

NICOLE MOSER

**Représentations entières de certains groupes finis. 3e partie :
Représentations entières des groupes diédraux d'ordre $2p$**

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 3 (1973-1974), exp. n° 7, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=STNG_1973-1974__3__A7_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

28 février 1974

Grenoble

REPRESENTATIONS ENTIERES
DE CERTAINS GROUPES FINIS

- 3^e partie -

REPRESENTATIONS ENTIERES DES GROUPES DIEDRAUX D'ORDRE $2p$

par Nicole MOSER

I. INTRODUCTION.

Soit G un groupe diédral d'ordre $2p$, p nombre premier impair ; il est défini par deux générateurs σ et τ , liés par les relations :

$$\tau^2 = \sigma^p = 1 \quad \text{et} \quad \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau.$$

Dans cet exposé, nous allons donner la classification des $\mathbb{Z}[G]$ -modules sans torsion et de type fini sur \mathbb{Z} , établie par M.P. Lee dans [4], en utilisant une méthode de démonstration plus synthétique, où le foncteur Ext est remplacé par le foncteur H^1 . Nous utiliserons le théorème suivant dû à Reiner (cf. L. Bouvier [1]) :

THEOREME 1. Soit M un $\mathbb{Z}[G]$ -module, sans torsion et de type fini sur \mathbb{Z} . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- a) M est $\mathbb{Z}[G]$ -indécomposable ;
- b) $M_{2p} = \mathbb{Z}_{(2p)} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est $\mathbb{Z}_{(2p)}[G]$ -indécomposable.
($\mathbb{Z}_{(2p)}$ est le localisé de \mathbb{Z} en $2p$).

Notations : Pour toute la suite, S désignera soit \mathbb{Z} , soit l'un des localisés $\mathbb{Z}_{(2)}$, $\mathbb{Z}_{(p)}$ ou $\mathbb{Z}_{(2p)}$.

Posons : $\Phi_p(X) = 1 + X + \dots + X^{p-1}$
 ζ : une racine primitive p -ième de l'unité
 $A = S[\zeta]$
 $K = \mathbb{Q}(\zeta)$
 K_0 : le sous-corps de K fixe par τ
 $A_0 = A \cap K_0$
 h : le nombre de classes de A_0 .

Désignons par \mathcal{A} le A -module $A[\tau]$, muni du produit défini par :

$$\tau(\lambda_1 + \lambda_2 \tau) = \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1 \tau,$$

où les λ_i sont des éléments de A , et les $\bar{\lambda}_i$ les conjugués complexes des λ_i . Ainsi \mathcal{A} possède une structure d'algèbre, que l'on peut prolonger en structure de $S[G]$ -module, en définissant l'action de σ comme la multiplication par ζ . Il est clair que l'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi : S[G] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \sigma & \longmapsto & \zeta \\ \tau & \longmapsto & \tau \end{array}$$

se prolonge en $S[G]$ -homomorphisme surjectif, de noyau $\Phi_p(\sigma)S[G]$. Donc \mathcal{A} et $S[G]/\Phi_p(\sigma)S[G]$ sont des $S[G]$ -modules isomorphes.

Soit M un $S[G]$ -module, sans torsion et de type fini sur S .

Posons :

$$M' = \{m \in M \mid \Phi_p(\sigma)m = 0\}.$$

On peut considérer M' comme un \mathcal{A} -module. Quant au quotient $M^* = M/M'$, il est annihilé par $\sigma - 1$; donc sa structure en tant que $S[G]$ -module est déterminée par celle de $S[\langle \tau \rangle]$ -module. La classification des $S[G]$ -modules s'étudie donc en trois étapes :

- a) détermination des \mathcal{A} -modules indécomposables ;
- b) détermination des $S[\langle \tau \rangle]$ -modules indécomposables ;
- c) détermination des extensions indécomposables d'un $S[\langle \tau \rangle]$ -module par un \mathcal{A} -module.

II. DETERMINATION DES \mathcal{O} -MODULES INDECOMPOSABLES.

Donnons d'abord la définition suivante :

DEFINITION. Soient B un anneau unitaire, et C un sous-anneau de B . Un B -module est dit irréductible relativement à C s'il ne contient pas de sous- B -module non trivial facteur direct en tant que C -module.

PROPOSITION 1. Tout \mathcal{O} -module indécomposable est irréductible relativement à A .

La démonstration de cette proposition nécessite un lemme :

LEMME. Tout \mathcal{O} -module qui est A -projectif est aussi \mathcal{O} -projectif.

Démonstration du lemme : Soit M un \mathcal{O} -module qui est projectif sur A . Désignons par $j : A \rightarrow \mathcal{O}$ l'injection canonique de A dans \mathcal{O} . Comme \mathcal{O} est libre et de type fini sur A , $M_j = \mathcal{O} \otimes_A M$ est \mathcal{O} -projectif. (cf. Cartan-Eilenberg, prop. 6.1 [2]). Considérons alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Kerg} \rightarrow M_j \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

où g est l'application de M_j dans M définie par :

$$g(\lambda \otimes m) = \lambda m$$

pour tout λ de \mathcal{O} et tout m de M .

On vérifie facilement que l'application $f : M \rightarrow M_j$

$$m \longmapsto 1 \otimes \frac{\zeta}{\zeta + \bar{\zeta}} m + \tau \otimes \frac{\zeta}{\zeta + \bar{\zeta}} \tau m$$

est une section de g . Donc M , facteur direct d'un module \mathcal{O} -projectif, est \mathcal{O} -projectif. ■

Démonstration de la proposition 1 : Soit M un \mathcal{O} -module, et soit N un sous \mathcal{O} -module non trivial, facteur direct de M en tant que A -module. Comme A est un anneau de Dedekind, N est sans torsion et de

type fini sur A , donc il est A -projectif. D'après le lemme, N est \mathcal{O} -projectif : c'est un facteur direct de M en tant que \mathcal{O} -module, et M n'est pas un \mathcal{O} -module indécomposable. ■

PROPOSITION 2. Tout \mathcal{O} -module irréductible par rapport à A est isomorphe à un idéal ambige de $A/A_{\mathcal{O}}$.

Démonstration : Considérons l'algèbre $\tilde{\mathcal{O}} = K_{\mathcal{O}} \otimes_{A_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}$; elle est isomorphe à l'algèbre de matrices $\mathfrak{M}_2(K_{\mathcal{O}})$, donc c'est une algèbre simple et centrale, et tous les $\tilde{\mathcal{O}}$ -modules simples à gauche sont isomorphes ; parmi ceux-ci se trouve $K(1+\tau)$.

Donc tout \mathcal{O} -module irréductible par rapport à A est un A -module de rang 1, invariant par τ : il est isomorphe à un idéal ambige de $A/A_{\mathcal{O}}$. ■

PROPOSITION 3. Deux idéaux ambiges de $A/A_{\mathcal{O}}$ sont \mathcal{O} -isomorphes si et seulement si l'un est produit de l'autre par un élément de $K_{\mathcal{O}}$.

Démonstration : Deux idéaux \mathcal{O} -isomorphes sont A -isomorphes, donc dans la même classe d'idéaux de A . Le coefficient multiplicatif doit être invariant par τ . ■

Conclusion : Dans $A/A_{\mathcal{O}}$, il y a au plus un idéal ramifié, celui au-dessus de p . Donc les idéaux ambiges sont les étendus des idéaux de $A_{\mathcal{O}}$, et leur produit par $1-\zeta$.

Si S est l'un des localisés $\mathbb{Z}_{(2)}$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, ou $\mathbb{Z}_{(2p)}$, $A_{\mathcal{O}}$ est principal. Il y a donc deux \mathcal{O} -modules indécomposables, A et $(1-\zeta)A$.

Si $S = \mathbb{Z}$, soient h le nombre de classes de $A_{\mathcal{O}}$, et $\{\mathfrak{u}_i\}_{1 \leq i \leq h}$ un système de représentants des classes de $A_{\mathcal{O}}$. A isomorphe près, il y a $2h$ \mathcal{O} -modules indécomposables :

$$\mathfrak{u}_i A \text{ et } (1-\zeta)\mathfrak{u}_i A \text{ avec } 1 \leq i \leq h.$$

Tout \mathcal{O} -module est donc isomorphe à une somme directe :

$$\mathfrak{u}_{i_1} A \oplus \dots \oplus \mathfrak{u}_{i_k} A \oplus (1-\zeta)\mathfrak{u}_{i_{k+1}} A \oplus \dots \oplus (1-\zeta)\mathfrak{u}_{i_{k+l}} A$$

où les indices i_j appartiennent à l'ensemble $\{1, \dots, h\}$. Il est caractérisé, à isomorphisme près, par les entiers k et ℓ , et la classe dans A_0 de l'idéal $\prod_{j=1}^{k+\ell} \mathfrak{a}_{i_j}$.

III. DETERMINATION DES $S[\langle \tau \rangle]$ -MODULES INDECOMPOSABLES.

Désignons par :

S_1 l'ensemble S sur lequel τ agit trivialement,

S_2 l'ensemble S sur lequel τ agit comme la multiplication par -1

et $S_3 = S[\langle \tau \rangle]$ lui-même.

D'après les résultats de Reiner, exposés par D. Duval dans [3], si $S = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{(2)}$ ou $\mathbb{Z}_{(2p)}$, il y a trois $S[\langle \tau \rangle]$ -modules indécomposables, S_1 , S_2 , S_3 . Par contre si $S = \mathbb{Z}_{(p)}$, il n'y en a que deux, à isomorphisme près, S_1 et S_2 .

IV. EXTENSIONS DES $S[\langle \tau \rangle]$ -MODULES PAR DES \mathcal{O} -MODULES.

Soient M^* un $S[\langle \tau \rangle]$ -module, et M' un \mathcal{O} -module : ce sont en particulier deux $S[G]$ -modules. Une extension M de M^* par M' est définie par une suite exacte de $S[G]$ -modules :

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M^* \rightarrow 0,$$

qui est une suite scindée de S -modules.

Deux extensions M_1 et M_2 de M^* par M' sont équivalentes s'il existe entre elles un $S[G]$ -isomorphisme β tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_{M'} & & \downarrow \beta & & \downarrow 1_{M^*} \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

Chaque classe d'équivalence d'extensions est caractérisée par un élément ϵ de $H^1(G, T_S)$, où $T_S = \text{Hom}_S(M^*, M')$ sur lequel G agit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g : T_S &\longrightarrow T_S \\ t &\longmapsto gtg^{-1} \quad . \text{ (cf. [3])} \end{aligned}$$

Pour construire un représentant de cette classe d'équivalence, on munit la somme directe de S -modules $M' \oplus M^*$ d'une structure de $S[G]$ -module, à l'aide d'un cocycle $\lambda : G \rightarrow T_S$ d'image ϵ dans $H^1(G, T_S)$:

$$g(x, y) = (gx + \lambda_g(gy), gy)$$

pour tout g de G , tout x de M' et tout y de M^* .

IV.1. Calcul de $H^1(G, T_S)$, lorsque M' et M^* sont indécomposables.

PROPOSITION 4. Pour $S = \mathbb{Z}_{(2p)}$:

$$H^1(G, \text{Hom}_S(S_1, A)) \simeq H^1(G, \text{Hom}_S(S_2, (1-\zeta)A)) \simeq \{0\}$$

$$H^1(G, \text{Hom}_S(S_1, (1-\zeta)A)) \simeq H^1(G, \text{Hom}_S(S_2, A)) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$H^1(G, \text{Hom}_S(S_3, A)) \simeq H^1(G, \text{Hom}_S(S_3, (1-\zeta)A)) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Démonstration : Il est facile de voir que chacun de ces groupes de cohomologie comporte 1, p ou p^2 éléments. En effet, le sous-groupe cyclique $H = \langle \sigma \rangle$ est un sous-groupe distingué de G , donc on peut construire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, T_S^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, T_S) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(H, T_S)$$

où T_S désigne l'un des groupes d'homomorphismes de l'énoncé. On vérifie que dans chacun des cas, σ agit sur T_S comme la multiplication par ζ ; donc l'ensemble des points de T_S fixes par H , T_S^H , est réduit à 0, et la restriction de $H^1(G, T_S)$ à $H^1(H, T_S)$ est une injection. Comme H est cyclique, ce dernier groupe se calcule facilement :

$$H^1(H, T_S) \simeq \text{Ker } \Phi_p(\sigma) / (1-\sigma)T_S \simeq T_S / (1-\zeta)T_S .$$

Lorsque M^* est égal à S_1 ou S_2 , T_S est un $S[H]$ -module isomorphe à M' , donc $H^1(H, T_S) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Lorsque M^* vaut S_3 , T_S est $S[H]$ -isomorphe à $M' \times M'$, et l'on obtient $H^1(H, T_S) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

Calculons complètement $H^1(G, \text{Hom}_S(S_2, A))$. Comme S_2 est un S -module de rang 1, $\text{Hom}_S(S_2, A)$ est S -isomorphe à A ; l'action de σ correspond à la multiplication par ζ , et celle de τ à l'opposée de la conjugaison complexe; notons \hat{A} cette structure de $S[G]$ -module. Nous avons donc à déterminer $H^1(G, \hat{A})$.

Soit u un élément de $Z^1(G, \hat{A})$:

$$u(gg') = gu(g') + u(g)$$

quels que soient g et g' dans G . Posons $u(\tau) = \alpha$ et $u(\sigma) = \beta$, et transcrivons les relations liant les générateurs de G :

$$\begin{aligned} u(\tau^2) &= 0 = \tau u(\tau) + u(\tau) = -\bar{\alpha} + \alpha \\ u(\sigma^2) &= \sigma u(\sigma) + u(\sigma) = (\zeta + 1)\beta. \end{aligned}$$

De proche en proche :

$$u(\sigma^i) = \sigma u(\sigma^{i-1}) + u(\sigma) = (\zeta^{i-1} + \zeta^{i-2} + \dots + 1)\beta.$$

Donc, quel que soit β , $u(\sigma^p) = 0$.

$$u(\sigma\tau) = \sigma u(\tau) + u(\sigma) = \zeta\alpha + \beta$$

$$\begin{aligned} u(\tau\sigma^{p-1}) &= \tau u(\sigma^{p-1}) + u(\tau) \\ &= -(\zeta^{p-2} + \dots + 1)\bar{\beta} + \alpha \\ &= \zeta\bar{\beta} + \alpha. \end{aligned}$$

Donc, les relations à vérifier par α et β se résument en :

$$(i) \quad \alpha - \bar{\alpha} = 0$$

$$(ii) \quad (\zeta - 1)\alpha = \zeta\bar{\beta} - \beta = (\zeta - 1)\bar{\beta} + \bar{\beta} - \beta.$$

Comme l'idéal au-dessus de p , dans A , est principal, la condition (ii) impose à β de vérifier

$$\bar{\beta} - \beta \in (\zeta - 1)A.$$

Les éléments 1 et ζ constituent une A_0 -base de A ; posons :

$$\begin{aligned}\beta &= \lambda + \mu\zeta \quad \lambda \text{ et } \mu \text{ dans } A_0 \\ \bar{\beta} &= \lambda + \mu\bar{\zeta} .\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\bar{\beta} - \beta &= \mu(\bar{\zeta} - \zeta) = \mu\zeta(\zeta^{p-2} - 1) \\ &= \mu\zeta(\zeta - 1)(\zeta^{p-3} + \dots + 1) ,\end{aligned}$$

et $\bar{\beta} - \beta$ appartient toujours à $(\zeta - 1)A$. D'après (ii), on obtient l'égalité :

$$\begin{aligned}\alpha &= \lambda + \mu\zeta^{p-1} - \mu\zeta(\zeta^{p-2} + \zeta^{p-1}) \\ &= \lambda + \mu\zeta^{p-1} - \mu\zeta^{p-1} - \mu = \lambda - \mu \in A_0 .\end{aligned}$$

Pour déterminer un cocycle, il suffit donc de se donner sa valeur β en σ : l'égalité (ii) permet de calculer α , qui vérifie toujours (i). On obtient donc le \mathbb{Z} -homomorphisme :

$$Z^1(G, \hat{A}) \simeq \hat{A} .$$

Un cobord v de $B^1(G, \hat{A})$ est tel qu'il existe un $a \in A$ vérifiant pour tout g de G :

$$v(g) = g.a - a .$$

L'image de σ par un cobord est donc de la forme $(\zeta - 1)a$, et l'isomorphisme de $Z^1(G, \hat{A})$ sur \hat{A} transforme $B^1(G, \hat{A})$ en $(1 - \zeta)\hat{A}$. D'où :

$$H^1(G, \hat{A}) \simeq \hat{A}/(1 - \zeta)\hat{A} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} .$$

On termine la démonstration, pour les autres cas, à l'aide de calculs analogues. ■

PROPOSITION 5. Supposons $S = \mathbb{Z}_{(2p)}$, et soient M' un \mathcal{O} -module indécomposable, et M^* un $S[\langle \tau \rangle]$ -module indécomposable. Posons $T_S = \text{Hom}_S(M^*, M')$. Si $H^1(G, T_S)$ n'est pas nul, toutes les extensions de M^* par M' correspondant à des éléments non nuls de $H^1(G, T_S)$ sont des $S[G]$ -modules isomorphes.

Démonstration : Soit $\tilde{\beta}$ un élément non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe à $M'/(1 - \zeta)M'$, pour construire une extension M associée

à $\tilde{\beta}$, il suffit de choisir un relèvement β de $\tilde{\beta}$ dans M' . L'action de G sur M est alors définie par :

$$\sigma(a, b) = (\sigma a + b\beta, b)$$

pour tout a de M' et tout b de M^* .

Précisons les calculs dans le même cas particulier qu'à la proposition 4. Les éléments $u_i = 1 + \zeta + \dots + \zeta^i$, pour $0 \leq i \leq p-2$, constituent un système de représentants des classes non nulles de A modulo $(1-\zeta)A$. Il en est de même pour les $x_i = |u_i \bar{u}_i|^{1/2}$. Remarquons que si l'on choisit x_i comme représentant, le cocycle considéré donne la même image de σ et de τ , d'après la relation (ii) de la démonstration précédente.

Considérons donc l'extension M_1 correspondant à $x_1 = 1$, et l'extension M_i correspondant à x_i . Définissons les deux $S[G]$ -automorphismes suivants :

- a) la multiplication par x_i dans M' , notée x_i ;
- b) l'identité dans M^* , notée 1_{M^*} .

Ces automorphismes permettent la construction d'une application $(x_i, 1_{M^*})$ de M_1 dans M_i , qui est un S -isomorphisme. Relativement à l'action de G , on obtient :

$$\begin{aligned} (x_i, 1_{M^*})[\sigma(a, b)] &= (x_i, 1_{M^*})(\sigma a + b, b) \\ &= (x_i \sigma a + b x_i, b) \\ &= \sigma(x_i, 1_{M^*})(a, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_i, 1_{M^*})[\tau(a, b)] &= (x_i, 1_{M^*})(\tau a + b, b) \\ &= (x_i \tau a + b x_i, b) \\ &= \tau(x_i, 1_{M^*})(a, b), \end{aligned}$$

car x_i est égal à son conjugué complexe. Donc tous les M_i sont isomorphes à M_1 , comme $S[G]$ -modules. On procède de manière analogue dans les autres cas.

Notations : Lorsqu'il existe une extension indécomposable de M^* par M' , nous la noterons (M', M^*) . ■

IV.2. Extensions indécomposables de modules décomposables.

Pour mettre en évidence de telles extensions, rappelons le résultat suivant, dû à Swan [5] :

THEOREME II. Soient π un groupe fini, et R un anneau de Dedekind de caractéristique 0. Supposons qu'aucun diviseur de $|\pi|$ ne soit une unité de R . Alors tout module de type fini, projectif sur $R[\pi]$, est la somme directe d'un $R[\pi]$ -module libre, et d'un idéal projectif I de $R[\pi]$. De plus, I est un $R[\pi]$ -module indécomposable, et $\text{rg}_R I = \text{rg}_R R[\pi]$.

Appliquons ce théorème au cas où R est l'anneau $\mathbb{Z}_{(2p)}$, et où π est un groupe diédral G . Le $\mathbb{Z}_{(2p)}[G]$ -module indécomposable obtenu, I , est de rang sur $\mathbb{Z}_{(2p)}$ égal à $2p$; il n'a donc pas encore été cité. Précisons dans la proposition suivante :

PROPOSITION 6. Lorsque $S = \mathbb{Z}_{(2p)}$, il existe à isomorphisme près une seule extension indécomposable de modules décomposables, $(A \oplus (1-\zeta)A, S_3)$.

Démonstration : L'idéal I du théorème II est $S[G]$ -projectif, donc $S[G]$ -isomorphe à $S[G]$. Donc I est isomorphe à \mathfrak{a} , c'est-à-dire à $A \oplus (1-\zeta)A$. Quant à I^* , c'est un module de rang 2 sur S ; en étudiant l'action de τ , on vérifie que I^* est isomorphe à S_3 , donc

$$I \underset{S[G]}{\simeq} (A \oplus (1-\zeta)A, S_3)$$

Vérifier que $(A \oplus (1-\zeta)A, S_3)$ est, à isomorphisme près, la seule extension indécomposable de modules décomposables, nécessite des calculs longs et fastidieux que l'on pourra trouver dans [4].

THEOREME III. Soit h le nombre de classes de A_0 . Il existe,
à isomorphisme près, $7h + 3$ $\mathbb{Z}[G]$ -modules indécomposables. Si $\{\mathfrak{A}_i\}$,
pour $1 \leq i \leq h$, désigne un système de représentants des classes de A_0 ,
on peut les écrire comme suit :

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_i A \quad , \quad (1-\zeta)\mathfrak{A}_i A \\ & S_1 \quad , \quad S_2 \quad , \quad S_3 \\ & (\mathfrak{A}_i A, S_2) \quad , \quad ((1-\zeta)\mathfrak{A}_i A, S_1) \quad , \quad (\mathfrak{A}_i A, S_3) \\ & ((1-\zeta)\mathfrak{A}_i A, S_3) \quad , \quad (\mathfrak{A}_i A \oplus (1-\zeta)A, S_3) . \end{aligned}$$

Démonstration : Les résultats des paragraphes II et III donnent les
 $2h+3$ modules $\mathfrak{A}_i A$, $(1-\zeta)\mathfrak{A}_i A$, S_1 , S_2 et S_3 . Il reste donc à dénombrer
les extensions indécomposables M d'un $\mathbb{Z}[\langle \tau \rangle]$ -module non trivial M^* par
un \mathfrak{a} -module non trivial M' .

D'après le théorème I, si M est $\mathbb{Z}[G]$ -indécomposable,

$M_{2p} = \mathbb{Z}_{(2p)} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est $\mathbb{Z}_{(2p)}[G]$ -indécomposable. Posons $M'_{2p} = \mathbb{Z}_{(2p)} \otimes_{\mathbb{Z}} M'$,
et $M^*_{2p} = \mathbb{Z}_{(2p)} \otimes_{\mathbb{Z}} M^*$. De la suite exacte

$$(\alpha) \quad 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M^* \rightarrow 0$$

on déduit la suite exacte

$$(\beta) \quad 0 \rightarrow M'_{2p} \rightarrow M_{2p} \rightarrow M^*_{2p} \rightarrow 0 .$$

Donc M_{2p} est une extension de M^*_{2p} par M'_{2p} . Les $\mathbb{Z}_{(2p)}[G]$ -modules
indécomposables sont énumérés dans les propositions 5 et 6 . Etudions la
première éventualité :

$$M^*_{2p} = (\mathbb{Z}_{(2p)})_1 \quad ; \quad \text{comme} \quad \text{rg}_{\mathbb{Z}_{(2p)}} M^*_{2p} = \text{rg}_{\mathbb{Z}} M^* ,$$

et que l'action de τ est la même pour les deux modules, nécessairement
 $M^* = (\mathbb{Z})_1$.

$M'_{2p} = (1-\zeta)A_{2p}$; donc M' est un \mathfrak{a} -module de rang sur \mathbb{Z} égal
à $p-1$: c'est un idéal ambige de A , de la forme $(1-\zeta)\mathfrak{A}_i A$.

On obtient ainsi, pour chaque $\mathbb{Z}_{(2p)}[G]$ -module indécomposable obtenu comme extension de M^* par M' , M^* et M' non triviaux, h $\mathbb{Z}[G]$ -modules indécomposables. ■

V. A PROPOS DU THEOREME DE KRULL-SCHMIDT.

On trouve dans [4] la démonstration du théorème de Krull-Schmidt sous la forme suivante :

THEOREME IV. Dans toute décomposition d'un $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$ -module M_p en somme directe de modules indécomposables, les facteurs sont déterminés de manière unique par M_p , à un $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$ -isomorphisme près, et à l'ordre des facteurs près.

Lorsque $S = \mathbb{Z}_{(2)}$ ou $\mathbb{Z}_{(p)}$, les paragraphes II et III donnent les \mathcal{A} -modules indécomposables, ainsi que les $S[\tau]$ -modules indécomposables. Une étude analogue à celle conduite au paragraphe IV donne les extensions qui sont $S[G]$ -indécomposables. Dressons un tableau dans la première colonne duquel figurent les $\mathbb{Z}_{(2p)}[G]$ -modules indécomposables. La deuxième colonne donne les localisés en p de chacun d'eux, et la troisième les localisés en 2 .

$(\mathbb{Z}_{(2p)})_1$	$(\mathbb{Z}_{(p)})_1$	$(\mathbb{Z}_{(2)})_1$
$(\mathbb{Z}_{(2p)})_2$	$(\mathbb{Z}_{(p)})_2$	$(\mathbb{Z}_{(2)})_2$
$(\mathbb{Z}_{(2p)})_3$	$(\mathbb{Z}_{(p)})_1 \oplus (\mathbb{Z}_{(p)})_2$	$(\mathbb{Z}_{(2)})_3$
A_{2p}	A_p	A_2
$(1-\zeta)A_{2p}$	$(1-\zeta)A_p$	$(1-\zeta)A_2$
$(A_{2p}, (\mathbb{Z}_{(2p)})_2)$	$(A_p, (\mathbb{Z}_{(p)})_2)$	$A_2 \oplus (\mathbb{Z}_{(2)})_2$
$((1-\zeta)A_{2p}, (\mathbb{Z}_{(2p)})_1)$	$((1-\zeta)A_p, (\mathbb{Z}_{(p)})_1)$	$(1-\zeta)A_2 \oplus (\mathbb{Z}_{(2)})_1$
$(A_{2p}, (\mathbb{Z}_{(2p)})_3)$	$(A_p, (\mathbb{Z}_{(p)})_2) \oplus (\mathbb{Z}_{(p)})_1$	$A_2 \oplus (\mathbb{Z}_{(2)})_3$
$((1-\zeta)A_{2p}, (\mathbb{Z}_{(2p)})_3)$	$((1-\zeta)A_p, (\mathbb{Z}_{(p)})_1) \oplus (\mathbb{Z}_{(p)})_2$	$(1-\zeta)A_2 \oplus (\mathbb{Z}_{(2)})_3$
$(A_{2p} \oplus (1-\zeta)A_{2p}, (\mathbb{Z}_{(2p)})_3)$	$(A_p, (\mathbb{Z}_{(p)})_2) \oplus ((1-\zeta)A_p, (\mathbb{Z}_{(p)})_1)$	$A_2 \oplus (1-\zeta)A_2 \oplus (\mathbb{Z}_{(2)})_3$

Considérons alors les $\mathbb{Z}[G]$ -modules :

$$M = (A \oplus (1-\zeta)A, S_3) \oplus S_1 \oplus S_2$$

$$\text{et } N = (A, S_2) \oplus ((1-\zeta)A, S_1) \oplus S_3 .$$

Leurs localisés en p et en 2 sont isomorphes. Ils sont donc $\mathbb{Z}[G]$ -isomorphes. (cf. [1])

Conclusion : Même dans le cas où $h = 1$, la décomposition d'un $\mathbb{Z}[G]$ -module en somme directe de modules indécomposables n'est pas toujours unique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. BOUVIER - Séminaire de Théorie des Nombres.
Grenoble 1973-1974.
- [2] H. CARTAN et S. EILENBERG - Homological Algebra.
Princeton University Press, 1956.
- [3] D. DUVAL - Séminaire de Théorie des Nombres.
Grenoble 1973-1974.
- [4] M.P. LEE - Integral Representations of Dihedral Groups of order $2p$.
Trans. AMS 110 (1964).
- [5] R.G. SWAN - Induced Representations and projective modules.
Ann. of Math. (2) 70 (1960).

-o-o-o-