

FRANÇOISE BERTRANDIAS

**Sur le nombre de classes relatif d'une extension cyclique de degré  $\ell^v$  ( $\ell$  premier impair) de corps de nombres**

*Séminaire de théorie des nombres de Grenoble*, tome 1 (1971-1972), p. 104-107

[http://www.numdam.org/item?id=STNG\\_1971-1972\\_\\_1\\_\\_104\\_0](http://www.numdam.org/item?id=STNG_1971-1972__1__104_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LE NOMBRE DE CLASSES RELATIF  
D'UNE EXTENSION CYCLIQUE DE DEGRE  $\ell^\nu$  ( $\ell$  premier impair)  
DE CORPS DE NOMBRES

---

par Françoise BERTRANDIAS le 3.5.72

1. On note  $K|k$  une extension cyclique de degré  $\ell^\nu$  de corps de nombres ( $\ell$  premier  $\neq 2$ , et  $\nu \geq 1$ ). Par définition, le nombre de classes relatif de cette extension, qu'on notera  $h^*(K|k)$ , est le nombre des classes d'idéaux de  $K$  dont la norme sur  $k$  est la classe principale.

Le but de cet exposé est de donner une démonstration du résultat suivant (démonstration obtenue en collaboration avec J.J. Payan) :

Théorème.

Le nombre de classes relatif  $h^*(K|k)$  d'une extension cyclique de degré  $\ell^\nu$  ( $\ell$  premier  $\neq 2$ ) de corps de nombres est norme d'un idéal entier du corps  $\mathbb{Q}^{(\ell)}$  des racines  $\ell$ -èmes de l'unité.

(On trouve des énoncés voisins dans [1], [2], [4]).

Comme l'entier  $\ell$  est norme d'un entier de  $\mathbb{Q}^{(\ell)}$ , il suffit, pour obtenir le résultat annoncé, de montrer que, quel que soit le nombre premier  $p \neq \ell$ , la participation de  $p$  à  $h^*(K|k)$ , qu'on notera  $h_p^*(K|k)$ , est une norme d'un idéal entier de  $\mathbb{Q}^{(\ell)}$ . On déduira donc le théorème du résultat suivant :

Proposition 1.

Pour tout nombre premier  $p \neq \ell$ , on a :

$$h_p^*(K|k) \equiv 1 \pmod{\ell} .$$

La démonstration de la proposition 1 fournira également l'énoncé suivant :

Proposition 2.

On note :  $h_K$  (resp  $h_k$ ) le nombre de classes de  $K$  (resp  $k$ )  
 $h_{K,p}$  (resp  $h_{k,p}$ ) la participation du nombre premier  $p$  à  $h_K$   
 (resp  $h_k$ ) .

Pour tout nombre premier  $p \neq \ell$  , on a :

$$h_p^*(K|k) = \frac{h_{K,p}}{h_{k,p}} .$$

2. La démonstration des propositions 1 et 2 repose sur le lemme suivant :

Lemme.

Soit  $G$  un groupe cyclique d'ordre  $g$  opérant sur un groupe abélien  $H$  d'ordre  $h$  premier à  $g$  . On note  $\sigma$  un générateur de  $G$  et  $N = 1 + \sigma + \dots + \sigma^{g-1}$  l'endomorphisme norme de  $H$  .

On a :  $H = \text{Im } N \times_{\text{direct}} \ker N$  .

De plus :  $\text{Im } N = H^G$  et  $\ker N = H^{\sigma-1}$  ,

(où  $H^G$  est le sous-groupe des éléments de  $H$  invariants par  $G$  , et  $H^{\sigma-1}$  le sous-groupe des éléments de  $H$  de la forme  $x^{\sigma-1}$ ) .

Démonstration du lemme :

a) Montrons :  $H = \text{Im } N \times \ker N$  .

Soient  $u$  et  $v$  deux entiers vérifiant  $ug + vh = 1$  ; si  $x$  appartient à  $H$  , on a :  $x = x^{ug} = (Nx)^u \left( \frac{x^g}{Nx} \right)^v$  . Or  $\frac{x^g}{Nx}$  appartient à  $\ker N$  . D'où le résultat annoncé.

b) Montrons que  $\text{Im } N \cap \ker N = \{1\}$  .

Soit  $x$  un élément de  $\text{Im } N \cap \ker N$  ; on a :  $x = Ny$  et  $Nx = 1$  . Comme  $Nx = (Ny)^g = 1$  ,  $x^g = 1$  , d'où  $x = x^{ug} = 1$  .

c) Montrons les égalités :  $\text{Im } N = H^G$  et  $\ker N = H^{\sigma-1}$  . Les groupes de cohomologie du  $G$ -module  $H$  sont donnés par :

$$\hat{H}^0(G, H) = \hat{H}^{2k}(G, H) = H^G / \text{Im } N$$

$$\hat{H}^1(G, H) = \hat{H}^{2k+1}(G, H) = \ker N / H^{\sigma-1} .$$

Ce sont des groupes dont l'ordre divise  $h$  ; or ces groupes sont annihilés par  $g$  ([3] ch. VIII, §2, corollaire 1 prop.4). Par suite ces groupes sont réduits à  $\{1\}$  .

3. Démonstration des propositions 1 et 2.

Notations.

$\mathfrak{H}_K$  (resp  $\mathfrak{H}_k$ ) désigne le groupe des classes d'idéaux de  $K$  (resp  $k$ ) .

$j : \mathfrak{H}_k \rightarrow \mathfrak{H}_K$  désigne l'homomorphisme induit par l'injection canonique du groupe des idéaux de  $k$  dans le groupe des idéaux de  $K$  .

$N_{K|k} : \mathfrak{H}_K \rightarrow \mathfrak{H}_k$  désigne l'homomorphisme induit par l'homomorphisme norme du groupe des idéaux de  $K$  dans le groupe des idéaux de  $k$  .

$\mathfrak{H}_{K,p}$  (resp  $\mathfrak{H}_{k,p}$ ) désigne le  $p$ -sous-groupe de Sylow de  $\mathfrak{H}_K$  (resp  $\mathfrak{H}_k$ ) .

$j_p : \mathfrak{H}_{k,p} \rightarrow \mathfrak{H}_{K,p}$  la restriction de  $j$  à  $\mathfrak{H}_{k,p}$  .

$N_{K|k,p} : \mathfrak{H}_{K,p} \rightarrow \mathfrak{H}_{k,p}$  la restriction de  $N_{K|k}$  à  $\mathfrak{H}_{K,p}$  .

$G = \text{Gal}(K|k)$  .

$\mathfrak{H}^*(K|k)$  désigne le groupe des classes relatives de  $K|k$  , c'est-à-dire le sous-groupe de  $\mathfrak{H}(K|k)$  formé des classes dont la norme sur  $k$  est la classe principale ;  $\mathfrak{H}_p^*(K|k)$  désigne le  $p$  sous-groupe de Sylow de  $\mathfrak{H}^*(K|k)$  .

On sait que  $G$  opère sur  $H : \mathfrak{H}_{K,p}$  ; on voit que les endomorphismes  $N : H \rightarrow H$  et  $\varphi : H \rightarrow H$  défini par  $\varphi(x) = x^{\ell^v}$  sont liés aux homomorphismes  $j_p$  et  $N_{K|k,p}$  par les relations :

$$\begin{aligned} j_p \circ N_{K|k,p} &= N \\ N_{K|k,p} \circ j_p &= \varphi . \end{aligned}$$

On suppose  $p \neq \ell$  ; l'homomorphisme  $\varphi$  est alors bijectif et cela entraîne :  $j_p$  injectif. Par suite le noyau de  $N$  coïncide avec le noyau de  $N_{K|k,p}$  , c'est-à-dire avec le  $p$ -groupe  $\mathfrak{H}_p^*(K|k)$  des classes relatives.

Le lemme du §2 entraîne donc :

$$H = \mathfrak{H}_{K,p} = \mathfrak{H}_{K,p}^G \text{ direct } \mathfrak{H}_p^*(K|k)$$

$(\mathbb{H}_{K,p}^G)$  est le p-groupe des classes ambiges).

Par suite le groupe  $G$  opère sur  $\mathbb{H}_p^*(K|k)$  en laissant invariante la seule classe principale ; les trajectoires des classes non principales de  $\mathbb{H}_p^*(K|k)$  comportent donc  $\ell^{\nu'}$  éléments, avec  $1 \leq \nu' \leq \nu$ . Il en résulte :

$$h_p^*(K/k) \equiv 1 \pmod{\ell}$$

c'est-à-dire le résultat de la proposition 1.

La proposition 2 se déduit de la décomposition en produit direct ci-dessus de  $\mathbb{H}_{K,p}$  et du fait que :

$$\mathbb{H}_{K,p}^G = j_p(\mathbb{H}_{k,p}^G)$$

qui se démontre comme suit : si  $c$  est une p-classe ambige, on a l'égalité  $c \ell^\nu = Nc = j_p \circ N_{K|k,p}(c)$  qui entraîne :  $c \ell^\nu$ , et donc  $c$ , appartient à  $j_p(\mathbb{H}_{k,p}^G)$ .

- [1] - A. BRUMER - "On the group of units of an absolutely cyclic number field of prime degree". J. Math. Soc. Japan vol. 21, N°3, 1969, pp. 357-358.
- [2] - S.N. KURODA - "Über die Klassenzahl eines relativzyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrade". Proc. Japan Acad. Vol. 40, 1964, pp. 623-620.
- [3] - J.P. SERRE - "Corps locaux". Hermann, 1962.
- [4] - H. YOKOI - "On the divisibility of the class number in an algebraic number field". J. Math. Soc. Japan Vol. 20, N° 1.2, 1968, pp. 411-418.