

F. GAUTHIER

## **Solving Diophantine Problems Modulo Every Prime**

*Séminaire de théorie des nombres de Grenoble*, tome 1 (1971-1972), p. 9-19

[http://www.numdam.org/item?id=STNG\\_1971-1972\\_\\_1\\_\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=STNG_1971-1972__1__9_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SOLVING DIOPHANTINE PROBLEMS MODULO EVERY PRIME

d'après [1]

---

par F. GAUTHIER les 17-24 novembre et 1er décembre 1971

Dans [5], à la fin du chapitre sur le théorème de la progression arithmétique, Serre signale à titre de remarque :

"Soit  $\{f_\alpha(X_1, \dots, X_n)\}$  une famille de polynômes à coefficients entiers, et soit  $P_\alpha$  l'ensemble des nombres premiers  $p$  tels que les réductions des  $f_\alpha$  (modulo  $p$ ) aient un zéro commun dans  $(\mathbb{F}_p)^n$ . On peut montrer, que  $P_\alpha$  a une densité de Dirichlet, que cette densité est un nombre rationnel, et n'est nulle que si  $P_\alpha$  est fini".

Dans une première partie nous allons démontrer ce résultat en admettant une proposition et un théorème qui seront démontrés dans une seconde partie.

Nous allons tout d'abord introduire quelques notations.

Si  $E$  est un corps,  $\tilde{E}$  désigne une clôture algébrique de  $E$ . Soit  $\mathbb{Q}$  le corps des rationnels ; si  $M$  est un sous-corps de  $\tilde{\mathbb{Q}}$ ,  $I(M)$  désigne l'anneau des entiers de  $M$ ,  $P(M)$  l'ensemble des idéaux premiers de  $I(M)$ . Si  $\mathfrak{p} \in P(M)$ , on note  $I(M)_{\mathfrak{p}}$  le localisé de  $I(M)$  en  $\mathfrak{p}$  et  $M(\mathfrak{p})$  l'adhérence de  $\mathbb{Q}$  dans  $M$  pour la topologie définie par  $\mathfrak{p}$  sur  $M$ . Remarquons que si  $M$  est une extension galoisienne de  $\mathbb{Q}$ ,  $M(\mathfrak{p})$  est le corps de décomposition de  $\mathfrak{p}$ .

Si, pour  $1 \leq \lambda \leq m$ ,  $f_\lambda \in I(M)[X_1, \dots, X_n]$ , on note  $a_M(f_1, \dots, f_m)$  l'ensemble des  $\mathfrak{p} \in P(M)$  tels qu'il existe  $x \in \mathbb{Z}^n$  avec :

$$f_\lambda(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{pour } 1 \leq \lambda \leq m.$$

Soit  $A_n(M)$  l'algèbre de Boole engendrée, dans l'ensemble des parties de  $P(M)$ , par les  $a_M(f_1, \dots, f_m)$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{N}^*$  et  $f_\lambda \in I(M)[X_1, \dots, X_n]$ .

Soit d'autre part  $A(M)$  l'algèbre de Boole engendrée par les  $a_M(f)$  pour  $f \in I(M)[X_1]$ .

De façon évidente :

- $A(M) \subset A_n(M)$  pour  $n \geq 1$
- $A(M)$  contient les parties finies de  $P(M)$ .

Si  $M \subset M'$  et si  $a \subset P(M')$  nous noterons  $(a|M)$  l'ensemble des  $p \cap M$  pour  $p \in a$ .

Soit  $k$  un corps de nombres ; pour tout  $\alpha \in k$ ,  $\alpha \neq 0$  considérons le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $\mathbb{Q}$  :

$$f(X) = X^h + \frac{c_1}{d_1} X^{h-1} + \dots + \frac{c_i}{d_i} X^{h-i} + \dots + \frac{c_0}{d_0},$$

$$c_i \in \mathbb{Z}, \quad d_i \in \mathbb{Z}, \quad (c_i, d_i) = 1.$$

On note  $S_k(\alpha)$  l'ensemble des  $p \in P(k)$  tels que  $p$  divise l'un des  $d_i$  ou  $p$  divise le discriminant de  $f$ . Soit  $k$  un corps de nombres, considérons une extension galoisienne  $L$  de  $k$  et notons  $G$  le groupe de Galois de  $L/k$ . Soit  $\mathcal{K} = \{k_i\}$  une famille de sous-corps de  $L$ , nous dirons que  $\mathcal{K}$  est  $L/k$  normale si  $\mathcal{K}$  est stable par  $G$ .

Si  $\mathcal{K}$  est  $L/k$  normale, on désigne par  $b_{L/k}(\mathcal{K})$  l'ensemble des  $p \in P(k)$  tels qu'il existe  $\mathfrak{P} \in P(L)$  avec  $L(\mathfrak{P}) \in \mathcal{K}$  et  $\mathfrak{P}|p$ .

On note  $B(L/k)$  l'ensemble des  $b_{L/k}(\mathcal{K})$  pour  $\mathcal{K}$  parcourant les familles  $L/k$  normales de sous corps de  $L$ , et  $B'(L/k)$  l'algèbre de Boole engendrée sur  $P(k)$  par  $B(L/k)$  et les parties finies de  $P(k)$ .

I. L'ENSEMBLE DES  $p$  TELS QUE ... A UNE DENSITE RATIONNELLE.

Soit, pour  $1 \leq \alpha \leq m$ ,  $f_\alpha \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ .

Soit  $P_0 = a_{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_m)$  l'ensemble des  $p \in P(\mathbb{Q})$  pour lesquels il existe  $x \in \mathbb{Z}^n$  avec  $f_\alpha(x) \equiv 0(p)$   $1 \leq \alpha \leq m$ . Alors  $P_0 \in A_n(\mathbb{Q})$ . Nous verrons au II que  $A_n(\mathbb{Q}) = A(\mathbb{Q})$  et que  $A(\mathbb{Q}) = \cup B'(L/\mathbb{Q})$ , l'union portant sur toutes les extensions  $L/\mathbb{Q}$  galoisiennes.

Par suite, il existe une extension galoisienne  $L/\mathbb{Q}$ , une famille  $\mathcal{K}$ ,  $L/\mathbb{Q}$  normale, et une partie finie  $S$  de  $P(\mathbb{Q})$  telles que  $P_0 \setminus S = b_{L/k}(\mathcal{K}) \setminus S$ . Nous supposons que  $S$  contient les  $p$  qui se ramifient dans  $L/\mathbb{Q}$ .

Pour  $p \in P(\mathbb{Q}) \setminus S$  notons  $F[\mathfrak{P}]$  le Frobénus d'un idéal  $\mathfrak{P} \in P(L)$  tel que  $\mathfrak{P} | p$  et  $F(p)$  la classe de conjugaison (dans  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ) de  $F[\mathfrak{P}]$  (symbole d'Artin).

Considérons les classes  $F(p)$  pour  $p \in P_0 \setminus S$ , nous obtenons ainsi un nombre fini de classes  $c_i$   $1 \leq i \leq t$ .

De plus, si  $p \in P(\mathbb{Q}) \setminus S$  et  $F(p) = c_i$  avec  $1 \leq i \leq t$ , il existe  $p_0 \in P_0 \setminus S$  tel que  $F(p) = F(p_0)$ .

Soit  $\begin{cases} p \in P(L) \text{ tel que } p | p \\ p_0 \in P(L) \text{ tel que } p_0 | p_0 \end{cases}$  il existe  $\tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$

tel que  $F[p] = \tau F[p_0] \tau^{-1} = F[\tau p_0]$ .

Donc les corps de décomposition de  $p$  et de  $\tau p_0$  sont les mêmes :  $L(p) = L(\tau p_0)$ .  $p_0 \in P_0 \Rightarrow L(\tau p_0) \in \mathcal{K}$  donc  $L(p) \in \mathcal{K}$  par suite  $p \in b_{L/k}(\mathcal{K}) \setminus S = P_0 \setminus S$ .

Le théorème d'Artin-Tchebotareff (voir [2]) nous permet d'affirmer de l'ensemble des  $p \in P(\mathbb{Q})$  non ramifiés dans l'extension  $L/\mathbb{Q}$  et tel que  $F(p) = c_i$  a une densité analytique et cette densité est

$$\frac{\text{card}(c_i)}{\text{card}(\text{Gal}(L/\mathbb{Q}))}$$

La remarque énoncée par Serre se trouve ainsi démontrée.

II. ETUDE DES ALGÈBRES DE BOOLE  $A(k)$  ET  $A_n(k)$  .

Lemme.

Soient  $\left\{ \begin{array}{l} L \text{ un corps de nombres} \\ \alpha \in L, \alpha \neq 0 \\ p \in P(L) \setminus S_L(\alpha) \end{array} \right.$

alors  $p \in a_L(X-\alpha)$  si et seulement si  $\alpha \in L(p)$  .

Démonstration :

Soit  $p\mathbb{Z} = p \cap \mathbb{Q}$  , on a alors  $L(p) = L \cap \mathbb{Q}_p$  .

Si  $\alpha \in L(p)$  , le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $\mathbb{Q}$  appartient à  $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}[X]$  , puisque  $p \notin S_L(\alpha)$  ; par suite  $\alpha \in \mathbb{Q}_p$  et  $\alpha$  est  $p$  entier, donc il existe  $a \in \mathbb{Z}$  tel que  $\alpha \equiv a(p)$  .

Si  $p \in a_L(X-\alpha)$  , il existe  $a \in \mathbb{Z}$  avec  $a \equiv \alpha(p)$  . Soit  $f(X)$  le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $\mathbb{Q}$  .  $f(a) \equiv 0(p)$  . Soit  $p\mathbb{Z} = p \cap \mathbb{Q}$  .  $f(X) \in \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}[X] \subset \mathbb{Z}_p[X]$  . Comme  $f(a) \equiv 0(p\mathbb{Z}p)$  et  $p \notin S_L(\alpha)$  le lemme de Hensel nous permet d'affirmer qu'il existe  $\alpha' \in \mathbb{Z}_p$  ,  $\alpha' \equiv a(p)$  tel que  $f(\alpha') = 0$  . Donc pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  il existe  $a_i \in \mathbb{Z}$  tel que  $a_i \equiv \alpha'(p)$  et  $f(a_i) \equiv 0(p^i)$  . Soit  $M$  une extension de  $L$  dans laquelle  $f$  se factorise complètement :  $f(X) = \prod_j (X-\gamma_j)$  .

Soit  $\mathfrak{P}$  un idéal de  $M$  au-dessus de  $p$  ;  $a_i - \alpha \equiv 0(\mathfrak{P})$  et comme  $p \notin S_L(\alpha)$   $f(a_i) \equiv 0(\mathfrak{P}^i)$  entraîne  $a_i \equiv \alpha(\mathfrak{P}^i)$  et donc  $\alpha \in L(p)$  .

Corollaire.

Si  $f(X) \in I(L)[X]$  et si  $f$  se factorise complètement dans  $L$  , il existe une partie finie  $S$  de  $P(L)$  telle que pour  $p \in P(L) \setminus S$  on ait :

$$p \in a_L(f) \Leftrightarrow f \text{ a une racine dans } L(p) .$$

Il suffit de prendre  $S = \bigcup_{\alpha} S_L(\alpha)$  , l'union portant sur les racines non nulles de  $f$  .

Proposition.

$k$  désignant un corps de nombres  $A(k) = \bigcup_L B'(L/k)$  .

L'union portant sur les  $L$  extensions galoisiennes de  $k$  .

Démonstration :

Soit  $f \in I(k)[X]$ . Considérons une extension galoisienne  $L$  de  $k$  dans laquelle  $f$  se factorise complètement et la famille  $\mathcal{K}$  des sous corps de  $L$  dans lesquels  $f$  a une racine.  $\mathcal{K}$  est  $L/k$  normale. Il résulte du corollaire du lemme que  $a_k(f)$  et  $b_{L/k}(\mathcal{K})$  diffèrent par une partie finie. Comme  $\bigcup_L B'(L/k)$  est une algèbre de Boole, on a

$$A(k) \subset \bigcup_L B'(L/k).$$

Pour montrer l'autre inclusion, il suffit de prendre  $a \in B(L/k)$  avec  $L/k$  galoisienne et de montrer que  $a \in A(k)$ . Soit  $\mathcal{K}$  une famille  $L/k$  normale telle que  $a = b_{L/k}(\mathcal{K})$ . Pour chaque  $k_i \in \mathcal{K}$ , considérons la trajectoire de  $k_i$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $\sigma(k_i)$  avec  $\sigma \in \text{Gal}(L/k)$ . Les trajectoires sont des familles  $L/k$  normales et comme  $b_{L/k}(\mathcal{K}) = \bigcup_{L/k} b_{L/k}(\mathcal{K})$  l'union portant sur les trajectoires  $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$  on peut supposer que  $\mathcal{K}$  est une trajectoire. Soit  $\mathcal{J}$  la famille des sous corps  $J$  de  $L$  tels que

- il existe  $k_i \in \mathcal{K}$  avec  $k_i \subset J$
- l'extension  $J/k_i$  n'ait pas de corps intermédiaire.

Soit  $\mathcal{K}'$  (resp  $\mathcal{J}'$ ) l'ensemble des sous corps de  $L$  qui contiennent un élément de  $\mathcal{K}$  (resp  $\mathcal{J}$ ) ; alors  $\mathcal{K}'$  et  $\mathcal{J}'$  sont des familles  $L/k$  normales et  $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \setminus \mathcal{J}'$  ; par suite  $b_{L/k}(\mathcal{K}) = b_{L/k}(\mathcal{K}') \setminus b_{L/k}(\mathcal{J}')$ . Il suffit donc de montrer que si  $\mathcal{M}$  est une famille  $L/k$  normale et si  $\mathcal{M}'$  est la famille  $L/k$  normale des sous corps de  $L$  contenant un corps de la famille  $\mathcal{M}$  on a  $b_{L/k}(\mathcal{M}') \in A(k)$  :

Pour chaque  $m_i \in \mathcal{M}$  considérons  $\theta_i$  entier sur  $\mathbb{Q}$  et tel que  $\mathbb{Q}(\theta_i) = m_i$ . Soit  $f_i$  le polynôme minimal de  $\theta_i$  sur  $k$ ,  $f_i \in I(k)[X]$ . Soit  $f = \prod f_i$ , alors  $f \in I(k)[X]$ ,  $f$  se factorise complètement dans  $L$  et la famille  $\mathcal{M}'$  est la famille des sous corps de  $L$  dans lesquels  $f$  a une racine, par suite  $b_{L/k}(\mathcal{M}')$  et  $a_k(f)$  diffère par une partie finie et

$$\bigcup B'(L/k) \subset A(k).$$

Corollaire.

$$\text{Soient } \begin{cases} k & \text{un corps de nombres} \\ h & \text{un sous corps de } k \\ a & \in A(k) \end{cases}$$

Alors, on a :  $(a|h) \in A(h)$  .

Démonstration :

$a \in A(k) = \cup B'(L/k)$  donc il existe une extension  $L/\mathbb{Q}$  galoisienne telle que  $k \subset L$  et  $a \in B'(L/k)$  . Il suffit de montrer que si  $\mathcal{K}$  est  $L/k$  normale

$$(b_{L/k}(\mathcal{K})|h) \in A(h) .$$

Soit  $\mathcal{H}$  la famille des sous corps de  $L$  qui sont  $L/h$  conjugués des corps de la famille  $\mathcal{K}$  , on a

$$(b_{L/k}(\mathcal{K})|h) = b_{L/h}(\mathcal{H}) \in A(h) .$$

Soient  $M$  un corps de nombres ,  $\mathfrak{p} \in P(M)$  et  $\mathfrak{p}\mathbb{Z} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Q}$  . Nous associerons à  $\mathfrak{p}$  une place de  $M$  dans  $\tilde{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}} \cup \{\infty\}$  (que nous noterons également  $\mathfrak{p}$  ) de la manière suivante :

Soit  $x \in I(M)$  , soit  $\bar{x}$  la classe de  $x$  dans  $I(M)/\mathfrak{p}$  .

$$I(M)/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{F}_{\mathfrak{p}^f} \subset \tilde{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$$

La place  $\mathfrak{p}$  est alors définie par

$$\begin{aligned} \blacksquare & \text{ si } \alpha = \frac{x}{y} \in I(M)_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{p}(\alpha) &= \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \\ \blacksquare & \text{ si } \alpha \in M \setminus I(M)_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{p}(\alpha) &= \infty \end{aligned}$$

On notera également  $\mathfrak{p}$  l'application induite sur  $M^n$  et celle induite sur  $M[X]$  .

Théorème.

Soit  $k$  un corps de nombres, pour tout  $n \geq 1$  :

$$A_n(k) = A(k)$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que si pour  $1 \leq \lambda \leq m$ ,  $g_\lambda \in I(k)[X_1, \dots, X_n]$  on a  $a_k(g_1, \dots, g_m) \in A(k)$ .

Remarquons tout d'abord que  $p \in a_k(g_1, \dots, g_m)$  équivaut à "les polynômes  $p(g_\lambda)$ ,  $1 \leq \lambda \leq m$ , ont un zéro commun dans  $(\mathbb{F}_p)^n$ ".

Soit d'autre part  $V$  l'ensemble algébrique défini par les  $g_\lambda$ ,  $1 \leq \lambda \leq m$ . Nous allons procéder par récurrence sur la dimension  $d$  de  $V$  (sur  $k$ ).

1) Si  $V$  ne contient qu'un nombre fini de points. Soit  $V = \{x^{(1)}, \dots, x^{(\ell)}\}$ . Il existe une extension galoisienne  $N$  de  $k$  telle que  $x^{(\mu)} \in N^n$  pour  $1 \leq \mu \leq \ell$ .

D'après le corollaire de la proposition il suffit de montrer que  $a_N(g_1, \dots, g_m) \in A(N)$ .

Or, on peut montrer (voir [6] chap. III §12) que pour  $\mathfrak{P} \in P(N)$  :

■ l'ensemble des  $(\xi) \in (\tilde{\mathbb{F}}_p)^n$  tels que pour tout  $\lambda$ ,  $1 \leq \lambda \leq m$   $\mathfrak{P}(g_\lambda)(\xi) = 0$ ,

■ et l'ensemble  $\mathfrak{P}(V)$  des  $(\xi) \in (\tilde{\mathbb{F}}_p)^n$  tels qu'il existe une place  $\mathfrak{P}'$  au-dessus de  $\mathfrak{P}$  et un  $(x) \in V$  avec  $\mathfrak{P}'(x) = (\xi)$ ,

sont égaux sauf pour  $\mathfrak{P}$  appartenant à une partie finie  $S'$  de  $P(N)$ .

Par suite, pour tout  $\mathfrak{P} \in P(N) \setminus S'$  les solutions dans  $(\tilde{\mathbb{F}}_p)^n$  du système  $\mathfrak{P}(g_\lambda) = 0$ ,  $1 \leq \lambda \leq m$  sont  $\mathfrak{P}(x^{(\mu)})$ ,  $1 \leq \mu \leq \ell$ .

Donc, pour  $\mathfrak{P} \in P(N) \setminus S'$ ,  $\mathfrak{P} \in a_N(g_1, \dots, g_m)$  équivaut à "il existe  $\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq \ell$ , tel que  $\mathfrak{P}(x^{(\mu)}) \in (\mathbb{F}_p)^n$ ".

Soit  $S'' = (\cup_{\gamma \in \mathcal{Y}_N} \gamma) \cup S'$ , l'union étant prise sur les  $\gamma$ , coordonnées non nulles des  $x^{(\mu)}$ ;  $S''$  est un ensemble fini et pour  $\mathfrak{P} \in P(N) \setminus S''$  :

$\mathfrak{P} \in a_N(g_1, \dots, g_m)$  équivaut à "il existe  $\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq \ell$  avec  $x^{(\mu)} \in (N(\mathfrak{P}))^n$ ".

Soit  $b$  l'ensemble des  $\mathfrak{P} \in P(N)$  tel qu'il existe  $\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq \ell$  avec  $x^{(\mu)} \in (N(\mathfrak{P}))^n$ .

La famille de corps  $N(\mathfrak{P})$ ,  $\mathfrak{P} \in b$ , est  $N/N$  normale,  $a_N(g_1, \dots, g_m)$  et  $b$  ne diffèrent que par un ensemble fini, et par suite  $a_N(g_1, \dots, g_m) \in A(N)$ .

La propriété est donc vraie si  $d = -1$  ( $V = \emptyset$ ) et  $d = 0$ .

2) Si  $d \geq 1$  :

Supposons la propriété établie pour toutes les dimensions strictement inférieures à  $d$ .

Il existe une extension  $N/\mathbb{Q}$  galoisienne,  $N \supset k$ , et des variétés  $V_\tau$  absolument irréductibles sur  $N$ , telles que :

$$V = \bigcup_{\tau=1}^t V_\tau.$$

Soit  $\{g_{\tau,1}, g_{\tau,2}, \dots, g_{\tau,b}\} \subset I(N)[X_1, \dots, X_n]$  une famille de polynômes définissant  $V_\tau$ . Pour  $\mathfrak{P} \in P(N)$ ,  $\mathfrak{P}(V) = \bigcup_{\tau=1}^t \mathfrak{P}(V_\tau)$ , et par suite il existe une partie finie  $T$  de  $P(N)$  telle que pour  $\mathfrak{P} \in P(N) \setminus T$  :

$$\{(\xi) \in (\tilde{\mathbb{F}}_p)^n / \mathfrak{P}(g_\mu)(\xi) = 0, 1 \leq \mu \leq m\} = \bigcup_{\tau=1}^t \{(\xi) \in (\tilde{\mathbb{F}}_p)^n / \mathfrak{P}(g_{\tau,\beta})(\xi) = 0, 1 \leq \beta \leq b\};$$

d'où

$$a_N(g_1, \dots, g_m) \setminus T = \bigcup_{\tau=1}^t a_N(g_{\tau,1}, \dots, g_{\tau,b}) \setminus T.$$

Comme  $\begin{cases} (a_N(g_1, \dots, g_m) | k) = a_k(g_1, \dots, g_m), \\ A(k) \text{ est clos pour l'union et contient les parties finies.} \end{cases}$

On voit qu'il suffit de montrer que  $a_N(g_{\tau,1}, \dots, g_{\tau,b}) \in A(N)$  et par suite on peut supposer  $V$  absolument irréductible, et  $k/\mathbb{Q}$  galoisienne. Pour chaque sous corps  $k'$  de  $k$ ,  $\{k'\}$  est une famille  $k/k$  normale,  $b_{k/k}(\{k'\})$  désigne alors l'ensemble des  $\mathfrak{p} \in P(k)$  tels que  $k(\mathfrak{p}) = k'$ . Comme

$a_k(g_1, \dots, g_m) = \bigcup_{k' \subset k} [a_k(g_1, \dots, g_m) \cap b_{k/k}(\{k'\})]$  nous sommes ramenés à montrer que si  $k'$  est un sous corps de  $k$ ,  $a_k(g_1, \dots, g_m) \cap b_{k/k}(\{k'\}) \in A(k)$ .

En fait il suffit de montrer que :

$$a_k(g_1, \dots, g_m) \cap [b_{k/k}(\{k'\}) \setminus S] \in A(k)$$

$S$  désignant une partie finie de  $P(k)$ .

Nous supposerons que  $S$  contient les  $\mathfrak{p} \in P(k)$  tels que  $\mathfrak{p} | p$  avec  $p$  ramifié dans  $k/\mathbb{Q}$ .

Si  $p \in b_{k/k}(\{k'\}) \setminus S$ ,  $k(p) = k'$  est le corps de décomposition de  $p$  et par suite

$$[k:k'] = f(p/p) = f .$$

Soit pour  $1 \leq \varphi \leq f$ ,  $w_\varphi \in I(k)$  tels que  $\{w_1, \dots, w_f\}$  forme une base de  $k$  sur  $k'$ . Chaque  $g_\mu$  ( $1 \leq \mu \leq m$ ) s'écrit de manière unique :

$$g_\mu = \sum_{\varphi=1}^f g_{\mu,\varphi} w_\varphi$$

avec  $g_{\mu,\varphi} \in k'[X_1, \dots, X_n]$ . Il existe  $w \in I(k')$  tel que  $w g_{\mu,\varphi} \in I(k')[X_1, \dots, X_n]$  pour  $1 \leq \mu \leq m$  et  $1 \leq \varphi \leq f$ .

Nous supposons que  $S$  contient les  $p \in P(k)$  tels que  $p|w$  ou  $p|w_\varphi$ ,  $1 \leq \varphi \leq f$ ; on peut donc supposer que

$$g_{\mu,\varphi} \in I(k')[X_1, \dots, X_n]$$

pour  $1 \leq \mu \leq m$  et  $1 \leq \varphi \leq f$ .

Si  $p \in b_{k/k}(\{k'\}) \setminus S$  on a :

$$p(g_\mu) = \sum_{\varphi=1}^f p(g_{\mu,\varphi}) p(w_\varphi) ,$$

$$p(g_{\mu,\varphi}) \in \mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_n] \text{ et}$$

$\{p(w_\varphi), 1 \leq \varphi \leq f\}$  est une base de  $I(k)/p$  sur  $\mathbb{F}_p$ ; par suite

$p \in a_k(g_1, \dots, g_m)$  équivaut à  $p \in a_k(g_{1,1}, \dots, g_{m,f})$ . Il suffit donc de montrer que :

$$a_k(g_{1,1}, \dots, g_{m,f}) \cap (b_{k/k}(\{k'\}) \setminus S) \in A(k) .$$

Soit  $W$  l'ensemble algébrique défini sur  $k'$  par  $g_{1,1}, \dots, g_{m,f}$ ; on a  $W \subset V$ . Si  $W \subsetneq V$ ,  $V$  étant absolument irréductible  $\dim W < \dim V$  et l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Si  $W = V$ ,  $V$  est alors une variété absolument irréductible définie sur  $k'$ .

Il suffirait de montrer qu'il existe une partie finie  $\Omega$  de  $P(k)$  telle que :

$$b_{k/k}(\{k'\}) \setminus \Omega \subset a_k(g_{1,1}, \dots, g_{m,f}) ,$$

et pour cela que pour tout  $p \in b_{k/k}(\{k'\})$  sauf peut-être un nombre fini, les polynômes :

$$p(g_{\mu,\varphi}) \text{ avec } 1 \leq \mu \leq m \text{ et } 1 \leq \varphi \leq f ,$$

ont un zéro commun dans  $(\mathbb{F}_p)^n$ .

Si  $\mathfrak{p} \in b_{k/k}(\{k'\})$   
 on a  $k(\mathfrak{p}) = k'$  ; notons  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap k'$  , alors  
 $\mathfrak{p}(g_{\mu,\varphi}) = \mathfrak{p}'(g_{\mu,\varphi}) \in \mathbb{F}_p[X]$  . Pour tout  $\mathfrak{p}$  sauf un nombre fini, l'ensemble  
 algébrique  $\mathfrak{p}(V)$  défini sur  $\mathbb{F}_p$  par les polynômes  $\mathfrak{p}(g_{\mu,\varphi})$  est une variété  
 non vide de même dimension  $d$  que la variété  $V$  , (voir [6] et [7]).

Soit  $g_{\mu,\varphi}^*$  le polynôme obtenu à partir de  $\mathfrak{p}(g_{\mu,\varphi})$  par homogénéisa-  
 tion :

si  $s$  est le degré total de  $\mathfrak{p}(g_{\mu,\varphi})$

$$g_{\mu,\varphi}^*(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0^s \mathfrak{p}\left[g_{\mu,\varphi}\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right)\right] .$$

Nous obtenons ainsi une variété projective  $V^*$  ; nous voulons  
 montrer que pour tout  $\mathfrak{p}$  (sauf un nombre fini) :

$V^*$  contient au moins un point rationnel sur  $\mathbb{F}_p$  et tel que  $x_0 \neq 0$   
 (point à distance finie).

Soit  $N$  le nombre de points de  $V^*$  , rationnels sur  $\mathbb{F}_p$  , on sait  
 que :

$$|N - p^d| \leq \delta \cdot p^{d-\frac{1}{2}} + Ap^{d-1} ;$$

$\delta$  et  $A$  désignant deux constantes indépendantes de  $\mathfrak{p}$  (voir [3]).

Par suite pour  $\mathfrak{p}$  assez grand  $N > \frac{1}{2} p^d$  . Soit  $H_0$  l'hyperplan  
 d'équation  $X_0 = 0$  ;  $V^*$  n'est pas incluse dans  $H_0$  , sinon  $\mathfrak{p}(V)$  serait  
 vide.

Désignons par :

- $\tau$  le degré de  $\mathfrak{p}(V)$
- $N_0$  le nombre de points rationnels de  $V^* \cap H_0$
- $N_a$  le nombre de points à distance finie de  $V^*$

$V^* \cap H_0$  est un cycle de degré  $\tau$  et de dimension  $d-1$  donc il existe  
 une constante  $B(n, \tau, d)$  telle que :

$$N_0 \leq B(n, \tau, d)p^{d-1}$$

(voir [3], lemme 1).

Il en résulte que pour  $\mathfrak{p}$  assez grand  $N_a = N - N_0 > 0$  .

BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] - J. AX - Solving diophantine problems modulo every prime  
(Ann. of Math. vol. 85, 1967, p. 161-171).
- [2] - J.R. JOLY - Théorème d'Artin-Tchebotareff (Séminaire de Théorie des  
Nombres, Grenoble, 20.1.71).
- [3] - S. LANG et - Number of points of varieties in finite fields. (Amer.  
A. WEIL J. Math. 76, 1954, p. 819-827).
- [4] - S. LANG - Introduction to Algebraic Geometry.
- [5] - J.P. SERRE - Cours d'Arithmétique.
- [6] - G. SHIMURA - Complex multiplication of abelian varieties and its  
and Y. TANIYAMA applications to Number Theory.
- [7] - G. SHIMURA - Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete  
valuation of the basic field (Amer. J. Math. 77, 1955,  
p. 134-176).
- [8] - B.L. VAN DER WAERDEN - Einführung in die Algebraische Geometrie.
- [9] - B.L. VAN DER WAERDEN - Modern Algebra (vol. II).

-----