

FRANCINE DELMER

Problème de diviseurs

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 22, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A22_0>

© Université Bordeaux 1, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEME DE DIVISEURS

par

Francine DELMER

-:-:-

§ 1. - INTRODUCTION

On considère un polynôme $f(x)$, irréductible, de degré m à coefficients entiers. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs d'un nombre entier positif n . On supposera que $f(k) > 0$ pour $k = 1, 2, \dots$

Le but de ce papier est d'étudier la somme

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s$$

s étant un nombre entier positif. On posera $2^s - 1 = \ell$.

Plusieurs résultats sont déjà connus :

Ramanujan [5] a montré que

$$\sum_{k \leq x} [d(k)]^s \sim Kx(\text{Log } x)^\ell.$$

Vander Corput [6] donne l'estimation suivante :

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s = O(x(\text{Log } x)^{\ell s}).$$

où ℓ_s est une constante dépendant de s , non précisée.

Enfin Erdős [1] ; énonce le résultat suivant :

Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$c_1 x (\log x) < \sum_{k \leq x} d[f(k)] < c_2 x (\log x), \quad x \geq 2.$$

La démonstration d'Erdős est cependant incomplète ; en effet, le lemme 5 de son article, bien que très vraisemblable, n'est pas démontré (Erdős utilise une estimation de $\rho(n)$ en dehors des limites pour lesquelles cette estimation a été démontrée) ; il est à noter que le lemme 5 impliquerait le résultat suivant (conjecturé par Nagell) : si f est un polynôme irréductible à coefficients entiers, et s'il existe un nombre entier n tel que $f(n)$ soit quadatifrei, alors il existe une infinité de tels n .

En fait il est possible de montrer ce résultat en remplaçant le lemme 5 d'Erdős par un résultat plus faible (notre lemme 5).

Il est également possible, par la même méthode, de préciser la constante ℓ_s intervenant dans le résultat de Van der Corput, en montrant que $\ell_s = 2^s - 1$, résultat à rapprocher de celui de Ramanujan relatif au cas $f(x) = x$.

THEOREME. Il existe des constantes positives c_1 et c_2 telles que pour $x \geq 2$

$$(1) \quad c_1 x (\log x)^{\ell} < \sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s < c_2 x (\log x)^{\ell}.$$

On a posé $2^s - 1 = \ell$, et les nombres $c_1, c_2, \dots, c_k$ qui interviendront sont des constantes positives indépendantes de x , qui peuvent dépendre de f et de s .

§ 2. - BORNE SUPERIEURE

Nous allons tout d'abord montrer l'existence de la borne supérieure, et pour cela établir un certain nombre de lemmes préliminaires.

LEMME 1.

$$\sum_{k=1}^{k=x} \{d[f(k)]\}^{2s} < x (\text{Log } x)^{c_3}.$$

Le résultat est dû à Van der Corput (1939).

LEMME 2. Soient $k_1, k_2, \dots, k_t$, des nombres entiers positifs distincts,
inférieurs ou égaux à x , et supposons que $t < x (\text{Log } x)^{-c_3}$, alors

$$\sum_{i=1}^{i=t} \{d[f(k_i)]\}^s < x.$$

Ceci résulte du lemme 1 en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\sum_{i=1}^{i=t} \{d[f(k_i)]\}^s \leq t^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{i=t} \{d[f(k_i)]\}^{2s} \right]^{\frac{1}{2}} < x.$$

On appelle $\rho(a)$ le nombre de solutions de $f(k) \equiv 0 [a]$, $0 \leq k < a$.

Soit D le discriminant de $f(x)$. Si p est un nombre premier, on note $p^\sigma \parallel D$ pour exprimer que p^σ est la plus grande puissance de p divisant D .

LEMME 3. On a les résultats suivants concernant ρ

$$\alpha) \quad \rho(ab) = \rho(a) \rho(b) \quad \underline{\text{si}} \quad (a, b) = 1;$$

$$\beta) \quad \rho(p^\alpha) \leq m \quad \underline{\text{si}} \quad p \nmid D$$

$$\gamma) \quad \rho(p^\alpha) = (p^{2\sigma+1}) \quad \underline{\text{si}} \quad p^\sigma \parallel D \quad \underline{\text{et}} \quad \alpha > 2\sigma$$

$$\delta) \quad \rho(p^\alpha) \leq c_4 \quad \underline{\text{toujours vérifié.}}$$

Les deux premiers résultats sont connus, $\gamma)$ a été démontré par Nagell (1921), le dernier résultat se déduit immédiatement des trois premiers.

LEMME 4. Soit u tel que $1 \leq u \leq x$, et soit N le nombre de nombres entiers k satisfaisant $f(k) \equiv 0 \pmod{u}$, $1 \leq k \leq x$.

Alors

$$\frac{x}{2u} \rho(u) \leq N \leq \frac{2x}{u} \rho(u).$$

On a évidemment $f(k+\lambda u) \equiv f(k) \pmod{u}$, on découpe donc l'intervalle $(1, x)$ en tranches de longueur u , le nombre de tranches est $\left[\frac{x}{u}\right]$, on a donc

$$\left[\frac{x}{u}\right] \rho(u) \leq N \leq \left(\left[\frac{x}{u}\right] + 1\right) \rho(u),$$

d'où le résultat.

LEMME 5. Le nombre de nombres entiers k , tels que $k \leq x$, pour les- quels $f(k)$ est divisible par un nombre p^α (p nombre premier), avec $\alpha > m$ et

$$(2) \quad p^\alpha > (\text{Log } x)^{3c_3}$$

est un $O[x (\text{Log } x)^{-c_3}]$.

Nous considérerons les entiers naturels k vérifiant les conditions de l'énoncé, et nous appellerons A ceux pour lesquels $p^\alpha \leq x$ et B ceux pour lesquels $p^\alpha > x$.

En utilisant les lemmes 3 et 4, on majore A de la façon suivante:

$$\begin{aligned} A &\leq 2x \sum_{p, \alpha} \frac{\rho(p^\alpha)}{p^\alpha} < 2c_4 x \sum_{p, \alpha} p^{-\alpha} \\ &< 4c_4 x \left\{ \sum_{p \leq (\text{Log } x)^{3c_3/2}} (\text{Log } x)^{-3c_3/2} + \sum_{p > (\text{Log } x)^{3c_3/2}} p^{-2} \right\} \end{aligned}$$

A est donc un $O[x (\text{Log } x)^{-c_3}]$.

Si $p^\alpha > x$, on a $p^\alpha < Cx^m$ car $f(x)$ est un polynôme de degré m donc $f(k) < Cx^m$, pour $k \leq x$. Mais $\alpha > m$, donc $p^{m+1} \leq p^\alpha < Cx^m$. On en déduit $p < Cx^{m/m+1}$ et $B < c_4 x^{m/m+1}$, résultat cherché. On pose $\bar{x} = x^{1/m} (\text{Log } \text{Log } x)^2$.

LEMME 6. Soit $f(k) = \prod p^\alpha$ la décomposition de $f(k)$ en nombres premiers, le nombre de valeurs de k , $k \leq x$, telles que

$$(3) \quad \prod_{p < \bar{x}} p^\alpha \geq x^{1/8 s^2} \quad \text{est un } O[x (\log x)^{-c_3}] .$$

Considérons les valeurs de k pour lesquelles il existe au moins un p dans le produit tel que $p^\alpha \geq \bar{x}^m$.

Pour ces valeurs de k , on a $p^\alpha > (\log x)^{3c_3}$ et $\alpha > m$, donc on peut appliquer le lemme 5.

Il reste les valeurs de k pour lesquelles $p^\alpha < \bar{x}^m$.

D'après (3), le nombre de facteurs premiers distincts est au moins

$$\frac{(\log \log x)^2}{8s}$$

donc :

$$\{d[f(k)]\}^s > 2^{\frac{(\log \log x)^2}{8}} > (\log x)^{2c_3} .$$

D'après le lemme 1, le nombre de tels entiers est un

$$O[x (\log x)^{-3c_3}] .$$

LEMME 7. On a les résultats suivants

$$(4) \quad \sum_{p \leq x} \rho(p) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) .$$

$$(5) \quad \sum_{p \leq x} \frac{\rho(p)}{p} = \log \log x + c_5 + o(1) .$$

Ces résultats découlent du "Primideal satz" [2] .

LEMME 8. Pour y assez grand, on a la majoration :

$$\sum_{\substack{p, \alpha \\ y < p < y^2 \\ \alpha \leq t}} \frac{\rho(p^\alpha)}{p^\alpha} < 1 .$$

D'après le lemme 7, on peut écrire

$$\sum_{y < p < y^2} \frac{\rho(p)}{p} = \text{Log } 2 + o(1) .$$

D'autre part, pour $2 \leq i \leq t$, on a

$$\sum_{y < p^i < y^2} \frac{\rho(p^i)}{p^i} < c_4 \sum_{y < p^i < y^2} \frac{1}{p^i} < \frac{1 - \text{Log } 2 - o(1)}{t} .$$

On regroupe ces deux résultats et l'on obtient la majoration.

LEMME 9. On a le résultat suivant :

$$(6) \quad \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{y \rho(p)}{p} + \frac{y^2 \rho(p^2)}{p^2} + \dots \right) < c_6 (\text{Log } x)^y$$

On appelle A le produit et on prend son logarithme

$$\begin{aligned} \text{Log } A &= \sum_{p \leq x} \text{Log} \left(1 + \frac{y \rho(p)}{p} + \dots \right) \leq \sum_{p \leq x} \text{Log} \left(1 + \frac{y \rho(p)}{p} + \frac{A}{p^2} \right) \\ &= \sum_{p \leq x} \frac{y \rho(p)}{p} + o(1) . \end{aligned}$$

On applique le lemme 7 et on en déduit :

$$A < c_6 (\text{Log } x)^y .$$

LEMME 10. Le nombre de manières d'écrire le nombre entier n comme $p p c m$ de s nombres, est M tel que

$$\ell^{w(n)} \leq M \leq \ell^{\Omega(n)} , \quad \ell = 2^s - 1 .$$

On montre tout d'abord le résultat pour n "quadrat-frei", par récurrence sur s . Soit $n = p_1 p_2 \dots p_m$, choisissons le produit $p_{k+1} \dots p_m$, il est $p p c m$ des nombres de $(2^s - 1)^{m-k}$ façons, d'après l'hypothèse de récurrence. Il y a $\binom{m}{k}$ façons de choisir k facteurs premiers parmi les m , et étant donné le produit $p_{k+1} \dots p_m$, il y a $(2^k)^s$ façons de répartir les nombres $p_1, p_2, \dots, p_k$ pour que n soit $p p c m$ de $(s+1)$ nombres, d'où :

$$M = \sum_k \binom{m}{k} (2^s - 1)^{m-k} (2^s)^k = (2^{s+1} - 1)^m.$$

Pour $s = 1$ la relation est bien vérifiée.

Il est alors clair que si n n'est pas "quadrat-frei", on a les inégalités.

LEMME 11. Si $\frac{x}{k} < \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{t=k}^{\infty} \frac{x^t}{t!} \leq 2 \frac{x^k}{k!}.$$

En effet, $(k+1)! > k k!$ et

$$\sum_{t=k}^{\infty} \frac{x^t}{t!} \leq \frac{x^k}{k!} \left(1 + \frac{x}{k} + \dots + \frac{x^n}{k^n} + \dots \right) \leq 2 \frac{x^k}{k!}.$$

Nous allons maintenant, à l'aide de ces lemmes, montrer l'existence de la borne supérieure.

$$\sum_{k \leq s} \{d[f(k)]\}^s < c_2 x (\log x)^L.$$

Tout d'abord :

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s = \Sigma_1 \{d[f(k)]\}^s + o(x)$$

où Σ_1 est la sommation étendue aux nombres positifs $k \leq x$ satisfaisant les deux conditions :

$$(7) \quad f(k) \neq 0 [p^\alpha], \quad \alpha > m, \quad p^\alpha > (\log x)^{3c_3}$$

$$(8) \quad \prod_{p < \bar{x}} p^\alpha < x^{\left(\frac{1}{8s^2}\right)} \quad \text{où} \quad f(k) = \prod p^\alpha.$$

Cette restriction résulte des lemmes 2, 5, 6.

On peut d'autre part évidemment se restreindre aux valeurs de k pour lesquelles $f(k) > x^{1/s}$.

Soit $f(k) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$, la décomposition de $f(k)$ en facteurs premiers.

On définit j par :

$$(9) \quad p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j} \leq x^{1/s} < p_1^{\alpha_1} \dots p_{j+1}^{\alpha_{j+1}}.$$

On pose

$$(10) \quad a_k = p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{f(k)}{a_k}.$$

On décompose alors Σ_1 de la façon suivante :

$$(11) \quad \Sigma_1 \{d[f(k)]\}^s = \Sigma_2 \{d[f(k)]\}^s + \Sigma_3 \{d[f(k)]\}^s.$$

$k \leq x \qquad k \leq x \qquad k \leq x$

Où Σ_2 est la sommation sur les k satisfaisant les conditions (7) et (8) et la condition supplémentaire

$$p_{j+1} \leq x^{1/32ms}.$$

Σ_3 est la sommation sur les k satisfaisant (7) et (8) et la condition $p_{j+1} > x^{1/32ms}$.

Evaluons d'abord Σ_3 .

Tout facteur premier de b_k est supérieur à $x^{1/32ms}$ d'après la condition sur b_{j+1} , et comme $f(x) < x^{m+1}$, le nombre total des facteurs premiers de b_k avec leurs multiplicités est inférieur à $[32(m+1)ms]$.

On a donc

$$(12) \quad d(b_k) < 2^{[32(m+1)ms]}.$$

Comme

$$a_k \leq x^{1/s},$$

on peut écrire :

$$(13) \quad d(a_k) \leq d_{x^{1/s}}[f(k)]$$

où $d_{x^{1/s}}[f(k)]$ est le nombre de diviseurs de $f(k)$ qui sont inférieurs à $x^{1/s}$.

D'après (12) et (13) et en remarquant que $d[f(k)] = d(a_k) d(b_k)$, on a

$$\Sigma_3 \{d[f(k)]\}^s < 2^{32(m+1)ms^2} \Sigma_{k \leq x} \{d_{x^{1/s}}[f(k)]\}^s.$$

Evaluation de la somme

$$S = \Sigma_{k \leq x} \{d_{x^{1/s}}[f(k)]\}^s$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k \leq x} \{d_{1/s}[f(k)]\}^s &= \sum_{k \leq x} \left[\sum_{\substack{d_1 | f(k) \\ d_1 \leq x^{1/s}}} 1 \right]^s = \sum_{k \leq x} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_s \\ d_i | f(k) \\ d_i \leq x^{1/s}}} 1 \\
&= \sum_{\substack{d_1, \dots, d_s \\ d_i \leq x^{1/s}}} \sum_{\substack{k \\ [d_1, \dots, d_s] | f(k)}} 1 \leq \sum_{\substack{d_1, \dots, d_s \\ d_i \leq x^{1/s}}} \frac{2\rho[d_1, \dots, d_s]}{[d_1, \dots, d_s]} x \\
&\leq 2x \sum_{\substack{d_1, \dots, d_s \\ [d_1, \dots, d_s] \leq x}} \frac{\rho[d_1, \dots, d_s]}{[d_1, \dots, d_s]} \leq 2x \sum_{n \leq x} \ell^{\Omega(n)} \frac{\rho(n)}{n}
\end{aligned}$$

$[d_1, \dots, d_s]$ désigne le p p c m des nombres $d_1, \dots, d_s$, et on utilise le lemme 10.

D'après le lemme 3, α), tous les termes de la dernière somme sont inclus dans le produit suivant

$$\prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{\ell \rho(p)}{p} + \frac{\ell^2 \rho(p^2)}{p^2} + \dots \right).$$

D'où, en utilisant le lemme 9, une majoration de S , et de Σ_3 :

$$(14) \quad \Sigma_3 \{d[f(k)]\}^s < c_7 x (\text{Log } x)^\ell.$$

Évaluation de la somme Σ_2 . On montre que

$$(15) \quad p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \leq x^{1/16s}.$$

En effet, si ce n'était pas vrai, on aurait $\alpha_{j+1} > 2m$, ce qui contredit la condition (7).

D'après les conditions (9), (10), (15), on a

$$(16) \quad a_k > \frac{x^{1/s}}{p_{j+1}^{\alpha_{j+1}}} > x^{1/2s}.$$

Pour que la condition (8) soit vérifiée, on doit avoir, étant donné (16)

$$(17) \quad \bar{x} \leq p_{j+1} \leq x^{1/32ms}.$$

On décompose alors Σ_2 de la façon suivante :

$$(18) \quad \Sigma_2 \{d[f(k)]\}^s = \Sigma_r \Sigma_2^{(r)} \{d[f(k)]\}^s .$$

Où dans $\Sigma_2^{(r)}$ les facteurs p_{j+1} satisfont

$$x^{1/(r+1)s} \leq p_{j+1} < x^{1/rs} .$$

Les valeurs de r , sont, étant donné les conditions sur p_{j+1} , telles que

$$32m \leq r \leq m (\text{Log Log } x)^2 .$$

Comme dans le cas de Σ_3 , on peut facilement évaluer les diviseurs de b_k . Pour tout k dans $\Sigma_2^{(r)}$ le nombre total de facteurs premiers de b_k est inférieur à $(m+1)(r+1)s$ et on a donc

$$(19) \quad \Sigma_2^{(r)} \{d[f(k)]\}^s < 2^{(m+1)(r+1)s^2} \Sigma_2^{(r)} \{d(a_k)\}^s .$$

Comme au plus la moitié des diviseurs de a_k sont supérieurs ou égaux à $\sqrt{a_k}$, il résulte de (16) que

$$(20) \quad d(a_k) \leq 2d^+(a_k)$$

où $d^+(m)$ est le nombre de diviseurs de m qui sont supérieurs ou égaux à $x^{1/4s}$.

Il résulte de (7) et (8) que tous les diviseurs de a_k qui sont supérieurs ou égaux à $x^{1/4s}$ sont inclus dans un ensemble de nombres $n_j^{(r)}$ satisfaisant :

- i) $x^{1/4s} \leq n_j^{(r)} \leq x^{1/s}$,
- ii) si $p \mid n_j^{(r)}$, $p < x^{1/rs}$, $\rho(p) > 0$,
- iii) si $p^\alpha \parallel n_j^{(r)}$ et $\alpha > m$, $p^\alpha \leq (\text{Log } x)^{3c_3}$,
- iv) $\prod_{\substack{p^\alpha \parallel n_j^{(r)} \\ p < \bar{x}}} p^\alpha < x^{1/8s^2}$.

La somme $\sum_2^{(r)} d^+(a_k)$ est inférieure au nombre de solutions en k et j de l'équation

$$f(k) \equiv 0 [n_j^{(r)}].$$

Les inéquations (19) et (20) donnent

$$(21) \quad \sum_2^{(r)} \{d[f(k)]\}^s < 2^{(m+1)(r+1)s^2} \sum_2^{(r)} \{d(a_k)\}^s \\ \leq 2^{s^2(m+1)(r+1)+s} \sum_2^{(r)} \{d^+(a_k)\}^s.$$

Regardons la somme $\sum_2^{(r)} \{d^+(a_k)\}^s$

$$\sum_2^{(r)} \{d^+(a_k)\}^s \leq \sum_2^{(r)} \left\{ \sum_{\substack{r \\ n_j^{(r)} | f(k)}} 1 \right\}^s = \sum_2^{(r)} \sum_{\substack{n_1^{(r)}, \dots, n_s^{(r)} \\ n_j^{(r)} | f(k)}} 1 \\ = \sum_{n_1^{(r)}, \dots, n_s^{(r)}} \sum_{\substack{k \\ n_1^{(r)}, \dots, n_s^{(r)} | f(k)}} 1 \leq \sum_{n_1^{(r)}, \dots, n_s^{(r)}} \frac{2^{\rho[n_1^{(r)}, \dots, n_s^{(r)}]}}{[n_1^{(r)}, \dots, n_s^{(r)}]} x.$$

En appliquant encore le lemme 10, et si l'on note $m_j^{(r)} = [n_1^{(r)}, \dots, n_s^{(r)}]$ le p p c m des nombres $n_1^{(r)}, \dots, n_s^{(r)}$, on obtient

$$(22) \quad \sum_2^{(r)} \{d^+(a_k)\}^s \leq 2 \times \sum_j \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} x^{\Omega(m_j^{(r)})}.$$

Etant donné la définition des $m_j^{(r)}$ et les relations vérifiées par les $n_j^{(r)}$ l'ensemble des nombres $m_j^{(r)}$ vérifie les relations :

- i)' $x^{1/4s} \leq m_j^{(r)} \leq x$,
- ii)' si $p | m_j^{(r)}$ $p < x^{1/r s}$ $\rho(p) > 0$,
- iii)' si $p^\alpha \parallel m_j^{(r)}$ et $\alpha > m$, $p^\alpha \leq (\text{Log } x)^{3c_3}$
- iv)' $\prod_{\substack{\alpha \\ p^\alpha \parallel m_j}} p^\alpha < x^{1/8 s}$
 $p < \bar{x}$

Estimons la somme

$$\sum \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} = T.$$

Soit $I_t^{(r)}$ l'intervalle $[x^{1/s} r 2^{t+1}, x^{1/s} r 2^t]$ t varie de 0 à Z , avec Z plus grand nombre entier tel que

$$r 2^Z \leq (\text{Log Log } x)^2 m.$$

Tout nombre $m_j^{(r)}$ a au moins $N_t^{(r)}$ facteurs premiers dans au moins un de ces intervalles avec

$$N_t^{(r)} = \left[\frac{r(t+1)}{32m} \right] + 1.$$

En effet :

Un nombre premier dans ces intervalles est au moins égal à $x^{1/2s} m (\text{Log Log } x)^2$ et divise $m_j^{(r)}$ à la puissance au plus m à cause de la condition iii)'.

D'autre part tout facteur premier de $m_j^{(r)}$ supérieur à $\bar{x}$ est dans un de ces intervalles.

Si tout nombre $m_j^{(r)}$ n'avait pas au moins $N_t^{(r)}$ facteurs premiers dans au moins un des intervalles $I_t^{(r)}$ on aurait

$$m_j^{(r)} < \left(\prod_t p^\alpha \right) \prod_t (x^{1/s} r 2^t)^{\frac{r(t+1)m}{32m}}.$$

$$\text{Comme } \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t+1}{2^t} = 4, \text{ on aurait } m_j^{(r)} < x^{1/4s}.$$

Ceci contredirait la condition i)'.

On définit maintenant w comme plus petit nombre entier tel que $m_j^{(r)}$ ait au moins $N_w^{(r)}$ facteurs premiers dans l'intervalle $I_w^{(r)}$. On a

$$(23) \quad \sum_j \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} = \sum_w \sum_{j(w)} \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}}.$$

Posons

$$m_j^{(r)} = uv$$

où u est composé des facteurs premiers de $m_j^{(r)}$ qui sont dans $I_w^{(r)}$, v est composé des autres facteurs de $m_j^{(r)}$.

D'après les hypothèses, u est $(m+1)$ "frei", et possède au moins $N = N_w^{(r)}$ facteurs premiers. D'autre part ρ est multiplicative et $\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b)$, on a donc :

$$(24) \quad \sum_{j(w)} \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} \leq \left[\sum_u \ell^{\Omega(u)} \frac{\rho(u)}{u} \right] \left[\sum_v \ell^{\Omega(v)} \frac{\rho(v)}{v} \right]$$

et aussi

$$\sum_u \ell^{\Omega(u)} \frac{\rho(u)}{u} \leq \frac{\ell^{Nm}}{N!} \left\{ \sum_{p, \alpha} \frac{\rho(p^\alpha)}{p^\alpha} \right\}^N$$

dans la dernière somme, la sommation est faite sur les p^α qui appartiennent à $I_w^{(r)}$ et $\alpha \leq m$.

En utilisant le lemme 8, on a donc

$$(25) \quad \sum_u \ell^{\Omega(u)} \frac{\rho(u)}{u} \leq \frac{\ell^{Nm}}{N!}.$$

Pour majorer la somme sur v on peut écrire

$$(26) \quad \sum_v \ell^{\Omega(v)} \frac{\rho(v)}{v} \leq \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{\ell \rho(p)}{p} + \dots \right) < c_6 (\text{Log } x)^\ell.$$

On avait vu que $r \geq 32m$, donc d'après la définition de $N_w^{(r)}$, on a

$$\left[\frac{r}{32m} \right] < N_0^{(r)} < N_1^{(r)} \dots$$

Les équations (24), (25), (26) nous donnent

$$(27) \quad \sum_{j(w)} \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} \leq c_6 \frac{\ell^{Nm}}{N!} (\text{Log } x)^\ell$$

et enfin

$$(28) \quad \sum_j \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} \leq c_6 (\text{Log } x)^\ell \sum_{w=0}^{\infty} \frac{\ell^{N_w^{(r)} m}}{(N_w^{(r)})!}.$$

Posons $\ell^m = L$ et regardons la somme

$$(29) \quad \sum_{w=0}^{\infty} \frac{L^{N_w^{(r)}}}{(N_w^{(r)})!}.$$

Nous allons appliquer le lemme 11 à (29).

Lorsque $\frac{L}{\frac{r}{32m}} \leq \frac{1}{2}$, soit $r \geq 64mL$. On peut majorer (29) de la façon suivante :

$$(30) \quad \sum_{w=0}^{\infty} \frac{L N_w^{(r)}}{(N_w^{(r)})!} \leq 2 \frac{L^{\left[\frac{r}{32m}\right]}}{\left[\frac{r}{32m}\right]!}.$$

Autrement on a $r < 64mL$, il n'y a alors qu'un nombre fini de r vérifiant cette condition, et la somme (29) est alors majorée par une constante que nous notons c_8 .

On peut donc regrouper les résultats obtenus, concernant Σ_2 , (18), (21), (22), (28) et (30).

$$\Sigma_2 \{d[f(k)]\}^s < 2 c_6 (\text{Log } x)^l x \left(\sum_{r=64mL}^{\infty} 2^{(m+1)(r+1)s^2+s} \frac{L^{\left[\frac{r}{32m}\right]}}{\left[\frac{r}{32m}\right]!} + c_8 \right).$$

La série sommée en r est convergente, et l'on a donc le résultat

$$\Sigma_2 \{d[f(k)]\}^s < c_9 x (\text{Log } x)^l.$$

Finalement, d'après (11), (14) et (31) on obtient

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s < c_2 x (\text{Log } x)^l.$$

§ 3. - BORNE INFÉRIEURE

On utilisera le résultat suivant :

LEMME 12. Il existe une constante c_{10} telle que

$$\sum_{k \leq x} \ell^{w(k)} \rho(k) > c_{10} x (\text{Log } x)^{l-1}.$$

Ce résultat sur la fonction ρ , demande une étude analytique que nous verrons ensuite.

Il s'agit de montrer que l'on a une constante c_1 , telle que

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s > c_1 x (\log x)^\ell.$$

Il suffit de montrer que

$$\sum_{k \leq x} \{d_x^{1/s}[f(k)]\}^s > c_1 x (\log x)^\ell,$$

car

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s &> \sum_{k \leq x} \{d_x^{1/s}[f(k)]\}^s \\ \sum_{k \leq x} \{d_x^{1/s}[f(k)]\}^s &= \sum_{k \leq x} \left\{ \sum_{\substack{d_1 | f(k) \\ d_1 \leq x^{1/s}}} 1 \right\}^s = \sum_{k \leq x} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_s \\ d_i | f(k) \\ d_i \leq x^{1/s}}} 1 \\ &= \sum_{\substack{d_1, \dots, d_s \\ d_i \leq x^{1/s}}} \sum_k 1 \geq \sum_{\substack{d_1, \dots, d_s \\ [d_1, \dots, d_s] | f(k) \\ d_i \leq x^{1/s}}} \frac{\rho[d_1, \dots, d_s]}{[d_1, \dots, d_s]} \frac{x}{2} \\ &\geq \frac{x}{2} \sum_{n \leq x} \ell^{w(n)} \frac{\rho(n)}{n}. \end{aligned}$$

Par une sommation d'Abel, on transforme la somme en ρ :

$$\frac{x}{2} \sum_{n \leq x} \ell^{w(n)} \frac{\rho(n)}{n} > \frac{x}{2} \sum_{y \leq x} y^{-2} \sum_{k \leq y} \ell^{w(n)} \rho(n).$$

On applique alors le lemme et on obtient :

$$\frac{x}{2} \sum_{n \leq x} \ell^{w(n)} \frac{\rho(n)}{n} > \frac{x}{2} c_{10} \sum_{y \leq x} y^{-1} (\log y)^{\ell-1}.$$

Soit le résultat :

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s > c_1 x (\log x)^\ell.$$

§ 4. - FIN DE LA DEMONSTRATION

Montrons à présent le lemme 12.

Il existe une constante c_{10} , telle que

$$\sum_{k \leq x} \ell^{w(k)} \rho(k) > c_{10} x (\log x)^{\ell-1}.$$

On montrera, en utilisant les propriétés de la fonction ζ , du corps de nombres $\mathbb{Q}(\theta)$ (où $f(\theta) = 0$), le résultat suivant :

$$\sum_{k \leq x} \mu^2(k) \ell^{w(k)} \rho(k) \sim c_{11} x (\text{Log } x)^{\ell-1}.$$

μ est la fonction de Möbius, il est clair que

$$\sum_{k \leq x} \ell^{w(k)} \rho(k) \geq \sum_{k \leq x} \mu^2(k) \ell^{w(k)} \rho(k),$$

il en résulte la minoration espérée.

LEMME 13. On montre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k) \ell^{w(k)} \rho(k)}{k^s}$$

converge absolument si $\text{Re}(s) > 1$.

En effet, soit s un nombre complexe tel que $\text{Re}(s) > 1$.

ρ étant multiplicative, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k) \ell^{w(k)} \rho(k)}{k^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{\ell \rho(p)}{p^s}\right) = \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{\ell \rho(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\ell \rho(p)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\ell \rho(p)}. \end{aligned}$$

Le résultat γ du lemme 3 dû à Nagell, nous permet de dire que le premier produit converge absolument si $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$; en effet, le produit s'écrit

$$\prod_p \left(1 + \frac{A_p}{p^{2s}}\right)$$

où les A_p sont bornés, les termes en p^s s'étant éliminés.

Pour le second produit, on utilise le résultat suivant [4] :

Soit $\zeta(s)$ la fonction ζ du corps de nombres $\mathbb{Q}(\theta)$ (où $f(\theta) = 0$). Alors

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\rho(p)} = H_1(s) \zeta(s)$$

avec $H_1(s)$ est absolument convergente si $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

De la même façon

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\ell \rho(p)} = (H_1(s))^\ell (\zeta(s))^\ell.$$

On en déduit que l'on peut écrire la somme sous la forme :

$$(31) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k) \ell^{\omega(k)} \rho(k)}{k^s} = H(s) (\zeta(s))^\ell$$

avec $H(s)$ absolument convergente si $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ car $H(s)$ est un produit fini de fonctions absolument convergentes pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

LEMME 14. Si l'on a

$$\sum \frac{c(k)}{k^s} = \sum \frac{a(k)}{k^s} \sum \frac{b(k)}{k^s} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

avec

$$\sum \frac{c(k)}{k^s} \quad \text{et} \quad \sum \frac{a(k)}{k^s}$$

absolument convergentes pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, et

$$\sum \frac{b(k)}{k^s}$$

absolument convergente pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et si d'autre part

$$A(x) = \sum_{k \leq x} a(k) \sim c_{12} x (\operatorname{Log} x)^u,$$

alors

$$C(x) = \sum_{k \leq x} c(k) \sim c_{12} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(k)}{k} \right) x (\operatorname{Log} x)^u.$$

Remarque : Il faut que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(k)}{k} \neq 0$. Ici $b(k)$ est multiplicative et la série absolument convergente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(k)}{k} = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^k}\right)$$

on vérifie que chaque facteur du produit est non nul.

L'égalité entre les séries de Dirichlet signifie

$$c(k) = \sum_{n m = k} a(n) b(m) ,$$

on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} c(k) &= \sum_{k \leq x} \sum_{n m = k} a(n) b(m) = \sum_{m \leq x} b(m) \sum_{n \leq \frac{x}{m}} a(n) = \\ \sum_{m \leq x} b(m) A\left(\frac{x}{m}\right) &= \sum_{m \leq x} b(m) \left(\frac{c_{12} x (\log x)^u}{m} + O\left(\frac{c_{12} x (\log x)^u}{m}\right) \right) \\ \sum_{m \leq x} \frac{b(m)}{m} c_{12} x (\log x)^u &+ O(c_{12} x (\log x)^u \sum_{m \leq x} \frac{|b(m)|}{m}) \end{aligned}$$

le lemme B est donc établi.

On pose

$$(\zeta(s))^\ell = \sum_{k \leq x} \frac{\lambda_\ell(k)}{k^s} .$$

Nous allons calculer par récurrence les sommes $\sum_{k \leq x} \lambda_\ell(k)$.

Pour $\ell = 1$, le résultat est connu et dû à Weber :

LEMME 15. Si

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s} , \quad \operatorname{Re}(s) > 1 ,$$

alors

$$\sum_{k \leq x} a_k = A x + O(x^v) ,$$

A est indépendant de f et $v = 1 - \frac{1}{d^\circ(f)}$.

(Résultat cité dans Landau [3]).

Soit alors l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k \leq x} \lambda_\ell(k) = C_\ell x (\log x)^{\ell-1} + O(x (\log x)^{\ell-2}) .$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\ell+1}(k) &= \sum_{nm=k} \lambda_1(n) \lambda_{\ell}(m) \\
\sum_{k \leq x} \lambda_{\ell+1}(k) &= \sum_{k \leq x} \lambda_1(k) \sum_{dk \leq x} \lambda_{\ell}(d) = \\
&= \sum_{k \leq x} \lambda_1(k) (C_{\ell} \left(\frac{x}{k} (\text{Log } \frac{x}{k})^{\ell-1}\right) + O\left(\frac{x}{k} (\text{Log } \frac{x}{k})^{\ell-2}\right)) \\
&= \sum_{k \leq x} \lambda_1(k) (C_{\ell} \frac{x}{k} (\text{Log } x)^{\ell-1} + O\left(\frac{x}{k} (\text{Log } x)^{\ell-2}\right)) = \\
&= C_{\ell} x (\text{Log } x)^{\ell-1} \sum_{k \leq x} \frac{\lambda_1(k)}{k} + O(x (\text{Log } x)^{\ell-2} \sum_{k \leq x} \frac{\lambda_1(k)}{k}).
\end{aligned}$$

On calcule $\sum_{k \leq x} \frac{\lambda_1(k)}{k}$ en fonction de $\sum_{k \leq x} \lambda_1(k)$ en écrivant :

$$\sum_{k \leq x} \frac{\lambda_1(k)}{k} = \int_1^x \left(\sum_{k \leq t} \lambda_1(k) \right) \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{x} \left(\sum_{k \leq x} \lambda_1(k) \right).$$

On obtient alors

$$\sum_{k \leq x} \lambda_{\ell+1}(k) = C_{\ell+1} x (\text{Log } x)^{\ell} + O(x (\text{Log } x)^{\ell-1}).$$

Si l'on revient à la formule (31), on a exprimé $(\zeta(s))^{\ell}$ à l'aide du lemme 14, et ceci termine la démonstration.

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ERDÖS. - Journal of the London Mathematical Society 27 (1952) p. 7-15.
- [2] E. LANDAU. - Einführung in die Elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. (Teubner Leipzig 1918), th. 191, p. 110.
- [3] E. LANDAU. - Einführung in die Elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. (Teubner Leipzig 1918) th. 210, p. 131.
- [4] R. J. MIECH. - Acta Arithmetica 10 (1964), p. 9-30.

- [5] S. RAMANUJAN. - Collected papers (Cambridge University Press, 1927), p. 133-135.
- [6] J. G. VAN DER CORPUT. - Proc. K. Neder. Akad. van Wet. Amsterdam 42 (1939) p. 547-553.

-:-:-

Francine DELMER
Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques
et d' Informatique
351, cours de la Libération
33 - TALENCE