SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

ROLAND GILLARD

Unités elliptiques et unités cyclotomiques

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 7 (1978-1979), exp. n° 1, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1978-1979__7__A1_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
7 décembre 1978
Grenoble

UNITES ELLIPTIQUES ET UNITES CYCLOTOMIQUES

par
Roland GILLARD

Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne contenant un corps quadratique imaginaire k ; désignons par F la sous-extension réelle maximale de $K/\mathbb{Q}$. Si tous les nombres premiers ramifiés dans $F/\mathbb{Q}$ le sont aussi dans K/k , on exprime l'unité elliptique fondamentale φ_K de K en fonction de l'unité cyclotomique fondamentale θ_F de F . Si K/k est ramifiée mais si l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée, on obtient seulement une expression d'une puissance de φ_K à l'aide des unités cyclotomiques de certains sous-corps de F . Enfin, si K/k est non ramifiée, on donne un résultat analogue. Signalons que [2] traite déjà l'exemple où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ et $K = k(\sqrt[p]{1})$.

Dans la suite, tous les corps considérés sont plongés dans $\mathbb{C}$.

§ 1. RESUME SUR LES UNITES ELLIPTIQUES.

1.1 Soit $L = [w_1, w_2]$ un réseau de $\mathbb{C}$, avec $\operatorname{Im} w_1/w_2 > 0$. Soit $a(L) = (w_1\overline{w}_2 - w_2\overline{w}_1)/2i$ l'aire du domaine fondamental de L . Posons

$$\eta(z,L) = s_2(L).z + \frac{\pi}{a(L)} \cdot \overline{z} \quad ,$$

où $s_2(L)$ désigne la limite pour $s \to 0$ de $\Sigma\, 1/\omega^2 |\omega|^{2s}$ (somme sur les éléments non nuls de L). Si $z \in L$, $\eta(z,L)$ est la quasi-période

relative à z de la fonction ζ de Weierstrass. En utilisant la fonction $\sigma(z,L)$, on introduit (*), cf. [3, 4e partie] pour ζ et σ ...,

$$\varphi(z,L) = e^{-\eta(z,L)z/2}.\sigma(z,L).\Delta^{1/12}(L) ,$$

où $\Delta^{1/12}(L)$ est la racine 12ème du discriminant

$$\Delta^{1/12}(L) = \left(\frac{2\pi i}{w_2}\right).q_o^{\frac{1}{12}}.\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_o^n)^2 \quad \text{avec} \quad q_o = \exp 2\pi i\, w_1/w_2 .$$

La fonction φ vérifie donc l'identité

$$(1) \qquad \forall w \in L \quad \varphi(z+w,L) = \varphi(z,L).\psi(w)\exp\frac{\eta(w)z - \eta(z)w}{2}$$

avec $\psi(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in 2L \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

1.2 Soient k un corps quadratique imaginaire, h et e le nombre de classes et le nombre de racines de l'unité de k. Pour $\mathfrak{f}$ idéal entier de k, soit $C\ell(\mathfrak{f})$ (resp. $k(\mathfrak{f})$) le groupe des classes (resp. le corps de classes) de rayon $\mathfrak{f}$. Désignons par f le plus petit entier > 0 dans $\mathfrak{f}$ et par $e(\mathfrak{f})$ le nombre de racines de l'unité de k congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$.

Supposons d'abord $\mathfrak{f} \neq (1)$. Disons qu'un couple $(t,\mathfrak{b})$ ($t \in k^*$, $\mathfrak{b}$ idéal de k premier à $\mathfrak{f}$) représente $C \in C\ell(\mathfrak{f})$ si et seulement si $t\mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1}$ est un idéal entier premier à $\mathfrak{f}$ et appartenant à C ; $(t,\mathfrak{b})$ et $(t',\mathfrak{b}')$ représentent la même classe si et seulement s'il existe $\xi \in k^*$ tel que $\mathfrak{b}' = \xi\mathfrak{b}$, $t'/\xi t \equiv 1 \mod^* \mathfrak{f}$. On a $f.t \in \mathfrak{b}$, et de (1) on déduit que

$$\varphi_{\mathfrak{f}}(C) = \varphi^{12f}(t,\mathfrak{b})$$

ne dépend pas du couple $(t,\mathfrak{b})$ représentant C.

Supposons $\mathfrak{f} = (1)$. Si C appartient à $C\ell(\mathfrak{f})$ et $\mathfrak{b}$ est un idéal de C^{-1}, désignons par β un générateur de $\mathfrak{b}^h$; posons

---

(*) La fonction φ ci-dessus ne diffère de celle de [4] que par un facteur i.

$$\delta(C) = (2\pi)^{-12h}\beta^{12}\Delta^{h}(\mathfrak{b}) ,$$

ce nombre est indépendant du choix de $\mathfrak{b}$ dans C^{-1} .

1.3 Soit K une extension abélienne de conducteur $\mathfrak{f}$ et μ_K le groupe des racines de l'unité dans K . Notons G le groupe $Gal(K/k)$ et I l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G]$. Pour $\sigma \in G$, on pose

$$\delta_K(\sigma) = \overline{\prod}\,\delta(C) \quad \text{si} \quad \mathfrak{f} = (1)$$

$$\varphi_K(\sigma) = \overline{\prod}\,\varphi_{\mathfrak{f}}(C) \quad \text{sinon,}$$

les produits étant pris sur l'ensemble des $C \in Cl(\mathfrak{f})$ dont l'image par l'application de réciprocité relative à K/k est σ . On définit $\varphi_K(u)$ (resp. $\delta_K(u)$) pour $u \in \mathbb{Z}[G]$ par multiplicativité.

Supposons d'abord $\mathfrak{f} \neq (1)$. Soit J l'idéal de $\mathbb{Z}[G]$, annulateur du $\mathbb{Z}[G]$-module μ_K . Cet idéal est engendré par les $(\mathfrak{A},K/k) - N(\mathfrak{A})$ où $\mathfrak{A}$ parcourt l'ensemble des idéaux de k premiers à $12f$ et où $(\mathfrak{A},K/k)$ (resp. $N(\mathfrak{A})$) désigne l'automorphisme d'Artin associé à $\mathfrak{A}$ (resp. la norme de $\mathfrak{A}$). On peut alors énoncer (cf. [4] et pour e) [1]) :

THEOREME 1. -

a) Si $u \in \mathbb{Z}[G]$, $\varphi_K(u)$ est un entier de K .

b) Si $u \in I$, $\varphi_K(u)$ est une unité de K .

c) Si $\sigma,\sigma' \in G$, $\sigma[\varphi_K(\sigma')] = \varphi_K(\sigma\sigma')$.

d) Si $\mathfrak{f}$ est produit d'au moins deux idéaux premiers distincts et $u \in \mathbb{Z}[G]$, $\varphi_K(u)$ est une unité.

e) Si $u \in J$, $\varphi_K(u)$ est la puissance d'ordre $12.f.e(\mathfrak{f})$ d'un élément de K .

Posons $\varphi_K = \varphi_K(1)$: dans l'introduction, cet élément est qualifié d'unité elliptique fondamentale : φ_K est en effet une unité sauf si $\mathfrak{f}$

est puissance d'un idéal premier $\mathfrak{p}$, auquel cas ce n'est une unité qu'en dehors de $\mathfrak{p}$. J'ai fait un abus de langage analogue pour θ_F cf. § 2.1. Le groupe des unités elliptiques propres de K est par définition

$$\Omega_K = \{x \in K^* \mid x^{12\,fe(\mathfrak{f})} \in \varphi_K(I \cap J)\} .$$

Supposons maintenant $\mathfrak{f} = (1)$. On peut énoncer (cf. [4]) en posant $J = \{\Sigma n(\sigma)\sigma \in \mathbb{Z}[G] \mid \overline{\prod} \sigma^{n(\sigma)} = 1\}$.

THEOREME 1'. -

a) Si $u \in I$, $\delta_K(u)$ est une unité de K .

b) Si $\sigma \in G$ et $u \in I$, $\sigma[\delta_K(u)] = \delta_K(\sigma u)$.

c) Si $u \in I \cap J$, $\delta_K(u)$ est la puissance d'ordre h.e d'un élément de K .

Le groupe des unités elliptiques propres de K est par définition

$$\Omega_K = \{x \in K^* \mid x^{h.e} \in \delta_K(I \cap J)\} .$$

Sans hypothèses sur $\mathfrak{f}$, on définit le groupe des unités elliptiques de K par

$$\mathcal{E}_K = \mu_K \cdot \overline{\prod} \Omega_{K'} ,$$

où K' parcourt l'ensemble des sous-extensions de K/k et où $\Omega_{K'}$ est défini en remplaçant K par K' dans tout ce qui précède.

§ 2. ENONCE DES RESULTATS.

On conserve les notations déjà introduites notamment dans l'introduction et aux paragraphes 1.2 et 1.4. On désigne par θ le caractère quadratique de $Gal(K/\mathbb{Q})$ défini par k . Pour n entier > 0 , posons $\zeta_n = \exp 2\pi i/n$.

Soit S l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans $K/\mathbb{Q}$ mais non dans K/k. Pour p dans S notons T_p, le groupe de ramification dans $K/\mathbb{Q}$: ceci permet de décomposer S en une réunion disjointe $S = \bigcup_{i\in I} S_i$, les éléments de S_i étant, pour chaque i, caractérisés par leur groupe de ramification. Soient J une partie de I et J_1 la partie complémentaire. Désignons par K_J^0 (resp. K_J^1) le sous-corps de K fixé par $\overline{\prod} T_p$, où le produit est pris sur la réunion des S_i pour $i \in J$ (resp. $i \in J_1$). Soit f_J^0 (resp. f_J) le conducteur de K_J^0 (resp. de K_J^1). Soit $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$; posons

$$\theta_J = \pm \left[N_{\mathbb{Q}\left(\zeta_{f_J^0}\right)/K_J^0} \left(1-\zeta_{f_J^0}\right)\right]^{1/2} ,$$

$$\beta_J(\sigma) = \theta(\sigma).\Sigma B_1\left(\frac{a}{f_J^1}\right)$$

où $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, $f_J^1 = \mathrm{p.p.c.m.}(f, f_J)$ et où dans la somme a parcourt l'ensemble des entiers de 1 à f_J^1, premiers à f_J^1 et tels que la restriction de l'automorphisme $\zeta_{f_J^1} \to \zeta_{f_J^1}^a$ à K_J^1 soit égale à celle de σ.

Posons

$$m_J = \frac{[K:K_I^0]^2}{[K:K_J^0][K:K_J^1]}$$

$$\beta_J = \sum_{\sigma\in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \beta_J(\sigma)\sigma^{-1} \quad \text{et}$$

$$\gamma_J = \overline{\prod_{\substack{p\mid f \\ p\nmid f_J^0}}} (1-\sigma_p^{-1})$$

où σ_p désigne l'automorphisme de Frobenius de p dans $K_J^0/\mathbb{Q}$.
Soient $\alpha_J = \beta_J \cdot \gamma_J$ et $\alpha_J(\sigma)$ le coefficient de σ^{-1} dans α_J, pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Avec tout ceci, on peut énoncer :

THEOREME 2. - Si K/k est une extension ramifiée, on a

$$\varphi_K^{[K:K_I^o]^2} = \varepsilon \prod_{J \subseteq I} \theta_J^{-12.f.e(\mathfrak{f}).\alpha_J.m_J} \quad , \text{ avec } \varepsilon \in \mu_K .$$

Remarque 1 : Soit c la conjugaison complexe, on voit facilement que $\beta(\sigma c) = \beta(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$; α_J peut donc se mettre sous la forme $(1+c)\alpha'_J$ avec $\alpha'_J = \Sigma \alpha_J(\sigma)\sigma^{-1}$, somme prise sur $\mathrm{Gal}(K/k)$. Ainsi $\theta_J^{\alpha_J}$ est égal à $\theta_J^{2\alpha'_J}$ si K_J^o est réel et à $\pm \left[N_{\mathbb{Q}\left(\zeta_{f_J^o}\right)/F_J}\left(1-\zeta_{f_J^o}\right)\right]^{\alpha'_J/2}$ si K_J^o est imaginaire, de sous-corps réel maximum F_J .

Remarque 2 : Si K_J^1 est réel, a et $f_J^1 - a$ figurent dans chacune des sommes $\beta_J(\sigma)$, d'où $\beta_J(\sigma) = 0$ et donc $\alpha_J = 0$. Ceci prouve que certains J peuvent être supprimés dans le produit du théorème 2 ; à ce sujet voir aussi § 4.

Si tous les nombres premiers ramifiés dans $F/\mathbb{Q}$ le sont dans K/k , S se réduit à l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans $k/\mathbb{Q}$ mais non dans $F/\mathbb{Q}$: si S est vide, on a $I = \phi$ et $K_I^o = K_I^1 = K$; la remarque 1 s'applique et dans ce cas les conducteurs f_o et f_1 de F et K ont les mêmes facteurs premiers. Si S est non vide, I est réduit à un élément, $\alpha_\phi = 0$ d'après la remarque 2 ; enfin on a $K_I^o = F$, $K_I^1 = K$. On peut énoncer :

COROLLAIRE. - Si tous les nombres premiers ramifiés dans $F/\mathbb{Q}$ le sont dans K/k , en désignant par f_o et f_1 les conducteurs de F et K , on a

$$\varphi_K = \varepsilon \theta_F^{-12fe(\mathfrak{f})} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)} \alpha(\sigma)\sigma^{-1}$$

avec $\varepsilon \in \mu_K$, avec $\theta_F = \pm \left[N_{\mathbb{Q}\left(\zeta_{f_o}\right)/F}\left(1-\zeta_{f_o}\right)\right]^{1/2}$ et $\alpha(\sigma) = \Sigma B_1\left(\frac{a}{f_1}\right)$ où dans la somme a parcourt l'ensemble des

entiers de 1 à f_1 , premiers à f_1 et tels que la restriction de l'automorphisme $\zeta_{f_1} \to \zeta_{f_1}^a$ à K soit précisément σ .

Supposons maintenant K/k non ramifiée. On a alors $K_I^o = \mathbb{Q}$, $\gamma_J = 1$.

THEOREME 3. - Si K/k est non ramifiée, soit $\Sigma n(\sigma)\sigma$ un élément de $\mathbb{Z}[G]$ vérifiant $\Sigma n(\sigma) = 0$. On a

$$\prod_{\sigma\in G} \delta_K(\sigma)^{n(\sigma).[K:\mathbb{Q}]^2} = \epsilon\left(\prod_{J\subseteq I} \theta_J^{-12.f.e(\mathfrak{f}).\alpha_J.m_J}\right)^{\sum_{\sigma\in G} n(\sigma)\sigma}$$

avec $\epsilon \in \mu_K$.

§ 3. DEMONSTRATIONS.

3.1. Pour démontrer les théorèmes 2 et 3, utilisons l'homomorphisme du groupe des unités de K dans $\mathbb{C}^{[K:k]}$ composé de

$$u \longrightarrow \sum_{\sigma\in G} \log|\sigma(u)|.\sigma$$

et de l'isomorphisme entre $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}^{[K:k]}$:

$$\sum_{\sigma\in G} \alpha(\sigma)\sigma \longrightarrow \left(\sum_{\sigma\in G} \alpha(\sigma)\chi(\sigma)\right)_\chi$$

où les composantes du produit sont indicées par les caractères irréductibles de G à valeurs dans $\mathbb{C}$. Le noyau de l'homomorphisme composé est μ_K .

Soit χ un caractère de G ; désignons par χ_o le caractère de $Gal(F/\mathbb{Q})$ correspondant à χ via l'isomorphisme $Gal(F/\mathbb{Q}) \simeq G$, et par χ_1 le caractère de $Gal(K/\mathbb{Q})$ prolongeant χ et vérifiant $\chi(c) = -1$. Notons $\mathfrak{g}$ (resp. g_o, g_1) le conducteur de χ (resp. χ_o, χ_1) . Pour $\mathfrak{g}$, on emploie des notations analogues à celles introduites en 1.2 pour $\mathfrak{f}$.

On identifie χ (resp. χ_o, χ_1) au caractère de $C\ell(\mathfrak{g})$ (resp. aux caractères de Dirichlet primitifs correspondants).

Posons

$$\Sigma_J^o(\chi) = \frac{1}{[K:K_J^o]} \sum_{\sigma \in Gal(K/\mathbb{Q})} \chi_o(\sigma) \log \left| \sigma\left(\theta_J^{2\gamma_J}\right) \right|$$

$$\Sigma_J^1(\chi) = \frac{1}{[K:K_J^1]} \sum_{\sigma \in Gal(K/\mathbb{Q})} \chi_o(\sigma)\beta_J(\sigma) \quad , \text{ et}$$

$$\begin{cases} \Sigma(\chi) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\varphi_K(\sigma)| & \text{si } \mathfrak{f} \neq (1) \\ \\ \Sigma(\chi) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\delta_K(\sigma)| & \text{si } \mathfrak{f} = (1) \ . \end{cases}$$

Pour démontrer les théorèmes 2 et 3, il suffit de prouver l'égalité entre $[K:K_I^o]^2 . \Sigma(\chi)$ et $-12 f e(\mathfrak{f}) \sum_{J \subseteq I} m_J \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\sigma(\theta_J^{\alpha_J})|$ pour chaque χ (pour chaque χ non trivial si $\mathfrak{f} = 1$), c'est-à-dire après un changement de sommation

$$\Sigma(\chi) = -3 f e(\mathfrak{f}) \sum_{J \subseteq I} [\Sigma_J^o(\chi) . \Sigma_J^1(\chi)] \ .$$

En considérant χ comme un caractère de $Gal(K_J^o/\mathbb{Q})$ ou $Gal(K_J^1/\mathbb{Q})$, lorsque c'est possible, on peut écrire

$$\Sigma_J^o(\chi) = \prod_{\substack{p \mid f \\ p \nmid f_J^o}} (1 - \chi_o(p)) . \sum_{\sigma \in Gal(K_J^o/\mathbb{Q})} \chi_o(\sigma) \log |\sigma(\theta_J^2)|$$

$$= \prod_{\substack{p \mid f \\ p \nmid f_J^o}} (1 - \chi_o(p)) . \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_J^o)=1}}^{f_J^o} \chi_o(a) \log \left| 1 - \zeta_{f_J^o}^a \right| \ ,$$

si χ_o est trivial sur $Gal(K/K_J^o)$ et 0 sinon et

$$\Sigma_J^1(\chi) = \sum_{\sigma \in Gal(K_J^1/\mathbb{Q})} \chi_1(\sigma) \Sigma B_1\left(\frac{a}{f_J^1}\right)$$

$$= \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_J^1)=1}}^{f_J^1} \chi_1(a) B_1\left(\frac{a}{f_J^1}\right)$$

si χ_1 est trivial sur $Gal(K/K_J^1)$ et 0 sinon.

Pour $p \in S$, soit t_p un générateur de T_p, on a $\chi_1(t_p) = \chi_o(t_p)\theta(t_p) = -\chi_o(t_p)$ puisque p est ramifié dans $k/\mathbb{Q}$. Ainsi χ_1 est trivial sur T_p si et seulement si χ_o ne l'est pas. On a donc $\Sigma_J^o(\chi).\Sigma_J^1(\chi) \neq 0$ si et seulement si la réunion des S_i pour $i \in J$ est exactement l'ensemble des $p \in S$ tels que $\chi_o(t_p) = 1$. Pour chaque χ, ceci n'arrive que pour un seul ensemble J. On voit d'ailleurs que certains J n'interviennent jamais et peuvent dont être supprimés dans les produits des théorèmes 2 et 3. Les théorèmes 2 et 3 résultent alors de l'énoncé :

PROPOSITION. - Soit χ un caractère de G (non trivial si $\mathfrak{f} = (1)$), pour le sous-ensemble J ci-dessus, on a :

$$\Sigma(\chi) = -3 fe(\mathfrak{f}) \Sigma_J^o(\chi).\Sigma_J^1(\chi) .$$

La proposition est démontrée en 3.3 pour χ non trivial et 3.4 pour χ trivial et $\mathfrak{f} \neq (1)$.

3.2. Rassemblons d'abord les formules sur les fonctions L que nous utiliserons. Comme le caractère de $Gal(K/\mathbb{Q})$ induit par χ est égal à la somme de χ_1 et du caractère déduit de χ_o, on a

(2) $\quad L(s, \chi, K/k) = L(s, \chi_o, F/\mathbb{Q}).L(s, \chi_1, K/\mathbb{Q})$

d'où en regardant les diviseurs de $\mathfrak{f}$

(3) $\overline{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}}(1-\chi(\mathfrak{p})) = \overline{\prod_{p|f}}(1-\chi_o(p)).\overline{\prod_{p|f}}(1-\chi_1(p))$.

De plus, en faisant tendre s vers 0 dans (2), on obtient (χ non trivial)

(4) $L'(0,\chi,K/k) = L'(0,\chi_o,F/\mathbb{Q}).L(0,\chi_1,K/\mathbb{Q})$.

Enfin, en utilisant les équations fonctionnelles pour les fonctions dzéta d'Hurwitz et d'Epstein, ainsi que les valeurs classiques au point 1 , on trouve

(5) $L'(0,\chi,K/k) = -\frac{1}{6g\,e(\mathfrak{g})}\sum_{c\in Cl(\mathfrak{g})}\chi(c)\log|\varphi_{\mathfrak{g}}(c)|$ si $\mathfrak{g}\neq(1)$, cf. [5],

(5bis) $L'(0,\chi,K/k) = -\frac{1}{6e}\sum_{c\in Cl((1))}\chi(c)\log|\delta(c)|$ si $\mathfrak{g}=(1)$,

(6) $L'(0,\chi_o,F/\mathbb{Q}) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{a=1\\(a,g_o)=1}}^{g_o}\chi_o(a)\log|1-\zeta_{g_o}^{a}|$,

(7) $L(0,\chi_1,K/\mathbb{Q}) = -\sum_{\substack{a=1\\(a,g_1)=1}}^{g_1}\chi_1(a)B_1\left(\frac{a}{g_1}\right)$.

3.3. On suppose χ non trivial. Les formules (5) et (5bis) permettent d'exprimer $\Sigma(\chi)$ (cf. [4, §2.3, corollaire 2]) :

(8) $\Sigma(\chi) = -6fe(\bar{\mathfrak{f}})\overline{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}}(1-\chi(\mathfrak{p}))L'(0,\chi)$.

Le produit sur les diviseurs premiers de $\mathfrak{f}$ se décompose à l'aide de (3). De plus, on a

$$\Sigma_J^o(\chi) = \overline{\prod_{\substack{p|f\\p\nmid f_J^o}}}(1-\chi_o(p))\overline{\prod_{p|f_J^o}}(1-\chi_o(p))\sum_{\substack{a=1\\(a,g_o)=1}}^{g_o}\chi_o(a)\log|1-\zeta_{g_o}^{a}|$$

$$= -2\overline{\prod_{p|f}}(1-\chi_o(p)).L'(0,\chi_o,F/\mathbb{Q}) ,$$

puisque d'après 3.1 et le choix de J les diviseurs premiers de f_J^o

premiers à f, sont tels que $\chi_o(t_p) = -1$ c'est-à-dire $\chi_o(p) = 0$. De même :

$$\Sigma_J^1(\chi) = \prod_{p|f_J^1}(1-\chi_1(p)) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,g_1)=1}}^{g_1} \chi_1(a)B_1(\frac{a}{g_1})$$

$$= -\prod_{p|f}(1-\chi_1(p)).L(0,\chi_1,K/\mathbb{Q})$$

puisque par définition les diviseurs premiers de f_J^1 sont ceux de f et ceux de f_J et puisque les diviseurs premiers de f_J premiers à f sont dans la réunion des S_i pour i dans J donc vérifient $\chi_o(t_p) = 1$ d'où $\chi_1(p) = 0$.

Ceci achève la démonstration de la proposition pour χ non trivial.

3.4. Supposons pour finir χ trivial et $\bar{f} \neq (1)$. Dans ce cas, on a $J = I$ et $K_I^1 = K$, donc les diviseurs premiers de f_I^o ne sont pas dans S donc divisent f. Distinguons les éventualités suivantes :

■ Si f possède au moins deux facteurs premiers distincts, $\bar{f}$ aussi, donc φ_K et $\theta_I^{\gamma_I}$ sont des unités si bien que $\Sigma(\chi) = \Sigma_I^o(\chi) = 0$.

■ Si f est puissance d'un nombre premier p décomposé dans k, $\bar{f}$ est composé, φ_K est une unité d'où $\Sigma(\chi) = 0$. De plus $\Sigma_I^1(\chi)$ contient en facteur $1 - \theta(p)$, donc est nul.

■ Si f est puissance d'un nombre premier p inerte (resp. ramifié) dans k, on pose $r = 1$ (resp. $r = 2$). Soient $\mathfrak{p}$ le diviseur premier de p dans k, β_o un générateur de $\mathfrak{p}^h$ et C_o la classe d'idéaux de $\mathfrak{p}$; d'après [4, §2.3, théorème 2], on a

$$\Sigma(\chi) = \frac{fe(\bar{f})}{e} \sum_C \log\left|\frac{\Delta(\mathfrak{b})}{\Delta(\mathfrak{b}\mathfrak{p})}\right|$$

$$= \frac{fe(\bar{f})}{e.h} \sum_C \log\left|\frac{\delta(C).\beta_o^{12}}{\delta(C.C_o^{-1})}\right|$$

où les sommes portent sur les éléments C du groupe des classes de k , $\mathfrak{b}$ et C étant reliés comme en 1.3. Puisque $|\beta_o^{12}| = p^{6hr}$, on trouve

$$\Sigma(\chi) = 6fe(\bar{\mathfrak{f}}).\frac{r}{e}.h\log p \quad .$$

Par ailleurs, on a :

$$\Sigma_I^o(\chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f)=1}}^{f} \log|1-\zeta_f^a| = \log p \qquad \text{et}$$

$$\Sigma_I^1(\chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f_1)=1}}^{f_1} \theta(a)B_1(\frac{a}{f_1}) = (1-\theta(p)B_{1,\theta}$$

$$= -2.\frac{r}{e}.h \quad ,$$

d'après la formule analytique du nombre de classes pour k . On a donc bien

$$\Sigma(\chi) = -3fe(\bar{\mathfrak{f}})\Sigma_I^o(\chi).\Sigma_I^1(\chi) \quad .$$

§ 4. SOUS-ENSEMBLES J ADMISSIBLES.

Un sous-ensemble J de I est dit admissible si J = I , ou s'il existe deux hyperplans H_o et H_1 du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $Gal(K/K_I^o)$ tels que $J \subset H_o$ (resp. $J_1 \subset H_1$) et que $H_o \cap H_1 \cap I$ soit vide. Les seuls J intervenant réellement dans le produit des théorèmes 2 et 3 sont admissibles (un caractère χ de G définit un sous-ensemble J qui est admissible en prenant, si $J \neq I$ pour H_o (resp. H_1) le noyau de χ_o (resp. χ_1) dans $Gal(K/K_I^o)$ cf. §3.1). Ainsi on voit que la relation des théorèmes 2 et 3 est essentiellement unique (*), comme le prouve le lemme suivant (il suffit de raisonner par récurrence décroissante

(*) Ceci répond à une question de G. Robert.

sur le nombre d'éléments de J , J admissible et de considérer la norme de $\varphi_K^{[K:K_I^o]^2}$ ou $\overline{|\ |}\delta_K(\sigma)^{n(\sigma).[K:\mathbb{Q}]^2}$ sur K_J^o).

LEMME. - *La norme de* $\theta_J^{2\beta_J}$ *dans toute sous-extension stricte de* K_J^o *de la forme* $K_J^o \cap K_{J'}^o$, *est triviale.*

Démonstration : Soit i un élément de J' non dans J : i est dans J_1 , d'où si $p \in S_i$

$$(1+t_p) \sum_{\sigma\in Gal(K/K_J^1)} \theta(\sigma)\sigma^{-1} = (1+\theta(t_p)) \sum_{\sigma\in Gal(K/K_J^1)} \theta(\sigma)\sigma^{-1} = 0 ,$$

ce qui démontre le lemme puisque β_J (resp. la norme entre K_J^o et $K_J^o \cap K_{J'}^o$) contient en facteur $\sum_{\sigma\in Gal(K/K_J^1)} \theta(\sigma)\sigma^{-1}$ (resp. l'opérateur $1+t_p$) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. GILLARD et G. ROBERT, Groupes d'unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France, à paraître.

[2] D. KUBERT et S. LANG, Modular units inside cyclotomic units, Bull. Soc. Math. France, à paraître.

[3] S. LANG, Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973.

[4] G. ROBERT, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France, mémoire 36 (1973).

[5] H. STARK, Class fields and modular forms of weight one, in Modular functions of one variable V, Lect. Notes in Math. 601, Springer Verlag 1977.

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)