SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS

Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 12, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A12_0>

FORMES LINEAIRES p-ADIQUES ET PROLONGEMENT ANALYTIQUE

par

Pierrette CASSOU-NOGUÈS

-:-:-:-

Soient $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\mathbb{Z}_p$ son anneau de valuation et $\mathfrak{M}_p$ son idéal de valuation. Soit encore K une extension abélienne réelle finie du corps $\mathbb{Q}$, $Z_K(.)$ la fonction zêta du corps K et $Z_p(. , K)$ sa fonction zêta p-adique. On sait [5] que c'est la fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ qui coïncide sur $1 + (1-p)\mathbb{N}^*$ si $p \neq 2$ (resp. sur $1 - 2\mathbb{N}^*$ si $p = 2$) avec la fonction

$$s \mapsto \prod_{\mathfrak{P} | p} (1 - N(\mathfrak{P})^{-s} Z_K(s) .$$

A l'aide de la factorisation de la fonction zêta en fonction L de Dirichlet, on peut factoriser la fonction zêta p-adique en fonction L-p-adiques : si $\mathfrak{X}$ désigne l'ensemble des caractères primitifs du corps K, on a

$$Z_p(1-m , \chi) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L_p(1-m, \chi) ,$$

où

$$L_p(1-m, \chi) = (1-\chi(p)p^{-s}) L(1-m, \chi)$$

si m est entier positif $m \equiv 0 \mod (p-1)$, si $p \neq 2$ (resp. $\equiv 0 \mod. 2$ si $p = 2$). On a encore

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi\, \varepsilon_p)$$

où ε_p est l'application continue et multiplicative de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ telle que

$$\varepsilon_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in p\,\mathbb{Z}_p \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}_p - p\,\mathbb{Z}_p \end{cases} .$$

Dans cet article nous nous proposons de mettre en évidence le lien qui existe entre deux méthodes d'étude des fonctions L p-adiques.

La première de ces méthodes est celle de Kubota et Leopoldt [5] qui ont remarqué que

$$L_p(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\chi\, \varepsilon_p)}{m} ,$$

où $B^m(\chi\, \varepsilon_p)$ désigne le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli relatif au caractère $\chi\, \varepsilon_p$ ([3], [6]). Ce nombre est algébrique et

$$B^m(\chi\, \varepsilon_p) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi\, \varepsilon_p(a)\, a^m \qquad \text{(limite p-adique)}$$

$f_1 = \text{p.p.c.m}\ (p, f(\chi))$, $f(\chi)$ désignant le conducteur de χ.

L'autre méthode, celle de Y. Amice et J. Fresnel [1], consiste à considérer les fonctions $L_p(\,.\,, \chi)$ comme des analogues p-adiques des séries complexes $\sum_{n=1}^{\infty} \chi\, \varepsilon_p(n)\, n^{-s}$. En effet $L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi\, \varepsilon_p)$ pour $m \equiv 0 \mod (p-1)$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \mod. 2$ si $p = 2$), et on démontre que la série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \chi\, \varepsilon_p(n)\, n^{m-1}\, T^n$, convergente dans le disque de centre 0 et de rayon 1^-, est prolongeable en une fonction analytique au sens de Krasner [4], $I_{\chi \varepsilon_p}(x \to x^{m-1})(\,.\,)$ dans un quasi-connexe qui contient 0 et 1 et que

$$I_{\chi \varepsilon_p}(x \mapsto x^{m-1})(1) = -\frac{B^m(\chi\, \varepsilon_p)}{m} ,$$

on a donc

$$I_{\chi \varepsilon_p}(x \mapsto x^{m-1})(1) = -\frac{1}{m} \lim_{r \to \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi\, \varepsilon_p(a)\, a^m .$$

C'est cette égalité que l'on se propose de démontrer sans faire intervenir les nombres de Bernoulli. En utilisant le fait que

$$\chi(n) = \chi(-1)\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f(\chi)}\bar{\chi}(a)\,Z_f^{an},$$

cela revient encore au problème suivant :

<u>Etant donnée la série de Taylor</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_p(n)\,n^{m-1}\,T^n$, <u>peut-on la prolonger en une fonction analytique</u> $I(x \to \varepsilon_p(x)x^{m-1})(.)$ <u>dans un quasi-connexe qui contient les racines</u> $f(\chi)^{\text{ième}}$ <u>de l'unité</u> ($f(\chi)$ <u>désignant le conducteur d'un caractère primitif</u> χ <u>quelconque du corps</u> K) <u>et a-t-on</u>

$$I(x \mapsto \varepsilon_p(x)x^{m-1})(Z^a_{f(\chi)}) = -\lim_{r\to\infty}\frac{1}{p^r f_1}\sum_{n=1}^{p^r f_1}\varepsilon_p(n)\frac{n^m}{m}Z^{an}_{f(\chi)} \quad ?$$

On va étudier d'une part la forme linéaire p -adique

$$f \mapsto J(f)(T) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{p^r}\sum_{n=1}^{p^r} f(n)\,T^n\ ,$$

où f désigne une fonction de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ uniformément dérivable, et d'autre part le prolongement analytique, $I(f')(T)$ de la série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)\,T^n$, d'abord dans le domaine $1+\mathfrak{M}_p = \{T\in\mathbb{C}_p \mid |1-T|<1\}$ et ensuite pour les unités de O_p qui ne sont pas dans ce disque.

Posons

$$J_r(f)(T) = \frac{1}{p^r}\sum_{n=1}^{p^2} f(n)\,T^n\ ;$$

on peut écrire

$$J_r(f)(T) = J_r^0(f) + J_r^1(f)\,(1-T) + \ldots + J_r^i(f)(1-T)^i + \ldots + J_r^{p^r}(f)(1-T)^{p^r},$$

où

$$J_r^0(f) = \frac{f(1)+\ldots+f(p^r)}{p^r}$$

$$J_r^i(f) = (-1)^i\,\frac{f(i)+f(i+1)\binom{i+1}{i}+\ldots+f(p^r)\binom{p^r}{i}}{p^r}$$

on voit que s'il existe des solutions g et g_i , nulles en 0 , des équations aux différences finies

$$g(x) - g(x-1) = f(x)$$

et

$$g_i(x) - g_i(x-1) = f(x)\binom{x}{i}\ ,$$

alors on a :

$$J_r^0(f) = \frac{g(p^r)}{p^r}$$

et

$$J_r^i(f) = (-1)^i \frac{g_i(p^r)}{p^r} .$$

Donc

$$J_r(f)(T) = \frac{g(p^r)}{p^r} - \frac{g_1(p^r)}{p^r}(1-T) + \ldots + (-1)^{p^r} \frac{g_{p^r}(p^r)}{p^r}(1-T)^{p^r} .$$

On est donc amené à étudier l'équation aux différences finies

$$g(x) - g(x-1) = f(x)$$

on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. Soit $UD(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ l'espace de Banach des fonctions uniformément dérivables, muni de la norme $\| \ \|_1$ (si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$, $\|f\|_1 = \sup_n n|a_n|$).

Soit Δ l'opérateur défini sur $UD(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $UD(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ tel que

$$\Delta(g)(x) = g(x) - g(x-1) .$$

Alors Δ est un opérateur linéaire continu surjectif sur $UD(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$.

Si l'on suppose que f est une fonction uniformément dérivable, alors les fonctions g et g_i sont uniformément dérivables. On peut exprimer leurs coefficients d'interpolation à l'aide de ceux de f et démontrer ensuite le

THEOREME 1 ([2]). Soit une fonction f uniformément dérivable. Soient

$$J_r(f)(T) = \frac{f(1)T + \ldots + f(p^r)T^{p^r}}{p^r}$$

et g et g_i les solutions continues nulles en 0 des équations fonctionnelles

$$g(x) - g(x-1) = f(x) ,$$

et

$$g_i(x) - g_i(x-1) = f(x)\binom{x}{i} .$$

Posons

$$1 + \mathfrak{M}_p = \{ T \in \mathbb{C}_p \mid |1-T| < 1 \} .$$

Alors pour tout T élément de $1+\mathfrak{M}_p$, la série $g'(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i g_i'(0)(1-T)^i$ est convergente, $J_r(f)(T)$ admet une limite

$J(f)(T)$ <u>lorsque</u> r <u>tend vers l'infini et</u>

$$J(f)(T) = g'(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i g'_i(0)(1-T)^i .$$

On s'intéresse ensuite au prolongement des séries de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) T^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) T^n$. Ces séries sont prolongeables dans $O_p - (1+\mathfrak{M}_p)$ en fonctions analytiques $I(f)(.)$ et $I(f')(.)$ qui sont définies par des séries de Laurent en $(1-T)$ [1]. On démontre à l'aide des propriétés des coefficients d'interpolation d'une fonction uniformément dérivable la proposition 2.

PROPOSITION 2. <u>On peut faire le produit des séries de Laurent en</u> $(1-T)$, $I(f)(T)$ <u>et</u> $\operatorname{Log} T$, <u>et la série de Laurent en</u> $(1-T)$, $I(f')(T) + I(f)(T) \operatorname{Log} T$ <u>est en fait une série de Taylor en</u> $(1-T)$ <u>convergente dans</u> $1+\mathfrak{M}_p$.

Grâce aux théorèmes d'unicité du prolongement analytique et d'unicité du développement en série de Taylor, on démontre enfin le

THEOREME 2 ([2]. <u>On a l'égalité des séries de Taylor en</u> $(1-T)$ <u>dans le disque</u> $1+\mathfrak{M}_p$

$$I(f')(T) + I(f)(T) \operatorname{Log} T = g'(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} g'_i(0)(1-T)^i .$$

<u>Par conséquent on a</u>

$$J(f)(T) = -I(f')(T) - I(f)(T) \operatorname{Log} T$$

<u>pour tout</u> T <u>élément de</u> $1+\mathfrak{M}_p$.

On a donc bien démontré que si ζ désigne une racine de l'unité dans $1+\mathfrak{M}_p$, on a

$$\frac{1}{m} J(x \mapsto \varepsilon_p(x) x^m(\zeta) = -I(x \to \varepsilon_p(x) x^{m-1}(\zeta) .$$

Pour les racines de l'unité qui ne sont pas dans ce disque, on démontre que l'on peut définir un prolongement fonctionnel de $J(f)(T)$ aux unités de O_p en remarquant que pour tout λ entier naturel et pour tout T élément de $1+\mathfrak{M}_p$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} f(n)\, T^n = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r\lambda} \sum_{n=1}^{p^r\lambda} f(n)\, T^n .$$

Le théorème est le suivant :

THEOREME 3 ([2]). Soit f une fonction uniformément dérivable. Alors on peut définir un prolongement fonctionnel de la forme linéaire définie sur $1+\mathfrak{M}_p$ par

$$J(f)(T) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} f(n)\, T^n = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r\lambda} \sum_{n=1}^{p^r\lambda} f(n)\, T^n .$$

Si T est une unité de O_p, on considère ξ la racine primitive $\lambda^{\text{ième}}$ de l'unité telle que $|T-\xi| < 1$. Alors

$$J(f)(T) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r\lambda} \sum_{n=1}^{p^r\lambda} f(n)\, T^n$$

existe et définit un prolongement fonctionnel de $J(f)(T)$ sur $\{T \in \mathbb{C}_p \mid |1-T| = 1 \text{ et } |T| = 1\}$ et l'on a encore

$$J(f)(T) = -I(f')(T) - I(f)(T) \operatorname{Log} T$$

où $\operatorname{Log} T$ désigne le prolongement fonctionnel du logarithme aux unités de O_p.

Le problème se trouve donc complètement résolu.

Notons enfin que l'on peut définir des notions analogues avec des fonctions de plusieurs variables et que tout se généralise.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Y. et FRESNEL J. - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels. Acta Arithmetica, vol. 20, n° 4.

[2] CASSOU-NOGUES Pierrette. - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique. Doctorat de spécialité (polycopié) 1971, Bordeaux.

[3] FRESNEL J. - Nombres de Benoulli et fonctions L p-adiques. Annales de l'Institut Fourier, tome XVII, fasc. 2, 1967, pp. 281-333.

[4] KRASNER M. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, n° 143, Colloques internationaux du C. N. R. S.

[5] KUBOTA T. and LEOPOLDT H. W. - Eine p-adishe theorie der Zeta werte. I Einführung der p-adisher Dirichletsen L-Funktionen. Journal für die reine und ang. Math., t. 214/215, 1964, pp. 328-333.

[6] LEOPOLDT H. W. - Eine verallgemeinerung der Bernoullishen Zalhen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, t. 22, 1958, pp. 131-140.

-:-:-:-

Pierrette CASSOU-NOGUES
U. E. R. de Mathématiques
et d' Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - T A L E N C E