ROLAND GILLARD

Unités cyclotomiques et unités semi-locales

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 5 (1975-1977), exp. n° 7, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1975-1977__5__A7_0>

UNITES CYCLOTOMIQUES ET UNITES SEMI-LOCALES

par

Roland GILLARD

0. - INTRODUCTION

Je me propose dans cet exposé d'expliciter et de généraliser le § 2 de mon exposé du 9 décembre 1976.

Soit K un corps de nombres abélien réel, G le groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$ et ℓ un nombre premier. Pour chaque idéal premier $\mathfrak{L}$ de K au-dessus de ℓ, désignons par $U_{\mathfrak{L}}$ le groupe des unités du complété correspondant $K_{\mathfrak{L}}$ qui sont congrues à 1 modulo le complété de $\mathfrak{L}$. Nous appelons groupe des unités semi-locales le groupe $U = \prod_{\mathfrak{L} | \ell} U_{\mathfrak{L}}$. Soit C (resp E) le groupe des unités cyclotomiques formelles de K - cf. [5] et § 2.2 - (resp le groupe des unités de K). Considérons l'intersection de U et de l'image de C par l'application diagonale dans le produit $\hat{K} = \prod_{\mathfrak{L} | \ell} K_{\mathfrak{L}}$. Désignons par $\overline{C}$ sa fermeture dans U muni de la topologie produit. On note $\mathcal{C}(K)$ le ℓ-groupe des classes de K.

On peut écrire canoniquement G sous la forme d'un produit direct $\Gamma \times \Delta$ avec Γ sous-groupe d'ordre une puissance de ℓ et Δ sous-groupe d'ordre premier à ℓ. Il est alors possible de décomposer l'anneau $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ et les modules sur $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ à l'aide des idempotents associés aux caractères de Δ définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}_\ell$. Si Φ est un tel caractère, j'obtiens alors (au § 4.4) une formule analogue à celle de [2] pour l'ordre de la Φ-composante de $U/\overline{C}$. Il y figure une constante N_{Γ} qui ne dépend que de la structure de Γ et qui joue le même rôle que l'indice limite Q_G dans [5]. Lorsque Γ est cyclique, il est possible (cf. §5) de supprimer cette constante en agrandissant le groupe C

Dans la suite, nous choisissons une clôture algébrique Ω_ℓ de $\mathbb{Q}_\ell$ et un plongement φ dans Ω_ℓ d'une extension abélienne maximale $\mathbb{Q}^{ab}$ de $\mathbb{Q}$ contenant K . On utilise la valeur absolue de Ω_ℓ telle que $|\ell| = \frac{1}{\ell}$. Pour tout entier positif n on choisit dans $\mathbb{Q}^{ab}$ une racine de l'unité d'ordre n , ζ_n de façon à avoir des relations de compatibilité $\zeta_{nm}^m = \zeta_n$.

§ 1. - PRELIMINAIRES

1.1. Tous les caractères que nous étudions sont à valeurs dans Ω_ℓ . On appelle $\mathbb{Q}$-caractères (resp $\mathbb{Q}_\ell$-caractères, resp Ω_ℓ-caractères) d'un groupe, les caractères définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$ (resp $\mathbb{Q}_\ell$, resp Ω_ℓ) . Si H est un groupe fini, à tout caractère χ de H défini sur $\mathbb{Q}$ (resp $\mathbb{Q}_\ell$, resp Ω_ℓ) on associe un élément e_χ de $\mathbb{Q}[H]$ (resp $\mathbb{Q}_\ell[H]$, resp $\Omega_\ell[H]$) par la formule :

$$e_\chi = \frac{1}{[H]} \sum_{\sigma \in H} \chi(\sigma^{-1})\sigma \qquad (1).$$

Nous choisissons une fois pour toutes un $\mathbb{Q}_\ell$-caractère non trivial Φ de Δ ; soit d sa dimension. Par l'inclusion canonique de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G]$, e_Φ s'identifie à l'idempotent de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ associé par (1) au caractère Φ^* de G induit par Φ . La décomposition de Φ en Ω_ℓ-caractères est notée :

$$\Phi = \sum_{\psi | \Phi} \psi .$$

Choisissons un Ω_ℓ-composant ψ_o de Φ (i.e. un Ω_ℓ-caractère intervenant dans la décomposition précédente) et désignons par A (resp L) le sous-anneau de Ω_ℓ engendré sur $\mathbb{Z}_\ell$ (resp le sous-corps de Ω_ℓ engendré sur $\mathbb{Q}_\ell$) par l'image de ψ_o . On définit comme suit un isomorphisme d'anneaux :

$$e_\Phi \mathbb{Z}_\ell [G] \xrightarrow{\sim} A[\Gamma] \qquad (2) ;$$

à l'élément $\Sigma a_{\gamma\delta}\gamma\delta$ de $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]$, somme prise sur tous les couples (γ, δ) de $\Gamma \times \Delta \simeq G$ et les coefficients $a_{\gamma\delta}$ étant dans $\mathbb{Z}_\ell$, on associe l'élément $\Sigma a_{\gamma\delta} \cdot \psi_o(\delta)\gamma$ de $A[\Gamma]$. Par extension des scalaires, on déduit aussi un isomorphisme entre $e_\Phi \mathbb{Q}_\ell[G]$ et $L[\Gamma]$.

Si H est un groupe abélien fini et χ un Ω_ℓ-caractère, on désigne par g_χ l'ordre de χ (considéré comme élément du groupe dual de H) et d_χ le discriminant du corps $\mathbb{Q}(\zeta_{g_\chi})$. Si ξ est un $\mathbb{Q}$-caractère de H , on pose $g_\xi = g_\chi$ et $d_\xi = d_\chi$ où χ est un Ω_ℓ-composant quelconque de ξ .

Pour chaque Ω_ℓ caractère χ de G , soit K_χ le sous-corps de K défini par le noyau de χ considéré comme homomorphisme de G dans Ω_ℓ^* et f_χ le conducteur de K_χ . Si χ est un Ω_ℓ composant d'un $\mathbb{Q}$-caractère ξ de G , on notera encore K_ξ ou f_ξ pour K_χ ou f_χ . Tout Ω_ℓ caractère χ de G définit un caractère de Dirichlet modulo f_χ , qu'on note encore χ . Ceci permet de définir une somme de Gauss :

$$\tau(\chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_\chi)=1}}^{f_\chi} \chi(a)\zeta_{f_\chi}^a \quad .$$

1.2. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K et $\hat{\mathcal{O}}$ le produit des anneaux des entiers $\mathcal{O}_\mathfrak{L}$ des complétés $K_\mathfrak{L}$ pour $\mathfrak{L}$ au-dessus de ℓ . Les anneaux $\hat{\mathcal{O}}$ et $\hat{K}$ sont les complétés ℓ-adiques de $\mathcal{O}$ et K : on identifie donc $\mathcal{O}$ et K à leurs images dans $\hat{\mathcal{O}}$ et $\hat{K}$ par l'application diagonale. L'action d'un élément quelconque σ de G se prolonge par continuité en un automorphisme de l'anneau $\hat{K}$ encore noté σ . De même on prolonge par continuité la restriction du plongement φ à K en une application encore notée φ. Pour chaque $\mathfrak{L}|\ell$ le logarithme définit une application de $U_{\mathfrak{L}}$ dans $K_{\mathfrak{L}}$. Notons $\mathfrak{L}og$ l'application de U dans $\hat{K}$, produit des applications précédentes. Pour chaque Ω_ℓ-caractère χ de G, définissons une application T_χ de $\hat{K}$ dans Ω_ℓ par :

$$T_\chi(\alpha) = \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma)^{-1}\varphi(\sigma(\alpha)) .$$

Il est facile de vérifier que l'on a la formule :

$$\forall\tau \in G , \quad T_\chi(\tau(\alpha)) = \chi(\tau).T_\chi(\alpha) .$$

Cette formule se prolonge par $\mathbb{Z}_\ell$ linéarité :

$$\forall u \in \mathbb{Z}_\ell[G] , \quad T_\chi(u(\alpha)) = \chi(u)T_\chi(\alpha) \qquad (3).$$

Si ε est une unité de K congrue à 1 modulo $\mathfrak{L}$ $(\forall\mathfrak{L}|\ell)$, $\varphi(\sigma(\mathfrak{L}og\ \varepsilon))$ est égal à $\varphi(\mathfrak{L}og\ \sigma(\varepsilon))$ donc à $\ell og[\varphi(\varepsilon^\sigma)]$. Ici ℓog est le logarithme dans Ω_ℓ, cf. [4] §4 ; ainsi :

$$T_\chi(\mathfrak{L}og\ \varepsilon) = \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma^{-1})\,\ell og[\varphi(\varepsilon^\sigma)] \qquad (4).$$

1.3. Si M et N sont deux A-modules qui sont des réseaux dans un même espace vectoriel de dimension finie, on peut leur associer un idéal fractionnaire $[M,N]$ (cf. [1]) de A. Cet idéal est de la forme $\ell^a.A$ pour a unique dans $\mathbb{Z}$. Nous appelons "indice" de N dans M et nous notons encore $[M:N]$ le nombre rationnel ℓ^a. Bien sûr, si M contient N, $[M:N]$ est égal à l'indice de N dans M au sens usuel. Enfin si M est un réseau et si N est de rang strictement inférieur, on dit que l'"indice" $[M:N]$ est infini.

Soit α un élément de $\hat{K}$ tel que $e_\Phi\mathbb{Z}_\ell[G].\alpha$ soit un réseau du L-espace vectoriel $e_\Phi\hat{K}$, c'est-à-dire soit un $\mathbb{Z}_\ell$ module libre de rang d. Soit β un élément de $\hat{K}$. On peut alors énoncer :

LEMME 1. <u>L'"indice" de</u> $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G].\beta$ <u>dans</u> $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G].\alpha$ <u>est fini si et seulement si pour tout</u> $\mathbb{Z}_\ell$<u>-composant</u> χ <u>de</u> Φ^*, $T_\chi(\beta)$ <u>est non nul. Cet "indice" vaut alors</u> :

$$[e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G].\alpha : e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G].\beta] = \left| \frac{\prod_{\chi|\Phi^*} T_\chi(\alpha)}{\prod_{\chi|\Phi^*} T_\chi(\beta)} \right| \qquad (5).$$

<u>Démonstration</u> : On peut écrire $e_\Phi \beta = u(\alpha)$ avec u dans $e_\Phi \mathbb{Q}_\ell[G]$; en multipliant β par une puissance de ℓ suffisante, on voit qu'on peut supposer que u est dans $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]$, on a alors un isomorphisme entre $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G].\alpha / e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G].\beta$ et $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]/(u)$. Notons $\tilde{u}$ l'application de $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]$ dans lui-même définie par la multiplication par u. L'anneau $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang d. L'indice étudié est fini si et seulement si le déterminant de $\tilde{u}$ est non nul. Si cette condition est vérifiée l'indice vaut $|\text{dét}\, \tilde{u}|^{-1}$. Le déterminant de $\tilde{u}$ peut être étudié à l'aide d'une extension des scalaires de $\mathbb{Z}_\ell$ à Ω_ℓ et de l'application Ω_ℓ-linéaire

$$e_\Phi \Omega_\ell[G] \xrightarrow{\pi e_\chi} \Omega_\ell^{d.[\Gamma]}$$

définie à l'aide des idempotents associés, cf. (1), aux Ω_ℓ-composants de Φ^*. Sur $\Omega_\ell^{d.[\Gamma]}$ l'endomorphisme $\tilde{u}$ est traduit par une application linéaire de matrice diagonale, les éléments sur la diagonale de cette matrice sont précisément les nombres $\chi(u)$. Ainsi

$$[e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]\alpha : e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]\beta] = |\det \tilde{u}|^{-1} = \left| \prod_{\chi|\Phi^*} \chi(u) \right|^{-1} .$$

Le lemme résulte alors de l'égalité (cf. 1.2 (3)) :

$$\chi(u) = \frac{T_\chi(\beta)}{T_\chi(\alpha)} .$$

§ 2. - RESUME DE RESULTATS DE LEOPOLDT

2.1. Rappelons rapidement des résultats de [6] utilisés dans la suite. Pour chaque nombre premier p ramifié dans $K/\mathbb{Q}$ soit I_p^k le $k^{\text{ième}}$ groupe de ramification. Soit I (resp I^*) le sous-groupe $\prod_p I_p^1$ (resp $I_2^2 . \prod_{p\neq 2} I_p^1$) . Soit ξ un $\mathbb{Q}$-caractère de I trivial sur I_2^2 (i.e. tel que $\forall x \in I_2^2$, $\xi(x) = \xi(1)$) ou un $\mathbb{Q}$-caractère de I^* non trivial sur I_2^2 . On note par Ξ le caractère de G induit par ξ et e_Ξ l'idempotent de $\mathbb{Q}_\ell[G]$ associé à Ξ (cf. (1)). Soit Z l'ensemble des caractères Ξ définis de la façon précédente. Pour Ξ dans Z , soit f_Ξ le plus petit commun multiple des f_χ et K_Ξ le corps composé des corps K_χ , pour χ Ω_ℓ-composant de Ξ .

Pour Ξ dans Z et χ Ω_ℓ-composant, posons :

$$\tau\left(\chi,\zeta_{f_\Xi}\right) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f_\Xi)=1}}^{f_\Xi} \chi(a)\zeta_{f_\Xi}^a .$$

Pour Ξ dans Z définissons t_Ξ par :

$$t_\Xi = \frac{1}{[K_\Xi:\mathbb{Q}]} \sum_{\chi|\Xi} \tau\left(\chi,\zeta_{f_\Xi}\right) .$$

A K est associé un ordre de $\mathbb{Q}[G]$

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\Xi\in Z} e_\Xi \mathbb{Z}[G]$$

et un élément de $\mathbb{Q}^{ab}$:

$$t = \sum_{\Xi\in Z} t_\Xi .$$

Le résultat fondamental de [6] est que $\mathfrak{A}$ est l'ordre associé au $\mathbb{Z}[G]$-module $\mathcal{O}$ (i.e. on a $\mathfrak{A} = \{\lambda\in\mathbb{Q}[G] \mid \lambda\mathcal{O}\subset\mathcal{O}\}$, que t est dans K et qu'on a :

$$\mathcal{O} = \mathfrak{A}.t .$$

Un Ω_ℓ-caractère χ de G figure dans la décomposition d'un et d'un seul caractère Ξ de Z , f_χ divise alors f_Ξ et le rapport $\frac{f_\Xi}{f_\chi}$

est sans facteur carré et premier à f_χ (cf. [6]). Si μ désigne la fonction de Moebius, on a la relation pour χ Ω_ℓ-composant de Ξ (comparer à (1) et (15) de [6]) :

$$\sum_{\sigma\in G} \chi^{-1}(\sigma)\sigma(t) = \mu\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right)\chi\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right)\tau(\chi^{-1})[K:K_\Xi] \qquad (6).$$

Remarquons que $\mu\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right)\chi\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right)$ est une racine de l'unité donc une unité de Ω_ℓ. Posons $\mathcal{D}_\ell = \underset{\Xi\in Z}{\oplus} e_\Xi \mathbb{Z}_\ell[G]$: $\hat{\mathcal{O}}$ est un $\mathcal{D}_\ell$-module libre de rang 1 engendré par t.

2.2. Nous rappelons maintenant la définition des unités cyclotomiques (cf. [5]). Si ξ est un $\mathbb{Q}$-caractère de G, Leopoldt définit l'entier algébrique θ_ξ comme suit. Choisissons pour tout automorphisme sur K_ξ, σ, du sous-corps réel maximum de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})$, un prolongement $\bar\sigma$ à $\mathbb{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ et définissons θ_ξ par :

$$\theta_\xi = \prod_\sigma \bar\sigma(\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1}) \quad .$$

Le carré de θ_ξ est égal au signe près à la norme dans K_ξ de l'élément $1-\zeta_{f_\xi}$ de $\mathbb{Q}\left(\zeta_{f_\xi}\right)$. Le groupe des unités cyclotomiques C_o de K est l'intersection du groupe des unités E de K et du groupe engendré par -1, les éléments θ_ξ et leurs conjugués, ξ parcourant l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères de G.

Pour chaque ξ, notons σ_ξ un générateur du groupe de Galois (cyclique) de K_ξ sur $\mathbb{Q}$ et $\bar\sigma_\xi$ un relèvement de σ_ξ dans $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$. On considère alors les éléments γ_ξ et $\bar\gamma_\xi$ de $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_\xi/\mathbb{Q})]$ et $\mathbb{Z}[\mathcal{G}]$ définis par :

$$\gamma_\xi = \prod_{p|g_\xi}\left(1-\sigma_\xi^{g_\xi/p}\right) \qquad \bar\gamma_\xi = \prod_{p|g_\xi}\left(1-\bar\sigma_\xi^{g_\xi/p}\right) \quad .$$

En prolongeant par $\mathbb{Z}$-linéarité l'action de $\mathcal{G}$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{Q}^{ab})^*$, on peut considérer $\theta_\xi^{\bar\gamma_\xi}$: c'est une unité de K_ξ dont la norme sur les sous-corps stricts de K_ξ vaut ± 1. Soit Θ le produit des éléments $\theta_\xi^{\overline{\gamma}_\xi}$ pour ξ parcourant l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères de G. Leopoldt définit le groupe des unités cyclotomiques formelles C comme étant le sous-$\mathbb{Z}[G]$-module de E engendré par -1 et les éléments $\theta_\xi^{\overline{\gamma}_\xi}$. L'ordre de $\mathbb{Q}[G]$ associé au sous-module de E engendré par Θ (i.e. l'ensemble $\{\lambda\in\mathbb{Q}[G]\,|\,\Theta^\lambda\in E\}$) est l'ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ c'est-à-dire $\oplus\, e_\xi\mathbb{Z}[G]$, la somme étant prise sur l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères de G : ceci résulte de l'égalité au signe près entre Θ^{e_ξ} et $\theta_\xi^{\overline{\gamma}_\xi}$. Si ξ est un $\mathbb{Q}$-caractère de G et χ un Ω_ℓ-composant de ξ on notera aussi $\theta_\chi \ldots \overline{\gamma}_\chi$ pour $\theta_\xi \ldots \overline{\gamma}_\xi$. De plus, pour tout Ω_ℓ caractère χ de G on définit $\chi(\gamma_\chi)$ en considérant χ comme un caractère de $G/\ker\chi$ et en l'étendant par linéarité. Considérons l'intersection de U et de l'image diagonale de C (resp de C_o) dans $\hat{K}$ et notons $\overline{C}$ (resp $\overline{C}_o$) sa fermeture.

2.3. Définissons (cf. [5] et [3]) pour tout groupe abélien H des entiers :

$$N_H = \sqrt{\prod \frac{[H]^{[H]}}{\pi d_\xi}} \qquad\qquad C_H = \sqrt{\prod \pi d_\xi \left(\frac{[H]}{g_\xi^2}\right)^{\varphi(g_\xi)}}$$

où les produits sont pris sur l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères de H et où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. On sait que C_H (cf. [3]) est égal à 1 si et seulement si H est cyclique et que N_H est l'indice de $\mathbb{Z}[H]$ dans l'ordre maximal $\oplus\, e_\xi\mathbb{Z}[H]$ de $\mathbb{Q}[H]$, somme prise sur l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères de H.

LEMME 2. <u>Le produit</u> $N_H.C_H$ <u>est égal au produit des ordres des noyaux des</u> Ω_ℓ-<u>caractères de</u> H. <u>Le quotient</u> N_H/C_H <u>est donné par les formules où les produits sont pris sur l'ensemble des</u> $\mathbb{Q}$-<u>caractères de</u> H :

$$N_H/C_H = \prod_\xi \frac{g_\xi^{\varphi(g_\xi)}}{d_\xi} = \prod_\xi \prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1} .$$

Démonstration : Il suffit d'effectuer le produit et la division en tenant compte de la relation $[H] = \Sigma\varphi(g_{\xi})$. La dernière égalité provient de la valeur de d_{ξ} .

Exemples : Si H est cyclique d'ordre ℓ^n , alors C_H vaut 1 et N_H est égal à ℓ élevé à la puissance $(1+\ell+\ldots+\ell^{n-1})$. Si H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$, alors N_H (resp C_H) est égal à ℓ élevé à la puissance $\frac{1}{2}[(n-1)\ell^n+1+\frac{\ell^n-1}{\ell-1}]$ (resp $\frac{1}{2}[(n-1)\ell^n+1-\frac{\ell^n-1}{\ell-1}]$) .

§ 3. - CALCUL DE L'INDICE DE $e_{\Phi}\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ DANS $e_{\Phi}\mathcal{D}_{\ell}$

3.1. Pour chaque Ω_{ℓ}-caractère χ de G , on note $\Xi(\chi)$ l'unique élément de Z (cf. 2.1) qui admet χ comme Ω_{ℓ}-composant. Le but du § 3 est de démontrer la proposition :

PROPOSITION 1. Si $\mathcal{D}_{\ell}$ désigne l'ordre de $\mathbb{Q}_{\ell}[G]$ introduit à la fin de 2.1 on a :

$$[e_{\Phi}\mathcal{D}_{\ell} : e_{\Phi}\mathbb{Z}_{\ell}[G]] = \Big|\prod_{\chi|\Phi^*}[K:K_{\Xi(\chi)}]\Big|^{-1} .$$

3.2. Nous allons utiliser l'isomorphisme d'anneaux signalé en 1.1 entre $e_{\Phi}\mathbb{Q}_{\ell}[G]$ et $L[\Gamma]$. Soit Γ_1 (resp Γ_1^*) l'intersection de Γ et de I (resp I^*) . Soit Ξ l'élément de Z défini par induction d'un $\mathbb{Q}$-caractère ξ de I (resp I^*) . Notons ξ' la restriction de ξ à Γ_1 (resp Γ_1^*) . Nous disons que Ξ et Φ sont compatibles si et seulement si Φ^* et Ξ possèdent au moins un Ω_{ℓ}-composant commun. A l'aide de l'inclusion de $L[\Gamma_1]$ (resp $L[\Gamma_1^*]$) dans $L[\Gamma]$ on peut considérer $e_{\xi'}$ comme un élément de $L[\Gamma]$.

LEMME 3. L'image de $e_{\Phi}\cdot e_{\Xi}$ dans $L[\Gamma]$ est $e_{\xi'}$ si Φ et Ξ sont compatibles et 0 sinon.

Démonstration : Remarquons d'abord que e_Ξ est égal à la somme Σe_χ , somme prise sur les Ω_ℓ-composants de Ξ ; comme $e_{\psi_o}\cdot e_\chi$ est nul sauf si χ et ψ_o coïncident sur Δ , $e_{\psi_o}\cdot e_\Xi$ est nul sauf si un Ω_ℓ-composant de ξ coïncide avec ψ_o sur $\Delta\cap I$ (resp $\Delta\cap I^*$) . Ceci signifie exactement que Ξ et Φ sont compatibles. Si cette dernière condition est vérifiée, on a $e_{\psi_o}\cdot e_\Xi = \Sigma e_\chi$, la somme étant prise sur les Ω_ℓ-caractères de G égaux à ψ_o sur Δ et à ξ' sur Γ_1 (resp Γ_1^*) . Ainsi $e_{\psi_o}\cdot e_\Xi$ n'est autre que l'idempotent du caractère de G induit par le caractère θ de $\Delta\times\Gamma_1$ (resp $\Delta\times\Gamma_1^*$) qui vaut $\psi_o(\delta)\xi'(\gamma)$ pour l'élément $\delta.\gamma$ de $\Delta\times\Gamma_1$ (resp $\Delta\times\Gamma_1^*$) . C'est donc aussi e_θ considéré dans $\mathbb{Q}_\ell[G]$. Cet idempotent s'identifie au produit des idempotents e_{ψ_o} et $e_{\xi'}$ dont les images dans $L[\Gamma]$ sont respectivement 1 et $e_{\xi'}$. Son image qui est la même que celle de e_Ξ est donc bien $e_{\xi'}$.

3.3. Supposons dans ce n° 3.3 que Γ_1 et Γ_1^* soient égaux, ce qui est toujours vérifié si $\ell\neq 2$. Le lemme 3 et (2) montrent qu'on a un isomorphisme de $A[\Gamma_1]$-modules entre $e_\Phi\mathcal{D}_\ell$ et $\oplus e_\lambda A[\Gamma]$, donc encore entre $e_\Phi\mathcal{D}_\ell$ et $(\oplus e_\lambda A[\Gamma_1])^{[\Gamma:\Gamma_1]}$ (les sommes sont prises sur l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères λ de Γ_1). Le sous-module $e_\Phi\mathbb{Z}_\ell[G]$ est envoyé sur le sous-module $A[\Gamma_1]^{[\Gamma:\Gamma_1]}$. Comme A est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang d , l'indice $[e_\Phi\mathcal{D}_\ell : e_\Phi\mathbb{Z}_\ell[G]]$ est égal à la puissance $d.[\Gamma:\Gamma_1]$ de l'indice $[\oplus e_\lambda\mathbb{Z}_\ell[\Gamma_1] : \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_1]]$ c'est donc $\left(N_{\Gamma_1}\right)^{d.[\Gamma:\Gamma_1]}$. Par la théorie du corps de classes Γ_1 (resp Γ_1^* si $\ell=2$) est cyclique car c'est l'image du groupe multiplicatif $1+p\mathbb{Z}p$ (resp $1+4\mathbb{Z}_2$ si $\ell=2$) par l'application de réciprocité locale. Il en résulte que N_{Γ_1} est égal (cf. lemme 2) au produit des ordres des noyaux des Ω_ℓ-caractères de Γ_1 . Pour chaque Ω_ℓ-composant χ de Φ^* , soit χ_1 sa restriction à Γ_1 : il est facile de voir que le noyau de χ_1 est d'ordre $[K:K_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de $\mathbb{Z}_\ell$ près. La proposition de 3.1 provient (avec l'hypothèse $\Gamma_1=\Gamma_1^*$) du fait qu'il y a exactement $(d.[\Gamma:\Gamma_1])$ Ω_ℓ-composants de Φ^* qui ont même restriction à Γ_1 .

3.4. Etudions maintenant le cas où Γ_1^* est strictement inclus dans Γ_1. Dans ce cas ℓ est égal à 2 et Γ_1^* est facteur direct de Γ_1 et d'indice 2. Ceci se voit en remarquant que grâce à la théorie du corps de classes Γ_1 est un quotient de $(\mathbb{Z}_2)^*$ et Γ_1^* est l'image du sous-groupe $1+4\mathbb{Z}_2$. Soit J l'élément de Γ_1, image de $-1 \in 1+2\mathbb{Z}_2$: alors Γ_1 est égal au produit direct de Γ_1^* par $\{1,J\}$. Les caractères Ξ de Z proviennent soit d'un caractère ξ de I trivial sur I_2^2, soit d'un caractère ξ de I^* non trivial sur I_2^2. Les idempotents de $L[\Gamma]$ obtenus sont dans le premier cas

$$e = \frac{1}{[\Gamma_1]}(1+J) \sum_{\gamma\in\Gamma_1^*} \gamma \qquad \text{et} \qquad e' = \frac{1}{[\Gamma_1]}(1-J) \sum_{\gamma\in\Gamma_1^*} \gamma$$

et dans le second les e_λ où λ décrit l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères non triviaux de Γ_1^*. L'ordre de $L[\Gamma]$ image de $e_\Phi \mathcal{B}_\ell$ est donc, en sommant sur l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères λ non triviaux de Γ_1^* :

$$eA[\Gamma] \oplus e'A[\Gamma] \oplus (\bigoplus_{\lambda\neq 1} e_\lambda A[\Gamma]) .$$

Il contient l'ordre $\oplus e_\lambda A[\Gamma]$, somme prise sur l'ensemble de tous les $\mathbb{Q}$-caractères de Γ_1^* avec l'indice $2^{d[\Gamma:\Gamma_1]}$. Ce qui précède, ajouté à un raisonnement calqué sur celui de 3.3, montre que l'indice de $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]$ dans $e_\Phi \mathcal{B}_\ell$ est égal à $(N_{\Gamma_1^*})^{d[\Gamma:\Gamma_1^*]}.2^{d[\Gamma:\Gamma_1]}$. Pour évaluer $N_{\Gamma_1^*}$ on utilise la propriété de Γ_1^* d'être cyclique. Pour chaque Ω_ℓ composant χ de Φ^* soit χ_1^* sa restriction à Γ_1^*. Il est facile de voir que si χ_1^* n'est pas trivial, son noyau est d'ordre $[K:K_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de $\mathbb{Z}_2$ près. Ceci est encore vrai si χ est trivial sur Γ_1^* mais non sur Γ_1. Enfin si χ est trivial sur Γ_1, le noyau de χ_1^* est d'ordre $\frac{1}{2}[K:K_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de $\mathbb{Z}_2$ près. La proposition de 3.1 résulte alors du fait qu'il y a exactement $d[\Gamma:\Gamma_1^*]$ (resp $d[\Gamma:\Gamma_1]$) Ω_ℓ-composants de Φ^* qui ont même restriction à Γ_1^* (resp à Γ_1).

§ 4. - INDICE DU GROUPE DES UNITES CYCLOTOMIQUES FORMELLES

4.1. Soit m un entier strictement positif, premier à ℓ, assez grand pour que l'image diagonale dans $\hat{K}$ des unités $\theta_\xi^{\gamma_\xi m}$ soit dans U, pour tous les $\mathbb{Q}$-caractères ξ de G. L'image de Θ^m dans $\hat{K}$ est alors aussi dans U. Soit $\overline{C}_1$ le sous-$\mathbb{Z}_\ell[G]$-module de U engendré par cet élément. Nous allons d'abord évaluer l'indice de $e_\Phi \overline{C}_1$ dans $e_\Phi U$. Désignons par Q l'indice $\left[e_\Phi \hat{\mathcal{O}} : e_\Phi\left(\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}\right)\right]$.

LEMME 4. <u>On a la relation suivante sur les "indices"</u> :

$$[e_\Phi(U/\overline{C}_1)] = \frac{1}{Q}\,[e_\Phi \hat{\mathcal{O}} : e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]\,\mathcal{L}og\,\Theta^m]$$

<u>Démonstration</u> : Soit μ l'ordre du sous-groupe de torsion de $e_\Phi U$ on a :

$$\begin{aligned}[e_\Phi(U/\overline{C}_1)] &= [e_\Phi U / e_\Phi \overline{C}_1] \\ &= [e_\Phi\ \mathcal{L}og\, U / e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]\ \mathcal{L}og\ \Theta^m].\mu \\ &= \frac{[e_\Phi \hat{\mathcal{O}} : e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]\ \mathcal{L}og\ \Theta^m]}{[e_\Phi \hat{\mathcal{O}} : e_\Phi\ \mathcal{L}og\ U]}.\mu \quad .\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour r entier assez grand, $e_\Phi\ \mathcal{L}og\left(\prod_{\mathfrak{L}|\ell}(1+\mathfrak{L}^r\mathcal{O}_{\mathfrak{L}})\right)$ est égal à $e_\Phi \prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}^r\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$. Son indice dans $e_\Phi\hat{\mathcal{O}}$ est Q^r celui dans $e_\Phi\ \mathcal{L}og\ U$ est $\frac{1}{\mu}Q^{r-1}$. D'après la multiplicativité de l'"indice" introduit en 1.3, on a :

$$[e_\Phi \hat{\mathcal{O}} : e_\Phi\ \mathcal{L}og\ U] = Q.\mu \ .$$

4.2. Calculons maintenant l'indice Q :

LEMME 5. <u>L'indice</u> Q <u>vaut</u> $\left|\prod_{\chi|\Phi^*}\left(1-\frac{\chi(\ell)}{\ell}\right)\right|$.

Démonstration : Notons D (resp D_o, Γ_o, Δ_o) le sous-groupe de décomposition de ℓ dans $K/\mathbb{Q}$ (resp le sous-groupe d'inertie de ℓ dans D,Γ,Δ). Choisissons un idéal premier $\mathfrak{L}_o$ de K au-dessus de ℓ. On sait que $\hat{\mathcal{O}}$ est le G-module induit par le D-module $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_o}$. De même $\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$ est le G-module induit par le D-module $\mathfrak{L}_o\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_o}$. Il résulte alors de l'interprétation du module induit à l'aide d'un produit tensoriel et de l'exactitude à droite du produit tensoriel que $\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$ est le $\mathbb{F}_\ell[G]$-module induit par le $\mathbb{F}_\ell[D]$-module $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_o}/\mathfrak{L}_o\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_o}$. D'après le théorème de la base normale pour les extensions galoisiennes, ce dernier module est isomorphe à $\mathbb{F}_\ell[D/D_o]$ c'est-à-dire au $\mathbb{F}_\ell[D]$-module induit par le D_o-module $\mathbb{F}_\ell$ où D_o agit trivialement. On en conclut que $\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$ est un G-module isomorphe à $\mathbb{F}_\ell[G/D_o]$, donc un Δ-module isomorphe au produit de $[\Gamma:\Gamma_o]$-copies de $\mathbb{F}_\ell[\Delta/\Delta_o]$. L'ordre de $e_\Phi\left(\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}\right)$ est donc $\ell^{d.[\Gamma:\Gamma_o]}$ si les composants ψ de Φ sont triviaux sur Δ_o et 1 sinon. Le lemme en résulte facilement sachant que pour tout Ω_ℓ-caractère χ, composant de Φ^*, $|1-\frac{\chi(\ell)}{\ell}|$ vaut ℓ si χ est trivial sur D_o et 1 sinon.

4.3. L'"indice" $[e_\Phi\hat{\mathcal{O}} : e_\Phi\mathbb{Z}_\ell[G]\mathcal{L}og\,\Theta^m]$ se calcule par la méthode 1.3 en tenant compte des résultats des § 2 et 3. On obtient alors le résultat suivant où figure la fonction L ℓ-adique (cf. [4]) :

LEMME 6. <u>L'ordre de</u> $e_\Phi(U/\bar{C}_1)$ <u>est égal à</u>

$$\left|\prod_{\chi|\Phi^*} \frac{[G]}{g_\chi}\chi(\gamma_\chi)\frac{L_\ell(1,\chi)}{2}\right|^{-1}.$$

Démonstration : On sait que $\hat{\mathcal{O}}$ est un $\mathcal{B}_\ell$-module engendré par t (cf. 2.1) on a donc (cf. prop. 1 du § 3) :

$$[e_\Phi\hat{\mathcal{O}} : e_\Phi\mathbb{Z}_\ell[G]t] = \left|\prod_{\chi|\Phi^*}[K:K_{\Xi(\chi)}]\right|^{-1}.$$

De plus, d'après le lemme 1 de 1.3 :

$$[e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]t : e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]\mathcal{L}og\,\Theta^m] = \left| \frac{\prod_{\chi|\Phi^*} T_\chi(t)}{\prod_{\chi|\Phi^*} T_\chi(\mathcal{L}og\,\Theta^m)} \right| .$$

La formule (6) de 2.1, appliquée à $T_\chi(t) = \Sigma\chi(\sigma)^{-1}\sigma(t)$, et la remarque qui la suit montrent que :

$$\left|\prod_{\chi|\Phi^*} T_\chi(t)\right| = \left|\prod_{\chi|\Phi^*} \tau(\chi^{-1}).[K:K_{\Xi(\chi)}]\right| .$$

D'autre part, d'après (3) $T_\chi(\mathcal{L}og\,\Theta^m)$ est égal à $T_\chi(e_\xi\mathcal{L}og\,\Theta^m)$ si ξ est le $\mathbb{Q}$-caractère de G ayant χ comme Ω_ℓ-composant, donc en tenant compte de 2.2 à $T_\chi(\mathcal{L}og\,\theta_\xi^{m\gamma_\xi})$. Ce dernier nombre se calcule à l'aide de la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
T_\chi\left(\mathcal{L}og\,\theta_\xi^{2m\gamma_\xi}\right) &= \sum_{\sigma\in G} \chi^{-1}(\sigma)\,\ell og\left[\varphi\left(\theta_\xi^{2m\gamma_\xi\sigma}\right)\right] \\
&= m.\chi(\gamma_\xi).\sum_{\sigma\in G}\chi^{-1}(\sigma)\,\ell og[\varphi(\theta_\xi^{2\sigma})] \\
&= m.\chi(\gamma_\xi).\frac{[G]}{g_\xi}\sum_{\sigma\in \mathrm{Gal}(K_\chi/\mathbb{Q})}\chi^{-1}(\sigma)\,\ell og[\varphi(\theta_\xi^{2\sigma})] \\
&= m.\chi(\gamma_\xi).\frac{[G]}{g_\chi}\sum_{\substack{a=1\\(a,f_\chi)=1}}^{f_\chi}\chi^{-1}(a)\,\ell og\left[\varphi\left(1-\zeta_{f_\chi}^a\right)\right] .
\end{aligned}$$

La première égalité écrite provient de la formule (4), la seconde est conséquence d'un calcul analogue à celui de (3) le logarithme a été prolongé comme dans [4] § 4. Dans la troisième égalité, on a considéré χ comme un caractère de $G/\mathrm{Ker}\,\chi$ qui est isomorphe au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_\chi/\mathbb{Q})$. Dans la dernière égalité χ est identifié au caractère de Dirichlet modulo f_χ qu'il définit ; on a exprimé θ_ξ^2 comme norme de $\left(1-\zeta_{f_\chi}\right)$ (cf 2.2). La somme sur a se calcule à l'aide de la formule donnant $L_\ell(1,\chi)$ (cf. par exemple [4] §5) et la relation classique $\tau(\chi)\tau(\chi^{-1}) = f_\chi$:

$$-\Sigma\,\chi^{-1}(a)\,\ell og\left[\varphi\left(1-\zeta_{f_\chi}^{a}\right)\right] = \tau(\chi^{-1})\left(1-\frac{\chi(\ell)}{\ell}\right)^{-1} L_\ell(1,\chi) \ .$$

Le lemme 6 résulte alors des calculs précédents et des lemmes 4 et 5.

4.4. Traduisons maintenant 4.3 sur le groupe des unités formelles :

THEOREME 1. <u>L'ordre de</u> $e_\Phi(U/\bar{C})$ <u>est donné par</u> :

$$[e_\Phi(U/\bar{C})] = N_\Gamma^d \cdot \left| \prod_{\chi|\Phi^*} \frac{L_\ell(1,\chi)}{2} \right|^{-1} .$$

<u>Démonstration</u> : En revenant aux définitions de C_1 et C (cf. § 4.1 et 2.2) on voit que l'indice de $e_\Phi \bar{C}_1$ dans $e_\Phi \bar{C}$ est égal à celui de $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[G]$ dans $e_\Phi(\oplus\, e_\xi \mathbb{Z}_\ell[G])$ où dans la somme ξ parcourt l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères non triviaux de G . C'est aussi, grâce à la formule (2) l'indice de $A[\Gamma]$ dans $\oplus\, e_\lambda A[\Gamma]$ où dans la somme λ parcourt l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères de Γ , c'est donc (cf. 2.3) N_Γ^d . Ainsi :

$$[e_\Phi(U/\bar{C})] = \frac{1}{N_\Gamma^d} \left| \prod_{\chi|\Phi^*} \chi(\gamma_\chi)\, \frac{[G]}{g_\chi}\, \frac{L_\ell(1,\chi)}{2} \right|^{-1} .$$

Si χ est un composant de Φ^* , notons ψ et π ses restrictions à Δ et Γ ; soit ξ (resp ρ) le $\mathbb{Q}$-caractère de G (resp Γ) ayant χ (resp π) parmi ses Ω_ℓ-composants. On a alors :

$$\left|\frac{[G]}{g_\chi}\right| = \left|\frac{[\Gamma]}{g_\pi}\right| \quad \text{et} \quad |\chi(\gamma_\chi)| = |1-\pi(\sigma_\xi)| \ .$$

D'après le lemme 2 de 2.3, on déduit :

$$\left| \prod_{\chi|\Phi^*} \frac{[G]}{g_\chi} \right|^{-1} = (N_\Gamma \cdot C_\Gamma)^d$$

et, en observant qu'il y a exactement d caractères χ qui correspondent au même π

$$\left| \prod_{\chi|\Phi^*} \chi(\gamma_\chi) \right|^{-1} = \left[\prod_\rho \ell^{\varphi(g_\rho)/\ell-1} \right]^d = \left(\frac{N_\Gamma}{C_\Gamma}\right)^d \ .$$

Dans le terme du milieu, le produit est pris sur l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères ρ de Γ .

4.5. Remarque sur le caractère trivial. Dans ce qui précède, nous avons supposé que Φ est non trivial. Le théorème 1 est encore vrai si Φ est trivial, en convenant que les deux membres de l'égalité sont infinis : le rang de $e_\Phi \bar{C}$ est $[\Gamma]-1$, celui de $e_\Phi U$ est $[\Gamma]$ et la fonction L ℓ-adique correspondant au Ω_ℓ-caractère trivial de G admet un pôle en $s = 1$. Cependant en remplaçant $\bar{C}$ par le $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module $\bar{C}'$ engendré par $\bar{C}$ et $(1+\ell)$ on obtient :

$$[e_\Phi(U/\bar{C}')] = \frac{N_\Gamma}{2}\left| \prod_{\substack{\chi|\Phi^* \\ \chi \text{ non trivial}}} \frac{L_\ell(1,\chi)}{2} \right|^{-1} .$$

§ 5. - CAS OU Γ EST CYCLIQUE

Si Γ est cyclique, montrons qu'on peut supprimer l'indice N_Γ figurant dans le théorème 1, en remplaçant les unités cyclotomiques formelles par les unités cyclotomiques (cf. § 2.2) :

THEOREME 2. <u>Si</u> Γ <u>est cyclique et</u> Φ <u>non trivial, on a</u> :

$$[e_\Phi(U/\bar{C}_o)] = \left| \prod_{\chi|\Phi^*} \frac{L_\ell(1,\chi)}{2} \right|^{-1} .$$

<u>Démonstration</u> : Il s'agit de montrer que $e_\Phi \bar{C}$ est un sous-groupe d'indice N_Γ^d de $e_\Phi \bar{C}_o$. C'est clair si Γ est trivial car alors les éléments γ_χ introduits plus haut sont inversibles dans $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[\Delta]$. Si Γ est cyclique d'ordre ℓ^n , on sait que N_Γ vaut $\ell^{1+\ell+\ldots+\ell^{n-1}}$ (cf. § 2.3). Soit π un générateur de $\mathrm{Hom}(\Gamma,\Omega_\ell^*)$, ψ un Ω_ℓ-composant de Φ et δ un générateur de $\mathrm{Gal}(K_\psi/\mathbb{Q})$. Pour

$k = 0,\ldots,n$, on considère (cf. 2.2) l'entier algébrique $\theta_{\psi.\pi^{\ell^{n-k}}}$, on l'élève à la puissance $(\delta-1)$ pour obtenir une unité, puis encore à la puissance m (m entier premier à ℓ assez grand) pour obtenir une unité α_k de $K_{\psi.\pi^{\ell^{n-k}}}$ dont l'image dans $\hat{K}$ est dans U . Comme ℓ ne divise pas $[\Delta]$, la formule (2) montre que $(\delta-1)m$ est inversible dans $e_\Phi\mathbb{Z}_\ell[G]$. On voit ainsi que $e_\Phi\overline{C}_o$ est le $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module engendré par les éléments α_k . On sait d'ailleurs que son rang est $[\Gamma].d = \ell^n d$. Soit γ un générateur de Γ . Pour tout j entier vérifiant $0 < j \leq \ell^n - 1$, on considère l'entier k tel que $\ell^k \leq j < \ell^{k+1}$ et on associe à j l'élément $\beta_j = \alpha_{k+1}^{\gamma^j}$; à 0 on associe α_o . En utilisant la norme entre les corps consécutifs de la suite $K_\psi,\ldots,K_{\psi.\pi^{\ell^{n-k}}},\ldots,K_{\psi.\pi^{\ell^n}}$ et en raisonnant de proche en proche à partir de K_ψ , on vérifie que les éléments $\beta_o,\ldots,\beta_{\ell^n-1}$ forment un système générateur du $e_\Phi\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module $e_\Phi\overline{C}_o$. En considérant le rang de ce module, on voit qu'on a en fait une base. On peut alors calculer l'indice de $e_\Phi\overline{C}$ de la façon suivante : cet $e_\Phi\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module admet comme base l'ensemble des éléments

$$\beta_o\beta_1^{\gamma-1}\ldots\beta_{\ell-1}^{\gamma-1}\beta_\ell^{\gamma^\ell-1}\ldots\beta_{\ell^2-1}^{\gamma^\ell-1}\ldots\beta_{\ell^{n-1}}^{\gamma^{\ell^{n-1}}-1}\ldots\beta_{\ell^n-1}^{\gamma^{\ell^{n-1}}-1} .$$

Il est alors facile d'expliciter une partie de la matrice carré d'ordre ℓ^n de ce système dans la base $\beta_o\ldots\beta_{\ell^n-1}$ de $e_\Phi\overline{C}_o$. Par exemple si $\ell = 3$ et $n = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
1 & 0 & ? & & & & & & \\
0 & -1 & -1 & & 0 & & & ? & \\
0 & 1 & -2 & & & & & & \\
\hdashline
 & & & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
\cdashline{4-9}
 & 0 & & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)$$

Pour $\ell = 2$, la matrice est triangulaire avec $1,-2,-2,\ldots,-2$ sur la diagonale. Pour $\ell \neq 2$ en permutant les lignes et les colonnes, on fait apparaître des blocs d'ordre $(\ell-1)$ et de déterminant ℓ :

$$\begin{pmatrix} -1 & & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -1 & -1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \ell \neq 3 \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \ell = 3 \ .$$

Un bloc correspond à un couple d'entiers positifs (k,j) avec $0 \leq k < n$, $0 \leq j < \ell^k$: on regroupe les lignes et les colonnes correspondant aux éléments $\beta_{\ell^k i+j}$ pour $i = 1,\dots,\ell-1$.

Le déterminant de la matrice est donc au signe près $\ell^{1+\dots+\ell^{n-1}}$ (il y a $(\ell^n-1)/(\ell-1)$ blocs si $\ell \neq 2$) c'est donc N_Γ (cf. fin de 2.3). Enfin $e_\Phi \mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang d . L'indice de $e_\Phi \bar{C}$ dans $e_\Phi \bar{C}_o$ est bien N_Γ^d .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. FRÖHLICH - Ideals in a extension field as modules... Math. Zeit. 74 (1960) pp. 29-38.

[2] R. GILLARD - Sur le groupe des classes des extensions abéliennes réelles. Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble, 9 déc. 1976.

[3] H. HASSE - Uber die Klassenzahl abelscher Zahlkörper Akademie Verlag Berlin 1952.

[4] K. IWASAWA - Lectures on p-adic L functions. Ann. Math. Studies 74, Princeton Univ. press.

[5] H. LEOPOLDT - Uber Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper. Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin 2 (1954).

[6] H. LEOPOLDT - Uber die Hauptordnung der ganze Elemente eines abelschen Zahlkörper. J. reine angew. Math. Bd 201 (1959) pp. 119-149.