_8 = T(N)_8 \simeq R/7 ,$$

$$Cl(H)^{(7)} = Cl(N)_8^{(7)} \simeq R/7 ,$$

$$T_{ell} = T .$$

Soit $u_{37} = 6 + \sqrt{37}$ l'unité fondamentale 7-primaire de $\mathbb{Q}(\sqrt{37})$; la 7-extension abélienne non ramifiée maximale de H est le corps $H(\sqrt[7]{u_{37}})$.

(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-267})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{89}, \sqrt{-3})$. Posons $N_1 = K(\sqrt{-7})$, $N_2 = K(\cos(2\pi/7))$ et $N = N_2(\sqrt{21})$; on a donc

$$N_1 . N_2 = K(\mu_7) , \quad N_1 \cap N_2 = K \quad \text{et} \quad N_2 = N \cap K(\mu_7) .$$

On trouve

$$T = T_8 \oplus T_{24} \oplus T_{32} ,$$

avec $T_8 = T(N)_8 \simeq R/7$, $T_{24} = T(N_1)_{24} \simeq R/7$ et $T_{32} = T(N_2)_{32} \simeq R/7$,

$$Cl(H)^{(7)} = Cl(N)^{(7)} = Cl(N)_8^{(7)} \oplus Cl(N_2)_{32}^{(7)} ,$$

avec $Cl(N)_8^{(7)} \simeq R/7 \simeq Cl(N_2)_{32}^{(7)}$,

$$T_{ell} = T_8 \oplus T_{32} .$$

Le $(R/7)$-espace vectoriel $T(N_1)_{24}$ est engendré par la classe de l'unité fondamentale 7-primaire

$$u_{1869} = -1 + 5.7(15.7^2 + 17\sqrt{1869})/2$$

du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{7.267})$. Soit $u_{89} = 500 + 53\sqrt{89}$ l'unité fondamentale 7-primaire de $\mathbb{Q}(\sqrt{89})$; la 7-extension abélienne non ramifiée maximale de H est le corps $H(\sqrt[7]{u_{1869}}, \sqrt[7]{u_{89}})$.

(d) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-235})$, $H_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-47})$. Posons $N_1 = K(\cos(2\pi/7))$ et $N_2 = K(\mu_7)$; on a donc $(N_2 : N_1) = 2$. On trouve

$$T = T_{16} \oplus T_{40} ,$$

avec $T_{16} = T(N_1)_{16} \simeq R/7$ et $T_{40} = T(N_2)_{40} \simeq R/7$,

$$Cl(H)^{(7)} = Cl(N_1)_{16}^{(7)} \simeq R/7 ,$$

$$T_{ell} = T_{16} .$$

Le $(R/7)$-espace vectoriel T_{40} est engendré par la classe d'une unité 7-primaire v de N_2 ; la 7-extension abélienne non ramifiée maximale de H est le corps $H(\sqrt[7]{v})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. GILLARD, Unités elliptiques et unités cyclotomiques, (1979) à paraître.

[2] R. GILLARD et G. ROBERT, Groupes d'unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France, 107 (1979) à paraître.

[3] G. GRAS, Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés, Ann. Inst. Fourier, 27 (1977) 1-66 .

[4] B.H. GROSS, On the factorization of p-adic L-series, (1979) à paraître.

[5] H. HASSE, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie Verlag, Berlin (1952).

[6] H. HASSE, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme der algebraischen Zahlkörper II, 2te Auflage, Physica Verlag, Würzburg-Wien (1965).

[7] H.W. LEOPOLDT, Zur Strucktur der l-Klassengruppe galoisscher Zahlkörper, J. rein. u. and. Math., 199 (1958) 165-174.

[8] J. MASLEY, Odlyzko bounds and class number problems, dans Algebraic Number fields (A. Fröhlich editor, 1977) 465-473.

[9] G. POITOU, Minorations de discriminants (d'après A.M. Odlyzko), exp. Bourbaki 470 (février 1976).

[10] G. ROBERT, Unités elliptiques, Bull. Soc. math. France, mémoire 36 (1973).

[11] G. ROBERT, Nombres de Hurwitz et unités elliptiques, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., (4) 11 (1978) 297-389.

[12] G. ROBERT, Un critère logarithmique de p-primarité (titre provisoire), en cours de rédaction.

[13] G. ROBERT, Congruences entre séries d'Eisenstein dans le cas supersingulier (titre provisoire), en cours de rédaction.

Tables

[14] M.N. GRAS, Tables numériques du nombre de classes et des unités des extensions cycliques réelles de degré 4 de $\mathbb{Q}$, Publ. math. Univ. Besançon, (1977-1978, fascicule II).

[15] A.M. ODLYZKO, Discriminants bounds, lettre, 29 nov. 1976.

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)

(mai 1979)