

HUBERT DELANGE

Sur la distribution des valeurs des fonctions arithmétiques additives

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 17, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A17_0>

© Université Bordeaux 1, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS DES FONCTIONS
ARITHMETIQUES ADDITIVES

par

Hubert DELANGE

-:-:-:-

1. - Le problème que nous allons traiter pour les fonctions réelles additives peut être posé d'une façon générale pour une fonction arithmétique réelle.

Soit donc f une fonction arithmétique réelle.

Pour chaque n entier > 0 , nous définissons une mesure μ_n sur $\mathbb{R}$ par

$$(1) \quad \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta_{f(m)},$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x .

On a évidemment $\mu_n(\mathbb{R}) = 1$.

1.1. - On peut se demander si la suite $\{\mu_n\}$ converge étroitement vers une mesure limite μ (satisfaisant donc à $\mu(\mathbb{R}) = 1$). S'il en est ainsi, on dira que la fonction f possède une distribution limite.

Si $\sigma_n(u) = \mu_n([-\infty, u])$, on sait que la convergence étroite de la suite $\{\mu_n\}$ est équivalente à la propriété suivante :

Il existe une fonction réelle σ croissante sur $\mathbb{R}$, satisfaisant à

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \sigma(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \sigma(u) = 1 ,$$

telle que, pour tout u tel que σ soit continue en u , $\sigma_n(u)$ tend vers $\sigma(u)$.

Si l'on pose

$$v_n(u) = \text{nombre des } m \leq n \text{ tels que } f(m) \leq u ,$$

on voit que l'on a

$$\sigma_n(u) = \frac{1}{n} v_n(u) .$$

On peut interpréter $\sigma_n(u)$ comme étant la probabilité pour que $f(m) \leq u$ lorsque l'on choisit au hasard m parmi les entiers de 1 à n , chacun de ces entiers ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être choisi. Autrement dit, σ_n est la fonction de distribution d'une variable aléatoire X_n définie de la façon suivante :

L'ensemble des évènements élémentaires est l'ensemble E_n des entiers de 1 à n ; on le probabilise en prenant comme probabilité d'un sous-ensemble A le quotient par n du nombre des éléments de A ; X_n est la fonction obtenue en restreignant f à E_n .

Dire que la fonction f possède une distribution limite signifie que la suite des variables aléatoires X_n possède une loi de probabilité limite.

D'après un théorème bien connu, pour qu'il existe une loi limite, il faut et il suffit que la suite des fonctions caractéristiques des X_n converge vers une fonction continue.

On sait que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est la fonction de la variable réelle t égale à l'espérance mathématique de $\exp(itX)$.

La fonction caractéristique de la variable aléatoire X_n considérée ici est donc égale à

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \exp(itf(m)).$$

On voit ainsi que, pour que la fonction f possède une distribution limite, il faut et il suffit que

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \exp(itf(m))$$

converge vers une fonction continue de t quand n tend vers $+\infty$.

1.2. - Nous allons nous intéresser ici au cas où la fonction f ne possède pas de distribution limite, c'est-à-dire où la suite des mesures $\{\mu_n\}$ définies plus haut ne converge pas étroitement vers une mesure limite.

L'idée est alors de chercher s'il est possible d'obtenir une suite étroitement convergente en faisant subir à chaque mesure μ_n une translation convenable.

Autrement dit, nous cherchons si l'on peut trouver une suite $\{\alpha_n\}$ de nombres réels telle que la suite des mesures μ_n définies, non plus par la formule (1) mais par

$$(2) \quad \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta_{f(m) - \alpha_n},$$

soit étroitement convergente.

Ceci s'interprète encore comme l'existence d'une loi de probabilité limite pour une suite de variables aléatoires. L'ensemble des événements élémentaires est toujours l'ensemble des entiers de 1 à n , que l'on probabilise comme plus haut ; la valeur de X_n pour l'entier m est maintenant $f(m) - \alpha_n$.

La fonction de distribution de X_n est maintenant

$$\sigma_n(u) = \frac{1}{n} \nu_n(u + \alpha_n) \quad (= \mu_n([-\infty, u])).$$

Lorsque la suite des variables aléatoires X_n considérées ici possède une loi de probabilité limite -ce qui équivaut à dire que la suite des mesures μ_n définies par (2) est étroitement convergente- nous disons que

$f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite.

Remarquons que, si l'on a $\alpha_n = 0$ pour tout n , on retombe sur le cas considéré plus haut, où la fonction f possède une distribution limite.

La fonction caractéristique de X_n est ici égale à

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \exp\{it(f(m) - \alpha_n)\} = e^{-it\alpha_n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \exp(itf(m)).$$

Donc, pour que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il faut et il suffit que

$$e^{-it\alpha_n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \exp(itf(m))$$

converge vers une fonction continue de t lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous introduisons, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction arithmétique F_t définie par

$$F_t(n) = \exp(itf(n)).$$

On voit alors que la condition précédente peut s'exprimer de la façon suivante :

Pour que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il faut et il suffit qu'il existe une fonction complexe Φ continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_t(m) = \Phi(t) e^{it\alpha_n} + o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Remarquons que, s'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il en existe une infinité et elles s'obtiennent toutes à partir de l'une d'entre elles par l'addition d'une suite convergente quelconque.

Cela tient à ce que, si une suite $\{X_n\}$ de variables aléatoires possède une loi de probabilité limite, il en est de même de la suite $\{X_n - \lambda_n\}$, où $\{\lambda_n\}$ est une suite de constantes réelles, si, et seulement si, la suite $\{\lambda_n\}$ est convergente.

En effet, remplacer la suite $\{\alpha_n\}$ par $\{\alpha_n + \lambda_n\}$ revient à remplacer la variable aléatoire X_n considérée plus haut par $X_n - \lambda_n$.

2. - A partir de maintenant, la fonction arithmétique réelle f est supposée additive.

Comme une fonction additive est déterminée par ses valeurs pour les puissances des nombres premiers, il est naturel de chercher des conditions portant sur les valeurs de f pour les puissances des nombres premiers. En fait, comme on va le voir, seules les valeurs de f pour les nombres premiers eux-mêmes interviennent dans les problèmes qui nous occupent, mais non celles pour leurs puissances d'exposants > 1 .

Le problème de l'existence d'une distribution limite pour la fonction f a été complètement résolu par Erdős et Wintner⁽¹⁾. La solution est la suivante :

Définissons f^* sur l'ensemble des nombres premiers par :

$$f^*(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si } |f(p)| \leq 1, \\ 1 & \text{si } |f(p)| > 1. \end{cases}$$

Alors, pour que la fonction f possède une distribution limite, il faut et il suffit que les deux séries

$$\sum \frac{f^*(p)}{p} \quad \text{et} \quad \sum \frac{f^*(p)^2}{p}$$

soient convergentes.

Erdős a montré ensuite ⁽²⁾ que, si l'on suppose seulement que la deuxième de ces séries est convergente, c'est-à-dire que si l'on a

$$(3) \quad \sum \frac{f^*(p)^2}{p} < +\infty,$$

on peut affirmer que $f(m) - \alpha_n$ a une distribution limite à condition que l'on ait pour n infini

$$\alpha_n = \sum_{p \leq n} \frac{f^*(p)}{p} + C^{te} + o(1).$$

Remarquons que la suite $\{\alpha_n\}$ satisfait alors à la condition :

$$(4) \quad \sup_{n \leq n' \leq n^2} |\alpha_{n'} - \alpha_n| = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Il suffit évidemment de le montrer en supposant

$$\alpha_n = \sum_{p \leq n} \frac{f^*(p)}{p}.$$

Dans ce cas, lorsque $n > 1$, on a pour $n < n' \leq n^2$

$$|\alpha_{n'} - \alpha_n| = \left| \sum_{n < p \leq n'} \frac{f^*(p)}{p} \right| \leq \sum_{n < p \leq n^2} \frac{|f^*(p)|}{p},$$

de sorte que

$$\sup_{n \leq n' \leq n^2} |\alpha_{n'} - \alpha_n| \leq \sum_{n < p \leq n^2} \frac{|f^*(p)|}{p}.$$

Mais le second membre de cette dernière inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy, son carré est au plus égal à

$$\left(\sum_{n < p \leq n^2} \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{n < p \leq n^2} \frac{f^*(p)^2}{p} \right).$$

D'après une évaluation bien connue de $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$, la première somme tend vers $\log 2$ quand n tend vers $+\infty$. La seconde tend vers zéro d'après l'hypothèse que l'on a (3).

Il résulte du théorème 4 de notre article "On a class of multiplicative arithmetical functions" ⁽³⁾ que, si $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, la suite $\{\alpha_n\}$ satisfaisant à la condition (4), ou même à la condition plus large

$$\sup_{n \leq n' \leq n^2} |\alpha_{n'} - \alpha_n| = O(1),$$

on a nécessairement (3).

Nous appellerons "condition d'Erdős" la condition (3).

Il est à noter que, si l'on n'impose aucune restriction à la suite $\{\alpha_n\}$, il est possible que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite sans que la condition d'Erdős soit satisfaite.

On en a un exemple simple en prenant $f(n) = \log n$. On voit immédiatement que $f(m) - \log n$ possède alors une distribution limite car on a

$$v_n(u + \log n) = \begin{cases} [n e^u] & \text{si } u < 0, \\ n & \text{si } u \geq 0, \end{cases}$$

de sorte que, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n} v_n(u + \log n)$ tend vers e^u pour $u < 0$ et 1 pour $u \geq 0$.

Cependant on a $f^*(p) = 1$ pour $p > 3$, et par suite

$$\sum \frac{f^*(p)^2}{p} = +\infty.$$

3. - On peut obtenir une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite.

On a le théorème suivant :

Pour qu'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel a tel que la fonction g (évidemment additive) définie par

$$g(n) = f(n) - a \log n$$

satisfasse à la condition d'Erdős.

Lorsque ceci a lieu, $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite si, et seulement si, on a pour n infini

$$\alpha_n = \sum_{p \leq n} \frac{g^*(p)}{p} + a \log n + C^{te} + o(1),$$

où $g^*(p)$ est défini à partir de g comme $f^*(p)$ à partir de f .

3.1. - Remarquons d'abord que, pour que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il est nécessaire que $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ tende vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

En effet, supposons que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, et soit $\varepsilon > 0$.

On va voir que l'on aboutit à une contradiction en supposant que l'on ait $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| > \varepsilon$ pour une infinité de n .

On sait qu'il existe une fonction réelle σ croissante sur $\mathbb{R}$, satisfaisant à

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \sigma(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \sigma(u) = 1,$$

telle que, pour tout u tel que σ soit continue en u , $\sigma_n(u) = \frac{1}{n} v_n(u + \alpha_n)$ tend vers $\sigma(u)$.

Soient u_1 et u_2 satisfaisant à $u_1 < u_2 \leq u_1 + \varepsilon$ et tels que σ soit continue en u_1 et en u_2 .

Si l'on a $\alpha_{n+1} - \alpha_n > \varepsilon$, on a $u_1 + \alpha_{n+1} > u_2 + \alpha_n$ et par suite

$$v_{n+1}(u_1 + \alpha_{n+1}) \geq v_{n+1}(u_2 + \alpha_n) \geq v_n(u_2 + \alpha_n),$$

d'où

$$\sigma_{n+1}(u_1) \geq \frac{n}{n+1} \sigma_n(u_2).$$

Si ceci avait lieu pour une infinité de n , on en déduirait par passage à la limite que $\sigma(u_1) \geq \sigma(u_2)$, et par suite $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$.

Si l'on a $\alpha_{n+1} - \alpha_n < -\varepsilon$, on a $u_1 + \alpha_n > u_2 + \alpha_{n+1}$ et par suite

$$v_{n+1}(u_2 + \alpha_{n+1}) \leq v_{n+1}(u_1 + \alpha_n) \leq v_n(u_1 + \alpha_n) + 1,$$

d'où

$$\sigma_{n+1}(u_2) \leq \frac{n}{n+1} \sigma_n(u_1) + \frac{1}{n+1}.$$

Si ceci avait lieu pour une infinité de n , on en déduirait encore par passage à la limite que $\sigma(u_2) \leq \sigma(u_1)$, et par suite $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$.

On voit donc que l'hypothèse que l'on ait $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| > \varepsilon$ pour une infinité de n impliquerait que, quels que soient u_1 et u_2 satisfaisant à $u_1 < u_2 \leq u_1 + \varepsilon$ et tels que σ soit continue en u_1 et en u_2 , on aurait $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$. Ceci entraînerait à son tour que $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$ quels que soient

u_1 et u_2 satisfaisant à $u_1 < u_2 < u_1 + \varepsilon$ (car on peut trouver u'_1 et u'_2 tels que $u'_1 \leq u_1 < u_2 \leq u'_2$ et $u'_2 - u'_1 \leq \varepsilon$, et que σ soit continue en u'_1 et en u'_2). C'est incompatible avec le fait que

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \sigma(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \sigma(u) = 1.$$

3.2. - Ceci dit, notre démonstration est basée essentiellement sur le théorème suivant dû à Halász.

Soit F une fonction multiplicative complexe satisfaisant à

$$|F(n)| \leq 1 \quad \text{pour tout } n.$$

L'une des deux circonstances suivantes a lieu :

1) $\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} F(m)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$;

2) On a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} F(m) = C x^{i\alpha} \exp(i A(\log x)) + o(1),$$

où C est une constante complexe non nulle, α une constante réelle, et A une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^+$, à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, U]$, et satisfaisant à

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (A(\lambda u) - A(u)) = 0 \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé $[\lambda_1, \lambda_2]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

3.3. - Supposons que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite.

On sait qu'il existe une fonction complexe Φ continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on a quand n tend vers $+\infty$

$$(5) \quad \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_t(m) = \Phi(t) e^{it\alpha_n} + o(1).$$

Comme $F_0(m) = 1$ pour tout m , on a $\Phi(0) = 1$. Par suite $\Phi(t) \neq 0$ si t est assez petit ; donc il existe des $t \neq 0$ tels que $\Phi(t) \neq 0$. Soit t_0 un tel t .

Du fait que f est additive, la fonction F_{t_0} est multiplicative. Comme on a évidemment $|F_{t_0}(n)| = 1$ pour tout n , le théorème de Halász s'applique à F_{t_0} . Mais la formule (5) pour $t = t_0$ montre que $|\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_{t_0}(m)|$ tend vers $|\Phi(t_0)|$ quand n tend vers $+\infty$. On est donc nécessairement dans le deuxième cas du théorème de Halász.

On a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} F_{t_0}(m) = C x^{i\alpha} \exp(iA(\log x)) + o(1),$$

où C , α et A sont ce qui a été dit plus haut.

En prenant $x = n$, on voit que, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_{t_0}(m) &= C n^{i\alpha} \exp(iA(\log n)) + o(1) \\ &= C \exp\{i(\alpha \log n + A(\log n))\} + o(1). \end{aligned}$$

Il résulte alors de (5) pour $t = t_0$ que l'on a

$$\Phi(t_0) e^{it_0 \alpha n} = C \exp\{i(\alpha \log n + A(\log n))\} + o(1),$$

de sorte que

$$\exp\{i(t_0 \alpha n - \alpha \log n - A(\log n))\} \text{ tend vers } \frac{C}{\Phi(t_0)}$$

(qui est donc nécessairement de module 1).

En posant $\theta_n = t_0 \alpha n - \alpha \log n - A(\log n)$, on peut dire que la suite $\{e^{i\theta_n}\}$ est convergente.

Du fait que $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ tend vers zéro et des propriétés de la fonction A il résulte que $\theta_{n+1} - \theta_n$ tend vers zéro. Alors il est facile de voir que la convergence de la suite $\{e^{i\theta_n}\}$ entraîne celle de la suite $\{\theta_n\}$.

Si θ est la limite de cette dernière suite, on a quand n tend vers $+\infty$

$$t_0 \alpha_n - \alpha \log n - A(\log n) = \theta + o(1),$$

d'où

$$(6) \quad \alpha_n = a \log n + B(\log n) + o(1),$$

où
$$a = \frac{\alpha}{t_0} \quad \text{et} \quad B(u) = \frac{A(u) + \theta}{t_0}.$$

Il est clair que B est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, U]$ et que l'on a :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (B(\lambda u) - B(u)) = 0 \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé $[\lambda_1, \lambda_2]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

En tenant compte de (6), (5) s'écrit :

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_t(m) = \Phi(t) n^{iat} \exp(it B(\log n)) + o(1),$$

ou

$$\sum_{m=1}^n F_t(m) = \Phi(t) n^{1+iat} \exp(it B(\log n)) + o(n).$$

Comme, pour $n \leq x < n+1$, $|x^{1+iat} - n^{1+iat}| \leq |1+iat|$ (car $x^{1+iat} - n^{1+iat} = \int_n^x (1+iat) u^{iat} du$), on voit que l'on a quand x tend vers $+\infty$

$$(7) \quad \sum_{m \leq x} F_t(m) = \Phi(t) x^{1+iat} \exp(it B(\log x)) + o(x).$$

On déduit aisément de là que l'on a

$$(8) \quad \frac{1}{x} \sum_{m \leq x} F_t(m) m^{-iat} = (1+iat) \Phi(t) \exp(it B(\log x)) + o(1).$$

En effet, si l'on pose

$$\Psi_t(x) = \sum_{m \leq x} F_t(m),$$

on a pour $x > 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{m \leq x} F_t(m) m^{-iat} &= \int_{\frac{1}{x}}^x u^{-iat} d\psi_t(u) \\ &= \psi_t(x) x^{-iat} + iat \int_1^x u^{-1-iat} \psi_t(u) du,\end{aligned}$$

et, en tenant compte de (7), ceci donne

$$\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} F_t(m) m^{-iat} = \Phi(t) \left\{ \exp(it B(\log x)) + \frac{iat}{x} \int_1^x \exp(it B(\log u)) du \right\} + o(1).$$

$$\text{Mais on a } \frac{1}{x} \int_1^x \exp(it B(\log u)) du = \exp(it B(\log x)) + o(1)$$

car

$$\begin{aligned}& \left| \int_1^x \exp(it B(\log u)) du - (x-1) \exp(it B(\log x)) \right| = \\ & \left| \int_1^x \{ \exp(it B(\log u)) - \exp(it B(\log x)) \} du \right| \leq 2x^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + |t| \int_{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}^x |B(\log u) - B(\log x)| du\end{aligned}$$

et, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a dès que x est assez grand

$$|B(\log u) - B(\log x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour } x^{\frac{1}{2}} \leq u \leq x.$$

Si l'on définit maintenant les fonctions arithmétiques g et G_t par

$$g(n) = f(n) - a \log n \quad \text{et} \quad G_t(n) = \exp(it g(n)),$$

(8) s'écrit :

$$\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} G_t(m) = (1+iat) \Phi(t) \exp(it B(\log x)) + o(1).$$

En prenant $x = n$, on voit que l'on a quand n tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{m=1}^n G_t(m) = (1+iat) \Phi(t) e^{it\beta_n} + o(1),$$

où $\beta_n = B(\log n)$.

Ceci montre que $g(m) - \beta_n$ possède une distribution limite.

Comme g est évidemment additive et comme on a

$$\sup_{n \leq n' \leq 2n} |\beta_{n'} - \beta_n| = o(1) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty,$$

on peut appliquer notre résultat cité au § 2 et conclure que g satisfait à la condition d'Erdős.

3.4. - Supposons maintenant qu'il existe un a réel tel que la fonction g définie par

$$g(n) = f(n) - a \log n$$

satisfasse à la condition d'Erdős, c'est-à-dire que, $g^*(p)$ étant défini pour chaque p premier par

$$g^*(p) = \begin{cases} g(p) & \text{si } |g(p)| \leq 1, \\ 1 & \text{si } |g(p)| > 1, \end{cases}$$

on ait $\sum \frac{g^*(p)^2}{p} < +\infty$.

Alors on sait que, si $\beta_n = \sum_{p \leq n} \frac{g^*(p)}{p}$, $g(m) - \beta_n$ possède une distribution limite.

Il existe donc une fonction complexe Φ continue sur $\mathbb{R}$ telle que, G_t étant définie comme plus haut, on a pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n G_t(m) = \Phi(t) e^{it\beta_n} + o(1) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

On sait aussi que l'on a

$$\sup_{n \leq n' \leq 2n} |\beta_{n'} - \beta_n| = o(1).$$

Si on définit une fonction B sur $\mathbb{R}^+$ par

$$B(u) = \beta_n \quad \text{pour } \log n \leq u < \log(n+1),$$

on voit que l'on a

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (B(\lambda u) - B(u)) = 0 \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé $[\lambda_1, \lambda_2]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

On voit aussi que l'on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{m \leq x} G_t(m) = \Phi(t) \exp(itB(\log x)) + o(1) \dots$$

Un calcul semblable à celui qui a été fait au paragraphe précédent permet d'en déduire que

$$\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} G_t(m) m^{iat} = \frac{\Phi(t)}{1+iat} x^{iat} \exp(itB(\log x)) + o(1) ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} F_t(m) = \frac{\Phi(t)}{1+iat} x^{iat} \exp(itB(\log x)) + o(1) \dots$$

En prenant $x = n$, on voit que l'on a quand $\underline{n}$ tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_t(m) = \frac{\Phi(t)}{1+iat} e^{it\gamma_n} + o(1) ,$$

$$\text{où } \gamma_n = a \log n + B(\log n) = a \log n + \sum_{p \leq n} \frac{g^*(p)}{p} .$$

Il en résulte que $f(m) - \gamma_n$ possède une distribution limite. Par suite $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite si, et seulement si, on a quand $\underline{n}$ tend vers $+\infty$

$$\alpha_n = \gamma_n + C^{te} + o(1) .$$

Le résultat annoncé est ainsi complètement démontré.

Signalons que nous avons appris par une lettre de J. Kubilius que lui-même a obtenu le même résultat, qui a été établi également par B. V. Levin et N. M. Timofeev.

-:-:-:-

NOTES

- (1) "Additive arithmetical functions and Statistical independence",
American Journal of Mathematics, 61, 1939, pp. 713-721.

- (2) "On the distribution function of additive functions", Annals of Mathematics 47, 1946, pp. 1-20.
- (3) Scripta Mathematica, 26, pp. 121-141.
 Signalons une faute d'impression : dans la relation (18), il faut lire $O(1)$ au lieu de $o(1)$.
 On obtient le résultat énoncé ici en prenant
- $$\Omega(x) = \alpha_n \quad \text{pour } n \leq x < n+1 .$$
- (4) "Über die Mittelwerte multiplikativer Zahlentheoretischer Funktionen", Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 19, 1968, pp. 365-403.
 Nous avons modifié un peu ici la façon d'énoncer le résultat.

-:-:-:-