Séminaire de théorie des nombres de Grenoble

Jacques Martinet

Fonctions zêta au point $\frac{1}{2}$

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 1 (1971-1972), p. 108-116
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1971-1972__1__108_0>

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FONCTIONS ZETA AU POINT 1/2

par Jacques MARTINET le 31.5.72

INTRODUCTION

La fonction zêta d'un corps de nombres vérifie une équation fonctionnelle reliant ses valeurs aux points s et $1-s$, c'est-à-dire en deux points symétriques par rapport au point d'abscisse $1/2$ sur l'axe réel. Par ailleurs, il est conjecturé que ses zéros non triviaux sont sur la droite $s = 1/2$. Il est naturel de chercher si le point $1/2$ lui-même peut être un zéro. Ce n'est pas le cas de la fonction zêta de Riemann. Pour un corps quadratique, le problème est ouvert ; on a vérifié néanmoins pour les petites valeurs du discriminant que la fonction zêta ne s'annulait pas au point $s = 1/2$.

Nous donnons dans cet exposé des exemples de corps dont la fonction zêta s'annule du point $1/2$. (Exemples dus à Armitage, Fröhlich et Serre). Ils sont obtenus en étudiant le comportement des fonctions L qui "divisent" la fonction zêta. Nous nous intéresserons essentiellement à l'équation fonctionnelle des fonctions L .

I. FONCTIONS L ABELIENNES.

Pour un corps de nombres, k , on note $\mathfrak{J}_k$ le groupe des idèles de k ; les groupes multiplicatifs de k et des différents complétés k_v de k sont plongés dans $\mathfrak{J}_k$ de la façon habituelle. Par un caractère χ de k , nous entendons un homomorphisme continu χ de $\mathfrak{J}_k$ dans $\mathbb{C}^*$, dont le noyau contient k^* , et dont l'image est un groupe fini de racines de l'unité. Pour toute place v , χ définit un caractère χ_v sur k_v^* . Pour des raisons de connexion, χ_v est trivial sur k_v^* si v est complexe. De même, si v est réelle, χ_v est trivial sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors $\chi(x) = \chi(-1) = \pm 1$ pour x négatif, et l'on dit que χ est ramifié si $\chi(-1) = -1$, non ramifié si $\chi(-1) = +1$. Si v est une place finie, on dit que χ est non ramifié en v si χ est trivial sur le groupe U_v des unités. Dans tous les cas, on définit le conducteur $F(\chi_v)$ de χ_v par la formule $F(\chi_v) = \mathfrak{p}_v^{f_v}$, où $\mathfrak{p}_v$ est l'idéal de valuation de k_v, et f_v le plus petit entier tel que χ soit trivial sur $U_v^{(f_v)}$. Le conducteur de χ est alors défini par ses composantes locales. (Le conducteur de χ est le conducteur de l'extension k_χ/k, où k_χ est l'extension cyclique de k correspondant à $\operatorname{Ker}\chi$ par la théorie du corps de classes).

On associe à χ un caractère sur les idéaux de la façon suivante : si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de k, on pose $\chi(\mathfrak{p}) = 0$ si χ est ramifié en $\mathfrak{p}$, et $\chi(\mathfrak{p}) = \chi_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p})$ dans le cas contraire, $\pi_\mathfrak{p}$ désignant une uniformisante locale en $\mathfrak{p}$ (comme $\chi_\mathfrak{p}$ est trivial sur les unités, la définition est indépendante du choix de $\pi_\mathfrak{p}$). On prolonge χ aux idéaux par linéarité, et l'on pose pour s complexe,

$$\Re(s) > 1 \ , \quad L(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier}} \frac{1}{1 - \dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}} = \sum_{\mathfrak{a} \text{ entier}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} \ .$$

Comme d'habitude, $\Re(s)$ est la partie réelle de s, et N la norme absolue. On obtient une fonction holomorphe. Elle se prolonge au plan complexe en une fonction méromorphe, encore notée $L(s,\chi)$, qui est même holomorphe si $\chi \neq 1$. Pour $\chi = 1$, $L(s,1)$ est la fonction zêta de k.

Si maintenant K est une extension abélienne finie de k, de groupe de Galois G, un caractère χ de degré 1 de G définit par composition avec l'application de réciprocité un caractère sur $\mathfrak{I}_k$, donc une fonction L, que l'on notera $L(s,\chi,K/k)$.

II. FONCTIONS L D'ARTIN.

Soient k un corps de nombres, K une extension galoisienne finie de k, G son groupe de Galois. Pour tout caractère χ de G, on peut définir (Artin, [1]) une série notée $L(s,\chi,K/k)$, convergente pour $\Re(s) > 1$. La série L vérifie les quatre propriétés suivantes, qui la déterminent parfaitement :

1) $L(s,\chi+\chi',K/k) = L(s,\chi,K/k)\,L(s,\chi',K/k)$.

2) Soit H un sous-groupe distingué de G , K' son corps des invariants, χ un caractère de G/H , χ_* le caractère de G obtenu en composant avec la surjection canonique $G \to G/H$.

Alors, $L(s,\chi,K'/k) = L(s,\chi_*,K/k)$.

3) Soit H un sous-groupe de G , K' son corps des invariants, χ un caractère de H , χ^* le caractère de G induit par χ

$$(\chi^*(s) = \sum_{\substack{t\in G/H \\ tst^{-1}\in H}} \chi(tst^{-1})) .$$

Alors,

$$L(s,\chi,K/K') = L(s,\chi^*,K/k) .$$

4) Si G est abélien, et si χ est un caractère de degré 1 de G , $L(s,\chi,K/k) = L(s,\chi)$, au sens du paragraphe précédent.

D'après un théorème de Brauer, tout caractère χ de G est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de caractères de degré 1 de sous-groupes. On en déduit bien que les fonctions L d'Artin sont caractérisées par les quatre propriétés ci-dessus, et qu'elles se prolongent en des fonctions méromorphes définies sur $\mathbb{C}$ tout entier. D'autre part, le caractère r de la représentation régulière est induit par le caractère de la représentation du sous-groupe réduit à l'élément neutre de G .

Comme $r = \sum_{\chi \text{ irréd.}} \chi(1)\chi$, on a la formule

$$\zeta_K(s) = \zeta_k(s) \prod_{\chi\neq 1} L(s,\chi,K/k)^{\chi(1)} ,$$

où le produit est étendu aux caractères irréductibles de G .

III. EQUATION FONCTIONNELLE ([5]).

Soient χ un caractère sur les idèles $\mathfrak{J}_k$ d'un corps k. Soient $\mathfrak{D}$ la différente de k, $F(\chi)$ le conducteur de χ, d_χ la norme absolue du produit $\mathfrak{D}F(\chi)$. Soient n le degré et r_2 le nombre de places complexes de k. Soit

$$\Lambda(s,\chi) = (2^{-r_2}\pi^{-n}d\chi)^{s/2} \prod_{v \text{ complexe}} \Gamma(s) \prod_{\substack{v \text{ réelle} \\ \chi_v \text{ non ramifié}}} \Gamma(s/2) \prod_{\substack{v \text{ réelle} \\ \chi_v \text{ ramifié}}} \Gamma(\tfrac{s+1}{2}) L(s,\chi)$$

Alors, la fonction Λ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1-s,\bar{\chi}) = W(\chi)\,\Lambda(s,\chi) \ ,$$

où $W(\chi)$ est un nombre complexe de module 1.

La formule $\Gamma(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, 2^s\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})$ permet de supprimer le terme en $\Gamma(s)$ de l'équation fonctionnelle, quitte à supprimer une constante dans chaque membre. Sous cette forme, il est facile d'étendre l'équation fonctionnelle aux séries L d'Artin.

Soit χ un caractère attaché à une extension galoisienne K/k. Pour toute place à l'infini v de k, soit σ, défini à conjugaison près, un générateur du groupe de décomposition d'une place v' de K au-dessus de v. Posons avec Artin,

$$\gamma(s,\chi,K/k) = [\Gamma(s/2)\Gamma(\tfrac{s+1}{2})]^{r_2\chi(1)} \prod_{v \text{ réelle}} \Gamma(\tfrac{s}{2})^{\frac{\chi(1)+\chi(\sigma)}{2}}\, \Gamma(\tfrac{s+1}{2})^{\frac{\chi(1)-\chi(\sigma)}{2}} \ .$$

Soit enfin,

$$A(\chi,K/k) = \frac{|d_k|^{\chi(1)} N_{k/Q}(F(\chi,K/k))}{\pi^{n\chi(1)}} \ ,$$

où d_k est le discriminant de k, $F(\chi,K/k)$ le conducteur d'Artin de χ ([9]) et n le degré de k. Alors, la fonction

$$\Lambda(s,\chi,K/k) = A(\chi,K/k)^{s/2}\gamma(s,\chi,K/k)L(s,\chi,K/k)$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$\Lambda(1-s,\bar{\chi}) = W(\chi)\,\Lambda(s,\chi)$, où $W(\chi)$ est un nombre complexe de module 1.

De plus, $W(\chi)$ est invariant sous les opérations $\chi \to \chi_*$ et $\chi \to \chi^*$ du § 2 .

IV. LE CALCUL DE $W(\chi)$.

Il est clair que le calcul de $W(\chi)$ se ramène au cas où χ est un caractère sur les idèles. Il existe des formules donnant $W(\chi)$ lorsque χ est un caractère sur les idèles de k (Hasse [4], Lang [5]). Voici ce calcul d'après Lang. On remarquera qu'il se ramène à des calculs locaux.

Soit $\lambda_o = \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}/Z$ le caractère obtenu en composant les applications canoniques $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour un corps local $k_{\mathfrak{p}}$, on pose $\lambda = \lambda_o \circ Tr_{k_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}$. On définit un caractère η par $\eta(x) = e^{2i\pi\lambda(x)}$. Pour une place finie ramifiée en $\mathfrak{p}$, on définit la somme de Gauss $\tau_{\mathfrak{p}}(\chi)$ par la formule :

$$\tau_{\mathfrak{p}}(\chi) = \sum_{\epsilon} (\chi\eta)(\epsilon\pi^{-0(\chi)})$$

où $0(\chi)$ est l'exposant de $\mathfrak{p}$ dans le produit $\mathfrak{D}F(\chi)$, π est une uniformisante de $k_{\mathfrak{p}}$, et la sommation est étendue à une famille de représentants de $U_{\mathfrak{p}}$ modulo $1+F_{\mathfrak{p}}(\chi)$. Soit M le nombre de places réelles ramifiées pour χ , et soit S_χ l'ensemble des places finies où χ est ramifiée. Alors,

$$W(\chi) = i^{-M} N(f(\chi))^{-1/2} \prod_{\mathfrak{p}\in S_\chi} \tau_{\mathfrak{p}}(\chi) \prod_{\mathfrak{p}\notin S_\chi} \chi(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{-1}) .$$

<u>Exemple 1.</u> $k = \mathbb{Q}$ et χ est le caractère quadratique modulo p , avec p premier impair. On a $f(\chi) = p$, $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}$, $M = 0$ si $p \equiv 1(4)$, $M = 1$ si $p \equiv -1(4)$. On trouve :

$$W(\chi) = i^{-M} \frac{1}{\sqrt{p}} \tau_p(\chi) .$$

Pour le calcul de $\tau_p(\chi)$, ϵ peut parcourir les racines $(p-1)$-ièmes de 1 de $\mathbb{Q}_p$. Pour a entier, $1 \leq a \leq p-1$, il y a une unique racine ϵ_a vérifiant $\epsilon_a \equiv a \mod p$. On a $0_p(\chi) = 1$; si U est une unité p-adique, $\chi(p^n U) = (\frac{U}{p})$.

Donc, $\tau_p(\chi) = \sum_{a=1}^{p-1} (\frac{a}{p}) e^{\frac{2i\pi a}{p}}$ est la somme de Gauss usuelle.

Exemple 2. Si $\chi = 1$, on voit tout de suite que $W(\chi) = 1$.

Exemple 3. Soit χ un caractère quadratique sur un corps k , K l'extension quadratique qui lui correspond par la théorie du corps de classes. On a $L(s,\chi) = \zeta_K(s)\zeta_k(s)^{-1}$. On en déduit que $W(\chi) = +1$. (Cet exemple m'a été donné par Serre). L'exemple 3, joint à l'exemple 1 donne le "signe" de la somme de Gauss :

$$\tau_p(\chi) = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{si } p \equiv 1(4) \\ i\sqrt{p} & \text{si } p \equiv 3(4) . \end{cases}$$

V. VALEUR DE W ET ZERO EN 1/2 DE LA FONCTION ZETA.

Soit χ un caractère réel irréductible d'un groupe G . Deux cas sont possibles : ou bien χ est le caractère d'une représentation rélle, ou bien le facteur simple de $\mathbb{R}[G]$ associé à χ est une algèbre de matrices sur le corps $\mathbb{H}$ des quaternions. Dans le premier cas, Serre conjecture que l'on a toujours $W(\chi) = +1$. Il m'a dit posséder une démonstration de ce fait dans le cas d'un corps de fonctions.

Jusqu'à l'an dernier, on ne possédait pas d'exemple de caractère réel χ aux $W(\chi) = -1$. Les premiers exemples sont dus à Serre et à Armitage. Avant d'entrer dans les détails, montrons la

Proposition.

Si $W(\chi) = -1$, la fonction zêta du corps K a un zéro en $s = +\frac{1}{2}$.

Remarque :

Ce n'est pas une conséquence immédiate de la formule
$\zeta_L(s) = \prod_{\chi \text{ irréductible}} L(s,\chi,K/k)^{\chi(1)}$, car on ne sait pas si les séries L d'Artin sont holomorphes. On utilise alors le théorème dû à Artin, selon lequel tout caractère est combinaison linéaire à coefficients rationnels de caractères induits par des caractères de degré 1 de sous-groupes cycliques.

Ecrivons donc $\chi = \frac{1}{N}\Sigma n_i f_i^*$, où n_i , $N \in \mathbf{Z}$, et f_i est attaché à une extension cyclique K/K_i . On a alors $L(s,\chi,K/k)^N = \pi L(s,\varphi_i)^{n_i}$. D'autre part, comme $W(\chi) = -1$, $L(s,\chi,K/k)$ a un zéro ou un pôle (d'ordre impair) en $s = \frac{1}{2}$. Il existe donc un indice i_o , pour lequel $L(1/2,\varphi_{i_o}) = 0$. On a alors l'égalité $\zeta_K(s) = \zeta_{k_{i_o}}(s) \prod_j L(s,\psi_j)$, où les ψ_j sont les caractères de degré 1 attachés à l'extension L/K_{i_o} autres que le caractère trival, ψ_1 étant égal à φ_{i_o} . Les fonctions du membre de droite de l'égalité sont cette fois holomorphes au point 1/2 , d'où le résultat.

Compte-tenu de la conjecture de Serre, on va chercher des exemples à l'aide de caractères non rationnels sur $\mathbb{R}$.

VI. LE GROUPE QUATERNIONIEN.

Soit G le groupe quaternionien d'ordre 8 ($G = \langle\sigma,\tau\rangle$, $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = \sigma^2$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$). Le plongement de G dans le corps des quaternions par $\sigma \to i$, $\tau \to j$ définit, en prenant les traces réduites, un caractère irréductible χ de degré 2 de G , dont les valeurs sont $\chi(1) = 2$, $\chi(\sigma^2) = -2$, $\chi(s) = 0$ si $s \notin \{1,\sigma^2\}$. Ce caractère χ est induit par n'importe quel caractère primitif φ de l'un des sous-groupes cycliques d'ordre 4 de G , ce qui entraîne l'égalité $W(\chi) = W(\varphi)$ et permet le calcul explicite de $W(\chi)$.

Dans [6], j'ai donné un exemple d'extension réelle modérément ramifiée de $\mathbb{Q}$ à groupe de Galois isomorphe à G , dépourvue de base normale d'entiers. Serre a fait le calcul de $W(\chi)$ sur cet exemple, et a trouvé -1 . Par la suite, Armitage a traité un certain nombre d'exemples, ce qui a conduit Fröhlich [7] à démontrer le

Théorème.

Soient N une extension modérément ramifiée du corps des rationnels de groupe de Galois G , χ le caractère irréductible de degré 2 de G , O_N l'anneau des entiers de N . On a alors $W(\chi) = +1$ si, et seulement si, O_N est libre sur $\mathbf{Z}[G]$.

Corollaire.

<u>Si</u> O_N <u>n'est pas</u> $\mathbb{Z}[G]$-libre, $\zeta_N(1/2) = 0$.

Remarque 1 :

On ignore si $\zeta_N(1/2)$ peut être nul lorsque O_N est libre sur $\mathbb{Z}[G]$.

Remarque 2 :

Ici, $\zeta_N(s) = \zeta_K(s)L(s,\chi,N/\mathbb{Q})^2$.

En fait, Fröhlich a étudié le signe de $W(\chi)$ sans se limiter au cas modéré. Quelle que soit la ramification de 2 , il donne des exemples avec $W(\chi) = 1$ et avec $W(\chi) = -1$. Mais on ne possède pas d'interprétation du signe de $W(\chi)$ à l'aide des $\mathbb{Z}[G]$-modules.

J'ai montré dans [7] que, si $N/\mathbb{Q}$ n'est pas modérément ramifiée, O_N est libre sur son ordre associé.

VII. L'EXEMPLE D'ARMITAGE ([2]).

Serre a montré dans [8] que le conducteur d'Artin d'un caractère χ rationnel sur $\mathbb{R}$ était dans le carré d'une classe, et a donné un exemple d'extension L/K munie d'un caractère réel χ (bien entendu non rationnel sur $\mathbb{R}$) pour lequel le conducteur d'Artin $F(\chi)$ n'est pas dans le carré d'une classe.

Soit alors ψ un caractère quadratique sur le groupe des classes de K , vérifiant $\psi(F(\chi)) = -1$; ψ définit une extension quadratique non ramifiée K' de K . Soit $L' = LK'$; χ et ψ définissent des caractères, encore notés φ et ψ attachés à l'extension L'/K . Armitage montre alors que le produit $W(\chi)\,W(\chi\psi)$ est égal à -1 , ce qui suffit à assurer que la fonction zêta de L' s'annule au point $1/2$; en fait, il prouve par un calcul direct que $W(\chi) = -1$; la fonction zêta de L a donc elle-même un zéro du point $1/2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - E. ARTIN - "Zür Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharacteren". Hamb. Abh 6, pp. 292-306 (1930). (Collected papers, article numéro 8).

[2] - J.V. ARMITAGE - "Zeta functions with a zero at $s=\frac{1}{2}$". Inventiones Maths. 15, pp. 199-205 (1972).

[3] - A. FROHLICH - "Artin-root numbers and normal integral bases for quaternion fields". A paraître aux Inventiones.

[4] - H. HASSE - "Le Bericht".

[5] - S. LANG - "Algebraic Number Theory". Addison-Wesley (1970).

[6] - J. MARTINET - "Modules sur l'algèbre du groupe quaternionien". Ann. Sci. E.N.S. 4e série, pp. 399-408 (1971).

[7] - J. MARTINET - "Sur les extensions à groupe de Galois quaternionien". C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274, série A, pp. 933-935 (1972).

[8] - J.P. SERRE - "Conducteurs d'Artin des caractères réels". Inventiones Math. 14, pp. 173-183 (1971).

[9] - J.P. SERRE - "Corps locaux". Chapitre VI, Hermann, seconde édition (1968).
